

La surface de Boy

FRANÇOIS APÉRY

*Département de Mathématique de
l'Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France*

Nous représentons la surface de Boy comme surface algébrique réelle rationnelle du sixième degré engendrée par des ellipses et paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ par trois fractions rationnelles quotients de polynômes du quatrième degré. Nous représentons également la surface de Boy comme partie d'une surface algébrique réelle rationnelle du seizième degré et paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ par trois polynômes homogènes du quatrième degré définis sur la sphère. © 1986 Academic Press, Inc.

Sommaire. I. Introduction. II. Degré minimum de la surface de Boy et de sa représentation paramétrique. III. Construction d'une surface de Boy comme bouquet d'ellipses. IV. La surface de Boy comme surface algébrique réelle du sixième degré. V. Déformation algébrique de la surface de Boy en la surface romaine de Steiner. VI. Existence d'une immersion polynomiale de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$. VII. Construction d'une immersion polynomiale du quatrième degré de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$. VIII. La restriction réelle de $P(\mathbb{C}^3) \rightarrow^F P(\mathbb{C}^4)$ est non ramifiée. Appendice A: Equations et paramétrisations de la surface de Boy. Appendice B: Polynômes alternés à trois indéterminées.

I. INTRODUCTION

La construction par W. Boy [BO1, BO2] en 1901 de la surface qui porte maintenant son nom répondait négativement à une question que lui avait posé D. Hilbert concernant l'impossibilité d'immerger le plan projectif réel $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$. La construction de W. Boy, purement géométrique, consistait à donner les courbes de niveau de la surface relativement à une fonction hauteur (Figs. 1–3) ce qui rentrerait maintenant dans le cadre de la théorie de Morse.

Une remarque ultérieure de D. Hilbert a montré que l'on pouvait faire cette construction en imposant à la surface d'avoir un axe de symétrie ternaire la coupant en son point triple et en un autre point que nous appellerons *pôle* de la surface. C'est cette dernière surface qui est maintenant connue sous le nom de surface de Boy (Fig. 0).

Les différentes représentations du plan projectif réel dans $\mathbb{R}^3$ connues jusqu'alors, essentiellement le bonnet croisé de Steiner (Figs. 9–11) et la surface romaine de Steiner (Fig. 39), admettaient des singularités mais avaient

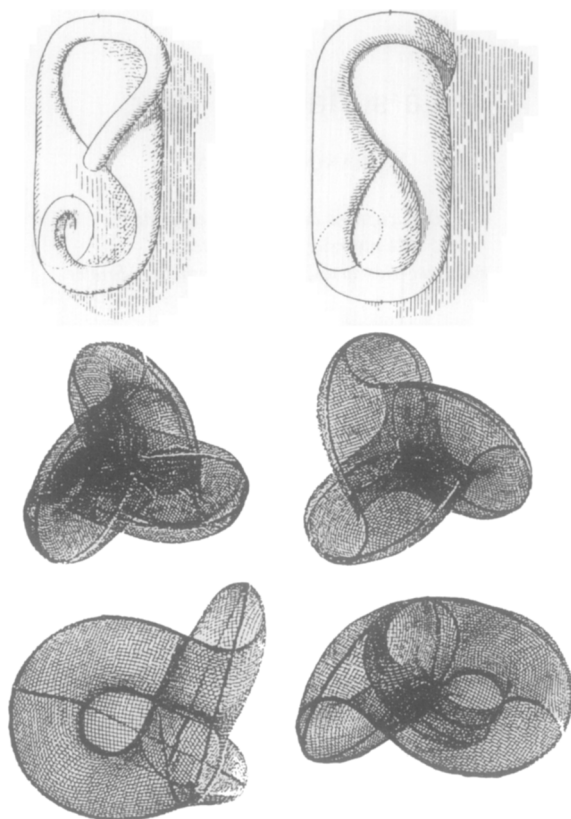


FIG. 0. (*Haut*) Première surface de Boy d'après [BO1]. (*Bas*) Surface de Boy avec axe de symétrie ternaire d'après [CO].

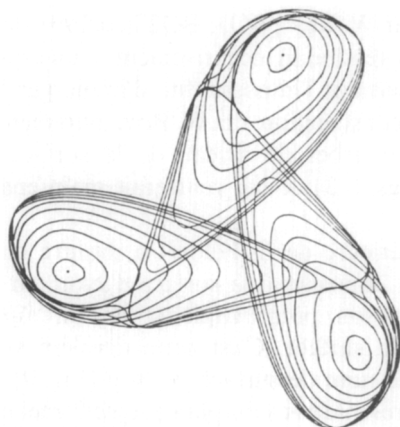


FIG. 1. Sections planes de la surface de Boy par des plans perpendiculaires à l'axe de symétrie ternaire et situés du côté du plan des cols opposé au pôle.

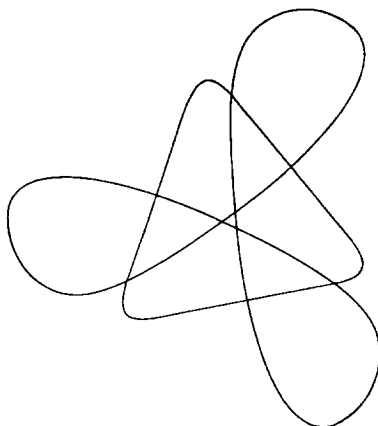


FIG. 2. Section plane par le plan des cols.

toutefois l'avantage considérable à l'époque d'admettre des représentations paramétriques polynômiales.

Le problème s'est donc tout de suite posé d'avoir une telle représentation paramétrique pour la surface de Boy, et même de la représenter comme surface algébrique réelle ce qui n'est pas possible pour les surfaces de Steiner à cause de la présence de paires de singularités du type "bonnet croisé" qui introduisent des demi-droites parasites (Fig. 4). (D'une façon générale une variété algébrique réelle admet en chaque point un voisinage homéomorphe à un cône sur un complexe simplicial de caractéristique paire ce qui exclut le bonnet croisé (D. Sullivan [SU])).

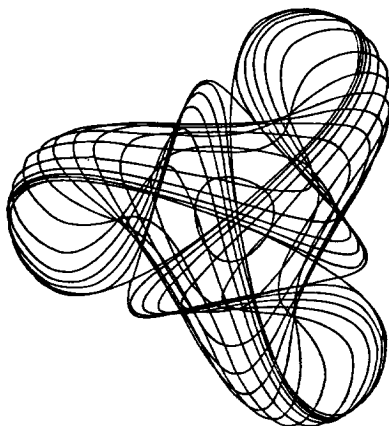


FIG. 3. Sections planes par les plans perpendiculaires à l'axe de symétrie ternaire et situés entre le plan des cols et le pôle.

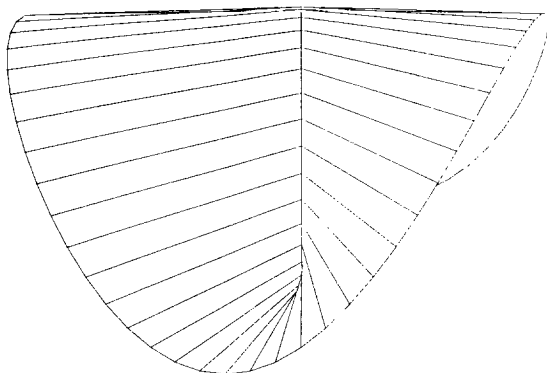


FIG. 4. Deux singularités du type bonnet croisé sur la cubique réglée.

Dans son article [BO1] W. Boy esquisse un plan de travail qu'il n'a jamais mis en oeuvre pour déterminer sa surface par une équation algébrique dont il remarque que le degré sera au moins six:

...Mit der geometrischen Konstruktion ist die immerhin befremdliche Möglichkeit der Existenz von singularitätenfreien Funktionen $f(x, y)$ gezeigt, deren reeller Wertevorrat ganz im Endlichen liegt, und die zwei Extreme und ein Maximimum haben. Ein Weg dazu zeigt sich ohne Weiteres. Man müsste die Curven unseres Systems algebraisch approximieren und nun die Coefficienten nicht als Zahlen, sondern als Funktionen eines Parameters z darstellen, bei dessen Änderung die Curven des Systems durchlaufen werden. Die wirkliche Aufstellung der Funktion scheint aber nicht ganz einfach zu sein. Die Gleichung dieser Fläche wie der folgenden wird mindestens von sechsten Grade.

Malgré une construction empirique de la première surface trouvée par Boy permettant la réalisation d'un modèle coté donnée par F. Schilling en 1924 [SC], le problème ne semble pas évoluer puisqu'en 1932 D. Hilbert et S. Cohn-Vossen le mentionnent dans [CO]:

Ob es algebraische Flächen von der Gestalt der Boyschen Fläche gibt, ist noch nicht untersucht.

On en retrouve la trace dans le cours de H. Hopf à Stanford en 1955–1956 [HO] où il précise la forme sous laquelle on peut chercher une immersion du plan projectif réel dans $\mathbb{R}^3$:

...For the projective plane, this could be done, for example, by specifying three functions on the 2-sphere which are even and such that the rank of their Jacobian is 2. It is conjectured that this can be done with homogeneous forms of even degree. However, it is impossible with quadratic forms and is conjectured to be impossible with quartic forms.

C'est en 1978 que B. Morin [MO1] donne la première paramétrisation explicite de la surface de Boy comme modèle central du retournement de la

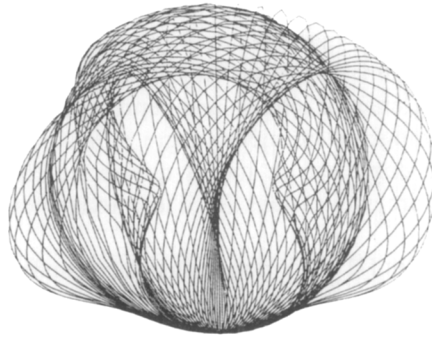


FIG. 5. Projection sur un plan parallèle à l'axe de symétrie de la surface de Boy paramétrée d'après [MO1] par trois fractions rationnelles quotients de polynômes du douzième degré.

sphère par trois fractions rationnelles quotients de polynômes du douzième degré définies sur la sphère privée des deux pôles, se prolongeant en une immersion de classe C^1 mais non C^2 (Figs. 5, 6).

En cherchant à réaliser un modèle en fil de fer de cette paramétrisation à partir des images des droites projectives correspondant aux méridiens de la sphère, le sculpteur Max Sauze eût l'idée d'approcher ces courbes par des ovales. De l'ovale à l'ellipse il n'y a qu'un pas qui fût franchi en 1981 par J-P. Petit et J. Souriau [PE] pour donner une paramétrisation par des fonctions transcendentes de la surface de Boy engendrée par des ellipses passant par le pôle de la surface. La qualité picturale de cette représentation paramétrique est remarquable, malheureusement les auteurs ne donnent aucun moyen de vérifier si elle est effectivement de rang deux.

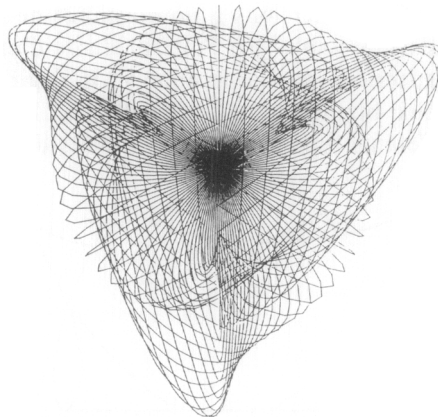


FIG. 6. Projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie.

Dans le présent travail nous nous proposons de répondre à certaines questions posées sur la surface de Boy. Nous montrerons dans le paragraphe II que, comme le pensait Boy, le degré minimum de sa surface est six, que si on en cherche plutôt une représentation paramétrique par trois polynômes homogènes de même degré pair sur la sphère, comme le suggère H. Hopf, ce degré est au moins quatre, et enfin que l'immersion de Boy n'est pas la projection dans $\mathbb{R}^3$ d'un plongement du plan projectif réel dans $\mathbb{R}^4$.

Dans les paragraphes III et IV nous construirons effectivement la surface de Boy comme surface algébrique réelle du sixième degré engendrée par une famille d'ellipses passant par le pôle, et paramétrée par trois fractions rationnelles quotients de polynômes homogènes du quatrième degré se prolongeant par continuité sur toute la sphère en une immersion en position générale de classe C^1 mais non C^2 . Son équation est:

$$\begin{aligned} &64(X_0 - X_3)^3 X_3^3 - 48(X_0 - X_3)^2 X_3^2(3X_1^2 + 3X_2^2 + 2X_3^2) \\ &+ 12(X_0 - X_3) X_3[27(X_1^2 + X_2^2)^2 - 24X_3^2(X_1^2 + X_2^2) \\ &+ 36\sqrt{2}X_2 X_3 (X_2^2 - 3X_1^2) + 4X_3^4] \\ &+ (9X_1^2 + 9X_2^2 - 2X_3^2)[-81(X_1^2 + X_2^2)^2 - 72X_3^2(X_1^2 + X_2^2) \\ &+ 108\sqrt{2}X_1 X_3(X_1^2 - 3X_2^2) + 4X_3^4] = 0. \end{aligned}$$

Notons que l'on parviendra à en déterminer la courbe double comme courbe du sixième degré unicursale du type "hélice tripale" (Fig. 29) et qu'un voisinage de cette courbe dans la surface est un ruban de Möbius immergé dans $\mathbb{R}^3$ (Fig. 31). En fait cette surface de Boy appartient à une famille à un paramètre de surfaces du sixième degré permettant de la déformer continûment en la surface romaine de Steiner, cette déformation passant du domaine des immersions à un voisinage de la surface romaine contenant des singularités stables par l'intermédiaire d'une singularité dont on démontrera la généricité au paragraphe V. Il s'agira de la confluence hyperbolique de deux bonnets croisés (Figs. 7, 8, 12-14). Les formules algébriques dans différents repères sont rassemblées dans l'appendice A.

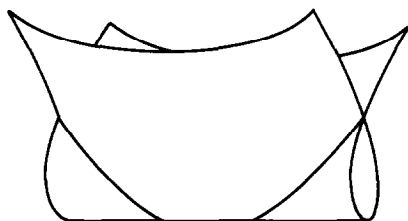


FIG. 7. Deux bonnets croisés avant confluence.

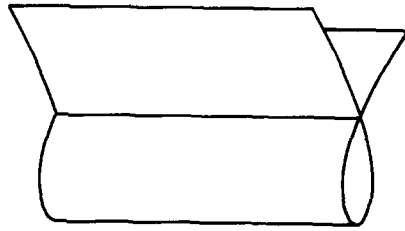


FIG. 8. Surface sans singularités après confluence hyperbolique des deux bonnets croisés.



FIG. 9. Courbe double du bonnet croisé combinatoire.

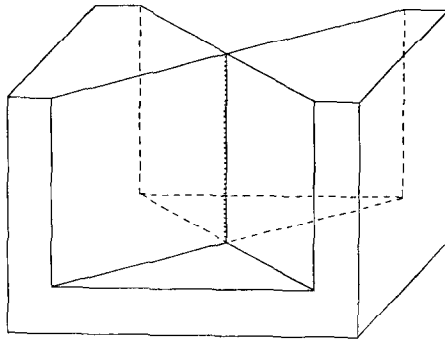


FIG. 10. Modèle combinatoire du bonnet croisé de Steiner.

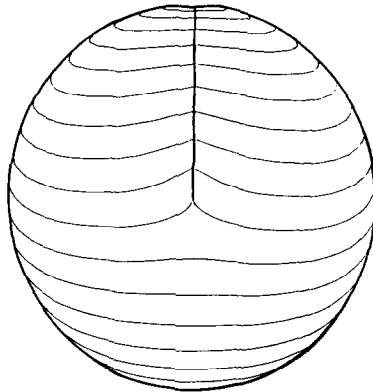


FIG. 11. Bonnet croisé de Steiner.

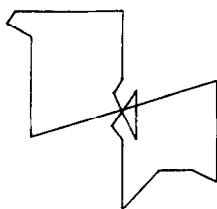


FIG. 12. Courbe double de la surface de Boy combinatoire.

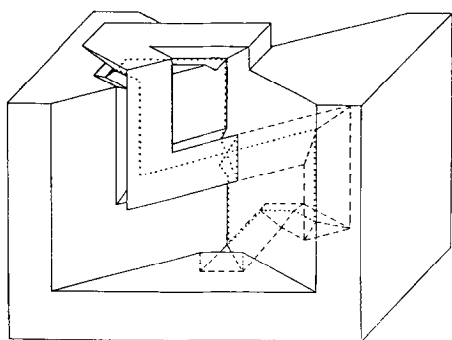


FIG. 13. Modèle combinatoire de la surface de Boy après confluence hyperbolique des deux bonnets croisés sur la surface de Steiner.

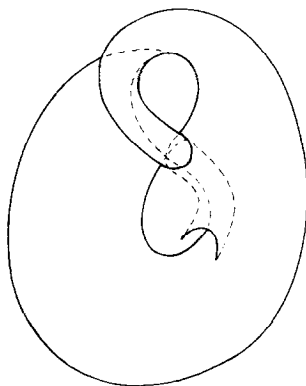


FIG. 14. Modèle de la surface de Boy obtenu par confluence hyperbolique des singularités sur le bonnet croisé de Steiner. Ce modèle est à rapprocher du premier exemple de W. Boy (Fig. 0).

Il est à signaler qu'une étude systématique des surfaces rationnelles du sixième degré engendrées par une famille à un paramètre de coniques était déjà faite par Th. Reye en 1896 [RE] et que bien que notre famille corresponde à un cas singulier (décomposition de la courbe double en une sextique et deux droites) de la classe de ces surfaces ayant une section plane générique de genre deux, W. Boy aurait pu y trouver sa surface.

Le paragraphe VI nous montrera qu'il est légitime de chercher à paramétrer la surface de Boy par trois polynômes homogènes de même degré pair définis sur la sphère, comme le conjecturait H. Hopf, et nous construirons explicitement au paragraphe VII une telle paramétrisation avec des polynômes du quatrième degré réfutant ainsi la deuxième conjecture mentionnée par H. Hopf.

Ces trois formes quartiques définies sur la sphère sont

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}[(2x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz(y^2 - z^2) \\ &\quad + zx(x^2 - z^2) + xy(y^2 - x^2)] \\ F_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}[(y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + zx(z^2 - x^2) + xy(y^2 - x^2)] \\ F_3 &= (x + y + z)[(x + y + z)^3 + 4(y - x)(z - y)(x - z)]. \end{aligned}$$

C'est à l'aide de la technique des polynômes alternés, dont le résultat essentiel est rappelé dans l'appendice B, que nous prouverons au paragraphe VIII que cette paramétrisation est bien de rang 2 sur la sphère.

Le principe commun à toutes ces paramétrisations se trouve dans la note [MO1] déjà citée. Dans cette note B. Morin reconstruit la surface de Boy à partir de son contour apparent vu du centre de la sphère osculatrice en son pôle, ce contour apparent étant supposé être une hypocycloïde à trois rebroussements. La construction consiste alors à perturber la projection centrale de la surface de Boy sur la sphère osculatrice en son pôle par un facteur radial reconstituant cette dernière. La construction que nous effectuerons au paragraphe III reposera sur l'hypothèse que le contour apparent de la surface de Boy vu de son pôle est une hypocycloïde à trois rebroussements et nous chercherons à relever les tangentes à l'hypocycloïde par des ellipses passant par le pôle.

Enfin la construction du paragraphe VII partira du contour apparent de la surface de Boy vu du point à l'infini de son axe de symétrie ternaire que l'on cherchera à relever verticalement par une fonction hauteur.

Avant d'entrer dans le vif du sujet plaçons-nous pour un instant dans le cadre plus large des immersions du plan projectif réel $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Une première manière de classer ces immersions consiste à former les classes d'homotopie régulière c'est-à-dire à considérer comme équivalentes deux immersions homotopes par immersions dans $\mathbb{R}^3$.

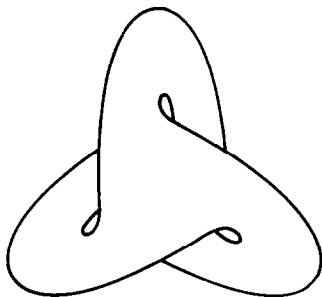


FIG. 15. Surface de Boy directe.

Il résulte d'un travail de I. James et E. Thomas [JA] qu'il y a exactement deux classes d'homotopie régulière de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Le fait que l'on puisse imposer à des représentants de ces classes l'équivariance par symétrie ternaire est signalé par E. Bierstone [BI]. Sachant qu'une homotopie régulière ne modifie pas le reste modulo 4 du nombre de demi-tours orientés d'un ruban de Möbius autour de son âme et qu'une symétrie par rapport à un plan change le signe de ce nombre, et sachant que tous les rubans de Möbius de la surface de Boy sont régulièrement homotopes car il n'y a qu'une classe d'homotopie non triviale dans le groupe fondamental du plan projectif réel constituée des âmes de rubans de Möbius, on en déduit que la surface de Boy et son image dans un miroir représentent les deux classes précédentes (Figs. 15, 16).

Nous appellerons *immersion de Boy directe* celle pour laquelle les rubans de Möbius font un demi-tour dans le sens du tire-bouchon modulo 4. C'est le cas de l'immersion construite par Boy et de celles qui résultent des paramétrisations citées précédemment. On reconnaît qu'une surface de Boy est directe en regardant l'orientation de l'hélice tripale représentant sa courbe d'auto-intersection. L'hélice tripale doit être à pas *positif*.

Une classification plus fine consiste à considérer les classes d'homotopie

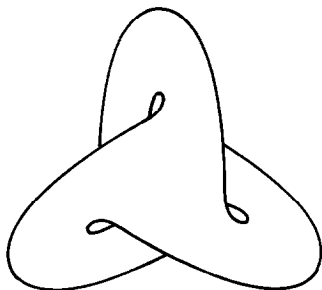


FIG. 16. Surface de Boy inverse.

par *immersions en position générale*, c'est-à-dire que l'intersection des plans tangents en un point multiple de l'image d'une telle immersion est de dimension minimum. Les classes d'homotopie régulière se divisent alors en sous-classes, le passage de l'une à l'autre de ces sous-classes se faisant génériquement par six déformations décrites dans [MO2].

Le problème qui se pose tout naturellement est de caractériser la sous-classe de l'immersion de Boy directe. Nous verrons au paragraphe II qu'une condition nécessaire d'appartenance à cette classe est que l'ensemble des antécédents des points doubles soit l'image dans $P(\mathbb{R}^3)$ d'un cercle par une immersion en position générale admettant trois points doubles, cette image étant par ailleurs non homotope à zéro dans $P(\mathbb{R}^3)$ et s'envoyant dans $\mathbb{R}^3$ sur une hélice tripale à pas positif.

Malheureusement cette condition n'est pas suffisante. Pour s'en rendre compte on peut déformer l'immersion de Boy directe à l'aide de l'une des six déformations génériques décrites dans [MO2], en l'occurrence de la déformation du type D1. Une telle déformation est caractérisée par la donnée de deux chemins simples à supports disjoints de la surface source de l'immersion en position générale, dont les origines ont une image commune distincte de l'image commune des extrémités. On suppose de plus que l'union des deux supports borde un disque plongé dans le complémentaire de l'image de l'immersion.

