

Jean Barge
Jean Lannes

Suites de Sturm, indice de Maslov et périodicité de Bott

Progress in Mathematics

Volume 267

Series Editors

H. Bass

J. Oesterlé

A. Weinstein

Jean Barge
Jean Lannes

Suites de Sturm, indice de Maslov et périodicité de Bott

Birkhäuser
Basel · Boston · Berlin

Authors:

Jean Barge
Jean Lannes
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
École polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
France
e-mail: jean.barge@math.polytechnique.fr
jean.lannes@math.polytechnique.fr

2000 Mathematics Subject Classification: 55R45 19G38, 19G24, 19C09

Library of Congress Control Number: 2007942643

Bibliographic information published by Die Deutsche Bibliothek.
Die Deutsche Bibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie;
detailed bibliographic data is available in the Internet at <http://dnb.ddb.de>

ISBN 978-3-7643-8709-9 Birkhäuser Verlag AG, Basel · Boston · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. For any kind of use whatsoever, permission from the copyright owner must be obtained.

© 2008 Birkhäuser Verlag AG
Basel · Boston · Berlin
P.O. Box 133, CH-4010 Basel, Switzerland
Part of Springer Science+Business Media
Printed on acid-free paper produced from chlorine-free pulp. TCF ∞
Printed in Germany

ISBN 978-3-7643-8709-9
9 8 7 6 5 4 3 2 1

e-ISBN 978-3-7643-8710-5
www.birkhauser.ch

Table des matières

1 Introduction

1.1	Interprétation de la théorie des suites de Sturm en termes de signatures et d'indice de Maslov	1
1.2	Énoncé du théorème fondamental de la K-théorie hermitienne et esquisse de notre démonstration	4
1.3	Relation avec la périodicité de Bott	8
1.4	Plan du mémoire	9
1.5	Conseils de lecture pour le lecteur pressé	11
	Avertissement	12
	Crédits	12

2 Algèbre linéaire symplectique

2.1	Définitions et notations	13
2.2	Formes de Sturm	19
2.3	Réduction symplectique, formes génératrices	23
2.4	Raffinements de la proposition 2.2.4	25

3 Sur la “composante connexe” du point base dans la lagrangienne infinie

3.1	La proposition clé	31
3.2	Relations entre la proposition 3.1.1 et la théorie de Ranicki [Ra4] [Ra1]	36
3.3	Compléments : formes primitives, formes d'enlacement	37
3.3.1	Formes primitives	37
3.3.2	Lagrangiens et formes d'enlacement	42

4	Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne, à la Karoubi-Villamayor	
4.1	Énoncé	47
4.2	Démonstrations	52
4.3	Indice de Maslov d'un quasi-lacet de lagrangiens	59
4.4	Commentaires sur la définition de l'indice de Maslov, relation avec la théorie de Ranicki (suite)	62
4.5	Un avatar du groupe $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$: le groupe $V(R)$ de Karoubi	65
4.5.1	Le groupe $V(R)$	65
4.5.2	Liens entre les groupes $V(R)$ et $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$	73
4.5.3	Retour sur la définition de l'indice de Maslov	75
4.6	Indice de Maslov et formes d'enlacement sur $k[T]$ (k un corps)	77
4.7	Versions topologiques du théorème 4.2.10	82
4.8	Bande-annonce du chapitre 6	88
5	Suites de Sturm et H_2 de l'homomorphisme hyperbolique	
5.1	L'extension centrale canonique de $\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R)$ par $V(R)$	91
5.2	Démonstrations concernant l'homomorphisme μ	97
5.3	Démonstrations concernant l'homomorphisme λ	104
5.4	Interprétation de l'isomorphisme $A(R) \cong V(R)$ en termes d'homologie des groupes	115
6	Généralisations	
6.1	Le cas linéaire (périodicité de Bott “complexe”)	126
6.2	Le cas bilinéaire (périodicité de Bott “réelle”)	131
6.2.1	Définition des foncteurs $\mathcal{L}_i$	132
6.2.2	Relation entre $\mathcal{L}_{i+1}$ et $\Omega^S \mathcal{L}_i$ pour $i \equiv 0 \pmod{2}$	142
6.2.3	Relation entre $\mathcal{L}_{i+1}$ et $\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_i$ pour $i \equiv 1 \pmod{2}$. . .	146

