

Sous-espaces déterminant l'invariant de Arf et un théorème de Rohlin sur la signature

Catherine BAILLY ^a, Alina VDOVINA ^b

^a UMPA, UMR 5669, École normale supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

^b Département de mathématique, Université de Podillya, Institutskaya 11, 280000 Khmelnytskyi, Ukraine
Courriel : alina@alpha.podol.khmelnytskyi.ua

(Reçu le 25 octobre 1999, accepté le 8 novembre 1999)

Résumé.

Une caractérisation des sous-espaces U d'un espace quadratique non dégénéré $q : V \rightarrow k$ sur un corps k de caractéristique 2 non quadratiquement séparablement clos tels que toute forme quadratique ayant même forme bilinéaire que q et coïncidant avec q sur U a même invariant de Arf que q et une extension de cette caractérisation au cas des formes quadratiques sur les groupes finis donne une preuve élémentaire et algébrique d'une ré-
extension des formules de signature de Rohlin de [4] et [3] qu'indépendamment Degtyarev, Itenberg et Kharlamov [5] ont établie par des méthodes de topologie algébrique. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Subspaces determining the Arf's invariant and a Rohlin's theorem on the signature

Abstract.

A characterization of subspaces U of a non-degenerated quadratic space $q : V \rightarrow k$ on a characteristic 2 non-quadratically separably closed field k such that any quadratic form with the same bilinear form as q and equal to q on U has the same Arf invariant as q and an extension of this characterization to the case of quadratic forms on finite abelian groups extend the applicability of the Rohlin's signature formulae in [4] and [3], a result independly obtained with algebraic topology means by Detyaev, Itenberg and Kharlamov [5]. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Sous-espaces déterminant, l'invariant de Arf, la classe de Witt

L'invariant de Arf (cf. [1]), une classe $\text{Arf}(q) \in k/\mathcal{P}(k)$, où $\mathcal{P}$ est le morphisme d'Artin-Schreier $x \mapsto x^2 - x$, est défini pour toute forme quadratique non dégénérée $q : V \rightarrow k$ sur un corps k de caractéristique 2, il ne dépend que de la classe de Witt (cf. [2]) de q et est non trivial si k n'est pas quadratiquement séparablement clos. On suppose désormais que k est un tel corps.

Soit $q : V \rightarrow k$ une forme quadratique non dégénérée, dont la forme bilinéaire est notée b , et $U \subset V$ un sous-espace vectoriel de V . Un q_U -*raffinement quadratique* de b est une forme quadratique $q' : V \rightarrow k$ ayant b pour forme bilinéaire et coïncidant avec q sur U . Le sous-espace U *Witt-caractérise* (resp. *Arf-*

Note présentée par Jean-Michel BISMUT.

caractérise) q si tout q_U -raffinement quadratique de b est Witt-équivalent à q (resp. a même invariant de Arf que q).

PROPOSITION 1. – Les sous-espaces Arf-caractérisant une forme quadratique non dégénérée $q : V \rightarrow k$ sont les orthogonaux des sous-espaces isotropes. En particulier, ils Witt-caractérisent q .

Démonstration. – Si $U = I^\perp$ est l'orthogonal du sous-espace isotrope I , alors I est isotrope pour tout q_U -raffinement quadratique q' de b puisque $I \subset I^\perp = U$. Ainsi (cf. [2]) un tel $q' : V \rightarrow k$ est Witt équivalent à la forme induite par q' sur $I^\perp/I = U/I$ qui ne dépend donc que de la restriction de q à U .

Réciproquement, si l'orthogonal $U^\perp$ de U contient un élément f non isotrope, donc non nul, il y a une base symplectique $e_1, f_1, \dots, e_n, f_n$ de V telle que $f_1 = f$. Soit $\varphi = b^\sharp(f) : V \rightarrow k$. Pour tout $\lambda \in k$ la forme quadratique $q_\lambda = q + \frac{\lambda}{q(f)} \varphi^2$ est un q_U -raffinement quadratique de b avec

$$\text{Arf}(q_\lambda) = \text{Arf}(q) - q(e_1)q(f_1) + \frac{\lambda}{q(f)} q(f) = \text{Arf}(q) - q(e_1)q(f_1) + \lambda.$$

Ainsi, comme k n'est pas quadratiquement séparablement clos, il y a un $\lambda \in k$ non congru à $q(e_1)q(f_1)$ modulo $\mathcal{P}(k)$ et U n'est pas Arf-caractérisant. $\square$

2. Sous groupes déterminant la classe de Witt

Soit $q : G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ une forme quadratique non dégénérée sur un groupe abélien fini G (cf. [2]) dont la forme d'enlacement est notée b , et $H \subset G$ un sous-groupe de G . Un q_H -raffinement quadratique de b est une forme quadratique $q' : G \rightarrow \mathbb{T}$ ayant b pour enlacement et coïncidant avec q sur H . Le sous-groupe H Witt-caractérise q si tout q_H -raffinement quadratique de b est Witt-équivalent à q .

PROPOSITION 2. – Les sous-groupes Witt-caractérisant une forme quadratique non dégénérée $q : G \rightarrow \mathbb{T}$ sont les orthogonaux des sous-groupes dont la 2-torsion est isotrope.