Au but, la surface se présente comme un paraboloïde hyperbolique et un plan parallèle au plan tangent au col dont la cote est le paramètre de déformation. Le premier chemin joint les deux sommets de l'hyperbole d'auto-

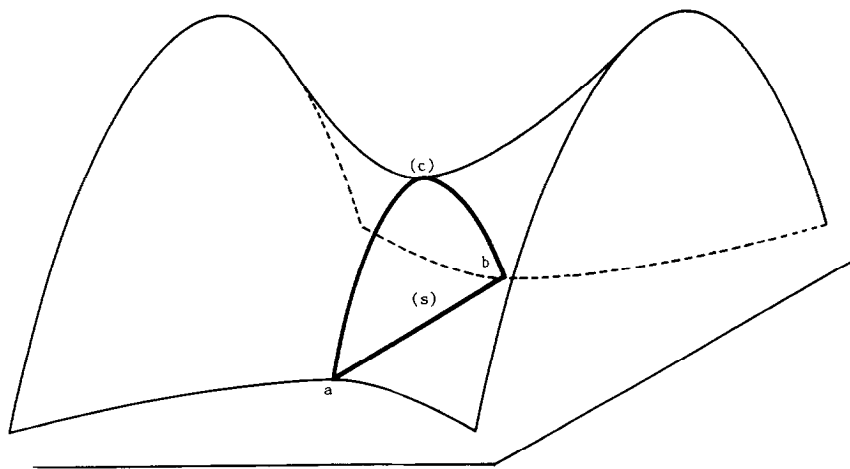


FIG. 17. Surface représentée par un plan et un paraboloïde hyperbolique avant le passage d'une singularité du type D1. Deux points a et b de la courbe double sont reliés d'une part par un segment (s) du plan et d'autre part par un arc de parabole (c) de la quadrique. (c) et (s) bordent un disque dans le complémentaire de la surface.

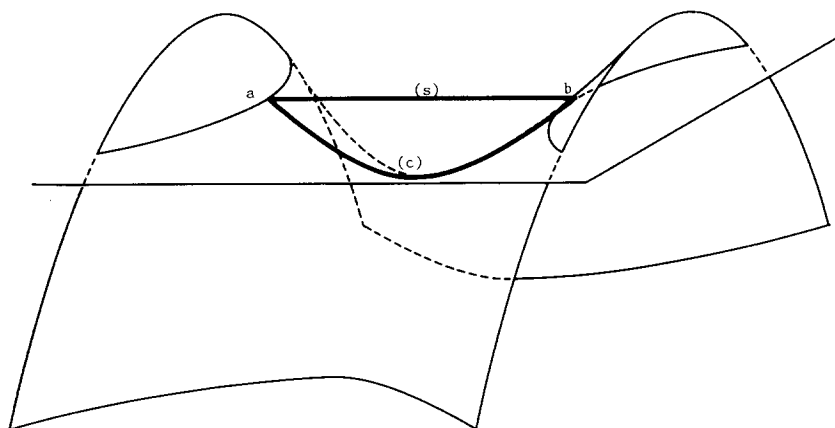


FIG. 18. Surface après passage de la singularité du type D1.

intersection par un segment du plan tandis que le second les joint par un arc de parabole du paraboloïde hyperbolique (Figs. 17, 18). A la source la déformation réalise une chirurgie sur la courbe d'auto-intersection le long des deux chemins.

On peut, selon une idée de B. Morin, appliquer cette déformation à l'immersion de Boy directe en traçant les deux chemins: l'origine commune et l'extrémité commune sont situées aux sommets de deux pales distinctes de l'hélice tripale que l'on joint d'abord par le chemin le plus direct, puis par un chemin passant par le pôle, en contrôlant que les deux chemins arrivent en un même point double par deux nappes distinctes. Les deux chemins ainsi tracés bordent un disque dans le complémentaire de la surface.

Le passage de la singularité générique D1 permet de déformer l'immersion de Boy en une nouvelle immersion dont l'image est construite sur les figures 19–24.

L'image réciproque de la courbe d'auto-intersection de la surface de Boy directe ou inverse est un lacet tracé le long de l'âme d'un ruban de Möbius

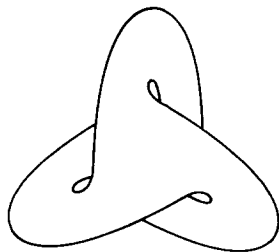


FIG. 19. Surface de Boy.

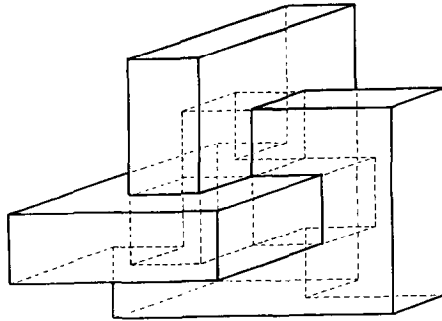


FIG. 20. Modèle combinatoire de la surface de Boy.

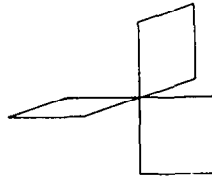


FIG. 21. Courbe double du modèle combinatoire de la surface de Boy.

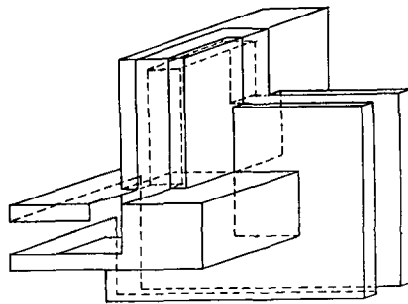


FIG. 22. Déformation du modèle combinatoire de la surface de Boy par passage d'une singularité du type D1. Il manque deux disques sur ce modèle.

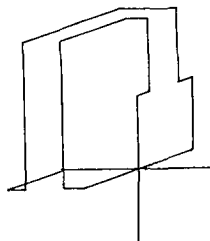


FIG. 23. Nouvelle courbe double sur le modèle combinatoire (Fig. 22).

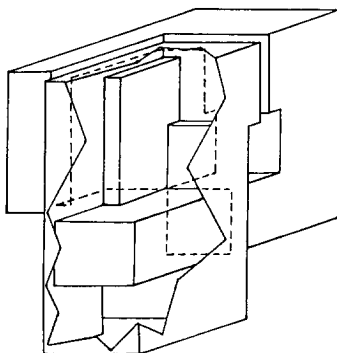


FIG. 24. Modèle combinatoire obtenu après avoir ajouté les deux disques manquants à la figure 22.

et ayant trois boucles situées alternativement d'un côté ou de l'autre de l'âme, chacune de ces boucles bordant un disque. Après la chirurgie précédente nous obtenons toujours un lacet tracé le long de l'âme d'un ruban de Möbius mais admettant cette fois-ci une boucle le long de laquelle sont placées deux boucles situées à l'intérieur de la première (Figs. 24–28).

Seules ces deux petites boucles bordent un disque ce qui prouve que la nouvelle immersion n'est ni dans la classe de l'immersion de Boy directe ni dans celle de l'immersion de Boy inverse. On remarque alors que la nouvelle courbe d'auto-intersection (Fig. 23) est une hélice tripale à pas négatif de sorte qu'après une symétrie plane dans $\mathbb{R}^3$ nous obtenons une immersion en position générale de $P(\mathbb{R}^3)$ dont la courbe d'auto-intersection est une hélice tripale à pas positif qui se relève dans $P(\mathbb{R}^3)$ en l'image non

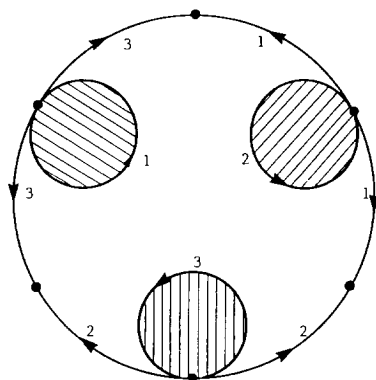


FIG. 25. Image réciproque de la courbe double de la surface de Boy sur le plan projectif obtenu à partir d'un disque par les identifications indiquées par les nombres et les flèches. Les trois boucles de la courbe double bordent trois disques hachurés.

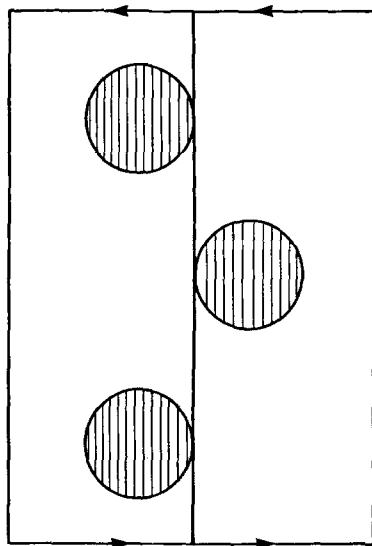


FIG. 26. Image réciproque de la courbe double sur un ruban de Möbius représenté par une bande dont les bouts sont convenablement identifiés.

homotope à zéro d'un cercle par une immersion en position générale à trois points doubles.

Cet exemple nous suggère, pour tenter de caractériser la classe de l'immersion de Boy directe, d'imposer, en plus des conditions précédentes, aux trois boucles de l'image réciproque de la courbe d'auto-intersection de bor-

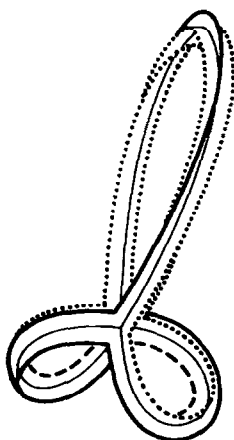


FIG. 27. Voisinage de l'hélice tripale dans l'immersion obtenue à partir de celle de Boy par passage de la singularité du type D1 comme indiqué dans la figure 22. Le bord de ce voisinage est constitué de quatre cercles non enlacés.

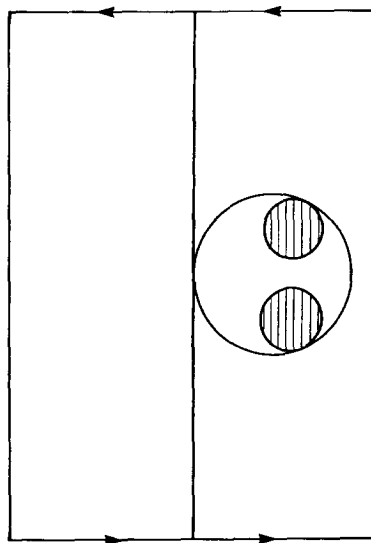


FIG. 28. Image réciproque de la courbe double de l'immersion décrite en les figures 22 et 27 sur un ruban de Möbius. Seules deux des trois boucles bordent un disque hachuré.

der trois disques. Le ruban de Möbius immergé en position générale dans $\mathbb{R}^3$ et représentant un voisinage de l'hélice tripale dans la surface est entièrement déterminé par la condition imposant aux trois pales de l'hélice de border trois disques plongés dans la surface et dans $\mathbb{R}^3$ (Figs. 29, 31). Pour compléter la surface il suffit alors de plonger un disque de $\mathbb{R}^3$ ne rencontrant le ruban de Möbius immergé que le long de leur cercle bord commun (Figs. 30, 32). On peut alors imaginer deux manières de plonger ce disque suivant qu'il passe au-dessus ou en dessous du point triple de l'hélice, l'axe de symétrie de l'hélice étant orienté verticalement. Les deux surfaces ainsi obtenues se déduisent l'une de l'autre, à un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ près, par une symétrie droite laissant invariante l'hélice tripale (Fig. 33).

Nous appellerons surface de Boy directe l'image d'une immersion en position générale de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la courbe d'auto-intersection est une hélice tripale à pas positif dont chaque pale borde un disque plongé dans la surface et dans $\mathbb{R}^3$.

Deux idées importantes sur lesquelles a été bâti ce travail sont dues à B. Morin: la première est le principe de construction de la surface de Boy comme perturbation de la surface romaine de Steiner par déformation des ellipses passant par le pôle, et la seconde est l'interprétation du contour apparent de la surface de Boy comme ensemble des valeurs critiques de la singularité du mouchoir plié en quatre modulo une symétrie d'ordre trois.

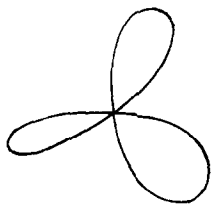


FIG. 29. Hélice tripale à pas positif.

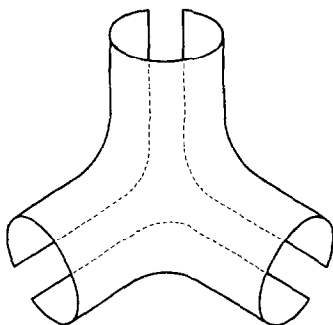


FIG. 30. Disque sous la forme d'un manchon à trois entrées.

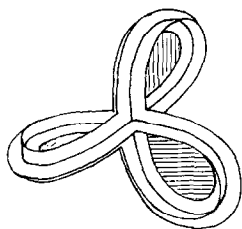


FIG. 31. Voisinage de l'hélice tripale (Fig. 29) dans la surface de Boy.

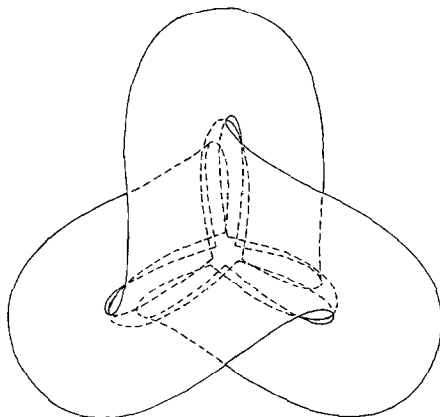


FIG. 32. Déformation du disque (Fig. 30) s'adaptant au bord du voisinage (Fig. 31).

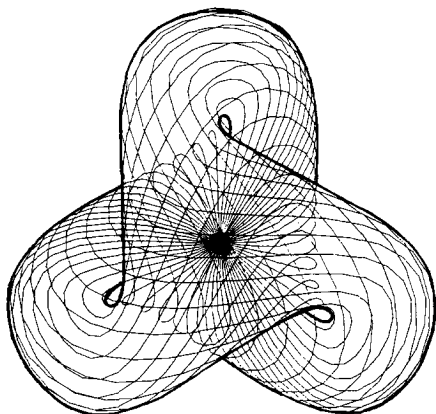


FIG. 33. Surface de Boy obtenue par recollement des figures 31 et 32 le long de leur bord commun (cercle non noué).

L'aboutissement de certains calculs des paragraphes V et VIII a été obtenu grâce à l'usage du système de programmation symbolique Macsyma.

II. DEGRÉ MINIMUM DE LA SURFACE DE BOY ET DE SA REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE

Si $M \rightarrow^f N$ est une application continue localement injective (immersion topologique) d'un espace compact dans un espace séparé et si p est un entier naturel non nul, on note N_p l'ensemble des points de N qui ont au moins p antécédents par f . On a

$$N_1 = f(M) \supseteq N_2 \cdots \supseteq N_p.$$

On note $\bar{M}$ la puissance $p^{\text{ème}}$ de M privée de sa diagonale généralisée

$$\bar{M} = \{(x_1, \dots, x_p) \in M^p : i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$$

et $\bar{M} \rightarrow^{\bar{f}} N^p$ la restriction de l'application produit $M^p \rightarrow^{f \times \cdots \times f} N^p$ à $\bar{M}$. On note S_p l'image réciproque de la diagonale de N^p par $\bar{f}$:

$$S_p = \{(x_1, \dots, x_p) \in \bar{M} : f(x_1) = \cdots = f(x_p)\}.$$

Si $(x^n) = (x_1^n, \dots, x_p^n)$ est le terme général d'une suite de S_p convergeant vers $(x) = (x_1, \dots, x_p)$ dans M^p , alors $f(x_1) = \cdots = f(x_p)$ et f étant injective au voisinage de chaque x_i les x_i sont deux à deux distincts, soit $(x) \in S_p$. On en déduit la compacité de S_p .

Si maintenant on projette S_p dans M par la projection canonique sur le

premier facteur $M^p \rightarrow^\pi M$ on obtient $\pi(S_p) = f^{-1}(N_p)$ ce qui montre la compacité de N_p .

Il est clair que $f \circ \pi$ se restreint à une immersion topologique de S_p sur N_p . Nous allons préciser la nature topologique de N_p quand on fait des hypothèses de différentiabilité. Le résultat que nous allons énoncer est essentiellement dû à R. K. Lashof et S. Smale (ils énoncent la propriété en classe C^∞) [LA].

Nous supposons donc pour la suite que M et N sont deux C^1 -variétés, M étant compacte, et que $M \rightarrow^f N$ est une C^1 -immersion en position générale, c'est-à-dire que pour toute suite finie $x_1, \dots, x_p$ de points deux à deux distincts de M ayant mêmes images par f , l'intersection $\bigcap_{1 \leq i \leq p} f_*(M_i)$ des images par la dérivée $TM \rightarrow^f TN$ des espaces tangents M_i à M en x_i est de dimension minimum.

En notant $\dim M = k$ et $\dim N = l$, on a

$$\dim \bigcap_{1 \leq i \leq p} f_*(M_i) = pk + (1 - p)l.$$

Cette hypothèse revient à dire que pour tout p l'application $\bar{M} \rightarrow^f N^p$ est une C^1 -immersion transverse à la diagonale $\{(y, \dots, y) \in N^p : y \in N\}$ de N^p . On en conclut la

PROPRIÉTÉ 1. S_p est une C^1 -sous-variété compacte de M^p de dimension $pk + (1 - p)l$, et $f \circ \pi$ se restreint à une C^1 -immersion de S_p dans N dont l'image est N_p . L'image de l'espace tangent à S_p en $(x_1, \dots, x_p)$ par $f_* \circ \pi_*$ est l'intersection $f_*(M_1) \cap \dots \cap f_*(M_p)$.

Le groupe G des C^1 -difféomorphismes de S_p de la forme

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_{\sigma 1}, \dots, x_{\sigma p}) \quad \text{où } \sigma \text{ est une permutation de } 1, \dots, p$$

agit librement sur S_p de sorte que l'on peut construire une C^1 variété quotient compacte $\Sigma_p = S_p/G$ et un C^1 -revêtement à $p!$ feuillet $S_p \rightarrow^r \Sigma_p$ vérifiant la propriété universelle classique. Si deux points de S_p sont dans la même G -orbite ils ont même image par $f \circ \pi$ donc on a une factorisation unique de $f \circ \pi$ par le revêtement $S_p \rightarrow^r \Sigma_p$:

$$\begin{array}{ccc} S_p & \xrightarrow{f \circ \pi} & N \\ & \searrow^r & \nearrow^h \\ & \Sigma_p & \end{array}$$

La flèche $\Sigma_p \rightarrow^h N$ est nécessairement une C^1 -immersion.

L'ensemble des points de N_p ayant au moins deux antécédents par h est exactement N_{p+1} .

COROLLAIRE 2. *Si N_{p+1} est vide alors $\Sigma_p \rightarrow^h N$ est un C^1 -plongement dont l'image est la C^1 -sous-variété compacte N_p de dimension $pk + (1-p)l$.*

On supposera dorénavant que M est le plan projectif réel $P(\mathbb{R}^3)$ que $N = \mathbb{R}^3$ et que $M \rightarrow^f N$ est une C^1 -immersion en position générale. Dans ce cas la propriété 1 nous dit que f a au plus des points triples ordinaires en nombre fini et situés sur une C^1 -variété compacte immergée représentant l'ensemble des points doubles.

N. H. Kuiper montre dans [KU] qu'il y a au moins un point triple (grâce au corollaire 2 sa démonstration faite dans le cas lisse s'adapte mot pour mot à la classe C^1) (voir également T. Banchoff [BA]).

PROPRIÉTÉ 3. *Si l'image de la C^1 -immersion en position générale $P(\mathbb{R}^3) \rightarrow^f \mathbb{R}^3$ est une surface algébrique, celle-ci est au moins du sixième degré.*

Preuve. La compacité de $P(\mathbb{R}^3)$ impose au degré de la surface d'être pair. Supposons que la surface soit du quatrième degré. La surface admet un point triple ordinaire et une droite joignant ce point à un point double est contenue dans la surface, de sorte que la surface contient trois droites doubles passant par le point triple. Nous sommes en présence d'une surface de Steiner (Ch. Michel [MI]) qui admet nécessairement des singularités. Finalement si l'image de f est une surface algébrique, celle-ci est de degré pair au moins égal à six. c.q.f.d.

La propriété suivante prouve que l'on ne peut réaliser l'immersion de Boy par projection sur $\mathbb{R}^3$ d'un plongement de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

PROPRIÉTÉ 4. *Une C^1 -immersion de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$ ne peut se factoriser par un plongement de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^4$ et la projection canonique de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.*

Preuve. Soit $M \rightarrow^f \mathbb{R}^4$ un C^1 -plongement d'une surface M de classe C^1 dans $\mathbb{R}^4$, dont le composé $p \circ f$ par la projection canonique $\mathbb{R}^4 \rightarrow^p \mathbb{R}^3$ soit une C^1 -immersion. En chaque point m de M le quatrième vecteur de la base canonique

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui appartient au noyau de p , est transverse à M , de sorte que sa composante sur la normale à M en m permet de définir un champ de vecteurs

non nuls normaux à M . Comme H. Whitney l'a prouvé dans [WH] ceci interdit à M d'être le plan projectif réel. c.q.f.d.

PROPRIÉTÉ 5. *Il n'existe pas de C^1 -immersion $P(\mathbb{R}^3) \rightarrow^f P(\mathbb{R}^4)$ dont l'image ne rencontre pas un plan donné et dont les composantes soient des formes de degré inférieur ou égal à trois.*

Preuve. Une telle immersion f est constituée de formes de même degré pair, c'est-à-dire ici de degré deux, et elle se factorise par le plongement de Veronese réel $P(\mathbb{R}^3) \rightarrow P(\mathbb{R}^6)$ suivi d'une projection conique p sur un sous-espace projectif de dimension trois. L'image d'une droite par f sera soit une conique propre soit un segment éventuellement réduit à un point, car l'image ne rencontre pas un plan donné. $P(\mathbb{R}^3)$ n'étant pas orientable f et par suite p ne sont pas injectives, et la droite déterminée par les deux points ayant mêmes images par p s'envoie sur un segment en les extrémités duquel f est ramifiée. c.q.f.d.

En utilisant les notations de la propriété 1 on peut préciser la structure de la courbe double de l'immersion de Boy.

PROPRIÉTÉ 6. *Si $P(\mathbb{R}^3) \rightarrow^f \mathbb{R}^3$ est une C^1 -immersion en position générale admettant exactement un point triple, alors $S_2 \rightarrow^\pi P(\mathbb{R}^3)$ est une C^1 -immersion en position générale admettant trois points doubles.*

Preuve. La propriété 1 implique que $S_2 \rightarrow^\pi P(\mathbb{R}^3)$ est une C^1 -immersion. De plus π admet exactement trois points doubles correspondant aux antécédents x_1, x_2, x_3 du point triple de f dans $P(\mathbb{R}^3)$. Si T_3 et T_2 désignent les tangentes à S_2 en (x_1, x_2) et (x_1, x_3) alors la propriété 1 nous dit que $\dim(f_* \circ \pi_* T_2 \cap f_* \circ \pi_* T_3) = 0$. Or f est une C^1 -immersion donc $\dim(\pi_* T_2 \cap \pi_* T_3) = 0$. L'immersion $S_2 \rightarrow^\pi P(\mathbb{R}^3)$ est en position générale. c.q.f.d.