Appendices

A Technologie des formes de Sturm

A.1	Version matricielle de la proposition 2.2.2	159
A.2	Sur les formes de Sturm non-dégénérées	161
A.3	Calcul de Déterminants	163

A.4	Identité du trinôme et formes de Sturm	165
A.5	Formes de Sturm et résidu de formes bilinéaires symétriques	169
B	Démonstration de la proposition 2.4.4	171
C	Sur le graphe bipartite associé à la relation de transversalité des lagrangiens	177
D	Invariance homotopique du $-W_1$	
D.1	Sur l'invariant de Witt d'un lagrangien libre	186
D.2	Le lemme de Pardon	188
D.3	Linéarisation à la Balmer [BA]	191
D.4	Démonstration du théorème D	193
	Références	197

Chapitre 1

Introduction

L'objet de ce chapitre est de justifier le titre de notre mémoire... et de résumer son contenu.

1.1 Interprétation de la théorie des suites de Sturm en termes de signatures et d'indice de Maslov

Commençons par rappeler la théorie des suites de Sturm (voir par exemple [LG]).

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[T]$. On suppose que A et B sont premiers entre eux et que $A(0)$ et $A(1)$ sont non-nuls. On considère l'application de paires d'espaces topologiques

$$([0,1], \{0,1\}) \rightarrow (\mathbf{P}^1(\mathbb{R}), \mathbf{P}^1(\mathbb{R}) - \{0\}) \quad , \quad t \mapsto \frac{A(t)}{B(t)} ;$$

on note α cette application et $\deg(\alpha)$ son degré. La théorie des suites de Sturm fournit un algorithme pour calculer ce degré ; dans le cas classique, on prend $B = A'$; l'entier $\deg(\alpha)$ est alors le nombre de racines du polynôme A dans l'intervalle $]0,1[$ (remarquer que lorsque l'on a $\alpha(t_0) = 0$, alors on a $\alpha'(t_0) = 1$). L'algorithme d'Euclide fournit deux suites finies de polynômes $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_m)$ et $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ vérifiant les relations suivantes :

- $p_0 = A$ et $p_1 = B$;
- $p_{k-1} + p_{k+1} = q_k p_k$, pour $1 \leq k \leq m$ avec la convention $p_{m+1} = 0$;
- $p_m \in \mathbb{R}[T]^\times = \mathbb{R}^\times$.

On observera que les deux premières relations impliquent

$$(1) \quad \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} q_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_m \\ 0 \end{bmatrix} .$$

On suppose que l'on a $p_k(0) \neq 0$ et $p_k(1) \neq 0$, pour $1 \leq k \leq m$, et on note $W(i)$, $i = 0, 1$, le nombre de changements de signes dans la suite de nombres réels

$$(p_0(i), p_1(i), p_2(i), \dots, p_m(i)) .$$

Dans ce cas, le théorème de Sturm nous dit que le degré de α est donné par la formule

$$\deg(\alpha) = W(0) - W(1) .$$

Nous nous proposons maintenant de réécrire cette formule en faisant apparaître des signatures de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées à coefficients réels.