Démonstration. – Rappelons que si $Q : X \rightarrow \mathbb{T}$ est une forme quadratique représentant un élément du noyau $V(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ de l'oubli $WQ(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \rightarrow W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ qui à la classe de Witt d'une forme quadratique Q associe celle de son enlacement B , alors (cf. [2]) X a un sous-groupe L égal à son orthogonal $L^\perp$, il y a un élément Ω de X , dit Q -élément de Wu pour le Lagrangien L , bien défini modulo L et dont le dièse $B^\sharp(\Omega)$ est égal à Q sur L . De plus, $Q(\Omega)$ ne dépend que de la classe de Witt $[Q]$ de Q , ce morphisme $[Q] \mapsto Q(\Omega)$ réalisant un isomorphisme de $V(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ sur la 8-torsion de $\mathbb{T}$.

Soit $H \subset G$ un sous-groupe de G . Les q_H -raffinements de b sont les formes $q' = q + b^\sharp(w)$, où w parcourt les éléments de 2-torsion de l'orthogonal $H^\perp$ de H . Les formes $Q = q' \oplus -q$ sont dans $V(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ et $\Omega = (w, 0)$ est un Q -élément de Wu pour la diagonale $L = \{(g, g) \mid g \in G\}$. La proposition découle de ce que $Q(\Omega) = q(w) + b(w, w) = 3q(w)$ et donc $Q(\Omega) = 0$ si et seulement si $q(w) = 0$ car $4q(w) = q(2w) = 0$ puisque $2w = 0$. $\square$

3. Une ré-extension d'un théorème de Rohlin sur la signature

Une sous-variété lisse et propre $V^{n-2} \subset W^n$ de codimension 2 dans une variété W^n lisse, et orientée de dimension n est caractéristique si $W \setminus V$ a une trivialisatation $\tau_{W \setminus V}$ de son fibré tangent au-dessus du 2-squelette d'une triangulation de (W, V) , ne s'étendant à aucun 2-disque transverse à M .

Soit $i : F^2 \subset M^4$ une surface caractéristique d'une variété lisse fermée et orientée de dimension 4. Rohlin (cf. [4] et [3]) a construit sur le noyau K de $i_* : H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ une forme quadratique

$$q_{M,F} : K \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi \mapsto \frac{\pi}{4}} \mathbb{T}$$

d'enlacement : la restriction à K de la forme d'intersection homologique b de F .

Il prouve que si $F \times I$ est caractéristique dans une variété W^5 de dimension 5 ayant $M \amalg N$ comme bord et telle que $i_{1*}(H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = 0 \subset H_1(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ alors la classe de Witt de $q_{N,F}$ ne dépend que de M et son invariant de Brown, $\alpha(q_{N,F}) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, vérifie la congruence $2\alpha(q_{N,F}) \equiv \sigma(M) - F \cdot F \pmod{16}$, où $\sigma(M)$ est la signature de M et $F \cdot F$ l'auto-intersection de F dans M .

La forme $q_{N,F} = q_{\tau_{M \setminus F}}$ dépend de la trivialisation $\tau_{M \setminus F}$ et, en faisant varier cette trivialisation, on obtient tous les $q_{\tau_0 K}$ -raffinements quadratiques de la forme d'intersection de F . Ainsi, la proposition 2 (si F est orientable, le cas de [4], l'invariant de Brown est celui de Arf et la proposition 1 suffit) étend [4] et [3] (cf. [5] pour une preuve de topologie algébrique) :

THÉORÈME 3. – *La forme de Rohlin est nulle sur le radical $R = K \cap K^\perp$ et l'invariant de Brown $\alpha(\bar{q}_{M,F}) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ de sa régularisée, $\bar{q}_{M,F} : K/R \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \subset \mathbb{T}$, vérifie la congruence :*

$$2\alpha(\bar{q}_{M,F}) \equiv \sigma(M) - F \cdot F \pmod{16}.$$

Remerciements. À V.M. Kharlamov qui, par sa demande de références pour la présente ré-extension, a mis en valeur nos balbutiements algébriques. Manifestons notre sympathie à Monsieur Carreira dont les doigts habiles sont responsables de l'avenant frappe du manuscrit.

Références bibliographiques

- [1] Arf C., Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Characteristic 2, J. Reine Angew. Math. 183 (1941) 148–167.
- [2] Barge J., Lannes J., Latour F., Vogel P., Appendice de Λ -sphères, Ann. Sci. École Norm. Sup. 8 (4) (1974) 494–505.
- [3] Guillou L., Marin A., Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, C. R. Acad. Sci. Paris 285 Série A (1977) 95–98 ; et dans À la recherche de la topologie perdue, Birkhäuser, 1986, pp. 97–118.
- [4] Rohlin V.A., A proof of a conjecture of Gudkov, Funkt. Analiz. i ego Pril. 6.2 (1972) 62–64; translation: Funct. Anal. Appl. 6 (1972) 136–138.
- [5] Degtyarev A., Itenberg I., Kharlamov V., Enriques Surfaces, (livre en préparation).