Remarquons enfin que dans le cas de l'immersion de Boy la courbe S_2 est connexe ce qui revient à deux conditions: premièrement la connexité de Σ_2 et deuxièmement le fait que la C^1 -immersion $\Sigma_2 \rightarrow^h \mathbb{R}^3$ ne se factorise pas sous la forme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^3 \\ & \searrow g \quad \nearrow f & \\ & P(\mathbb{R}^3) & \end{array}$$

où g est une C^1 -immersion. La deuxième condition signifie géométriquement qu'en partant d'un plan tangent à l'image de f en un point de N_2 et en parcourant N_2 une fois on arrive à un plan tangent transverse au plan initial.

III. CONSTRUCTION D'UNE SURFACE DE BOY COMME BOUQUET D'ELLIPSES

La surface que nous allons construire va s'inspirer le plus étroitement possible de celle que W. Boy a considérée [BO1, BO2]. Comme D. Hilbert l'a fait remarquer à W. Boy on peut lui imposer d'avoir un axe de symétrie ternaire coupant la surface au point triple et en un autre point que nous avons appelé pôle de la surface (Fig. 0). Ceci étant, le contour apparent de la surface vue de son pôle est une courbe simple à trois rebroussements avec la symétrie d'ordre 3, on lui impose naturellement d'être une hypocycloïde à trois rebroussements. L'axe de symétrie ternaire de la surface est supposé être l'axe vertical le pôle étant placé à l'origine 0. Il reste à déterminer les courbes planes intersections de la surface avec les plans tangents passant par le pôle et enveloppant l'hypocycloïde. Ces courbes sont tangentes en 0 au plan horizontal. Nous avons signalé dans l'introduction la paramétrisation de J-P. Petit et J. Souriau [PE] engendrant la surface de Boy par des ellipses passant par le pôle, aussi allons nous imposer à nos courbes d'être des ellipses.

On remarque alors que les conditions imposées jusqu'à maintenant sont satisfaites par la *surface romaine de Steiner* (Fig. 39). Ceci nous conduit à rechercher la surface de Boy comme perturbation de la surface romaine.

La surface romaine a pour équation cartésienne dans l'espace projectif

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 = x_0 x_1 x_2 x_3$$

elle est paramétrée rationnellement par

$$x_0 = u^2 + v^2 + w^2, \quad x_1 = vw, \quad x_2 = wu, \quad x_3 = uv.$$

Elle admet les trois droites doubles $x_1 = x_2 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$, se coupant au point triple 0. Sur chacune de ces droites sont situées deux singularités du type *bonnet croisé* (Fig. 4). La surface est invariante par le groupe $\mathcal{S}_3$ opérant comme groupe des permutations de x_1, x_2, x_3 .

La surface admet donc la droite $x_1 = x_2 = x_3$ comme axe de symétrie ternaire sur lequel on trouve le pôle

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

image par la paramétrisation du point

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les droites projectives passant par p ont pour images des ellipses passant par P dont les plans enveloppent l'hypocycloïde à trois rebroussements correspondant au contour apparent vu de P .

Notons que la paramétrisation restreinte au plan projectif réel n'atteint pas toute la partie réelle de la surface romaine: les six demi-droites obtenues par action de $\mathcal{S}_3$ à partir de $x_1 = x_2 = 0$, $2x_3 > x_0$, ne sont pas atteintes.

La paramétrisation réelle applique en fait la sphère réelle S d'équation $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^3$ de façon équivariante par l'action antipodale. Une rotation d'ordre trois autour de $u = v = w$ correspond à la même rotation autour de $x_1 = x_2 = x_3$. On effectue un changement de repère à la source ayant pour objet de faire de p le pôle nord de la sphère en remplaçant dans la paramétrisation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

par

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

On effectue un changement de repère du même type au but qui donne à P les coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puis on effectue une translation verticale pour faire de P l'origine

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les nouvelles coordonnées homogènes au but sont données par

$$(X) = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} (x), \quad \text{où} \quad (x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

La représentation paramétrique s'écrit

$$(X) = \begin{pmatrix} 3(u^2 + v^2 + w^2) \\ \sqrt{2}(u^2 - v^2 + \sqrt{2}uw) \\ \sqrt{2}(2uv - \sqrt{2}vw) \\ 3(u^2 + v^2) \end{pmatrix}.$$

On déshomogénéise les coordonnées en se plaçant sur la sphère $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ et en posant $X_0 = 1$. Les ellipses de la surface romaine passant par P qui est maintenant l'origine des coordonnées, sont les images des grands cercles de la sphère passant par les pôles. On paramètre la sphère avec la longitude $\theta \in [0, 2\pi[$ et la tangente de la latitude $t \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de sorte que

$$u = \cos \theta \cdot (1 + t^2)^{-1/2}, \quad v = \sin \theta \cdot (1 + t^2)^{-1/2}, \quad w = t(1 + t^2)^{-1/2}.$$

La représentation paramétrique de la surface romaine est alors

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (1 + t^2)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} (\cos 2\theta + t \sqrt{2} \cos \theta) \\ \frac{\sqrt{2}}{3} (\sin 2\theta - t \sqrt{2} \sin \theta) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les ellipses passant par l'origine sont paramétrées par t pour θ constant. Elles sont tangentes à l'origine au plan $X_3 = 0$ et leurs plans enveloppent le cône donné paramétriquement en θ par

$$X_1 + iX_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} (e^{-4i\theta} + 2e^{2i\theta}) X_3$$

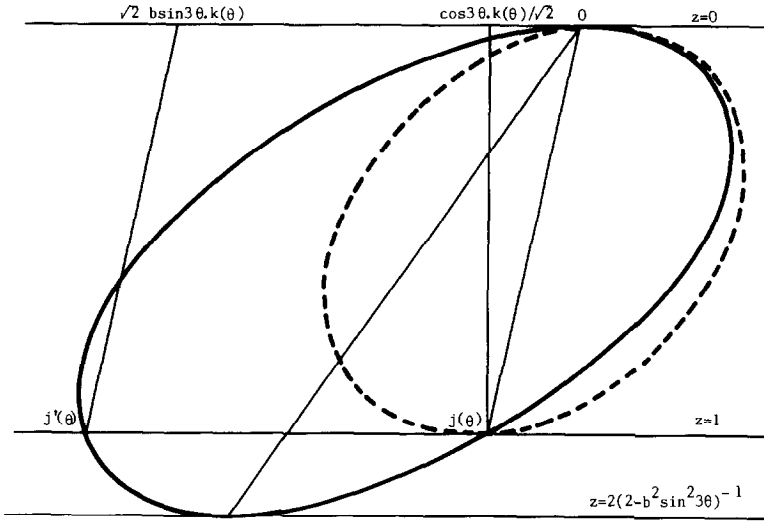


FIG. 34. L'ellipse E_θ du bouquet engendrant la surface de Boy vue dans son plan P_θ coupé par des plans $z = c^{te}$. En pointillés figure l'ellipse correspondante de la surface romaine.

et en cartésiennes par

$$3(X_1^2 + X_2^2)^2 + 8\sqrt{2} X_1 X_3 (3X_2^2 - X_1^2) + 12X_3^2 (X_1^2 + X_2^2) - 4X_3^4 = 0.$$

C'est un cône du quatrième degré dont la base est une hypocycloïde à trois rebroussements (Fig. 35). On note

$$j(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \cos 2\theta \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sin 2\theta \\ 1 \end{vmatrix}, \quad k(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} \cos \theta \\ -\frac{2}{3} \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}.$$

L'ellipse E_θ correspondant à la valeur θ est tangente en 0 au plan $X_3 = 0$ et tangente en $j(\theta)$ au plan $X_3 = 1$.

La surface romaine est tangente au plan $X_3 = 1$ le long du cercle inscrit dans l'hypocycloïde à trois rebroussements trace du cône précédent. Pour obtenir la surface de Boy on va perturber la représentation paramétrique de la romaine en imposant au plan $X_3 = 1$ d'être le plan des trois points selles pour la fonction hauteur de la surface de Boy.

Si on regarde la section plane correspondante dans la thèse de Boy [BO2] on voit qu'un moyen d'obtenir une courbe du sixième degré

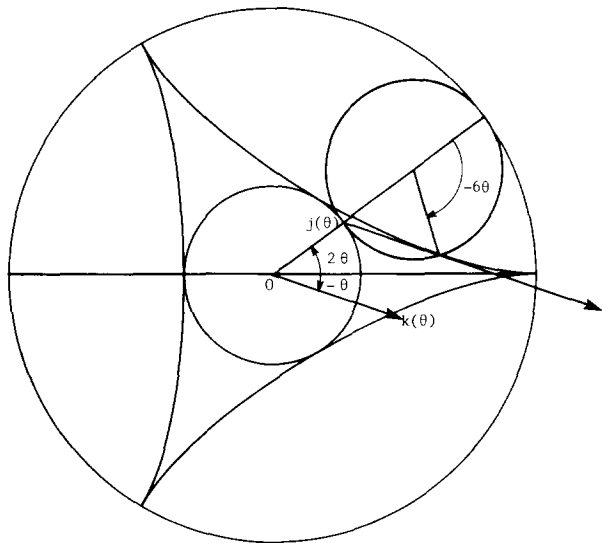


FIG. 35. Génération mécanique de l'hypocycloïde à trois rebroussements du contour apparent de la surface de Boy vue de son pôle.

est de supposer qu'elle se décompose en un cercle et une hypocycloïde à trois rebroussements allongée (Fig. 2).

On perturbe donc l'ellipse E_θ de façon quelle coupe le plan $X_3 = 1$ en $j(\theta)$ et en un deuxième point $j'(\theta)$ décrivant une hypocycloïde à trois rebroussements allongée dont les trois points doubles sont à l'intérieur du cercle (Figs. 34, 36). Il suffit pour cela de perturber le facteur multiplicatif $(1 + t^2)^{-1}$ en $(1 - \sqrt{2}bt \sin 3\theta + t^2)^{-1}$. La paramétrisation devient

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (1 - \sqrt{2}bt \sin 3\theta + t^2)^{-1} (j(\theta) + tk(\theta)).$$

On a

$$j'(\theta) = j(\theta) + \sqrt{2} b \sin 3\theta k(\theta)$$

donc $j'(\theta)$ décrit dans le plan $X_3 = 1$ l'hypocycloïde allongée d'équation paramétrique

$$\begin{aligned} X_1 + iX_2 &= \frac{\sqrt{2}}{3} e^{2i\theta} + \frac{2\sqrt{2}b}{3} \sin 3\theta e^{-i\theta} \\ &= \frac{(1 + b^2)^{1/2}}{3\sqrt{2}} ie^{-4i\theta_0} \cdot (2e^{2i(\theta - \theta_0)} + 2b(1 + b^2)^{-1/2} e^{-4i(\theta - \theta_0)}) \end{aligned}$$

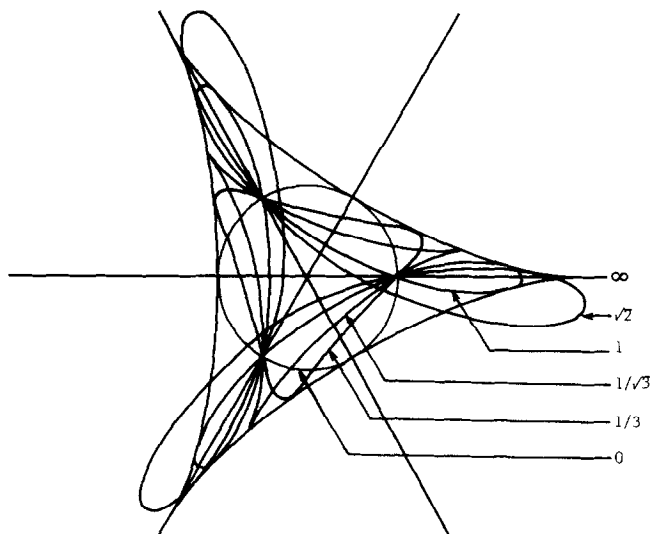


FIG. 36. Section des différentes déformations de la surface romaine par le plan des cols, pour les valeurs $b = 0$ (surface romaine), $b = 1/3$, $b = 1/\sqrt{3}$ (confluence des six bonnets croisés par paires), $b = 1$ (surface de Boy), $b = \sqrt{2}$, $b = \infty$.

où

$$\theta_0 = \frac{-\theta_1}{6} + \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad 1 - ib = (1 + b^2)^{1/2} e^{i\theta_1}.$$

Le fait que l'hypocycloïde soit allongée signifie $2|b|(1 + b^2)^{-1/2} > 1$ c'est-à-dire

$$|b| > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

De plus, pour que la surface reste bornée il faut et il suffit que le dénominateur du facteur multiplicatif ne s'annule pas, c'est-à-dire

$$b^2 < 2.$$

On doit donc vérifier

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < |b| < \sqrt{2}.$$

PROPRIÉTÉ 7. On suppose $1/\sqrt{3} < |b| < \sqrt{2}$. Alors l'application

$$(1 - \sqrt{2}bt \sin 3\theta + t^2)^{-1} (j(\theta) + tk(\theta))$$

où t est la tangente de la latitude sur la sphère et θ la longitude, se prolonge par continuité aux pôles en une C^1 -immersion F de la sphere dans $\mathbb{R}^3$ invariante par l'action antipodale. Aux pôles cette application n'est pas de classe C^2 . L'image de cette application dans $\mathbb{R}^3$ admet la droite $X_1 = X_2 = 0$ comme axe de symétrie ternaire.

Preuve. On pose

$$f(\theta, t) = (1 - \sqrt{2} bt \sin 3\theta + t^2)^{-1} (j(\theta) + tk(\theta)),$$

où

$$j(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \cos 2\theta \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sin 2\theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cos \theta \\ -\frac{2}{3} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si on note les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ avec des indices 1, 2, 3, on a

$$(j_1 + ij_2) \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) = (j_1 + ij_2)(\theta) e^{4i(\pi/3)},$$

$$(k_1 + ik_2) \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) = (k_1 + ik_2)(\theta) e^{-2i\pi/3}.$$

Ceci nous prouve la symétrie d'ordre 3 autour de la droite $X_1 = X_2 = 0$. De même

$$f(\theta + \pi, -t) = f(\theta, t)$$

ce qui montre l'invariance de f par l'action antipodale.

Examinons maintenant le rang de f en dehors des pôles c'est-à-dire le rang de l'application lisse définie sur $S_1 \times \mathbb{R}$ par $f(\theta, t)$. On note $S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow {}^q \mathbb{R}^2$ l'application définie par $g_1 = j_1 + tk_1$, $g_2 = j_2 + tk_2$, et on note $S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow {}^r \mathbb{R}$ celle définie par

$$r(\theta, t) = (1 - \sqrt{2} bt \sin 3\theta + t^2)^{-1}.$$

Prouver que f est de rang maximum revient à prouver que $S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow {}^{(g,r)} \mathbb{R}^3$ est de rang 2 sur le lieu critique de g dont l'équation vaut

$$0 = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} \sin 2\theta - t \sin \theta & \cos \theta \\ \sqrt{2} \cos 2\theta - t \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix} = t - \sqrt{2} \cos 3\theta$$

sachant que

$$\partial_{\theta} r = r^2 3 \sqrt{2} b t \cos 3\theta, \quad \partial_t r = r^2 (\sqrt{2} b \sin 3\theta - 2t)$$

la matrice jacobienne vaut, à un facteur multiplicatif non nul près sur chaque ligne ou colonne, sur le lieu critique de g

$$\begin{bmatrix} -\sin 2\theta - \sin \theta \cos 3\theta & \cos \theta \\ \cos 2\theta - \cos \theta \cos 3\theta & -\sin \theta \\ 3b \cos^2 3\theta & b \sin 3\theta - 2 \cos 3\theta \end{bmatrix}$$

le mineur 2×2 supérieur étant nul, on se ramène au calcul d'un seul mineur en faisant la combinaison

$$\cos \theta \cdot \text{ligne 1} - \sin \theta \cdot \text{ligne 2}$$

sur les deux premières lignes:

$$\begin{vmatrix} -\sin 3\theta & 1 \\ 3b \cos^2 3\theta & b \sin 3\theta - 2 \cos 3\theta \end{vmatrix} = \sin 6\theta - b(2 + \cos 6\theta) \\ = (1 + \tau^2)^{-1} (-b\tau^2 + 2\tau - 3b)$$

où $\tau = \tan 3\theta$. Or cette dernière quantité ne peut s'annuler car le discriminant réduit $1 - 3b^2$ de $-b\tau^2 + 2\tau - 3b$ est strictement négatif. On a donc prouvé que f était de rang 2 sur $S_1 \times \mathbb{R}$.

Il reste à voir la situation aux pôles de la sphère. L'invariance de f par l'action antipodale nous permet de nous placer au pôle nord $(0, 0, 1)$ dans le système de coordonnées (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ la sphère ayant pour équation

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

et le passage de la sphère à $S_1 \times \mathbb{R}$ se faisant par projection centrale

$$u = \cos \theta (1 + t^2)^{-1/2}, \quad v = \sin \theta (1 + t^2)^{-1/2}, \quad w = t(1 + t^2)^{-1/2}.$$

L'application $S \rightarrow {}^F \mathbb{R}^3$ composée de $S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow {}^f \mathbb{R}^3$ et de la projection centrale de S moins les pôles sur $S_1 \times \mathbb{R}$ s'écrit

$$F(u, v, w) \\ = [3(u^2 + v^2) - 3\sqrt{2} b v w (3u^2 - v^2)]^{-1} \begin{vmatrix} \sqrt{2} (u^4 - v^4) + 2u w (u^2 + v^2) \\ 2\sqrt{2} u v (u^2 + v^2) - 2v w (u^2 + v^2) \\ 3(u^2 + v^2)^2 \end{vmatrix}$$

Sachant qu'au voisinage du pôle nord $w = (1 - u^2 - v^2)^{1/2}$ on obtient un équivalent de F au voisinage de ce point

$$F(u, v, w) \sim \begin{cases} 2\frac{u}{3} \\ -2\frac{v}{3} \\ u^2 + v^2 \end{cases}$$

de plus

$$\lim_{u,v \rightarrow 0} \partial_u F = \begin{cases} 2/3 \\ 0 \\ 0, \end{cases} \quad \lim_{u,v \rightarrow 0} \partial_v F = \begin{cases} 0 \\ -2/3 \\ 0. \end{cases}$$

F est donc de classe C^1 et de rang 2 aux pôles. Notons par ailleurs que

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \left(\partial_u F_1(u, 0, w) - \frac{2}{3} \right) &= \frac{2\sqrt{2}}{3}, \\ \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \left(\partial_v F_1(0, v, w) - \frac{2}{3} \right) &= \frac{-2\sqrt{2}}{3} b, \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \partial_v F_1(u, 0, w) &= 2\sqrt{2} b, \\ \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \partial_u F_1(0, v, w) &= \frac{-2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que F n'est pas de classe C^2 aux pôles.

c.q.f.d.

Généralisation 7bis. Le procédé que l'on vient de décrire peut se généraliser à la construction d'une famille de C^1 -immersions de la sphère dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce qui a précédé nous avons utilisé une propriété de l'hypocycloïde à trois rebroussements selon laquelle sa tangente recoupe le cercle générateur (roulant sans glissement sur le cercle fixe) au point de contact avec le cercle de gorge (qui est enveloppé par le cercle générateur). Cette propriété est valable pour toutes les hypocycloïdes. Si maintenant on veut engendrer une C^1 -immersion de la sphère dans $\mathbb{R}^3$ par des ellipses tangentes à l'origine au plan $X_3 = 0$ et dont les plans enveloppent une

hypocycloïde à un nombre quelconque de rebroussements, on impose à ces ellipses de couper le plan $X_3 = 1$ en deux points dont l'un est le point de contact du cercle générateur de l'hypocycloïde avec son cercle de gorge et l'autre est obtenu à partir du premier en portant sur la tangente à l'hypocycloïde une longueur en quadrature de phase avec celle qui donne le point de contact de l'hypocycloïde avec sa tangente.

Ce second point décrit alors une hypocycloïde allongée et si l'on veut que l'application de la sphère dans $\mathbb{R}^3$ ainsi définie ne soit pas ramifiée aux pôles il faut s'assurer que quand ce second point décrit l'hypocycloïde allongée, la tangente de l'ellipse à l'origine de $\mathbb{R}^3$ fait exactement un tour, c'est à dire que l'angle polaire de la tangente à l'hypocycloïde décrit un intervalle de longueur 2π .

Ceci nous contraint à ne considérer que les hypocycloïdes étoilées dont le cercle générateur a pour diamètre un multiple du rayon du cercle de gorge, ce qui donne la paramétrisation suivante pour une telle hypocycloïde

$$X_1(\theta) + iX_2(\theta) = \frac{1}{n} e^{i(n-1)\theta} + \frac{n-1}{n} \cdot \cos n\theta \cdot e^{-i\theta}, \quad n \geq 2$$

et comme hypocycloïde étoilée allongée

$$X_1(\theta) + iX_2(\theta) = \frac{1}{n} e^{i(n-1)\theta} + \frac{n-1}{n} b \sin n\theta \cdot e^{-i\theta}, \quad b \neq 0.$$

En posant $\zeta = e^{i\theta}$ on a

$$\begin{cases} X_1 + iX_2 = \frac{1}{n} \zeta^{n-1} - ib \frac{n-1}{2n} (\zeta^{n-1} - \zeta^{-n-1}) \\ X_1 - iX_2 = \frac{1}{n} \zeta^{1-n} + ib \frac{n-1}{2n} (\zeta^{1-n} - \zeta^{n+1}) \end{cases}$$

on détermine ainsi le degré de l'hypocycloïde allongée en la coupant par une droite

si n est pair l'hypocycloïde étoilée allongée est de degré $2(n+1)$;

si n est impair elle est revêtue deux fois pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et de degré $n+1$.

En s'inspirant du cas $n=3$ étudié précédemment on définit l'application

$$f(\theta, t) = r(\theta, t) \cdot (j(\theta) + t \cdot k(\theta))$$

où

$$j(\theta) = \begin{pmatrix} r(\theta, t) = (1 - \sqrt{2} bt \sin n\theta + t^2)^{-1}, \\ \frac{\sqrt{2}}{n} \cos(n-1)\theta \\ \frac{\sqrt{2}}{n} \sin(n-1)\theta \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cos \theta \\ k(\theta) = \frac{n-1}{n} \\ -\sin \theta \\ 0 \end{matrix}$$

et un calcul en tout point semblable au cas $n=3$ montre que

Si $1/\sqrt{n} < |b| < \sqrt{2}$ l'application f définit, par prolongement par continuité une C^1 -immersion F_n de la sphère dans $\mathbb{R}^3$. Si n est impair elle est invariante par l'action antipodale et se factorise donc par une C^1 -immersion du plan projectif dans $\mathbb{R}^3$.

L'image de cette immersion est contenue dans une surface algébrique qui est revêtue une fois si n est pair et deux fois si n est impair, et dont on peut déterminer le degré en examinant son intersection avec le plan $X_3 = 1$. On trouve d'abord l'hypocycloïde étoilée allongée dont on a déjà calculé le degré, puis le cercle

$$X_1 + iX_2 = \frac{\sqrt{2}}{n} e^{i(n-1)\theta}$$

qui doit être compté avec la multiplicité $n-1$ si n est pair et $(n-1)/2$ si n est impair. Les ellipses coupent transversalement le plan $X_3 = 1$ sauf en un nombre fini d'exceptions de sorte que

Si n est pair l'image de F_n est contenue dans une surface algébrique de degré $4n$.
Si n est impair l'image de l'immersion du plan projectif réel dans $\mathbb{R}^3$ correspondante est contenue dans une surface algébrique de degré $2n$.