On pose

$$S = \begin{bmatrix} q_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & q_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & q_3 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & -1 & q_{m-2} & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & q_{m-1} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & q_m \end{bmatrix} ;$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_2 & p_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ p_3 & p_3 & p_3 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m-2} & p_{m-2} & p_{m-2} & \dots & p_{m-2} & 0 & 0 \\ p_{m-1} & p_{m-1} & p_{m-1} & \dots & p_{m-1} & p_{m-1} & 0 \\ p_m & p_m & p_m & \dots & p_m & p_m & p_m \end{bmatrix} .$$

On constate que l'on a

$${}^t P S P = \begin{bmatrix} p_0 p_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_1 p_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & p_2 p_3 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & p_{m-3} p_{m-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & p_{m-2} p_{m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & p_{m-1} p_m \end{bmatrix} .$$

Cette égalité implique

$$p_m \det S = A$$

(ce qui montre en particulier que les matrices $S(0)$ et $S(1)$ sont inversibles) et

$$(2) \quad 2 \deg(\alpha) = \operatorname{sgn}(S(1)) - \operatorname{sgn}(S(0))$$

(la notation $\text{sgn}(\)$ désignant la signature d'une matrice symétrique inversible à coefficients réels).

[Voici une démonstration de la formule (2), légèrement différente de celle qui est implicite dans [LG], valable quant à elle sous la seule hypothèse que $A(0)$ et $A(1)$ sont non-nuls (A et B étant toujours premiers entre eux).

On pose

$$Q = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ p_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ p_{m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ p_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On constate que l'on a

$${}^t Q S Q = \begin{bmatrix} p_0 p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & q_3 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & q_{m-2} & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & q_{m-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & q_m \end{bmatrix}.$$

Cette égalité montre que lorsque l'on a $\alpha(t_0) = 0$ alors le corang de $S(t_0)$ est égal à 1 (remarquer que le déterminant du bloc diagonal inférieur de la matrice de droite est égal à $p_m^{-1} B$) et que l'on a la formule

$$\text{sgn}(S(t_0^+)) - \text{sgn}(S(t_0^-)) = \text{sgn}(\alpha(t_0^+)) - \text{sgn}(\alpha(t_0^-))$$

qui implique la formule (2). Décodons la notation. Pour ϵ strictement positif suffisamment petit, la forme $S(t_0 + \epsilon)$ (resp. $S(t_0 - \epsilon)$) est non-dégénérée et sa signature est indépendante de ϵ ; on note $\text{sgn}(S(t_0^+))$ (resp. $\text{sgn}(S(t_0^-))$) cette signature. La notation $\text{sgn}(\)$ désigne dans le membre de droite l'application "signe" de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\{\pm 1\}$; on définit $\text{sgn}(\alpha(t_0^+))$ et $\text{sgn}(\alpha(t_0^-))$ comme précédemment.]

Nous interprétons enfin l'entier $\deg(\alpha)$ comme un indice de Maslov¹.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de sa structure symplectique canonique et l'on considère $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ comme l'espace de ses lagrangiens; on choisit ∞ , c'est-à-dire le lagrangien $\mathbb{R} \times 0$, comme point base de $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$. L'entier $\deg(\alpha)$ apparaît

1. L'indice de Maslov apparaît dans le livre [MA] et notamment dans l'appendice à ce livre écrit par V.I. Arnold. Il a suscité une très abondante littérature. Pour un historique complet et une liste fournie de références, nous renvoyons respectivement à l'introduction et à la bibliographie de [CLM]; dans cette introduction, les auteurs citent en particulier l'article précurseur de C.T.C. Wall que nous évoquons dans la note qui suit le scholie 2.1.4.

alors comme l'indice de Maslov du chemin de lagrangiens α (α est “presque” un lacet car ses extrémités appartiennent à $\mathbf{P}^1(\mathbb{R}) - \{0\}$, qui est un voisinage contractile de ∞).

Épiloguons sur les formules (1) et (2). La formule (1) montre que le chemin α est obtenu en faisant subir des transformations symplectiques “élémentaires”, dépendant de t , au lagrangien $\mathbb{R} \times 0$. La formule (2) dit que l'indice de Maslov de α est la (demi-)différence des signatures en 0 et 1 d’une “forme de Sturm” $S(t)$ qui est une fonction explicite des transformations symplectiques élémentaires précédentes; on rappelle, ce qui sera important pour les généralisations que nous avons en tête, que les formes $S(0)$ et $S(1)$ sont non-dégénérées.

Nous pouvons à présent parler du contenu principal de notre mémoire: nous y expliquons comment le remplacement, dans la théorie précédente,

- de l’anneau $\mathbb{R}$ par n’importe quel anneau (disons commutatif) régulier (dans lequel 2 est inversible),
- de l’espace projectif $\mathbf{P}^1$ par les grassmanniennes lagrangiennes
- et du groupe SL_2 par les groupes symplectiques

conduit à une démonstration du théorème fondamental de la K-théorie hermitienne dû à Karoubi [KA1] (pour une version plus générale de ce théorème, dans le cadre de la K-théorie hermitienne “à la Quillen”, voir [KA4][KA5]).

1.2 Énoncé du théorème fondamental de la K-théorie hermitienne et esquisse de notre démonstration

Soit R un anneau (disons commutatif).

On note $\mathcal{L}_n$ la n -ième grassmannienne lagrangienne; $\mathcal{L}_n(R)$ est donc l’ensemble des lagrangiens de l’espace symplectique $R^n \oplus (R^n)^*$ (la notation $(R^n)^*$ désigne le dual du R -module R^n); cet ensemble est “pointé” par le lagrangien R^n . On note $\mathcal{L}$ la limite directe des foncteurs $\mathcal{L}_n$ suivant les applications de “stabilisation” $\mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_{n+1}$ (on écrit $R^{n+1} \oplus (R^{n+1})^* = (R^n \oplus (R^n)^*) \oplus (R \oplus R^*)$ et l’on fait correspondre à un élément Λ de $\mathcal{L}_n(R)$ l’élément $\Lambda \oplus R$ de $\mathcal{L}_{n+1}(R)$); tout comme les foncteurs $\mathcal{L}_n$ le foncteur $\mathcal{L}$ est “pointé”.

On note $\mathcal{F}_n$ le foncteur qui associe à l’anneau R l’ensemble des formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur $R^n \oplus (R^n)^*$, cet ensemble est pointé par la forme hyperbolique. On note $\mathcal{F}$ la limite directe des foncteurs $\mathcal{F}_n$ suivant les applications de stabilisation $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n+1}$ (on écrit à nouveau $R^{n+1} \oplus$

$(R^{n+1})^* = (R^n \oplus (R^n)^*) \oplus (R \oplus R^*)$, cette fois la stabilisation est la somme orthogonale avec la forme hyperbolique sur $R \oplus R^*$; le foncteur $\mathcal{F}$ est “pointé”.

Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne peut s'énoncer, sous une forme provisoirement un peu vague, de la façon suivante :

Théorème F. *Si l'anneau R est régulier et si 2 est inversible dans R , alors on a une bijection naturelle :*

$$(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \cong (\pi_0 \mathcal{F})(R) .$$

Expliquons la notation. Soit $\mathcal{X}$ un foncteur défini sur la catégorie des anneaux (disons commutatifs) et à valeurs dans la catégorie des ensembles, on note $\pi_0 \mathcal{X}$ le foncteur qui associe à l'anneau R l'ensemble quotient de $\mathcal{X}(R)$, coégalisateur des évaluations en 0 et 1, disons d_0 et d_1 , de $\mathcal{X}(R[T])$ dans $\mathcal{X}(R)$. Supposons maintenant que $\mathcal{X}$ est pointé (c'est-à-dire qu'il peut être enrichi en un foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés), on note dans ce cas $\Omega \mathcal{X}$ le foncteur qui associe à R le sous-ensemble de $\mathcal{X}(R[T])$ formé des α vérifiant $d_0 \alpha = d_1 \alpha = *$ (la notation $*$ désignant le point base).