Nous pouvons remarquer que ces C^1 -immersions ne peuvent être en position générale que dans le cas $n=3$ car l'image d'une telle immersion admet en

0	
0	un point multiple d'ordre $2n$ si n est pair
$\frac{(n-1)^2}{n^2 - 2n + 3}$	et d'ordre n si n est impair.

Les antécédents de ce point multiple sont donnés par

$$(\theta, t) = \left(\frac{k\pi}{n}, (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{n-1} \right).$$

IV. LA SURFACE DE BOY COMME SURFACE ALGÈBRE RÉELLE DU SIXIÈME DEGRÉ

Nous allons montrer que le bouquet d'ellipses construit dans le paragraphe précédent est une surface algébrique réelle du sixième degré ayant toutes les propriétés topologiques de la surface de Boy pour une valeur du paramètre b voisine de 1.

PROPRIÉTÉ 8. *Pour $b \neq 0$, l'image de la sphère par la paramétrisation F est contenue dans la partie réelle d'une surface algébrique complexe rationnelle du sixième degré. (Les équations et paramétrisations de cette surface dans différents repères sont rassemblées dans l'appendice A)*

Preuve. La section plane par le plan $X_3 = 1$ étant du sixième degré la surface cherchée est au moins de ce degré. Par un procédé d'élimination nous allons déterminer une équation du sixième degré qui sera l'équation cherchée. On commence par faire les changements de variables suivants à la source et au but

$$r = \frac{u + iv}{u - iv}, \quad s = \frac{\sqrt{2}w}{u - iv}, \quad (Y) = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \cdot & \cdot & -2\sqrt{2} \\ \cdot & 3 & 3i & \cdot \\ \cdot & 3 & -3i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} \end{pmatrix} (X)$$

où

$$(X) = \begin{vmatrix} 3[(u^2 + v^2)(u^2 + v^2 + w^2) - \sqrt{2} bvw(2u^2 - v^2)] \\ \sqrt{2}(u^2 + v^2)(u^2 - v^2 + \sqrt{2} uw) \\ \sqrt{2}(u^2 + v^2)(2uw - \sqrt{2} vw) \\ 3(u^2 + v^2)^2 \end{vmatrix}$$

On obtient alors la représentation paramétrique suivante, dont la perte d'homogénéité et de symétrie est avantageusement compensée par la baisse du degré des paramètres dans certaines composantes

$$(Y) = \begin{vmatrix} s(rs + ib(r^3 - 1)) \\ r(r^2 + s) \\ r(1 + rs) \\ r^2 \end{vmatrix}$$

On cherche d'abord par la méthode des coefficients indéterminés, deux polynômes homogènes P_3 et P_4 de degrés trois et quatre en Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 tels que pour tout r et s

$$P_3 = P_4.$$

La solution est unique à une constante multiplicative près. Par la même méthode on trouve un polynôme homogène de degré trois noté Q_3 tel que pour tout r et s

$$rQ_3 = P_4.$$

Sachant que $Y_3 = r^2$, on en déduit l'équation de degré sept

$$Y_3 Q_3^2 = P_3 P_4$$

dont on remarque qu'elle est divisible par Y_2 ce qui donne le degré six cherché:

$$P_4 = Y_0^2 Y_3^2 - (1 + ib) Y_0 Y_1 Y_2 Y_3 - 2 Y_0 Y_3^3 + ib Y_1^2 Y_2^2$$

$$+ b(i - b) Y_1 Y_2 Y_3^2 + (ib - 1)^2 Y_3^3 Y_3 + Y_3^4$$

$$P_3 = (ib - 1) Y_0 Y_2 Y_3 + (ib + 1)^2 Y_1^2 Y_3 - b(i + b) Y_1 Y_2^2 + (1 - ib) Y_2 Y_3^2$$

$$Q_3 = -(ib + 1) Y_0 Y_1 Y_3 + b(i - b) Y_1^2 Y_2 + (1 + ib) Y_1 Y_3^2 + (ib - 1)^2 Y_3^2 Y_3.$$

L'équation de la surface sextique est

$$\begin{aligned} Y_0^3 Y_3^3 - Y_0^2 Y_3^2 (Y_1 Y_2 + 3 Y_3^2) + Y_0 Y_3 [b^2 Y_1^2 Y_2^2 \\ - (3b^2 + 1) Y_1 Y_2 Y_3^2 + (1 - b^2) Y_3 (Y_1^3 + Y_2^3) + 2ib Y_3 (Y_1^3 - Y_2^3) + 3 Y_3^4] \\ + (Y_1 Y_2 - Y_3^2) [-b^2 Y_1^2 Y_2^2 - (3b^2 + 1) Y_1 Y_2 Y_3^2 \\ + ib(b^2 - 1) Y_3 (Y_1^3 - Y_2^3) + 2b^2 Y_3 (Y_1^3 + Y_2^3) + Y_3^4] = 0. \end{aligned} \quad \text{c.q.f.d.}$$

PROPRIÉTÉ 9. Pour $b \geq 1/\sqrt{2}$ l'image de F est exactement la partie réelle de la surface du sixième degré précédente.

Preuve. On note $P(\mathbb{R}^3) \rightarrow \tilde{F} \mathbb{R}^3$ la C^1 -immersion induite par F par passage au quotient par l'application antipodale sur la sphère. L'équation du plan P_{θ_0} de l'ellipse E_{θ_0} est donnée par

$$X_1 \sin \theta_0 + X_2 \cos \theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} X_3 \sin 3\theta_0.$$

E_{θ_0} est l'image par $\tilde{F}$ de la droite projective d_{θ_0} d'équation

$$u \sin \theta_0 = v \cos \theta_0.$$

De même en coupant P_{θ_0} par l'ellipse E_{θ_1} où θ_1 prend des valeurs différentes de θ_0 modulo π , on trouve que l'image de $\tilde{F}$ recoupe P_{θ_0} suivant l'image de la droite projective δ_{θ_0} donnée par

$$t = \sqrt{2} \cdot \cos(\theta + 2\theta_0)$$

soit, en coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$w = \sqrt{2} (u \cos 2\theta_0 - v \sin 2\theta_0).$$

Par compacité de l'image de $\tilde{F}$, nous savons que l'image de δ_{θ_0} est contenue dans une courbe algébrique plane unicursale Q_{θ_0} de degré pair, donc de degré deux ou quatre.

Si b est différent de 0, le pôle

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

admet sur δ_{θ_0} les deux antécédents

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ \sqrt{2} e^{\mp 2i\theta_0} \end{pmatrix}$$

et les images de δ_{θ_0} par la dérivée $D\tilde{F}$ en ces deux points sont contenues dans P_{θ_0} et dans le plan $[X_3 = 0]$ tangent à l'image de $\tilde{F}$ au pôle, ces deux images coïncident donc avec la droite $P_{\theta_0} \cap [X_3 = 0]$. De plus on a vu que sur δ_{θ_0} on avait

$$t = \sqrt{2} \cdot \cos(\theta + 2\theta_0)$$

soit

$$|t| \leq \sqrt{2}$$

ainsi $\tilde{F}(\delta_{\theta_0})$ est un compact ne contenant pas le pôle et aucune branche réelle de Q_{θ_0} ne passe par le pôle qui est un point singulier réel isolé du type *auto-contact ordinaire* (tacnode). Ceci exclut le cas de la conique propre, donc l'image de $\tilde{F}$ coupe P_{θ_0} suivant l'ellipse E_{θ_0} et une partie de la quartique unicursale Q_{θ_0} .

Pour voir si la surface sextique contenant l'image de $\tilde{F}$ ne contient aucun autre point réel que ceux de cette image, il suffit de montrer que tous les points réels de Q_{θ_0} sont sur l'image de $\tilde{F}$ et ceci pour toutes les valeurs de θ_0 , car les plans P_{θ_0} balayent tout $\mathbb{R}^3$. Or les points réels de Q_{θ_0} susceptibles de ne pas appartenir à $\tilde{F}(\delta_{\theta_0})$ sont nécessairement singuliers isolés. L'auto-contact comptant pour deux points doubles et Q_{θ_0} étant unicursale, il existe exactement un autre point singulier A_{θ_0} sur Q_{θ_0} . Nous devons regarder si A_{θ_0} appartient à l'image de $\tilde{F}$. La quartique $\tilde{F}(\delta_{\theta_0})$ est paramétrée par

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (1 - 2b \cos(\theta + 2\theta_0) \sin 3\theta + 2 \cos^2(\theta + 2\theta_0))^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} (\cos 2\theta_0 + 2 \cos \theta_0 \cos(2\theta + \theta_0)) \\ \frac{\sqrt{2}}{3} (\sin 2\theta_0 - 2 \sin \theta_0 \cos(2\theta + \theta_0)) \\ 1. \end{pmatrix}$$

Si deux valeurs θ et θ' non congrues modulo π ont même image, alors nécessairement

$$\cos(2\theta' + \theta_0) = \cos(2\theta + \theta_0)$$

c'est-à-dire

$$\theta' \equiv -\theta - \theta_0 \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad 2\theta + \theta_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Si on pose

$$\begin{aligned} D(\theta) &= 1 - 2b \cos(\theta + 2\theta_0) \sin 3\theta + 2 \cos^2(\theta + 2\theta_0) \\ &= 2 + \cos(2\theta + 4\theta_0) - b(\sin(4\theta + 2\theta_0) + \sin(2\theta - 2\theta_0)) \end{aligned}$$

alors

$$D(\theta') - D(\theta) = 2 \sin(2\theta + \theta_0)(\sin 3\theta_0 + \cos 3\theta_0 + 2b \cos(2\theta + \theta_0))$$

on a donc

$$\cos(2\theta + \theta_0) = \frac{-1}{2b} (\sin 3\theta_0 + \cos 3\theta_0) = \frac{1}{b\sqrt{2}} \cos 3 \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4} \right).$$

Les deux valeurs éventuelles de θ modulo π vérifiant cette équation, et l'équation

$$t = \sqrt{2} \cos(\theta + 2\theta_0)$$

définissent une seule image $f(\theta, t)$ qui est le point A_{θ_0} cherché. En revenant aux coordonnées homogènes

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

nous pouvons déterminer le point A_{θ_0} dans tous les cas (même si l'équation précédente n'a pas de solution en θ). En effet les antécédents de A_{θ_0} par l'application complexifiée $P(\mathbb{C}^3) \rightarrow {}^F P(\mathbb{C}^4)$ sont donnés par l'intersection de la complexifiée de δ_{θ_0} avec les deux droites passant par le pôle

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'équations

$$\begin{aligned} v^2 \left(\cos 3 \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4} \right) + b\sqrt{2} \cos \theta_0 \right) + 2b\sqrt{2} uv \sin \theta_0 \\ + u^2 \left(\cos 3 \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4} \right) - b\sqrt{2} \cos \theta_0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Si les deux droites sont distinctes alors A_{θ_0} est un point double ordinaire sur Q_{θ_0} , et si les deux droites sont confondues alors A_{θ_0} est un rebroussement sur Q_{θ_0} .

Le discriminant réduit de la forme quadratique précédente est

$$\Delta = 2b^2 - \cos^2 3 \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4} \right)$$

donc pour $b \geq 1/\sqrt{2}$ on voit que les deux droites sont réelles pour toutes les valeurs de θ_0 ce qui prouve que A_{θ_0} est bien sur l'image par $\tilde{F}$ de δ_{θ_0} .
c.q.f.d.

Remarque 9 bis. Pour $b = 1$ les coordonnées de A_{θ_0} en fonction de θ_0 se simplifient et peuvent s'exprimer sans radicaux

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \left(1 + \sin^2 3 \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} (\cos 2\theta_0 + \sqrt{2} \cos \theta_0 \cos 3 \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4}\right)) \\ \frac{\sqrt{2}}{3} (\sin 2\theta_0 - \sqrt{2} \sin \theta_0 \cos 3 \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4}\right)) \\ 1. \end{vmatrix}$$

Remarque 9 ter. Dans la démonstration de la propriété 9 nous avons vu que le plan P_{θ_0} coupait l'image de $\tilde{F}$ suivant une conique et une quartique, de plus P_{θ_0} n'est pas tangent à l'image de $\tilde{F}$ le long d'une courbe sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de θ_0 , sinon l'image de $\tilde{F}$ serait un cône de sommet au pôle, de sorte que l'on détermine le degré six de l'image de $\tilde{F}$ sans avoir besoin de calculer son équation. Il n'en reste pas moins qu'il nous sera utile de connaître cette équation que nous avons obtenue dans la propriété 8.

PROPRIÉTÉ 10. Pour $b \neq 0$, l'ensemble des points doubles de la surface sextique contenant l'image de F se décompose en une sextique gauche admettant comme singularités réelles un unique point triple sur l'axe de symétrie ternaire et un unique point double au pôle, et les deux tangentes imaginaires conjuguées de cette courbe au pôle.

(Les paramétrisations de cette courbe du type *hélice tripale* sont rassemblées dans l'appendice A.)

Preuve. Pour simplifier les calculs on est amené à effectuer provisoirement le changement de coordonnées homogènes suivant en vue d'utiliser les fonctions symétriques de l'appendice B:

$$(X) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} & . & . & . \\ . & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ . & . & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ . & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} (x'),$$

$$(x') = \begin{bmatrix} \frac{2}{3\sqrt{3}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \cdot & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} (X), \quad (x') = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

conformément à l'appendice B, on pose

$$\sigma'_1 = x'_1 + x'_2 + x'_3,$$

$$\sigma'_2 = x'_1 x'_2 + x'_2 x'_3 + x'_3 x'_1, \quad \rho' = (x'_2 - x'_1)(x'_3 - x'_2)(x'_1 - x'_3)$$

$$\sigma'_3 = x'_1 x'_2 x'_3.$$

Dans ces nouvelles coordonnées la surface sextique contenant l'image de F s'écrit

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{3} \sigma_1'^2 (2\sigma_1' \sigma_3' - \sigma_2'^2 + x_0' (9\sigma_3' - 2\sigma_1' \sigma_2')) \\ & + x_0'^2 (3\sigma_2' - 2\sigma_1'^2) - x_0'^3 \sigma_1' + 3b\rho' \sigma_1' (9\sigma_2' - 4\sigma_1'^2 - 6x_0' \sigma_1') \\ & + \sqrt{3} b^2 (162\sigma_1' \sigma_2' \sigma_3' - 54\sigma_1'^3 \sigma_3' + 81\sigma_2'^3 - 147\sigma_1'^2 \sigma_2'^2 \\ & + 64\sigma_1'^4 \sigma_2' - 8\sigma_1'^6 + x_0' (-27\sigma_1'^2 \sigma_3' - 27\sigma_1' \sigma_2'^2 + 24\sigma_1'^3 \sigma_2' - 4\sigma_1'^5)) \\ & + b^3 \rho' \sigma_1' (8\sigma_1'^2 - 27\sigma_2') = 0. \end{aligned}$$

Pour déterminer la courbe double de la surface, nous allons déterminer une surface contenant le contour apparent de la surface vu du pôle

$$(x') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de dériver l'équation précédente par rapport à x_0' puis de diviser par le facteur σ_1' :

$$\begin{aligned} & 3\sigma_1' (9\sigma_3' - 2\sigma_1' \sigma_2' + 6\sigma_2' x_0' - 4\sigma_1'^2 x_0' - 3\sigma_1' x_0'^2) \\ & - 6\sqrt{3} b\rho' \sigma_1' + b^2 (-27\sigma_1' \sigma_3' - 27\sigma_2'^2 + 24\sigma_1'^2 \sigma_2' - 4\sigma_1'^4) = 0. \end{aligned}$$

Si on élimine x'_0 entre cette équation et la précédente par un déterminant de Sylvester on doit trouver le plan $\sigma'_1 = 0$, le contour apparent de la surface vu du pôle donné par le cône enveloppé par les plans des coniques E_θ , et enfin le cône s'appuyant sur la courbe double. Après avoir ôté le plan $\sigma'_1 = 0$ et le cône enveloppé par les plans des coniques E_θ d'équation

$$16\sigma_1'^4 - 72\sigma_1'^2\sigma_2' + 108\sigma_1'\sigma_3' + 27\sigma_2'^2 = 0$$

on trouve le cône

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3}\sigma_1'\rho' + 3b(27\sigma_1'\sigma_3' + 18\sigma_2'^2 - 21\sigma_1'^2\sigma_2' + 4\sigma_1'^4) \\ - 9\sqrt{3}b^2\rho'\sigma_1' - b^3(27\sigma_1'\sigma_3' - 54\sigma_2'^2 + 27\sigma_1'^2\sigma_2' - 4\sigma_1'^4) = 0 \end{aligned}$$

soit en (X)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(3b^2 - 1)X_2X_3(3X_1^2 - X_2^2) + b\sqrt{2}(3 - b^2)X_1X_3(3X_2^2 - X_1^2) \\ + 3b(1 + b^2)(X_1^2 + X_2^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

on reconnaît là l'équation d'une quartique bicirculaire à un point triple à l'origine (pâquerette de Mélibée). On peut la paramétrer rationnellement par une droite passant par le point triple

$$X_1 \sin \theta - X_2 \cos \theta = 0.$$

On pose $b = t g \alpha$ et on a la paramétrisation suivante de la quartique

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \sin 3(\theta + \alpha) \cos \theta \\ \sqrt{2} \sin 3(\theta + \alpha) \sin \theta \\ 3 \sin \alpha \end{vmatrix}$$

dont on déduit la paramétrisation rationnelle du cône construit sur cette courbe par la droite issue du pôle et décrivant la quartique

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} s + 3 \sin \alpha \\ \sqrt{2} \sin 3(\theta + \alpha) \cos \theta \\ \sqrt{2} \sin 3(\theta + \alpha) \sin \theta \\ 3 \sin \alpha \end{vmatrix}$$

Le pôle étant double sur la surface quartique construite précédemment, la droite paramétrée par s coupe cette surface en dehors du pôle en deux points dont l'un est sur la courbe double et l'autre non car le pôle est triple sur la surface sextique contenant l'image de F .

L'équation de la quartique est

$$\begin{aligned}
 &16(X_0 - X_3)^2 X_3^2 - 8(X_0 - X_3) X_3(3X_1^2 + 3X_2^2 + 2X_3^2) \\
 &\quad + 27b^2(X_1^2 + X_2^2)^2 - 6(3b^2 + 1) X_3^2(X_1^2 + X_2^2) \\
 &\quad + 18\sqrt{2} (1 - b^2) X_1 X_3(X_1^2 - 3X_2^2) + 36\sqrt{2} b X_2 X_3(X_2^2 - 3X_1^2) + 4X_3^4 = 0
 \end{aligned}$$

en coupant par la droite paramétrée par s on trouve, en dehors du pôle,

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{3}{4 \cos \alpha} (\sin 2\alpha + \sin 6(\theta + \alpha)), \\
 s_2 &= \frac{3}{4 \cos \alpha} (\sin 2\alpha - \sin 6(\theta + \alpha)) + \frac{\sin^2 3(\theta + \alpha)}{\sin \alpha}
 \end{aligned}$$

pour $\alpha = \theta = \pi/4$ c'est s_1 qui donne le point appartenant à l'image de F donc on obtient la courbe double

$$(X) = \begin{pmatrix} 3(3 \sin 2\alpha + \sin 6(\theta + \alpha)) \\ 4\sqrt{2} \cos \alpha \sin 3(\theta + \alpha) \cos \theta \\ 4\sqrt{2} \cos \alpha \sin 3(\theta + \alpha) \sin \theta \\ 6 \sin 2\alpha \end{pmatrix}$$

Ceci nous suggère de faire le changement de coordonnées

$$(X) = \begin{pmatrix} 3 & \cdot & \cdot & 9 \\ \cdot & 2\sqrt{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2\sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 6 \end{pmatrix} (X'), \quad (X') = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \cdot & \cdot & -3\sqrt{2} \\ \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} \end{pmatrix} (X)$$

de sorte que la courbe double est paramétrée par

$$(X') = \begin{pmatrix} \sin 3(\theta + \alpha) \cos 3(\theta + \alpha) \\ \sin 3(\theta + \alpha) \cos \alpha \cos \theta \\ \sin 3(\theta + \alpha) \cos \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

où l'on reconnaît une hélice tripale (Fig. 37). Notons qu'en prenant le contour apparent vu du pôle on a laissé échapper les deux droites doubles

$$X_1 + iX_2 = 0, \quad X_1 - iX_2 = 0$$

qui sont les tangentes à la courbe double précédente au pôle. A cause de la symétrie ternaire, la courbe gauche unicursale du sixième degré précédente

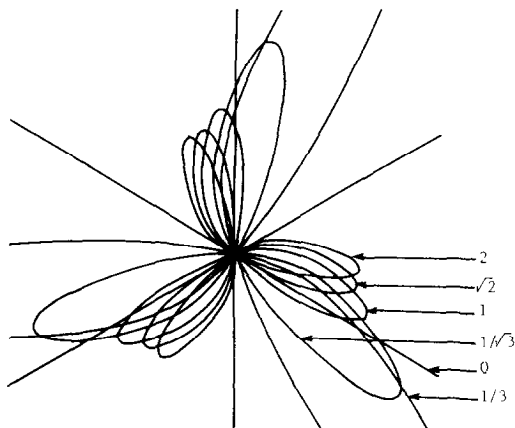


FIG. 37. Projections sur un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie ternaire des courbes doubles des différentes déformations de la surface romaine pour les valeurs $b = 0, 1/3, 1/\sqrt{3}, 1, \sqrt{2}, 2$.

ne peut plus admettre qu'un seul point triple réel supplémentaire qui est obtenu pour

$$3(\theta + \alpha) \equiv 0 (\pi).$$

Ce point triple a pour coordonnées (indépendantes de b)

$$(X) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{c.q.f.d.}$$

La surface sextique contenant l'image de F admet donc exactement deux points triples donnés en (X) par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les antécédents de

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dans $S_1 \times \mathbb{R}$ sont $(0, -1/\sqrt{2})$ $(2\pi/3, -1/\sqrt{2})$ $(-2\pi/3, -1/\sqrt{2})$ et $(\pi/3, 1/\sqrt{2})$ $(-\pi/3, 1/\sqrt{2})$ $(\pi, 1/\sqrt{2})$.

PROPRIÉTÉ 11. Pour $b=1$, l'application $P(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ induite par F est une C^1 -immersion en position générale admettant exactement un point triple.