Sous les hypothèses du théorème F, l'ensemble $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ a un avatar très concret que l'on explicite ci-après. On considère à nouveau un anneau (commutatif) arbitraire R . On identifie le groupe des automorphismes du R -module $R^n \oplus (R^n)^*$ avec $\mathrm{GL}_{2n}(R)$; on dispose donc d'une action (à droite) du groupe $\mathrm{GL}_{2n}(R)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}_n(R)$ et en passant à la limite directe d'une action du groupe $\mathrm{GL}(R)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(R)$. Il est clair que l'application naturelle de $\mathcal{F}(R)$ dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ se factorise par une application naturelle de l'ensemble quotient $\mathcal{F}(R)/\mathrm{EGL}(R)$ dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$, $\mathrm{EGL}(R)$ désignant le sous-groupe de $\mathrm{GL}(R)$ engendré par les matrices élémentaires. On montre dans [KA1][OJ1] que cette dernière application est une bijection si R est régulier et si 2 est inversible dans R . Pour une démonstration très élémentaire dans le cas où R est un corps de caractéristique différente de 2, voir par exemple [OJ2]. On observera que l'on a dans ce cas particulier $\mathrm{EGL}(R) = \mathrm{SL}(R)$ et que le quotient $\mathcal{F}(R)/\mathrm{SL}(R)$ s'identifie au produit fibré de $\mathrm{I}(R)$ et $R^\times$ au-dessus de $R^\times/R^{\times 2}$, $\mathrm{I}(R)$ désignant l'idéal fondamental de l'anneau de Witt $W(R)$ (celui de la théorie des formes quadratiques!).

Nous esquissons maintenant notre démonstration du théorème F. La partie essentielle de celle-ci consiste à définir, sous les hypothèses du théorème, une application “indice de Maslov”, de $(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$ dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$.

Soit L un R -module libre de dimension finie; on note $\mathrm{H}(L)$ l'espace symplectique $L \oplus L^*$. Soit $\alpha(T)$ un lagrangien de $R[T] \otimes_R \mathrm{H}(L)$, avec $\alpha(0) = \alpha(1) = L$.

Nous commençons par montrer que, sous les hypothèses du théorème, et quitte à stabiliser (c'est-à-dire remplacer L par $L \oplus L'$, avec L' un R -module libre de dimension finie), on peut écrire

$$(3) \quad \alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m}(T) & 1 \end{bmatrix} \cdot L ,$$

$q_0(T), q_1(T), \dots, q_{2m}(T)$ désignant une suite de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur $R[T] \otimes_R L$ et $R[T] \otimes_R L^*$. On parvient à l'écriture (3) en deux étapes. La régularité de R sert à garantir que l'évaluation en 0, $K_0(R[T]) \rightarrow K_0(R)$, est un isomorphisme ; ceci entraîne que l'on peut écrire (éventuellement après stabilisation)

$$\alpha(T) = \Phi(T) \cdot L ,$$

$\Phi(T)$ désignant un automorphisme symplectique de $R[T] \otimes_R H(L)$ tel que $\Phi(0)$ est l'identité de $H(L)$. On se convainc que l'on peut supposer, quitte toujours à stabiliser, que $\Phi(T)$ est un produit d'automorphismes symplectiques élémentaires en utilisant le fait que l'évaluation en 0, ${}_W_1(R[T]) \rightarrow {}_W_1(R)$, est un isomorphisme pour tout anneau R dans lequel 2 est inversible (pour la définition du foncteur ${}_W_1$, voir la démonstration du lemme 3.1.3). Pour le confort du lecteur et la cohérence de notre mémoire nous explicitons une démonstration de ce résultat (dû encore à Karoubi) en appendice, en suivant Paul Balmer et William Pardon.

Nous montrons ensuite que si l'on stabilise encore, alors on peut écrire

$$(4) \quad \alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* ,$$

$S(T)$ et $Y(T)$ désignant des formes bilinéaires symétriques définies respectivement sur $R[T] \otimes_R L$ et $R[T] \otimes_R L^*$. On peut en fait, le "lacet" α étant écrit sous la forme (3), expliciter la stabilisation évoquée ci-dessus et la forme bilinéaire symétrique $S(T)$:

Soient L un R -module libre de dimension finie et $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$ une suite finie de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur L et L^* ; on pose

$$M = \underbrace{L \oplus L^* \oplus L \oplus L^* \oplus \dots \oplus L^*}_{2m \text{ facteurs}} = L \oplus L'$$

et on note $S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$ la forme bilinéaire symétrique sur M (que nous

appelons une forme de Sturm) dont la matrice est la suivante

$$\begin{bmatrix} q_0 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & -q_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & q_2 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -q_{2m-3} & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & q_{2m-2} & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -q_{2m-1} \end{bmatrix}.$$

On constate que l'on peut prendre pour $S(T)$ la forme bilinéaire symétrique $S(q_0(T), q_1(T), \dots, q_{2m-1}(T))$ (définie sur $R[T] \otimes_R M$).

Revenons maintenant à l'écriture (4). On observe que l'on a $S(0)Y(0) + 1 = 0$ et $S(1)Y(1) + 1 = 0$, si bien que $S(0)$ et $S(1)$ sont inversibles et que le lacet α est homotope à extrémités fixes au lacet

$$(5) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-T)S(0) + TS(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -((1-T)S(0)^{-1} + TS(1)^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*.$$

Nous montrons enfin que la classe dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ de la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $L \oplus L^*$ de matrice

$$\begin{bmatrix} S(1) & 0 \\ 0 & -S(0)^{-1} \end{bmatrix}$$

est indépendante du choix de $S(T)$ (il est facile de se convaincre de ce que cette classe est indépendante du choix d'un isomorphisme $L \approx R^n$) et est un invariant de la classe d'homotopie de α .

Il faut voir l'application

$$\text{classe de } \alpha \mapsto \text{classe de } \begin{bmatrix} S(1) & 0 \\ 0 & -S(0)^{-1} \end{bmatrix}$$

comme un "indice de Maslov"

$$\text{Mas} : (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

(défini au moins si R est régulier et 2 inversible dans R) ; il est clair que Mas est un homomorphisme de monoïdes abéliens si l'on munit la source et le but des lois de monoïde définies "par juxtaposition". Une fois l'indice de Maslov défini, on se convainc facilement de ce qu'il est injectif et surjectif en contemplant la formule (5).

1.3 Relation avec la périodicité de Bott

Soit X un espace topologique compact ; on note $C(X)$ l'algèbre de Banach des fonctions, disons complexes, continues sur X .

Les ensembles $\mathcal{L}(C(X))$ et $\mathcal{F}(C(X))$ s'identifient respectivement aux ensembles d'applications continues de X dans les ensembles $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ munis de leur topologie naturelle.

On montre que les ensembles de classes d'homotopie d'applications libres $[X, \Omega\mathcal{L}(\mathbb{C})]$ et $[X, \mathcal{F}(\mathbb{C})]$ sont naturellement en bijection par une méthode parallèle à celle que nous venons de décrire pour le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne. Comme la bijection de $[X, \mathcal{F}(\mathbb{C})]$ sur $[X, \Omega\mathcal{L}(\mathbb{C})]$ est induite par une application canonique de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ sur $\Omega\mathcal{L}(\mathbb{C})$, on en déduit que l'on a une équivalence d'homotopie (tout aussi canonique) $\Omega\mathcal{L}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{F}(\mathbb{C})$.

L'ensemble de lacets qui apparaît dans ce contexte est défini comme le sous-ensemble de $\mathcal{L}(C(X \times [0,1]))$ constitué des éléments α dont les évaluations en 0 et 1 sont constantes, égales au point base. L'analogue de l'écriture (3) est ici bien plus facile à obtenir et ne nécessite pas de stabilisation : par exemple, l'argument d'invariance homotopique du $-W_1$ est remplacé par un simple argument de continuité.