Preuve. L'unicité du point triple pour $\tilde{F}$ résulte de la propriété précédente. On place le point triple en

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant le système de coordonnées (x) du début de ce paragraphe. Le terme du troisième degré dans l'équation de la surface du sixième degré contenant l'image de $\tilde{F}$ s'écrit (appendice A)

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{3}\sigma_3 - 3b\rho + \sqrt{3}b^2(4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - 9\sigma_3) + b^3\rho \\ &= (x\sqrt{3} - by + bz)(y\sqrt{3} - bz + bx)(z\sqrt{3} - bx + by) \end{aligned}$$

ce qui nous donne les équations des trois plans tangents distincts au point triple. Dans le système de coordonnées (X') on a obtenu la paramétrisation de la courbe double qui devient, en posant $t = \lg \theta$ et $b = \lg \alpha = 1$.

$$(X') = \begin{cases} (t^2 - 1)(t^2 - 4t + 1)(t^2 + 4t + 1) \\ (t + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 4t + 1) \\ t(t + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 4t + 1) \\ (t^2 + 1)^3. \end{cases}$$

Pour montrer la transversalité des deux plans tangents sur un point de la courbe double on coupe la surface sextique contenant l'image de $\tilde{F}$ par le plan $X'_2 = tX'_1$ et dans ce plan (X'_0, X'_1, X'_3) on utilise de nouvelles coordonnées (η, θ) pour placer l'origine sur la courbe double puis on regarde si le jet d'ordre deux en (η, θ) sur la surface a un discriminant strictement positif ce qui prouverait l'existence de deux tangentes indépendantes à l'image de $\tilde{F}$ dans le plan $X'_2 = tX'_1$. Dans cette hypothèse on aura bien la transversalité des plans tangents car, en dehors des valeurs de t donnant le point

triple la tangente à la courbe double est transverse au plan $X'_2 = tX'_1$. On doit donc remplacer (X') dans l'équation de la surface (appendice A) par

$$(X') = \begin{cases} (t^2 - 1)(t^2 - 4t + 1)(t^2 + 4t + 1) \\ \eta + (t + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 4t + 1) \\ t(\eta + (t + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 4t + 1)) \\ \theta + (t^2 + 1)^3. \end{cases}$$

Le jet d'ordre 2 en (η, θ) est alors donné par

$$\eta^2: -4t(t+1)(t^2-3)(t^2+1)^7(t^2-4t+1)(t^6-12t^5-33t^4+40t^3+27t^2-12t-3)$$

$$\eta\theta: 4(t+1)^4(t^2+1)^5(t^2-4t+1)^4(2t^3+3t^2-6t-1)$$

$$\theta^2: -2t(t+1)^5(t^2-3)(t^2+1)^3(t^2-4t+1)^5$$

dont le discriminant réduit vaut

$$\delta = 4(t+1)^6(t-1)^2(t^2+1)^{10}(t^2-4t+1)^8(2t^6-3t^4+12t^2+1).$$

La méthode de Sturm nous montre que le dernier polynôme du sixième degré est strictement positif, quant aux termes $t+1$, t^2-4t+1 ils ne s'annulent que pour les valeurs donnant le point triple, de sorte qu'on a la transversalité sauf peut-être pour les valeurs annulant X'_0 c'est-à-dire pour

$$(t-1)(t^2+4t+1)=0.$$

La symétrie d'ordre trois de la surface nous autorise à n'examiner que le cas $t=1$. Pour cela on revient aux coordonnées (X) et dans ce système on procède comme précédemment en posant

$$(X) = \begin{cases} -9 \\ \eta + 2\sqrt{2} \\ \eta + 2\sqrt{2} \\ \theta - 6. \end{cases}$$

On a ainsi placé l'origine des coordonnées (η, θ) à l'intersection de la courbe double et du plan $X_1 = X_2$. En remplaçant dans l'équation de la surface on obtient le jet d'ordre deux suivant en (η, θ) :

$$2^8 3^4 (11\theta^2 + 24\sqrt{2}\eta\theta - 18\eta^2)$$

dont le discriminant réduit $\delta = 3^5 \cdot 2$ montre que l'on obtient deux branches de courbe dans le plan $X_1 = X_2$. Ceci termine la preuve de la transversalité des plans tangents le long de la courbe double. c.q.f.d.

On reprend les notations du paragraphe II

$$\begin{array}{ccc} S_2 & \xrightarrow{\pi} & P(\mathbb{R}^3) \\ r \downarrow & & \downarrow \tilde{F} \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

PROPRIÉTÉ 12. Pour $b=1$, la C^1 -variété compacte S_2 correspondant aux points doubles de l'application

$$P(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbb{R}^3$$

est connexe.

Preuve. L'image de $\tilde{F}$ est engendrée par la famille des coniques E_θ . Nous avons vu, en démontrant la propriété 9, que le plan de E_θ recoupait l'image $\tilde{F}$ suivant une quartique unicursale Q_θ admettant, en dehors du pôle, exactement un point double A_θ dont les coordonnées homogènes en (X) en fonction de θ étaient (remarque 9 bis)

$$(X) = \begin{pmatrix} 3 \left(1 + \sin^2 3 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ \sqrt{2} \left(\cos 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta \cos 3 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ \sqrt{2} \left(\sin 2\theta - \sqrt{2} \sin \theta \cos 3 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ 3. \end{pmatrix}$$

En faisant le changement de variable

$$\theta = \frac{3\pi}{4} - \theta'$$

on retrouve exactement la paramétrisation de la courbe double de $\tilde{F}$ (démonstration de la propriété 10 pour $\alpha = \pi/4$). L'image réciproque de la courbe double de $\tilde{F}$ par $S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donc donnée par l'élimination de η entre les deux équations

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{2} \cos(\theta + 2\eta), \\ \cos(2\theta + \eta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3 \left(\eta + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2} (\sin 3\eta + \cos 3\eta). \end{aligned}$$

On a la condition $|t| \leq \sqrt{2}$ on pose donc

$$t = \sqrt{2} \cos \alpha$$

la première équation devient

$$\cos \alpha = \cos(\theta + 2\eta).$$

On peut toujours choisir α de façon que

$$2\eta \equiv \alpha - \theta \pmod{2\pi}$$

la deuxième équation s'écrit

$$2 \cos\left(\frac{3\theta + \alpha}{2}\right) + \sin \frac{3}{2}(\alpha - \theta) + \cos \frac{3}{2}(\alpha - \theta) = 0$$

en posant

$$\sigma = \operatorname{tg} \frac{3\theta}{2} \quad \text{et} \quad \tau = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

on trouve

$$\sigma = \frac{\tau + 1}{\tau - 1} \times \frac{3 - \tau^2}{3\tau^2 - 1}.$$

On a donc une représentation paramétrique de l'image réciproque par $S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow {}^f\mathbb{R}^3$ de la courbe double de $\tilde{F}$ avec

$$\begin{aligned} \theta &\equiv \frac{2}{3} \operatorname{Arctg} \sigma \left(\frac{2\pi}{3} \right), \\ t &= \sqrt{2} \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \end{aligned} \quad \tau \in [-\infty, +\infty].$$

On a ainsi un lacet de classe C^1 dans $S^1 \times \mathbb{R}$ invariant par la transformation $(t, \theta) \rightarrow (-t, \theta + \pi)$ et admettant les six points doubles ordinaires $(0, -1/\sqrt{2})$ $(-2\pi/3, -1/\sqrt{2})$ $(2\pi/3, -1/\sqrt{2})$ $(-\pi/3, 1/\sqrt{2})$ $(\pi/3, 1/\sqrt{2})$ $(\pi, 1/\sqrt{2})$. Ce lacet (Fig. 38) est compris dans la bande horizontale

$$|t| \leq \sqrt{2}.$$

Le quotient par l'action antipodale de sa projection centrale sur la sphère donne un lacet de class C^1 dans $P(\mathbb{R}^3)$ admettant trois points doubles ordinaires. On en déduit la connexité de S_2 . c.q.f.d.

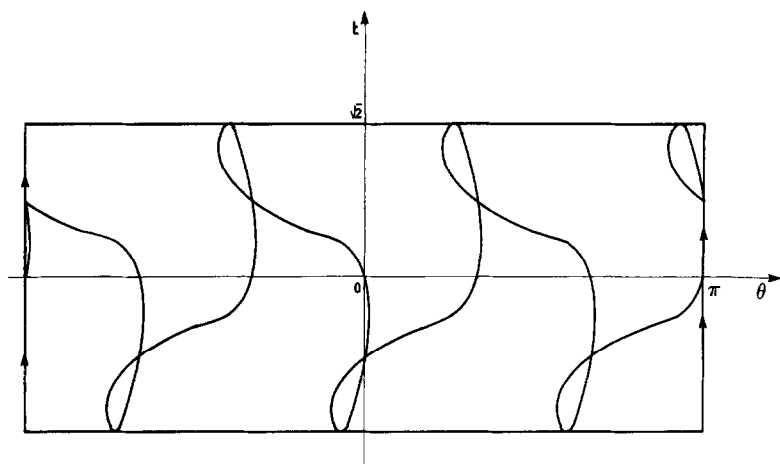


FIG. 38. Image réciproque de la courbe double de la surface de Boy du sixième degré sur le cylindre $S_1 \times \mathbb{R}$.

Remarquons pour terminer ce paragraphe que l'on peut déterminer l'orientation de la surface de Boy que l'on vient de construire pour la distinguer de son image dans un miroir. Pour cela on considère la paramétrisation de la courbe double donnée dans $\mathbb{R}^3$ en (X_1, X_2, X_3) par

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3 - \cos 6\theta} \begin{vmatrix} \frac{2}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3\theta\right) \cos \theta \\ \frac{2}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3\theta\right) \sin \theta \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Les points correspondants à $\theta = \pi/12, 0, -\pi/12$ sont données par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \cos \frac{\pi}{12} \\ -\frac{4}{9} \sin \frac{\pi}{12} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ce qui nous assure que l'hélice tripale est à *pas positif* c'est-à-dire que si l'on imagine sa progression dans l'eau, un point fixe situé sur une pale décrit un tire-bouchon. En démontrant la propriété 12 nous avons déterminé

l'image réciproque de cette hélice tripale par $P(\mathbb{R}^3) \rightarrow \tilde{F} \mathbb{R}^3$ et en particulier nous savons que chaque boucle borde un disque plongé à la fois dans $\mathbb{R}^3$ et dans l'image de $\tilde{F}$. Ceci détermine entièrement le fibré des vecteurs normaux à l'image de $\tilde{F}$ en tout point de la courbe double. On constate alors que si l'on impose à ces vecteurs normaux d'avoir une norme assez petite ce fibré est un ruban de Möbius immergé en position générale dans $\mathbb{R}^3$ dont l'âme revêt deux fois l'hélice tripale, et dont le bord tourne autour de l'âme dans le sens du tire-bouchon (Fig. 31).

V. DÉFORMATION ALGÈBRIQUE DE LA SURFACE DE BOY EN LA SURFACE ROMAINE DE STEINER

Nous avons défini la surface de Boy comme perturbation de la surface romaine par la représentation paramétrique $S_1 \times \mathbb{R} \rightarrow f_b \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = f_b(\theta, t) = \frac{j(\theta) + t \cdot k(\theta)}{1 - \sqrt{2} b t \sin 3\theta + t^2}$$

$$j(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \cos 2\theta \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sin 2\theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cos \theta \\ -\frac{2}{3} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le paramètre perturbateur b vaut 0 pour la surface romaine et 1 pour la surface de Boy. Remarquons que les valeurs $f_{-b}(-\theta, t)$ et $f_b(\theta, t)$ sont symétriques par rapport au plan $X_2 = 0$ ce qui nous montre en particulier que f_{-1} paramètre l'image de la surface de Boy dans un miroir que l'on peut appeler *surface de Boy inverse* (Figs. 15, 16). Nous avons dit dans l'introduction que la surface de Boy inverse n'était pas régulièrement homotope à la surface de Boy directe, en effet une homotopie régulière conserve le reste modulo 4 du nombre de demi-tours d'un ruban de Möbius autour de son âme et une symétrie par rapport à un plan change le signe de ce nombre. De plus le résultat de I. James et E. Thomas [JA] nous dit qu'il y a exactement deux classes d'homotopie régulière d'immersions du plan projectif réel dans $\mathbb{R}^3$. De sorte que f_1 et f_{-1} donnent des représentations de

chacune de ces deux classes par des surfaces algébriques réelles du sixième degré (voir les équations dans l'appendice A).

La paramétrisation f_b représente une déformation de la surface de Boy en son image dans un miroir par l'intermédiaire de la surface romaine. C'est une homotopie algébrique par surfaces du sixième degré. La surface romaine admettant six singularités stables du type "bonnet croisé" il existe donc un voisinage de 0 dans lequel les valeurs de b ne correspondent pas à des immersions. Grâce à la propriété de symétrie invoquée précédemment on peut se limiter à l'étude de la déformation pour les valeurs de b comprises entre 0 et 1.

Nous avons vu dans la propriété 7 que pour $1/\sqrt{3} < b < 1$, f_b induisait une immersion de classe C^1 de la sphère dans $\mathbb{R}^3$. On note $S \rightarrow^{F_b} \mathbb{R}^3$ la composée de f_b avec la projection centrale de la sphère S sur le cylindre $S_1 \times \mathbb{R}$. On note $P(\mathbb{R}^3) \rightarrow^{F_b} \mathbb{R}^3$ l'application induite par F_b en passant au quotient par l'action antipodale sur S .

PROPRIÉTÉ 13. Pour $b = 1/\sqrt{3}$ l'application $\tilde{F}_b$ de classe C^1 admet trois points singuliers donnés en

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

par

$$f_b\left(\frac{\pi}{9}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{18} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{18} \\ 1 \end{vmatrix}, \quad f_b\left(\frac{4\pi}{9}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \frac{13\pi}{18} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \frac{13\pi}{18} \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$f_b\left(\frac{7\pi}{9}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \frac{25\pi}{18} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin \frac{25\pi}{18} \\ 1 \end{vmatrix}.$$

En dehors des trois antécédents de ces points singuliers, $\tilde{F}_b$ se restreint à une C^1 -immersion en position générale.

Preuve. La démonstration de la propriété 7 nous dit que si $b = 1/\sqrt{3}$ les points singuliers de $\tilde{F}_b$ sont donnés sur $S_1 \times \mathbb{R}$ par

$$t = \sqrt{2} \cos 3\theta, \quad \operatorname{tg} 3\theta = \sqrt{3}.$$

Ce qui donne les trois points cherchés dans $\mathbb{R}^3$ avec six antécédents dans $S_1 \times \mathbb{R}$ donc trois antécédents dans $P(\mathbb{R}^3)$.

En dehors de ces points nous avons donc une C^1 -immersion. Nous avons déjà remarqué que les trois plans tangents au point triple sont en position générale de sorte qu'il ne reste à voir que la situation aux autres points de la courbe double. La méthode utilisée est celle de la propriété 11. La courbe double de $\tilde{F}_b$ est paramétrée en (X') par

$$(X') = \begin{vmatrix} 4s(1-3s^2)(s^2-3) \\ 2\sqrt{3}(1-3s^2)(s^2+1) \\ 2\sqrt{3}s(1-3s^2)(s^2+1) \\ \sqrt{3}(1+s^2)^3 \end{vmatrix} \quad \text{où } s = \operatorname{tg} \theta.$$

Examinons d'abord les valeurs annulant X'_0 .

Les valeurs $s = \infty, \pm 1/\sqrt{3}$ donnent le point triple. Les valeurs $s = 0, \pm \sqrt{3}$ donnent des points se déduisant l'un de l'autre par la symétrie ternaire de la surface de sorte qu'on se contente de regarder le cas $s = \sqrt{3} = 1/b$. Le point correspondant sur la courbe double est donné en (X) par:

$$(X) = \begin{vmatrix} -9b \\ 2\sqrt{2}b \\ 2\sqrt{2} \\ -6b. \end{vmatrix}$$

On coupe l'image de $\tilde{F}_b$ par le plan $X_1 = bX_2$ qui est transverse à la tangente à la courbe double au point

$$\begin{vmatrix} -9b \\ 2\sqrt{2}b \\ 2\sqrt{2} \\ -6b \end{vmatrix}$$

On place l'origine en ce point en posant

$$(X) = \begin{vmatrix} -9b \\ b(\eta + 2\sqrt{2}) \\ \eta + 2\sqrt{2} \\ \theta - 6b. \end{vmatrix}$$

En reportant ces coordonnées dans l'équation de l'image de $\tilde{F}$ en (X) (appendice A) on obtient le jet d'ordre 2 suivant en (η, θ) :

$$2^6 3^4 (b^2 + 1) (-9b^2 (b^2 + 1)^2 \eta^2 + 6\sqrt{2} b (b^2 + 1) (5b^2 - 1) \eta \theta + 2(11b^4 + b^2 - 1) \theta^2)$$

dont le discriminant est strictement positif pour $|b| > \frac{1}{2}$. On obtient donc deux branches de courbe à tangentes transverses ce qui nous prouve la position générale de l'immersion $\tilde{F}_b$ en l'image de $s = \sqrt{3}$.

Nous pouvons maintenant supposer $X'_0 \neq 0$. La même méthode nous conduit à poser

$$(X') = \begin{cases} 4s(1 - 3s^2)(s^2 - 3) \\ \eta + 2\sqrt{3}(1 - 3s^2)(s^2 + 1) \\ s(\eta + 2\sqrt{3}(1 - 3s^2)(s^2 + 1)) \\ \theta + \sqrt{3}(1 + s^2)^3. \end{cases}$$

En remplaçant (X') par ces coordonnées dans l'équation de l'image de $\tilde{F}_b$ on obtient le jet d'ordre 2 suivant en (η, θ) :

$$\begin{aligned} \theta^2: & 576(s^2 + 1)^3 (3s^2 - 1)^5 (s^3 - 3\sqrt{3}s^2 - 3s + \sqrt{3}) \\ \eta\theta: & 576(s^2 + 1)^5 (3s^2 - 1)^4 (3s^3 - 3\sqrt{3}s^2 - 9s + \sqrt{3}) \\ \eta^2: & -144(s^2 + 1)^7 (3s^2 - 1)(3s^9 + 3\sqrt{3}s^8 - 72s^7 \\ & + 8\sqrt{3}s^6 + 246s^5 + 6\sqrt{3}s^4 - 176s^3 + 15s - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

dont le discriminant vaut

$$\Delta = 24^4 (s^2 + 1)^{10} (3s^2 - 1)^6 s^2 (s^2 - 3)^2 (\sqrt{3}s^3 - 3s^2 - 3\sqrt{3}s + 1)^2.$$

En dehors des valeurs annulant X'_0 , les seules valeurs annulant Δ vérifient

$$\sqrt{3}s^3 - 3s^2 - 3\sqrt{3}s + 1 = 0$$

dont les racines sont $\text{tg}(\pi/18)$, $\text{tg}(13\pi/18)$, $\text{tg}(25\pi/18)$ et correspondent aux trois points singuliers de $\tilde{F}_b$. Nous avons prouvé qu'en coupant l'image de $\tilde{F}_b$ par le plan $X'_2 = sX'_1$ transverse à la courbe double au point de paramètre s , nous obtenions deux branches de courbe à tangentes distinctes. Ceci termine la preuve de position générale cherchée. c.q.f.d.

PROPRIÉTÉ 14. *La famille à un paramètre de surfaces définie par $\{\tilde{F}_b\}_{b \in \mathbb{R}}$ admet en $b = 1/\sqrt{3}$ une singularité générique du type "confluence hyperbolique de deux bonnets croisés".*

Preuve. En fait cette confluence de deux bonnets croisés (M. Wallace Collao [WA]) se produit simultanément aux trois points singuliers définis par la propriété précédente, mais la symétrie d'ordre trois de l'image de $\tilde{F}_b$ nous permet de nous placer au point

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (\theta, t) = \left(\frac{\pi}{9}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S_1 \times \mathbb{R}.$$

On place la singularité et l'origine en posant

$$b = b' + \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \theta = \theta' + \frac{\pi}{9}, \quad t = t' + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et on étudie, au voisinage de l'origine, la fonction $\mathbb{R} \times S_1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^4$ donnée par

$$f(b', \theta', t') = \begin{pmatrix} b' \\ \frac{\sqrt{2}(\cos 2\theta + \sqrt{2} t \cos \theta)}{3(1 - \sqrt{2} b t \sin 3\theta + t^2)} \\ \frac{\sqrt{2}(\sin 2\theta - \sqrt{2} t \sin \theta)}{3(1 - \sqrt{2} b t \sin 3\theta + t^2)} \\ \frac{1}{1 - \sqrt{2} b t \sin 3\theta + t^2} \end{pmatrix}.$$

On note f_1, f_2, f_3, f_4 les composantes de f . La propriété précédente nous dit que le rang de la matrice jacobienne de f à l'origine est inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire que f admet une singularité à l'origine 0.

Par ailleurs on pose $t_0 = \operatorname{tg}(\pi/18)$ dont le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ vaut $t^3 - \sqrt{3}t^2 - 3t + (1/\sqrt{3})$. On a

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(b', \theta')} (0, 0, 0) = \frac{\sqrt{2}(t_0 - \sqrt{3})(6t_0^2 + 3\sqrt{3}t_0 - 1)}{3(t_0^2 + 1)^2} \neq 0$$

la singularité est donc de corang 1 à la source, c'est-à-dire $0 \in \Sigma^1(f)$ (voir par exemple V. I. Arnold [AR]). Les équations locales de $\Sigma^1(f)$ au voisinage de 0 sont

$$D_3 = 0 \quad \text{et} \quad D_4 = 0$$

où

$$D_3 = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(b', \theta', t')}, \quad D_4 = \frac{D(f_1, f_2, f_4)}{D(b', \theta', t')}.$$

On a à l'origine

$$\partial_{b'} D_3 \cdot \partial_{\theta'} D_4 - \partial_{\theta'} D_3 \cdot \partial_{b'} D_4 = \frac{-256\sqrt{2}}{9(t_0^2 + 1)^5} \cdot (99\sqrt{3} t_0^2 + 176t_0 - 21\sqrt{3}) \neq 0$$

ce qui signifie que les équations $D_3 = 0$ et $D_4 = 0$ sont indépendantes et définissent la courbe $\Sigma^1(f)$ régulièrement à l'origine.

Par ailleurs d'après la propriété 7 l'application $\tilde{F}_b$ est une immersion donc la courbe $\Sigma^1(f)$ est tangente en 0 à la surface $b' = 0$, c'est-à-dire

$$(\partial_{\theta'}, D_3 \cdot \partial_{t'} D_4 - \partial_{t'} D_3 \cdot \partial_{\theta'} D_4)(0, 0, 0) = 0.$$

On a également

$$\begin{aligned} & \partial_{b'} (\partial_{\theta'} D_3 \cdot \partial_{t'} D_4 - \partial_{t'} D_3 \cdot \partial_{\theta'} D_4)(0, 0, 0) \\ &= \frac{-512}{27\sqrt{3} (t_0^2 + 1)^5} \cdot (1233t_0^2 + 736\sqrt{3} t_0 - 263) \neq 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que le contact de $\Sigma^1(f)$ avec $b' = 0$ à l'origine est d'ordre deux exactement. Il reste à vérifier que la restriction de f à $\Sigma^1(f)$ est régulière en 0 c'est-à-dire $0 \in \Sigma^{1,0}(f)$. On remarque d'abord

$$\partial_{\theta'} D_4(0, 0, 0) = \frac{4}{(t_0^2 + 1)^2} \cdot (1 - 3t_0^2) \neq 0$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{D(f_2, D_4)}{D(\theta', t')}(0, 0, 0) &= \frac{D(f_1, f_2, D_4)}{D(b', \theta', t')}(0, 0, 0) \\ &= \frac{-256}{9\sqrt{3} (t_0^2 + 1)^4} (9\sqrt{3} t_0^2 + 17t_0 - 2\sqrt{3}) \neq 0 \end{aligned}$$

on aura alors en appliquant le théorème des fonctions implicites à l'origine sur $\Sigma^1(f)$

$$\partial_{t'} \theta' = \frac{-\partial_{t'} D_4}{\partial_{\theta'} D_4} \quad \text{et} \quad \partial_{t'} b' = 0$$

donc si g_2 est la restriction de f_2 à $\Sigma^1(f)$, on a à l'origine

$$\partial_{t'} g_2 = \frac{-1}{\partial_{\theta'} D_4} \times \frac{D(f_2, D_4)}{D(\theta', t')} \neq 0$$

ce qui prouve que g_2 est de rang 1 à l'origine ainsi que la restriction de f à $\Sigma^1(f)$.