L'équivalence d'homotopie $\Omega\mathcal{L}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{F}(\mathbb{C})$ s'identifie à l'une des huit de la périodicité de Bott réelle. En effet, on a un homéomorphisme $\mathcal{L}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Spq}/U$ et une équivalence d'homotopie $\mathcal{F}(\mathbb{C}) \cong U/O$, Spq désignant la limite directe des groupes unitaires quaternionniens $\mathrm{Spq}(n)$ ($\mathrm{Spq}(n)$ est un sous-groupe compact maximal du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$, dans la littérature $\mathrm{Spq}(n)$ est souvent noté $\mathrm{Sp}(n)$), U désignant la limite directe des groupes unitaires $U(n)$ et O la limite directe des groupes orthogonaux euclidiens $O(n)$.

Dans [KA1], Karoubi met en place une version du théorème F pour les algèbres de Banach réelles munies d'une anti-involution et en déduit à la fois les huit équivalences d'homotopie de la périodicité de Bott réelle et les deux de la périodicité de Bott complexe. La démonstration du théorème F que nous avons décrite dans le paragraphe précédent est quant à elle inspirée de la méthode des “transversales lagrangiennes”, élaborée par François Latour dans [LT], qui montre que cette même méthode donne *mutatis mutandis* les dix équivalences d'homotopie de la périodicité de Bott évoquées ci-dessus.

1.4 Plan du mémoire

Chapitre 1. Introduction

Chapitre 2. Algèbre linéaire symplectique

Le cœur de ce chapitre est la proposition 2.2.4 qui dit qu'un lagrangien Λ de l'espace symplectique hyperbolique $H(L)$ qui s'écrit

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m} & 1 \end{bmatrix} \cdot L$$

avec $(q_0, q_1, \dots, q_{2m})$ une suite de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur L et L^* , est transverse “après stabilisation” au graphe de la forme de Sturm $S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$ (qui est un lagrangien de l'espace symplectique hyperbolique $H(L \oplus L')$ avec $L' = L^* \oplus L \oplus \dots \oplus L^*$). En dépit de sa rusticité, cet énoncé est le point de départ de tout le mémoire.

Chapitre 3. Sur la “composante connexe” du point base dans la lagrangienne infinie

L'objet principal de ce chapitre est de démontrer la proposition 3.1.1. Soit Λ un lagrangien de $H(L)$, la proposition en question dit notamment que sous les hypothèses du théorème F et, “quitte à stabiliser”, les conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe un lagrangien de $H(L)$ transverse à la fois à L^* et à Λ ;
- il existe un lagrangien α de $H(R[T] \otimes_R L)$ avec $\alpha(0) = L$ et $\alpha(1) = \Lambda$.

Chapitre 4. Énoncé et démonstration du théorème fondamental de la K-théorie hermitienne

Nous avons largement évoqué le contenu principal de ce chapitre en 1.2. Les relations entre Théorème F et périodicité de Bott, évoquées en 1.3, sont détaillées en 4.7.

Chapitre 5. Suites de Sturm et H_2 de l'homomorphisme hyperbolique

On montre dans ce chapitre comment utiliser certaines idées des chapitres 2, 3 et 4 pour obtenir des variantes des résultats de Sharpe [SH]. On montre par exemple que l'on a une suite exacte de groupes naturelle

$$H_2(\mathrm{EGL}(R); \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\mathrm{ESp}(R); \mathbb{Z}) \rightarrow V(R) \rightarrow K_1(R) ,$$

$V(R)$ désignant le groupe abélien associé au monoïde abélien $\mathcal{F}(R)/\mathrm{EGL}(R)$ (la loi de monoïde étant induite par la somme orthogonale, pour une autre

définition de $V(R)$ voir 4.5) et $\mathrm{ESp}(R)$ désignant le sous-groupe “élémentaire” du groupe symplectique infini.