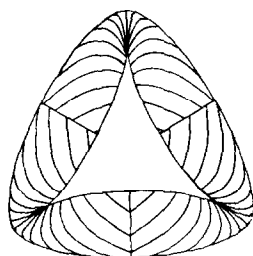


FIG. 39. Surface romaine de Steiner ($b=0$).

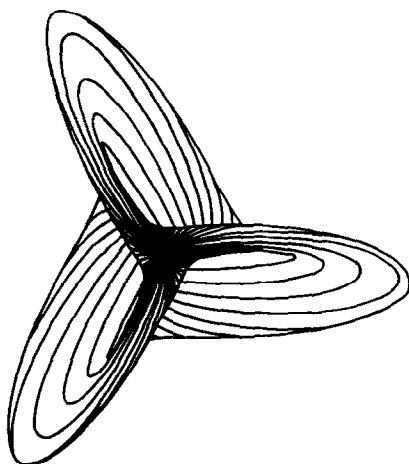


FIG. 40. Surface de Boy du sixième degré ($b=1$).

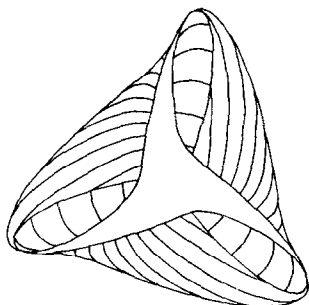


FIG. 41. Surface singulière avec confluence des six bonnets croisés par paires ($b=1/\sqrt{3}$).

Nous avons établi la généricité de la singularité étudiée. Elle est nécessairement du type "confluence de deux bonnets croisés" et le fait qu'elle est située sur la courbe double de $\tilde{F}_b$, qui ne disparaît pas pour $b > 1/\sqrt{3}$ nous indique qu'il s'agit d'une confluence hyperbolique et non elliptique. (M. Wallace Collao [WA]). c.q.f.d.

Dans ce paragraphe nous avons montré que la déformation algébrique qui permet de passer de la surface de Boy à la surface romaine passe par une singularité générique en $b = 1/\sqrt{3}$ reliant, au voisinage de cette valeur, une C^1 -immersion en position générale du plan projectif réel dans $\mathbb{R}^3$ du type Boy à une surface stable à six bonnets croisés du type romaine (Figs. 39–41).

VI. EXISTENCE D'UNE IMMERSION POLYNOMIALE DE $P(\mathbb{R}^3)$ DANS $\mathbb{R}^3$

Nous avons construit au paragraphe III une C^1 -immersion de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$ dont nous avons montré qu'elle n'était pas de classe C^2 en un point. Pour répondre à une conjecture mentionnée dans H. Hopf [HO] nous allons montrer par un procédé d'approximation qu'il existe une immersion polynomiale de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par trois polynômes homogènes de même degré pair en x, y, z définis sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

PROPRIÉTÉ 15. *Il existe trois polynômes homogènes de degré $2d$ en x, y, z définissant par passage au quotient par l'action antipodale sur la sphère unité S une immersion en position générale de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^3$ dont l'image est une surface de Boy admettant comme axe de symétrie ternaire la droite $X_1 = X_2 = 0$.*

Preuve. Si $S \rightarrow^F \mathbb{R}^3$ est l'immersion de classe C^1 définie au paragraphe III pour $b = 1$ on note $\mathbb{R}^3 \rightarrow^G \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$G(x, y, z) = \eta(x^2 + y^2 + z^2) \cdot F(x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, \\ x(y^2 + z^2)^{-1/2}, y(x^2 + z^2)^{-1/2})$$

où $\mathbb{R} \rightarrow^{\eta} \mathbb{R}$ est une application de classe C^1 à support compact dans $]0, +\infty[$ qui vaut 1 au voisinage de 1. On introduit le produit de convolution

$$\pi_n^m = G * \varphi_n^m$$

où

$$\varphi(x, y, z) = \exp(-x^2 - y^2 - z^2), \quad I = \int \varphi(X) dX,$$

$$\varphi_n(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (x^2 + y^2 + z^2)^k,$$

$$\varphi_n^m(x, y, z) = m^3 \cdot I^{-1} \varphi_n(mx, my, mz).$$

Il est clair que sur tout compact on peut approcher uniformément à ε près G ainsi que toutes ses dérivées premières, par une application polynomiale π_n^m et ses dérivées premières. Remarquons que π_n^m étant invariante par l'action antipodale sur S , ses composantes sont constituées de monômes de degrés pairs, on peut donc les rendre homogènes de même degré $2d$ en utilisant le facteur $x^2 + y^2 + z^2$ qui vaut 1 sur S , pour former l'application polynomiale $S \rightarrow {}^\pi \mathbb{R}^3$. La symétrie ternaire de l'image de F nous assure de celle de l'image de π .

Sachant que sur la sphère S on a

$$(\partial_x G, \partial_y G, \partial_z G) = (\partial_x F, \partial_y F, \partial_z F) \cdot \begin{pmatrix} 1 - x^2 & -xy & -zx \\ -xy & 1 - y^2 & -yz \\ -zx & -yz & 1 - z^2 \end{pmatrix}$$

on en déduit sur S

$$\text{rg} \begin{bmatrix} \partial_x G & \partial_y G & \partial_z G \\ x & y & z \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} \partial_x F & \partial_y F & \partial_z F \\ x & y & z \end{bmatrix} = 3$$

donc pour ε suffisamment petit on a sur S

$$\text{rg} \begin{bmatrix} \partial_x \pi & \partial_y \pi & \partial_z \pi \\ x & y & z \end{bmatrix} = 3$$

ce qui prouve que π est une immersion. Pour ε suffisamment petit π conserve les propriétés de position générale de F ainsi que les propriétés géométriques en faisant une immersion de Boy. c.q.f.d.

Nous avons vu dans la propriété 5 que cette immersion polynomiale ne pouvait être réalisée par des formes quadratiques.

En fait H. Hopf [HO] mentionne la conjecture selon laquelle cette immersion polynomiale ne pourrait être réalisée par des formes quartiques. L'objet du paragraphe suivant est de réfuter cette conjecture en construisant une immersion de la sphère dans $\mathbb{R}^3$ donnée par trois polynômes homogènes du quatrième degré. En langage algébrique prouver qu'une telle application est une immersion revient à montrer qu'un morphisme

algébrique n'est pas ramifié. Si la technique du résultant permet de résoudre ce problème dans le cas où le corps de base est algébriquement clos il en va tout autrement sur $\mathbb{R}$ et c'est justement cette difficulté qui va nous conduire à des calculs fastidieux car on a :

PROPRIÉTÉ 16. *Les homographies sont les seuls morphismes algébriques non ramifiés de $P(\mathbb{C}^n)$ dans $P(\mathbb{C}^{n+1})$ dès que n est supérieur ou égal à 3.*

Preuve. Comme me l'a fait remarqué J-P. Jouanolou cette propriété algébrique ne dépend pas du corps algébriquement clos sur lequel on l'énonce, mais nous en donnons une démonstration sur $\mathbb{C}$ où la notion de singularité stable la rend élémentaire.

On considère un morphisme algébrique de $P(\mathbb{C}^n)$ dans $P(\mathbb{C}^{n+1})$ dont les composantes $(f_0, \dots, f_n)$ sont des polynômes homogènes de degré $d \geq 2$ en $x_1, \dots, x_n$.

On définit la fonction rationnelle $P(\mathbb{C}^n) \rightarrow^F P(\mathbb{C}^{n+1})$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = \varepsilon f_0 + (1 - \varepsilon) x_1 x_n^{d-1} \\ F_1 = \varepsilon f_1 + (1 - \varepsilon) x_1 x_2 x_n^{d-2} \\ F_2 = \varepsilon f_2 + (1 - \varepsilon) x_2^2 x_n^{d-2} \\ F_i = \varepsilon f_i + (1 - \varepsilon) x_i x_n^{d-1}, \quad 3 \leq i \leq n. \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{V}$ la variété algébrique résultante des $n+1$ mineurs $n \times n$ de la matrice jacobienne de F dans l'espace $\mathbb{C}$ du paramètre ε . Pour $\varepsilon=0$ l'application F admet en $(0, \dots, 0, 1)$ une singularité stable du type "parapluie de Whitney", de sorte que $\mathcal{V}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ donc coïncide avec $\mathbb{C}$. Puisque $\mathcal{V}$ contient le point $\varepsilon=1$, le morphisme algébrique $(f_0, \dots, f_n)$ est ramifié. c.q.f.d.

VII. CONSTRUCTION D'UNE IMMERSION POLYNOMIALE DU QUATRIÈME DEGRÉ DE $P(\mathbb{R}^3)$ DANS $\mathbb{R}^3$

Nous allons construire une immersion de la sphère unité S dans $\mathbb{R}^3$ donnée par trois polynômes homogènes du quatrième degré en x, y, z , en nous inspirant encore une fois de l'immersion de Boy. On regarde cette fois-ci le contour apparent de la surface de Boy vue du point à l'infini de son axe de symétrie ternaire. On part de la remarque de B. Morin selon laquelle ce contour apparent représente, modulo la symétrie d'ordre trois de la surface, une perturbation de l'ensemble des valeurs critiques de la singularité du "mouchoir plié en quatre" (Figs. 43-45). Si on représente cette singularité

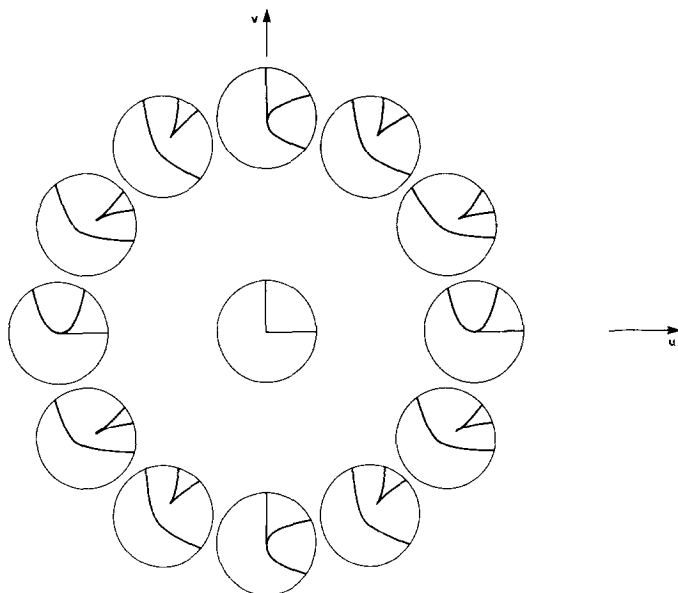


FIG. 42. Valeurs critiques de la singularité du mouchoir plié en quatre pour différentes valeurs des paramètres de déploiement u , v .

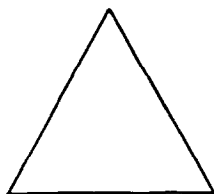


FIG. 43. Triangle équilatéral revêtu huit fois par la sphère aux sommets duquel se trouvent trois singularités du type "mouchoir plié en quatre".

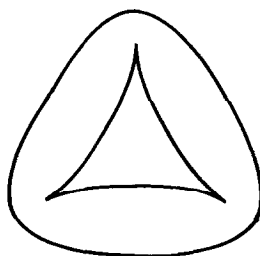


FIG. 44. Perturbation de l'ensemble des valeurs critiques de l'application (Fig. 43) de façon que le lieu critique sur la sphère soit connexe.

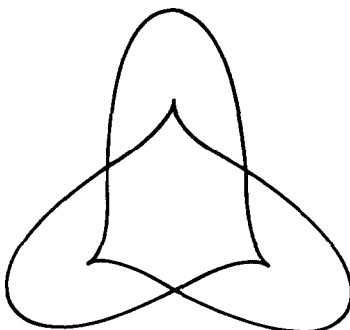


FIG. 45. Perturbation de l'ensemble des valeurs critiques de l'application (Fig. 43) de façon que le lieu critique sur la sphère ne soit plus connexe.

par l'application $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ dont l'ensemble des valeurs critiques est le bord du premier cadran, alors la famille d'applications

$$\varphi_{u,v}: (x, y) \mapsto (x^2 + 2yu, y^2 + 2xv), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

est un déploiement à deux paramètres de cette singularité [MA] et le lieu critique de $\varphi_{u,v}$ est l'hyperbole $xy = uv$. L'ensemble des valeurs critiques est donc la quartique unicursale

$$\begin{cases} X = x^2 + 2u^2vx^{-1} \\ Y = 2xv + u^2v^2x^{-2} \end{cases}$$

admettant un rebroussement de première espèce au point

$$3(uv)^{2/3} \cdot \begin{vmatrix} u^{2/3} \\ v^{2/3} \end{vmatrix},$$

et un arc dont la concavité est tournée vers le rebroussement (Fig. 42).

Pour construire notre immersion sur le modèle de la surface de Boy on commence par en construire la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie. On part donc de l'application $S \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\varphi + \varphi^*j + \varphi^{**}j^2$ où

$$\varphi(x, y, z) = x^2, \quad \varphi^*(x, y, z) = \varphi(y, z, x) \text{ et } j = e^{2i\pi/3}.$$

Son lieu critique est un octaèdre régulier de la sphère S , et elle applique S sur un triangle équilatéral revêtu huit fois aux sommets duquel se trouvent six mouchoirs pliés en quatre, à raison de deux par sommet (Fig. 46).

Bien entendu cette application est invariante sous l'action antipodale. On veut maintenant perturber φ de façon à faire du lieu critique une courbe connexe car le contour apparent de la surface de Boy est l'image C^1 d'un

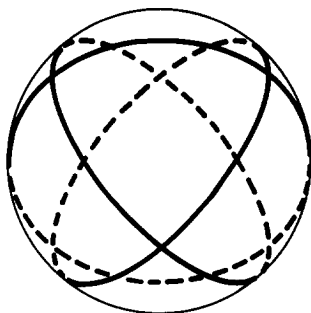


FIG. 46. Lieu critique sur la sphère de l'application définie en la figure 43.

cercle. L'analogie avec le déploiement du mouchoir plié en quatre nous indique que le terme perturbateur est divisible par y donc également par z si on veut que dans φ^* il soit divisible par x , ce qui nous suggère finalement la perturbation $\varphi = x^2 + yz\psi$ où ψ une forme quadratique.

Comme nous l'avons dit le lieu critique de l'application $\varphi + \varphi^*j + \varphi^{**}j^2$ doit être connexe pour que son image puisse correspondre au contour apparent de la surface de Boy. Il y a en effet deux manières de plier un mouchoir en quatre de façon à obtenir la singularité $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ à l'origine, correspondant aux deux façons de tendre vers cette singularité à partir du déploiement $\varphi_{u,v}$ suivant que uv est strictement positif ou strictement négatif. Dans le premier cas le lieu critique de $\varphi_{u,v}$ est une hyperbole équilatère située dans les cadrans impairs et dans le deuxième cas elle est située dans les cadrans pairs. Si maintenant on examine le lieu critique de $\varphi + \varphi^*j + \varphi^{**}j^2$ sur la sphère qui est une perturbation du 1-squelette de l'octaèdre régulier sphérique passant par $(1, 0, 0)$ $(0, 1, 0)$ $(0, 0, 1)$, en se plaçant au sommet $(0, 0, 1)$ il est clair que le premier cas donne par symétrie ternaire un lieu critique à trois composantes connexes sur la sphère, alors que le second donne un lieu critique connexe (Figs. 47, 48).

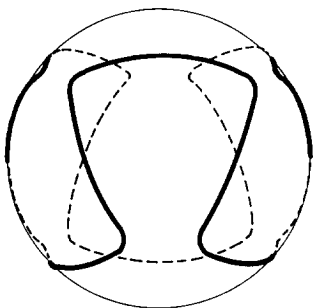


FIG. 47. Perturbation connexe du lieu critique.

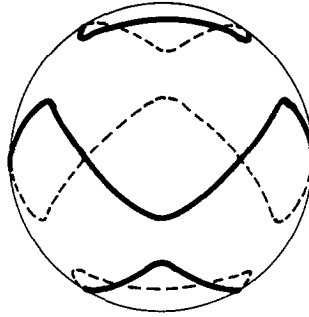


FIG. 48. Perturbation non-connexe du lieu critique.

Si on pose

$$\psi = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2$$

alors, au voisinage du sommet $(0, 0, 1)$ le deuxième cas correspond à la condition

$$z \cdot \psi \cdot z \cdot \psi^* < 0$$

or si fc est non nul on a les équivalents suivants

$$\psi \sim f, \quad \psi^* \sim c$$

donc on doit avoir

$$fc < 0.$$

Le cas le plus simple qui nous vient à l'esprit est

$$c = 1, \quad f = -1, \quad a = b = d = e = 0$$

soit

$$\varphi = x^2 + yz(y^2 - z^2).$$

C'est cette perturbation que nous allons utiliser dans la suite, étant surtout guidés par l'idée que la simplicité de φ contribuera à simplifier les calculs ultérieurs. Rien ne prouve cependant qu'un choix différent des coefficients a, b, c, d, e, f n'aurait pas donné des calculs plus simples.

On a défini la projection de l'immersion de Boy sur un plan perpendiculaire à son axe de symétrie ternaire par $\varphi + \varphi^*j + \varphi^{**}j^2$. Si maintenant on veut relever cette application de S dans $\mathbb{C}$ en l'immersion de Boy de S dans $\mathbb{R}^3$, on se donne une fonction hauteur $S \rightarrow \mathbb{R}$ issue d'une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ polynomiale paire, invariante par le groupe alterné $\mathcal{A}_3$ et

admettant sur la sphère deux maxima, six minima et six cols non dégénérés. On a choisi

$$h(x, y, z) = \sigma_1^4 + 4\sigma_1\rho \quad \text{où } \sigma_1 = x + y + z \text{ et} \\ \rho = (y - x)(z - y)(x - z)$$

PROPRIÉTÉ 17. $S \rightarrow^h \mathbb{R}$ est une fonction de Morse sur la sphère admettant deux maxima donnés modulo l'action antipodale par $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, six cols et six minima donnés respectivement modulo l'action antipodale et la rotation de $2\pi/3$ autour de la droite $x = y = z$, par $(\sqrt{2}/\sqrt{3}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ et $(-((1-x)/3)^{1/2}, -(x/2)^{1/2} - ((1-x)/3)^{1/2}, (x/2)^{1/2} - ((1-x)/3)^{1/2})$ où x est la racine réelle de $70x^3 - 186x^2 + 171x - 54$.

Preuve. On commence par effectuer le changement de repère orthonormé donné par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Par ce changement de repère la droite $x = y = z$ a pour équation $X = Y = 0$, et h devient

$$h(x, y, z) = 9Z^4 + 2\sqrt{6} \cdot X \cdot Z(X^2 - 3Y^2).$$

On étudie alors les points critiques de cette application sur la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, modulo le groupe Γ engendré par la symétrie par rapport à l'origine et la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de $0z$.

On obtient les équations

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad \begin{vmatrix} Z(Y^2 - X^2) & X \\ 2XYZ & Y \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -3Z(Y^2 - X^2) & X \\ 3\sqrt{6}Z^3 + X(X^2 - 3Y^2) & Z \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} -6XYZ & Y \\ 3\sqrt{6}Z^3 + X(X^2 - 3Y^2) & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qui donne, modulo l'action de Γ les trois points

$$(0, 0, 1), \quad (0, 1, 0), \quad (\sqrt{X_0}, 0, -(1 - X_0)^{1/2})$$

où X_0 est la racine réelle de

$$70X^3 - 186X^2 + 171X - 54.$$

On calcule maintenant le 2-jet $[h]_2$ de h aux points considérés:

$$(0, 0, 1) \quad [h]_2 = 1 - 2X^2 - 2Y^2 \quad \text{indice 2 maximum}$$

$$(0, 1, 0) \quad [h]_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} ((X-Z)^2 - (X+Z)^2) \quad \text{indice 1 col}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{X_0}, 0, -(1-X_0)^{1/2}) \quad [h]_2 = & (1-X_0)^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} X_0(X_0-X_0^2)^{1/2} \\ & + \frac{6(1-2X_0)}{3-4X_0} (X-\sqrt{X_0})^2 \\ & + \sqrt{6}(X_0-X_0^2)^{1/2} Y^2 \quad \text{indice 0 minimum} \\ & \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

L'application $S \xrightarrow{(\varphi + j\varphi^* + j^2\varphi^{**}, h)} \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ définit une application rationnelle $P(\mathbb{C}^3) \rightarrow^F P(\mathbb{C}^4)$ par composition de l'application $P(\mathbb{C}^3) \rightarrow^G P(\mathbb{C}^5)$ où les composantes de G sont $G_1 = x^2(x^2 + y^2 + z^2) + yz(y^2 - z^2)$, $G_2 = G_1^*$, $G_3 = G_2^*$, $G_4 = \sigma_1^4$, $G_0 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ suivie de la projection conique H de centre $u = (0, 1, 1, 1, -12)$ sur $P(\mathbb{C}^5/\mathbb{C}u)$.

Pour le voir il suffit d'effectuer le changement de coordonnées homogènes suivant dans $P(\mathbb{C}^5)$

$$\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \cdot \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ \cdot & 1 & 1 & 1 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}.$$

La projection conique H s'exprime alors par suppression de Y_4 et si on identifie $P(\mathbb{C}^5/\mathbb{C}u)$ avec $P(\mathbb{C}^4)$ grâce au système de coordonnées homogènes

$$Z_0 = Y_0, \quad Z_1 = Y_1, \quad Z_2 = Y_2, \quad Z_3 = Y_3$$

on obtient la paramétrisation polynomiale du quatrième de S dans $\mathbb{R}^3$ en gardant les trois composantes F_1, F_2, F_3 de F donnée sur S par:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{1}{2} (2G_1 - G_2 - G_3) = \operatorname{Re}(\varphi + j\varphi^* + j^2\varphi^{**}) \\ F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (G_2 - G_3) = \operatorname{Im}(\varphi + j\varphi^* + j^2\varphi^{**}) \\ F_3 = G_4 + 4(G_1 + G_2 + G_3 - G_0) = h \\ F_0 = G_0 = 1. \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que l'application rationnelle F induit l'application polynomiale de S dans $\mathbb{R}^3$ cherchée avec

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} [(2x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz(y^2 - z^2) + zx(x^2 - z^2) \\ &\quad + xy(y^2 - x^2)] \\ F_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} [(y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + zx(z^2 - x^2) + xy(y^2 - x^2)] \\ F_3 &= (x + y + z)[(x + y + z)^3 + 4(y - x)(z - y)(x - z)]. \end{aligned}$$

On note Σ la surface rationnelle de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^5)$ définie par G .

PROPRIÉTÉ 18. $P(\mathbb{C}^3) \rightarrow^F P(\mathbb{C}^4)$ est un morphisme algébrique dont l'image $H(\Sigma)$ est une surface algébrique rationnelle de degré 16 et d'équation

$$Z_0^{-32} \cdot \operatorname{Res}(Z_0 F_1 - Z_1 F_0, Z_0 F_2 - Z_2 F_0, Z_0 F_3 - Z_3 F_0) = 0$$

où $\operatorname{Res}(\cdot)$ désigne le résultant par rapport aux coordonnées homogènes x, y, z de $P(\mathbb{C}^3)$.

Preuve. Pour prouver que F est un morphisme algébrique il suffit d'établir que G en est un, puis que le centre u de H n'appartient pas à Σ . Notons d'abord que $G_4 = 0$ implique $\sigma_1 = 0$ et $G_0 = 0$ implique alors $\sigma_2 = 0$, et on a $(x, y, z) = (x_0, jx_0, j^2x_0)$ donc $G_1 = yz(y^2 - z^2) = -x_0^4(1 + 2j)$ et finalement $G_1 = G_4 = G_0 = 0$ implique $x = y = z = 0$, ce qui prouve que G est un morphisme algébrique.

Si maintenant on suppose $(G_0, G_1, G_2, G_3, G_4) = \lambda(0, 1, 1, 1, -12)$ alors on a $G_0 = 0$, soit $\sigma_1^2 = 2\sigma_2$, et par suite $G_1 + G_2 + G_3 = \sigma_1\rho = 3\lambda$. De plus $4(G_1 + G_2 + G_3) + G_4 = 0$ soit $\sigma_1(\sigma_1^3 + 4\rho) = 0$. Si $\sigma_1 = 0$ alors $\lambda = 0$. Si $\sigma_1 \neq 0$ alors $\rho = -\frac{1}{4}\sigma_1^3$. De plus $G_1 - G_2 = G_2 - G_3 = G_3 - G_1 = 0$ ce qui donne

$$\begin{aligned} (x + y)(2x^2 - xy + 2y^2) &= (y + z)(2y^2 - yz + 2z^2) \\ &= (z + x)(2z^2 - xz + 2x^2) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\left(\begin{array}{l} \text{ou} \\ (x+y)(y+z)(z+y) = \sigma_1^3/2 - \sigma_3 = 0 \\ T(2x^2 - xy + 2y^2) = -\sigma_2 = 0 \end{array} \right.$$

mais $\sigma_1 \neq 0$ implique $\sigma_2 \neq 0$ donc $\sigma_3 = \sigma_1^3/2$ et si on remplace σ_2, σ_3, ρ par leurs valeurs en fonction de σ_1 dans la formule (0) de l'appendice B donnant le discriminant du polynôme du troisième degré, on trouve $\sigma_1 = 0$. Finalement on a bien $\lambda = 0$ ce qui montre que u n'appartient pas à Σ .

Examinons maintenant l'équation de $H(\Sigma)$ définie paramétriquement par

$$Z_i = F_i(x, y, z), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

F étant un morphisme algébrique, le point (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) appartient à $H(\Sigma)$ si et seulement si le résultant par rapport à x, y, z, t suivant est nul

$$\text{Res}(F_1 - Z_1 t^4, F_2 - Z_2 t^4, F_3 - Z_3 t^4, F_0 - Z_0 t^4).$$

Les propriétés du résultant nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} Z_0^{128} \text{Res}(F_1 - Z_1 t^4, F_2 - Z_2 t^4, F_3 - Z_3 t^4, F_0 - Z_0 t^4) \\ = \text{Res}^4(Z_0 F_1 - Z_1 F_0, Z_0 F_2 - Z_2 F_0, Z_0 F_3 - Z_3 F_0) \end{aligned}$$

donc

$$\text{Res}(Z_0 F_1 - Z_1 F_0, Z_0 F_2 - Z_2 F_0, Z_0 F_3 - Z_3 F_0)$$

est divisible par Z_0^{32} et (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) appartient à $H(\Sigma)$ si et seulement si

$$Z_0^{-32} \cdot \text{Res}(Z_0 F_1 - Z_1 F_0, Z_0 F_2 - Z_2 F_0, Z_0 F_3 - Z_3 F_0) = 0.$$

La surface rationnelle $H(\Sigma)$ est irréductible, donc son degré est diviseur de celui de l'équation précédente qui vaut $-32 + 48 = 16$.

Pour s'assurer que le degré de $H(\Sigma)$ est exactement 16 il suffit de trouver un point de $H(\Sigma)$ n'ayant qu'un seul antécédent par F en lequel F ne soit pas ramifié. C'est le cas du pôle $(1, 0, 0, 9)$ situé sur l'axe de symétrie ternaire de $H(\Sigma)$, $Z_1 = Z_2 = 0$, et dont l'unique antécédent est le point $(1, 1, 1)$ en lequel F n'est pas ramifié. c.q.f.d.

Remarque 19. On peut chercher les points d'intersection de $H(\Sigma)$ avec l'axe de symétrie ternaire $Z_1 = Z_2 = 0$ et voir en particulier que la trace de $H(\Sigma)$ dans $P(\mathbb{R}^4)$ contient strictement l'image par F de $P(\mathbb{R}^3)$.

On pose pour cela

$$\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 8 & \cdot & 1 \\ \cdot & 4 & 4\sqrt{3} & 1 \\ \cdot & -4 & -4\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$H_2 = H_1^*, \quad H_3 = H_2^*, \quad H_1 + H_2 + H_3 = 3F_3 = 3(\sigma_1^4 + 4\sigma_1\rho)$$

et

$$F_1 = F_2 = 0 \Leftrightarrow H_1 = H_2 = H_3.$$

On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} TxH_1 = \sigma_1^5 - 6\sigma_1^3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 14\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 + 36\sigma_3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \\ T(x+y+z)H_1 = -5\sigma_1^5 + 12\sigma_1^3(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 2\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 \\ \quad + 48\sigma_1^2\sigma_3 + 12\rho(\sigma_1^2 - 2\sigma_2). \end{array} \right.$$

De sorte que si $H_0 = 0$ alors $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0$ et le système ci-dessus donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(\sigma_1^4 + 4\sigma_1\rho) = \sigma_1^5 \\ \sigma_1(\sigma_1^4 + 4\sigma_1\rho) = -5\sigma_1^5 + 48\sigma_1^2\sigma_3 \end{array} \right.$$

or σ_1 ne peut être nul car on aurait $H_1 = H_2 = H_3 = H_0 = 0$, donc on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \sigma_1^3 - 8\sigma_3 = 0 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0 \end{array} \right.$$

ce qui contredit l'équation (0) de l'appendice B. On peut donc supposer $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1$ on pose également $F_3 = t$ alors on obtient le système

$$\sigma_1^4 + 4\sigma_1\rho - t = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_1^5 - 6\sigma_1^3 + (14 - t)\sigma_1 + 36\sigma_3 = 0 \quad (2)$$

$$-5\sigma_1^5 + 12\sigma_1^3 + (2 - t)\sigma_1 + 48\sigma_1^2\sigma_3 + 12\rho = 0 \quad (3)$$

$$-4\rho^2 - 108\sigma_3^2 + 4\sigma_3\sigma_1(5\sigma_1^2 - 9) - \sigma_1^6 + 4\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2 + 2 = 0. \quad (4)$$

On élimine ρ et σ_3 entre les trois premières équations par la combinaison

$$\text{Eq. (5)} = 9(\text{Eq. (1)}) + 4\sigma_1^3(\text{Eq. (2)}) - 3\sigma_1(\text{Eq. (3)}).$$

On obtient alors en posant $s = \sigma_1^2$:

$$4s^4 - 9s^3 + (29 - 4t)s^2 + 3(t - 2)s - 9t = 0. \quad (5)$$

On reporte ensuite dans (4) la valeur de σ_3 tirée de (2)

$$144\rho^2 + 3s^5 - 16s^4 + 6(12 - t)s^3 + 8(2t - 19)s^2 + 3(t^2 - 16t + 88)s - 72 = 0. \quad (6)$$

On reporte dans (6) la valeur de ρ tirée de (1)

$$\begin{aligned} & 3s^6 - 16s^5 + 3(27 - 2t)s^4 + 8(2t - 19)s^3 + 3(t^2 - 22t + 88)s^2 \\ & - 72s + 9t^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Pour $t = 0$ le système (1)–(4) n'a pas de solution, on suppose donc $t \neq 0$ et dans ce cas si les équations (5) et (7) admettent une solution commune en s , on a bien $s \neq 0$, on en déduit σ_1 puis σ_3 et ρ à l'aide de (2) et (3), alors (1) est vérifiée et s étant non nul l'équation (6) est également vérifiée ce qui donne (4) à l'aide de (2).

Ainsi il existe $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tel que

$$\begin{cases} TH_1 = 3t \\ TxH_1 = \sigma_1 t \\ T(x + y + z)H_1 = \sigma_1 t. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système dont les inconnues sont H_1, H_2, H_3 est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y - z & z - x & x - y \end{vmatrix} = s - 3.$$

Si $s = 3$ l'équation (5) donne $t = 9$ et on en déduit

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad \rho = 0$$

ce qui donne le point

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

dont l'unique antécédent est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On voit finalement que tout point de la surface $H(\Sigma)$ situé sur la droite $Z_1 = Z_2 = 0$ et différent du pôle

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

correspond à exactement une racine, différente de 0 et 9, du déterminant de

Sylvester relativement à s de (5) et (7) qui vaut, à une constante multiplicative près:

$$t(t-9)^2(9t-1)(t+3)^2(t^2-t+296)=0.$$

$t = \frac{1}{9}$. Les équations (5) et (7) deviennent

$$(3s-1)(12s^3-23s^2+78s+9)=0$$

$$(3s-1)(27s^5-135s^4+678s^3-1126s^2+1935s-3)=0$$

dont l'unique solution commune est $s=1/3$ soit $\sigma_1=1/\sqrt{3}$, $\sigma_2=-1/3$, $\sigma_3=-1/3\sqrt{3}$, $\rho=0$ ce qui donne le point triple

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dont les trois antécédents sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$t = -3$. Les équations (5) et (7) donnent

$$4s^4-9s^3+41s^2-15s+27=0$$

$$3s^6-16s^5+99s^4-200s^3+489s^2-72s+81=0$$

dont le $pgcd$ vaut s^2-2s+9 . On en tire

$$\sigma_1=\sqrt{2}\pm i, \sigma_2=\pm i\sqrt{2}, \sigma_3=\frac{1}{12}(3\sqrt{2}\pm i), \rho=-\frac{1}{3}(11\sqrt{2}\pm 2i)$$

ce qui donne le point sextuple

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

qui appartient à une composante réelle de $H(\Sigma)$ différente de l'image de $P(\mathbb{R}^3)$.

$t^2=t-296$. On obtient nécessairement deux points triples

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1\pm 13i\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

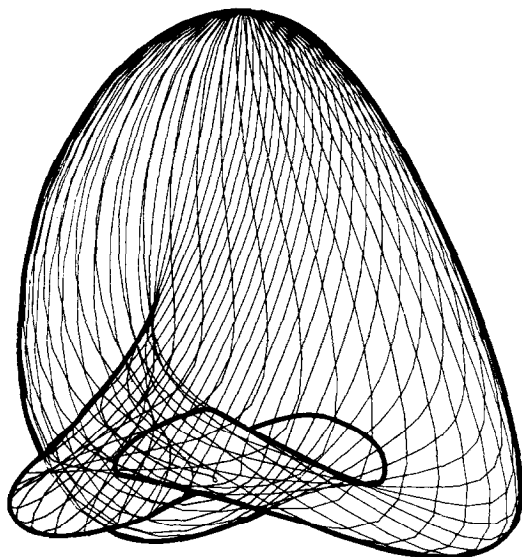


FIG. 49. Projection de la surface de Boy paramétrée par trois polynômes du quatrième degré sur un plan parallèle à l'axe de symétrie. Une projection de la même surface sur un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie est donnée en la figure 33. La paramétrisation utilisée dans cette figure est

$$\begin{pmatrix} 4F_1 \\ 4F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

où F_1, F_2, F_3 sont définis au paragraphe VII.

ce qui donne finalement avec les multiplicités, seize points de $H(\Sigma)$ situés sur la droite $Z_1 = Z_2 = 0$.

Nous allons maintenant prouver que F se restreint à une immersion de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $P(\mathbb{R}^4)$ (Figs. 49, 33).

VIII. LA RESTRICTION RÉELLE DE $P(\mathbb{C}^3) \rightarrow^F P(\mathbb{C}^4)$ EST NON RAMIFIÉE

LEMME 20. *La restriction réelle de $P(\mathbb{C}^3) \rightarrow^F P(\mathbb{C}^4)$ est de rang maximum si et seulement si les 3 déterminants $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ne s'annulent pas simultanément sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine, où*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \partial_x G_2 & \partial_y G_2 & \partial_z G_2 & 1 \\ \partial_x G_3 & \partial_y G_3 & \partial_z G_3 & 1 \\ \partial_x F_3 & \partial_y F_3 & \partial_z F_3 & 0 \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \Delta_1^*, \quad \Delta_3 = \Delta_2^*,$$

$$\Delta_4 = - \begin{vmatrix} \partial_x G_1 & \partial_y G_1 & \partial_z G_1 & 1 \\ \partial_x G_2 & \partial_y G_2 & \partial_z G_2 & 1 \\ \partial_x G_3 & \partial_y G_3 & \partial_z G_3 & 1 \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = \Delta_4^*.$$

Preuve. Dire que F est de rang maximum est équivalent à dire que le noyau de DF est nul c'est-à-dire que l'image de DG rencontre trivialement le noyau de H , ce qui signifie que la matrice

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -12 \end{matrix} \end{array} \right)$$

est de rang 4 sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine. On ne change pas le rang de la matrice en remplaçant la ligne $(\partial G_4, -12)$ par $(\partial F_3, 0)$.

Il reste à remarquer que quatre vecteurs liés trois à trois à un cinquième non nul sont nécessairement liés donc qu'il suffit de faire intervenir les déterminants contenant la ligne $(\partial_x G_0, \partial_y G_0, \partial_z G_0, 0) = 2(x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z, 0)$ pour exprimer que le rang de M est maximum. Les résultats de l'appendice B nous montrent les propriétés de symétrie. De plus on a

$$\Delta_1 = J^*(G_1, F_3, G_0) - J^{**}(G_1, F_3, G_0)$$

donc $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0$, il suffit donc de considérer $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. c.q.f.d.

La propriété 16 vue précédemment nous interdit l'usage du résultant pour voir si $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, ne s'annulent pas simultanément sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine.

Nous nous placerons dorénavant sur la sphère réelle S d'équation

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - 1). \quad (8)$$

Nous allons remplacer les équations $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ par des équations invariantes par le groupe alterné $\mathcal{A}_3$.

LEMME 21. Sur S le système $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ équivaut au système

$$Tx\Delta_1 = Ty\Delta_1 = Tz\Delta_1 = \Delta_4 = 0.$$

Preuve. En utilisant le lemme 0 de l'appendice B on exprime Δ_4 et $2Tx\Delta_1$ en fonction de σ_1, σ_3 et ρ après élimination de σ_2 grâce à (8)

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & 2\rho(\sigma_1^2 + 1) + 168\sigma_1\sigma_3^2 - 28\sigma_1^4\sigma_3 + 69\sigma_1^2\sigma_3 + 21\sigma_3 \\ & + 2\sigma_1^7 - 10\sigma_1^5 + 13\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$2Tx\Delta_1 = \rho\sigma_1(6\sigma_1^4 - 8\sigma_1^2 - 2) - 36\rho\sigma_3 + \sigma_3^2(216\sigma_1^2 + 162) \\ + \sigma_3\sigma_1(-68\sigma_1^4 + 87\sigma_1^2 + 27) + 4\sigma_1^8 - 12\sigma_1^6 + 6\sigma_1^4 + 9\sigma_1^2 - 3 \quad (10)$$

et on utilisera l'équation (0) de l'appendice B où l'on a éliminé σ_2

$$4\rho^2 = -108\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_1(20\sigma_1^2 - 36) - \sigma_1^6 + 4\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2 + 2. \quad (11)$$

Le système $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ est équivalent au système $Tx\Delta_1 = Ty\Delta_1 = Tz\Delta_1 = 0$ sur la partie de S où le déterminant circulant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_1(\sigma_1^2 - 3)$$

ne s'annule pas. Si $\sigma_1^2 = 3$ alors $x = y = z = \pm 1/\sqrt{3}$ et l'équation (9) montre que Δ_4 est non nul. Si $\sigma_1 = 0$ alors (9)–(11) montrent que Δ_4 et $Tx\Delta_1$ ne s'annulent pas simultanément. Il ne reste à voir que

$$Tx\Delta_1 + Ty\Delta_1 + Tz\Delta_1 = \sigma_1(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) = 0. \quad \text{c.q.f.d.}$$

Le lemme 0 de l'appendice B nous permet d'exprimer $Ty\Delta_1 - Tz\Delta_1$ en fonction de σ_1 , σ_3 et ρ

$$2Ty\Delta_1 - 2Tz\Delta_1 = \rho\sigma_1(-12\sigma_1^4 + 12\sigma_1^2 - 6) + \rho\sigma_3(96\sigma_1^2 - 18) \\ + 324\sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1(30\sigma_1^4 + 6\sigma_1^2) + 2\sigma_1^8 - 3\sigma_1^6 + 3\sigma_1^2 - 6. \quad (12)$$

La restriction réelle de F est donc de rang maximum si et seulement si le système

$$\Delta_4 = 2Tx\Delta_1 = 2Ty\Delta_1 - 2Tz\Delta_1 = 0$$

n'a pas de solution sur la sphère S .

Grâce à (9)–(12) on va étudier un système en σ_1 , σ_3 , ρ .

PROPRIÉTÉ 22. *La restriction réelle de $P(\mathbb{C}^3) \rightarrow^F P(\mathbb{C}^4)$ est un morphisme algébrique non ramifié.*

Preuve. On va éliminer successivement ρ et σ_3 dans les quatre équations obtenues à partir de (9)–(12), pour obtenir deux équations en σ_1^2 (les équations étant invariantes par l'action antipodale sur S) dont on constatera qu'elles n'ont pas de solutions sur S . On élimine ρ de $\Delta_4 = 0$ grâce à (9) et (11):

$$-28224\sigma_3^4\sigma_1^2 + 112\sigma_3^3\sigma_1(84\sigma_1^4 - 207\sigma_1^2 - 63) + \sigma_3^2(-1456\sigma_1^8 + 7224\sigma_1^6 \\ - 8061\sigma_1^4 - 2106\sigma_1^2 - 549) + 2\sigma_3\sigma_1(56\sigma_1^{10} - 418\sigma_1^8 + 1022\sigma_1^6 \\ - 769\sigma_1^4 - 92\sigma_1^2 + 45) - 4\sigma_1^{14} + 40\sigma_1^{12} - 153\sigma_1^{10} + 274\sigma_1^8 \\ - 227\sigma_1^6 + 74\sigma_1^4 - 10\sigma_1^2 + 2 = 0. \quad (13)$$

On élimine ρ entre $2Tx\Delta_1=0$ et $\Delta_4=0$ grâce à (9) et (10):

$$\begin{aligned} & -3024\sigma_1\sigma_3^3 + \sigma_3^2(504\sigma_1^6 - 384\sigma_1^4 - 1788\sigma_1^2 - 540) \\ & + \sigma_1\sigma_3(-84\sigma_1^8 + 351\sigma_1^6 - 24\sigma_1^4 - 501\sigma_1^2 + 6) \\ & + 6\sigma_1^{12} - 42\sigma_1^{10} + 85\sigma_1^8 - 45\sigma_1^6 - 16\sigma_1^4 - 3\sigma_1^2 + 3 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

On élimine ρ entre $2Ty\Delta_1 - 2Tz\Delta_1=0$ et $\Delta_4=0$ grâce à (9) et (12):

$$\begin{aligned} & (-8064\sigma_1^2 + 1512)\sigma_1\sigma_3^3 + \sigma_3^2(2352\sigma_1^6 - 4572\sigma_1^4 + 441\sigma_1^2 + 513) \\ & + \sigma_1\sigma_3(-264\sigma_1^8 + 1050\sigma_1^6 - 1122\sigma_1^4 + 336\sigma_1^2 + 36) \\ & - 70\sigma_1^{10} + 143\sigma_1^8 - 129\sigma_1^6 + 60\sigma_1^4 - 12\sigma_1^2 - 6 + 12\sigma_1^{12} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Il nous reste à montrer que le système (13)–(15) n'a pas de solution sur S . Il faut d'abord éliminer σ_3 pour obtenir deux équations en σ_1 où σ_1 ne doit intervenir qu'à des puissances paires.

On pose donc $s = \sigma_1^2$, l'élimination de σ_3 entre (13) et (14) et entre (14) et (15) donne respectivement (16) et (17):

$$\begin{array}{r|l} & s \\ \hline & 1 \ 6 \ 9 \ 5 \ 7 \ 3 \ 4 \ 7 \ 8 \ 4 \ 22 \\ - & 1 \ 8 \ 5 \ 9 \ 2 \ 9 \ 5 \ 2 \ 8 \ 3 \ 2 \ 21 \\ & 9 \ 0 \ 9 \ 4 \ 9 \ 0 \ 5 \ 3 \ 3 \ 7 \ 6 \ 20 \\ - & 2 \ 4 \ 2 \ 4 \ 2 \ 9 \ 0 \ 8 \ 7 \ 1 \ 0 \ 4 \ 19 \\ & 2 \ 9 \ 4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 6 \ 8 \ 2 \ 9 \ 9 \ 2 \ 18 \\ & 2 \ 3 \ 4 \ 0 \ 3 \ 6 \ 0 \ 4 \ 6 \ 3 \ 2 \ 8 \ 17 \\ - & 1 \ 4 \ 5 \ 9 \ 1 \ 5 \ 2 \ 6 \ 4 \ 1 \ 6 \ 1 \ 1 \ 16 \\ & 1 \ 9 \ 7 \ 4 \ 2 \ 4 \ 0 \ 4 \ 6 \ 7 \ 4 \ 3 \ 8 \ 15 \\ & 2 \ 8 \ 2 \ 5 \ 0 \ 3 \ 8 \ 9 \ 6 \ 9 \ 3 \ 0 \ 14 \\ - & 4 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ 3 \ 7 \ 3 \ 4 \ 0 \ 2 \ 0 \ 13 \\ & 4 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 8 \ 1 \ 8 \ 0 \ 7 \ 2 \ 12 \\ & 1 \ 3 \ 2 \ 9 \ 4 \ 3 \ 2 \ 7 \ 2 \ 0 \ 6 \ 6 \ 6 \ 11 \\ - & 5 \ 8 \ 8 \ 0 \ 1 \ 7 \ 1 \ 2 \ 3 \ 8 \ 1 \ 2 \ 2 \ 10 \\ & 3 \ 9 \ 8 \ 3 \ 3 \ 4 \ 5 \ 0 \ 7 \ 0 \ 5 \ 2 \ 8 \ 09 \\ & 3 \ 7 \ 8 \ 7 \ 1 \ 6 \ 8 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 7 \ 0 \ 08 \\ - & 3 \ 1 \ 4 \ 1 \ 5 \ 9 \ 1 \ 1 \ 5 \ 3 \ 5 \ 3 \ 4 \ 07 \\ & 9 \ 8 \ 9 \ 7 \ 2 \ 7 \ 6 \ 4 \ 7 \ 5 \ 9 \ 8 \ 06 \\ & 2 \ 6 \ 5 \ 1 \ 5 \ 2 \ 8 \ 4 \ 8 \ 5 \ 2 \ 6 \ 0 \ 05 \\ - & 2 \ 1 \ 7 \ 0 \ 5 \ 0 \ 4 \ 9 \ 9 \ 6 \ 5 \ 6 \ 04 \\ & 5 \ 9 \ 1 \ 8 \ 3 \ 1 \ 6 \ 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 8 \ 03 \\ - & 6 \ 1 \ 2 \ 4 \ 8 \ 9 \ 7 \ 4 \ 7 \ 4 \ 2 \ 02 \\ & 3 \ 3 \ 6 \ 8 \ 4 \ 6 \ 9 \ 8 \ 8 \ 8 \ 01 \\ & 5 \ 4 \ 6 \ 8 \ 5 \ 2 \ 7 \ 8 \ 9 \ 00 \end{array} \quad (16)$$

	s	
	7 5 3 6 5 9 9 0 4	20
-	6 9 6 0 3 3 1 0 0 8	19
	2 9 8 0 5 1 2 0 3 8 4	18
-	7 4 1 2 2 0 8 1 2 1 6	17
	1 0 3 6 9 5 1 4 1 8 8 8	16
-	3 5 1 2 4 3 0 5 7 7 2	15
-	1 5 3 7 1 7 4 1 5 5 5 8	14
	3 1 3 7 7 7 5 9 9 8 1 3	13
-	2 4 4 8 1 6 9 3 3 7 1 3	12
-	7 1 2 8 0 6 3 3 0 5 4	11
	3 1 6 6 3 4 7 2 5 6 6 2	10
-	2 7 8 3 3 1 6 4 5 7 8 9	09
	1 9 1 9 9 0 5 6 0 7 1	08
	1 3 6 8 4 8 9 5 1 0 7 2	07
-	1 2 8 5 2 1 3 4 3 9 7 0	06
-	1 8 6 5 7 4 8 2 1 3	05
	1 9 8 7 8 1 6 1 2 2 9	04
-	3 1 8 2 3 4 1 7 4 3 0	03
-	1 3 4 5 6 8 0 7 8 3 0	02
-	1 7 4 3 1 4 6 1 6 3	01
-	7 8 1 2 1 8 2 7	00

(17)

Nous calculons maintenant le *pgcd* de (16) et (17) qui est égal à $(s+1)^2$ multiplié par le polynôme de degré 12 suivant:

	s	
	3 9 2 5 3 1 2	12
-	2 6 6 8 3 7 7 6	11
	9 1 5 4 2 6 2 4	10
-	1 8 5 3 1 7 3 9 2	09
	2 2 0 2 4 2 2 0 7	08
-	8 9 4 5 4 1 8 6	07
-	7 9 0 4 4 4 7 4	06
	2 1 4 6 1 6 9 5 2	05
-	5 4 0 6 4 3 5 0	04
	2 8 7 9 6 2 2	03
	8 1 7 3 3 7 3 4	02
	1 6 4 1 2 2 2 0	01
	9 6 4 4 6 7	00

(18)

Quand on est sur S , σ_1^2 prend ses valeurs dans $[0, 3]$, il suffit donc de constater, grâce à la méthode de Sturm,¹ que le polynôme (18) ne s'annule pas sur $[0, 3]$, pour conclure. c.q.f.d.

¹ Voir par exemple [WAE, I, p. 248].

APPENDICE A

Paramétrisation de la surface de Boy du sixième degré

La surface de Boy correspond à la valeur du paramètre de déformation $b=1$. Nous partons de la paramétrisation de $S_1 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} (\cos 2\theta + \sqrt{2}t \cos \theta) \\ \frac{\sqrt{2}}{3} (\sin 2\theta - \sqrt{2}t \sin \theta) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 - \sqrt{2}bt \sin 3\theta + t^2)^{-1}$$

en posant

$$u = \cos \theta \cdot (1 + t^2)^{-1/2}, \quad v = \sin \theta \cdot (1 + t^2)^{-1/2}, \quad w = t(1 + t^2)^{-1/2}$$

et on introduit une coordonnée d'homogénéité X_0 , ce qui donne la paramétrisation de $P(\mathbb{R}^3)$ dans $P(\mathbb{R}^4)$ suivante

$$(X) = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3[(u^2 + v^2 + w^2)(u^2 + v^2) - \sqrt{2}bvw(3u^2 - v^2)] \\ \sqrt{2}(u^2 + v^2)(u^2 - v^2 + \sqrt{2}uw) \\ \sqrt{2}(u^2 + v^2)(2uv - \sqrt{2}vw) \\ 3(u^2 + v^2)^2 \end{pmatrix}$$

On considère les différents changements de coordonnées homogènes à la source et au but suivants

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \cdot & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & \cdot \\ 1 & -i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$(Y) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \cdot & \cdot & -2\sqrt{2} \\ \cdot & 3 & 3i & \cdot \\ \cdot & 3 & -3i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} \end{pmatrix} (X) \quad (X) = \begin{pmatrix} 3 & \cdot & \cdot & 6 \\ \cdot & \sqrt{3} & \sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & -i\sqrt{2} & i\sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 6 \end{pmatrix} (Y)$$

$$(x') = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 3 & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 3 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & 3 \end{pmatrix} (x) \quad (x) = \begin{pmatrix} 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} (x')$$

$$(X) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} (x) \quad (x) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \cdot & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} (X)$$

$$(Y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \cdot & 3 & 3j & 3j^2 \\ \cdot & 3 & 3j^2 & 3j \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (x) \quad (x) = \begin{pmatrix} 3 & \cdot & \cdot & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & j^2 & j & -1 \\ 1 & j & j^2 & -1 \end{pmatrix} (Y)$$

$$(X) = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \cdot & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} (x') \quad (x') = \begin{bmatrix} \frac{2}{3\sqrt{3}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \cdot & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \cdot & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} (X)$$

$$\begin{aligned}
 (Y) &= \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 \\ \cdot & 3 & 3j & 3j^2 \\ \cdot & 3 & 3j^2 & 3j \\ \cdot & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (x') & (x') &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & 1 & 1 & -3 \\ \cdot & j^2 & j & -3 \\ \cdot & j & j^2 & -3 \end{pmatrix} (Y) \\
 (X') &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \cdot & \cdot & -3\sqrt{2} \\ \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2} \end{pmatrix} (X) & (X) &= \begin{pmatrix} 3 & \cdot & \cdot & 9 \\ \cdot & 2\sqrt{2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2\sqrt{2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 6 \end{pmatrix} (X') \\
 (X') &= \begin{pmatrix} 2 & \cdot & \cdot & -2 \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & -i & i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix} (Y) & (Y) &= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & i & \cdot \\ \cdot & 1 & -i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} (X')
 \end{aligned}$$

La paramétrisation devient alors

$$\begin{aligned}
 (x) &= \begin{pmatrix} E(u'^2 + v'^2 + w'^2) - \sqrt{3} bF \\ Ev'w' - \frac{F}{\sqrt{3}} b \\ Ew'u' - \frac{F}{\sqrt{3}} b \\ Eu'v' - \frac{F}{\sqrt{3}} b \end{pmatrix} & (x') &= \begin{pmatrix} E(u'^2 + v'^2 + w'^2) - \sqrt{3} Fb \\ E(3v'w' - u'^2 - v'^2 - w'^2) \\ E(3w'u' - u'^2 - v'^2 - w'^2) \\ E(3u'v' - u'^2 - v'^2 - w'^2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

où $E = (u' + jv' + j^2w')(u' + j^2v' + jw')$ et $F = (u' + v' + w')(v' - u')(w' - v')(u' - w')$

De même on a la paramétrisation

$$(Y) = \begin{pmatrix} ibw''(u''^3 - v''^3) + u''v''w''^2 \\ u''v''(u''^2 + v''w'') \\ u''v''(v''^2 + u''w'') \\ u''^2v''^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(rs + ib(r^3 - 1)) \\ r(r^2 + s) \\ r(1 + rs) \\ r^2 \end{pmatrix}$$

où

$$r = u''/v'' \text{ et } s = w''/v''.$$

On a enfin

$$(X') = \begin{vmatrix} (u^2 + v^2)(2w^2 - u^2 - v^2) - 2\sqrt{2} bvw(3u^2 - v^2) \\ (u^2 + v^2)(u^2 - v^2 + \sqrt{2} uw) \\ (u^2 + v^2)(2uv - \sqrt{2} vw) \\ (u^2 + v^2)^2. \end{vmatrix}$$

Equation de la surface de Boy du sixième degré

On obtient l'équation de la surface dans les différents repères

$$\begin{aligned} & 64(X_0 - X_3)^3 X_3^3 - 48(X_0 - X_3)^2 X_3^2(3X_1^2 + 3X_2^2 + 2X_3^2) \\ & + 12(X_0 - X_3) X_3(27b^2(X_1^2 + X_2^2)^2 - 6(3b^2 + 1) X_3^2(X_1^2 + X_2^2) \\ & + 18\sqrt{2}(1 - b^2) X_1 X_3(X_1^2 - 3X_2^2) + 36\sqrt{2} bX_2 X_3(X_2^2 - 3X_1^2) \\ & + 4X_3^4) + (9X_1^2 + 9X_2^2 - 2X_3^2)(-81b^2(X_1^2 + X_2^2)^2 \\ & - 18(3b^2 + 1) X_3^2(X_1^2 + X_2^2) + 54\sqrt{2} b(b^2 - 1) X_2 X_3(X_2^2 - 3X_1^2) \\ & + 108\sqrt{2} b^2 X_1 X_3(X_1^2 - 3X_2^2) + 4X_3^4) = 0 \\ & Y_0^3 Y_3^3 - Y_0^2 Y_3^2(Y_1 Y_2 + 3Y_3^2) + Y_0 Y_3(b^2 Y_1^2 Y_2^2 - (3b^2 + 1) Y_1 Y_2 Y_3^2 \\ & + (1 - b^2) Y_3(Y_1^3 + Y_2^3) + 2ibY_3(Y_1^3 - Y_2^3) + 3Y_3^4) \\ & + (Y_1 Y_2 - Y_3^2)(-b^2 Y_1^2 Y_2^2 - (3b^2 + 1) Y_1 Y_2 Y_3^2 \\ & + ib(b^2 - 1) Y_3(Y_1^3 - Y_2^3) + 2b^2 Y_3(Y_1^3 + Y_2^3) + Y_3^4) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant les notations de l'appendice B pour les polynômes alternés élémentaires on a également

$$\begin{aligned} & (x_0 - \sigma_1)^2 (x_0 \sigma_3 + 2\sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2^2) + \frac{b}{\sqrt{3}} \rho(x_0 - \sigma_1)(4\sigma_1^2 - 9\sigma_2 - x_0^2) \\ & + \frac{b^2}{3} (162\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 54\sigma_1^3 \sigma_3 + 81\sigma_2^3 - 147\sigma_1^2 \sigma_2^2 \\ & + 64\sigma_1^4 \sigma_2 - 8\sigma_1^6 + x_0(-162\sigma_2 \sigma_3 + 45\sigma_1^2 \sigma_3 + 69\sigma_1 \sigma_2^2 \\ & - 34\sigma_1^3 \sigma_2 + 4\sigma_1^5) + x_0^2(18\sigma_1 \sigma_3 - 3\sigma_2^2 - 7\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_1^4) \\ & + x_0^3(4\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1^3 - 9\sigma_3)) \\ & + \frac{b^3}{3\sqrt{3}} \rho(x_0 - \sigma_1)(x_0^2 - 2\sigma_1 x_0 + 27\sigma_2 - 8\sigma_1^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_1'^2(2\sigma_1'\sigma_3' - \sigma_2'^2 + x_0'(9\sigma_3' - 2\sigma_1'\sigma_2') + x_0'^2(3\sigma_2' - 2\sigma_1'^2) \\
& - x_0'^3\sigma_1') + \frac{b}{\sqrt{3}}\rho'\sigma_1'(9\sigma_2' - 4\sigma_1'^2 - 6x_0'\sigma_1') \\
& + \frac{b^3}{3\sqrt{3}}\rho'\sigma_1'(8\sigma_1'^2 - 27\sigma_2') + \frac{b^2}{3}(162\sigma_1'\sigma_2'\sigma_3' \\
& - 54\sigma_1'^3\sigma_3' + 81\sigma_2'^3 - 147\sigma_1'^2\sigma_2'^2 + 64\sigma_1'^4\sigma_2' - 8\sigma_1'^6 \\
& + x_0'(-27\sigma_1'^2\sigma_3' - 27\sigma_1'\sigma_2'^2 + 24\sigma_1'^3\sigma_2' - 4\sigma_1'^5)) = 0.
\end{aligned}$$

On a enfin

$$\begin{aligned}
& X_0'^3 X_3'^3 - UX_0'^2 X_3'^2 - X_0' X_3'((b^2 + 1) 3UX_3'^2 - b^2 U^2 \\
& + 2(b^2 - 1) V + 4bW) - (b^2 + 1) U^2 X_3'^2 - b^2 U^3 + 2VX_3'^2(1 - 3b^2) \\
& + 4b^2 VU + 2bWU(1 - b^2) + 2bX_3'^2 W(b^2 - 3) = 0
\end{aligned}$$

où $U = X_1'^2 + X_2'^2$, $V = X_1' X_3'(X_1'^2 - 3X_2'^2)$, $W = X_2' X_3'(3X_1'^2 - X_2'^2)$.

Equation de la courbe double de la surface de Boy du sixième degré

La courbe double de la surface algébrique réelle précédente est la courbe unicursale du sixième degré donnée par

$$(X) = \begin{vmatrix} 3(3 \sin 2\alpha + \sin 6(\theta + \alpha)) \\ 4\sqrt{2} \cos \alpha \sin 3(\theta + \alpha) \cos \theta \\ 4\sqrt{2} \cos \alpha \sin 3(\theta + \alpha) \sin \theta \\ 6 \sin 2\alpha \end{vmatrix} \quad (X') = \begin{vmatrix} \sin 3(\theta + \alpha) \cos 3(\theta + \alpha) \\ \sin 3(\theta + \alpha) \cos \alpha \cos \theta \\ \sin 3(\theta + \alpha) \cos \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \cos \alpha \end{vmatrix}$$

avec $b = \operatorname{tg} \alpha$.

En posant $t = \operatorname{tg} \theta$ on a

$$(X') = \begin{vmatrix} (t+b)(t(b\sqrt{3}-1)-b-\sqrt{3})(t(b\sqrt{3}+1) \\ + b - \sqrt{3})(1-bt)(t(b+\sqrt{3})-1+b\sqrt{3})(t(b-\sqrt{3}) \\ - 1 - b\sqrt{3}) \\ (t+b)(t(b\sqrt{3}-1)-b-\sqrt{3})(t(b\sqrt{3}+1) \\ + b - \sqrt{3})(t^2+1)(b^2+1) \\ t(t+b)(t(b\sqrt{3}-1)-b-\sqrt{3})(t(b\sqrt{3}+1) \\ + b - \sqrt{3})(t^2+1)(b^2+1) \\ b(b^2+1)^2(t^2+1)^3. \end{vmatrix}$$

APPENDIX B

Polynômes alternés à trois indéterminées

On définit trois endomorphismes de l'algèbre $K[x, y, z]$ des polynômes à trois variables sur le corps commutatif K de caractéristique différente de 2:

$$\begin{aligned} * : f &\mapsto f^* & f^*(x, y, z) &= f(y, z, x) \\ \sim : f &\mapsto \tilde{f} & \tilde{f}(x, y, z) &= f(y, x, z) \\ T : f &\mapsto Tf = f + f^* + f^{**} \end{aligned}$$

On a

$$f^{***} = \tilde{\tilde{f}} = f \quad \tilde{\tilde{\tilde{f}}} = \tilde{f}.$$

On en déduit que T et $\sim$ commutent comme T et $*$ d'ailleurs:

$$T\tilde{f} = \tilde{T}f \quad Tf^* = T^*f = Tf \quad Tf \cdot Tg = Tfg + Tf^*g + Tfg^*.$$

On obtient les règles suivantes concernant les opérateurs de dérivation:

$$\begin{aligned} \partial_x f^* &= \partial_z^* f & \partial_x \tilde{f} &= \tilde{\partial}_y f \\ \partial_y f^* &= \partial_x^* f & \partial_y \tilde{f} &= \tilde{\partial}_x f \\ \partial_z f^* &= \partial_y^* f & \partial_z \tilde{f} &= \tilde{\partial}_z f \end{aligned}$$

On définit le jacobien de trois polynômes $f, g, h \in K[x, y, z]$ par

$$J(f, g, h) = \begin{vmatrix} \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_x g & \partial_y g & \partial_z g \\ \partial_x h & \partial_y h & \partial_z h \end{vmatrix}$$

Le jacobien est trilineaire alterné et vérifie

$$J(f_1 f_2, g, h) = f_1 J(f_2, g, h) + f_2 J(f_1, g, h)$$

et si on compose

$$\begin{vmatrix} f_1 \\ g_1 \\ h_1 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} f_2 \\ g_2 \\ h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3 \\ g_3 \\ h_3 \end{vmatrix}.$$

On a

$$J(f_3, g_3, h_3) = J(f_2, g_2, h_2) \cdot J(f_1, g_1, h_1) \circ \begin{vmatrix} f_2 \\ g_2 \\ h_2 \end{vmatrix}.$$

On a enfin

$$J^*(f, g, h) = J(f^*, g^*, h^*), \quad \tilde{J}(f, g, h) = -J(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}).$$

Outre les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1 = Tx$, $\sigma_2 = Txy$, $\sigma_3 = xyz$, on introduit

$$\rho = (y-x)(z-y)(x-z).$$

Ces polynômes sont liés par la relation donnant le discriminant du polynôme homogène à deux variables du troisième degré:

$$\rho^2 = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2. \quad (0)$$

On utilisera le lemme suivant

LEMME 0. *Le polynôme f de $K[x, y, z]$ est invariant par le groupe alterné $\mathcal{A}_3$ si et seulement si il peut s'écrire*

$$f = P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \rho Q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad P, Q \in K[x, y, z].$$

P et Q sont alors déterminés de façon unique.

Preuve. Pour l'unicité il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{2}(f + \tilde{f}) = P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \frac{1}{2\rho}(f - \tilde{f}) = Q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

et que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont algébriquement indépendants

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \Leftrightarrow P = 0.$$

Pour l'existence il suffit de montrer par récurrence que la propriété est vraie pour les polynômes

$$Tx^{n-k}y^k \quad \text{où} \quad 0 \leq k \leq \frac{n}{2}$$

on peut utiliser les formules de récurrence suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} n \text{ pair} & \\ Tx^{n/2}y^{n/2} & = \sigma_2 Tx^{n/2-1}y^{n/2-1} - \sigma_3(T + \tilde{T})x^{n/2-1}y^{n/2-2} \\ Tx^{n/2+1}y^{n/2-1} & = \sigma_1 Tx^{n/2}y^{n/2-1} - Tx^{n/2}y^{n/2} - \sigma_3 Tx^{n/2-1}y^{n/2-2} \\ \dots & \\ Tx^{n-1}y & = \sigma_1 Tx^{n-2}y - Tx^{n-2}y^2 - \sigma_3 Tx^{n-3} \\ Tx^n & = \sigma_1 Tx^{n-1} - (T + \tilde{T})x^{n-1}y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 n \text{ impair} \\
 Tx^{(n+1)/2} y^{(n-1)/2} = \sigma_2 Tx^{(n-1)/2} y^{(n-3)/2} \\
 \quad - \sigma_3 Tx^{(n-3)/2} y^{(n-3)/2} - \sigma_3 Tx^{(n-1)/2} y^{(n-5)/2} \\
 Tx^{(n+3)/2} y^{(n-3)/2} = \sigma_1 Tx^{(n+1)/2} y^{(n-3)/2} \\
 \quad - Tx^{(n+1)/2} y^{(n-1)/2} - \sigma_3 Tx^{(n-1)/2} y^{(n-5)/2} \\
 \dots \\
 Tx^{n-1} y = \sigma_1 Tx^{n-2} y - Tx^{n-2} y^2 - \sigma_3 Tx^{n-3} \\
 Tx^n = \sigma_1 Tx^{n-1} - (T + \tilde{T}) x^{n-1} y.
 \end{array} \right.$$

Pour démarrer la récurrence on a

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Txy = \sigma_2 \\
 Tx^2 y = \frac{1}{2}(\sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3 + \rho) \\
 Tx^2 y^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_3 \\
 Tx^3 y = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - 2\sigma_2^2 + \rho \sigma_1).
 \end{array} \right. \quad \text{c.q.f.d.}$$

Le lemme précédent est en fait une conséquence immédiate de la théorie de Galois (voir par exemple [WE]) mais la démonstration que nous en donnons fournit un moyen de calcul efficace des polynômes P et Q .

BIBLIOGRAPHIE

- [AR] V. ARNOLD, Singularities of smooth mappings, *Russian Math. Surveys* **23** (1969), 3-45.
- [BA] T. BANCHOFF, Triple points and surgery of immersed surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **46**, No. 3 (1974), 407-413.
- [BI] E. BIERSTONE, Equivariant Gromov theory, *Topology* **13** (1974), 327-345.
- [BO1] W. BOY, "Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine im Endlichen geschlossene singularitätenfreie Fläche," *Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten, Math.-phys. Klasse*, Heft 1, pp. 20-33, 1901.
- [BO2] W. BOY, Über die Curvatura integra u. d. Topologie geschlossener Flächen, *Math. Ann.* **57** (1903), 151-184.
- [CO] S. COHN-VOSSEN ET D. HILBERT, "Anschauliche Geometrie," Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932.
- [HO] H. HOPF, "Differential Geometry in the Large," *Lecture Notes in Mathematics* Vol. 1000, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1983.
- [JA] I. JAMES ET E. THOMAS, Note on the classification of cross-sections, *Topology* **4** (1966), 351-359.
- [KU] N. KUIPER, Stable surfaces in euclidean three space, *Math. Scand.* **36** (1975), 83-96.
- [LA] R. K. LASHOF ET S. SMALE, Self-intersections of immersed manifolds, *J. Math. Mech.* **8**, No. 1 (1959), 143-157.
- [MA] J. MARTINET, "Singularities of Smooth Functions and Maps," *London Math. Soc., Lecture Note Series* No. 58 Cambridge Univ. Press, London/New York, 1982.
- [MI] CH. MICHEL, "Compléments de géométrie moderne," Vuibert, Paris, 1926.

- [MO1] B. MORIN, "Équations du retournement de la sphère," CRAS série A Paris, t. 287, pp. 879–882, 1978.
- [MO2] B. MORIN ET J-P. PETIT, Le retournement de la sphère, *Pour la science*, **15** (1979), 34–49.
- [PE] J-P. PETIT ET J. SOURIAU, "Une représentation analytique de la surface de Boy," CRAS Série I Paris, t. 293, pp. 269–272, 1981.
- [PI] U. PINKALL, "Regular Homotopy Classes of Immersed Surfaces," Sonderforschungsbereich 40 theoretische Mathematik Universität Bonn und Max-Planck Institut für Mathematik Bonn, 1984.
- [RE] TH. REYE, Über quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren, *Math. Ann.* **48** (1896), 113–141.
- [SC] F. SCHILLING, Über die Abbildung der projektiven Ebene auf eine geschlossene singularitätenfreie Fläche im erreichbaren Gebiet des Raumes, *Math. Ann.* **92** (1924), 69–79.
- [SU] D. SULLIVAN, "Combinatorial Invariants of Analytic Spaces, Proc. I, Liverpool Singularities Symposium," Lecture Notes in Mathematics Vol. 192, pp. 165–168, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1970.
- [WA] M. WALLACE COLLAO, "Singularités de codimension deux des surfaces," Thèse de 3^e cycle, Publication de l'IRMA, Strasbourg, 1981.
- [WAE] B. L. VAN DER WAERDEN, "Algebra I, II, Heidelberger Taschenbücher Band 12, 23, Springer-Verlag, Berlin/New York/Heidelberg, 1971.
- [WE] H. WEBER, Traité d'algèbre supérieure, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
- [WH] H. WHITNEY, On the Topology of differentiable Manifolds, in "Lectures in Topology", pp. 101–141, Univ of Michigan Press, Ann Arbor, 1941.