Chapitre 6. Généralisations

Comme nous l’avons déjà dit en 1.3, l’équivalence d’homotopie (topologique) $\Omega\mathcal{L}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{F}(\mathbb{C})$ s’identifie à l’une des huit de la périodicité de Bott réelle; on traite en particulier au chapitre 6 de huit analogues algébriques des théorèmes de Bott en question dont le théorème F est le prototype. On décrit huit foncteurs $\mathcal{L}_i$, $i \in \mathbb{Z}/8$, définis sur la catégorie des anneaux commutatifs et à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés et huit bijections naturelles

$$(\pi_0 \mathcal{L}_{i+1})(R) \cong \begin{cases} (\pi_0 \Omega \mathcal{L}_i)(R) & \text{pour } i \equiv 0 \pmod{2} \\ (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_i)(R) & \text{pour } i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

(avec la restriction “ R régulier et contenant $\frac{1}{2}$ ” dans le premier cas et “ R contenant $\frac{1}{2}$ ” dans le second), l’ensemble $(\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_i)(R)$ étant défini comme le “noyau” de l’évaluation en 1, $\mathcal{L}_i(R[T, T^{-1}]) \rightarrow \mathcal{L}_i(R)$.

Ce chapitre est avant tout une reformulation dans notre langage de résultats bien connus dans la littérature du sujet, à laquelle nous renverrons pour la démonstration de la plupart des énoncés.

Appendice A. Technologie des formes de Sturm

On vérifie dans cet appendice un certain nombre d’énoncés techniques concernant les formes de Sturm auxquels on s’est référé dans le corps du mémoire.

Appendice B. Démonstration de la proposition 2.4.4

On vérifie dans cet appendice une formule, décrite à la fin du chapitre 2, qui raffine l’énoncé 2.2.4 évoqué plus haut. Cette formule montre que l’on a “après stabilisation”

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & q_{2m+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -G^{*-1} \\ G & 0 \end{bmatrix}$$

pour toute suite $(q_0, q_1, \dots, q_{2m+1})$ de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur L et L^* (avec $m \geq 1$), S , Y , Z et G étant des fonctions explicites de $(q_0, q_1, \dots, q_{2m+1})$.

Appendice C. Sur le graphe bipartite associé à la relation de transversalité des lagrangiens

Un graphe bipartite est déterminé par la donnée de deux ensembles S_1 et S_2 et d’un sous-ensemble A (l’ensemble des arêtes) du produit $S_1 \times S_2$.

En prenant pour S_1 et S_2 l'ensemble $\mathcal{L}_n(R)$ et pour A l'ensemble des couples de lagrangiens transverses, on obtient un graphe bipartite, disons $\mathcal{G}_n(R)$; le graphe bipartite auquel fait référence le titre de l'appendice, est une limite directe adéquate des $\mathcal{G}_n(R)$ (comparer avec [NO]). On interprète dans cet appendice, en termes de ce graphe, la notion de “suite de Sturm” et un certain groupe abélien $A(R)$ introduit au chapitre 5 (dont le “calcul” est le résultat principal du chapitre 5).

Appendice D. *Invariance homotopique du $-W_1$*

Nous avons déjà évoqué l'objet de cet appendice en 1.2 (entre les formules (3) et (4)).

1.5 Conseils de lecture pour le lecteur pressé

Le lecteur pressé commencera par prendre connaissance de l'énoncé de la proposition 2.2.4 (dont la démonstration est tout à fait élémentaire). En prévision, nous avons fait en sorte que cet énoncé soit “self-contained”. Il pourra, si nécessaire, se faire une idée concrète de la signification de la proposition 2.2.4 en lisant les énoncés 2.4.3 et 2.4.4 qui en sont un raffinement.

Il se rendra alors directement à la proposition 3.1.1; cette fois la lecture de la démonstration est conseillée.

Après cette démonstration, il passera au chapitre 4 où il lira les paragraphes 4.1 et 4.2: Énoncé précis du théorème fondamental de la K-théorie hermitienne, théorie “algébrique” de l'indice de Maslov, démonstration du théorème fondamental de la K-théorie hermitienne.

Ignorant en première lecture les paragraphes 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6, il parcourra ensuite les paragraphes 4.7 et 4.8 puis le chapitre 6.

La lecture du chapitre 5 nécessite la lecture préalable du paragraphe 4.5 du chapitre 4 dans lequel est introduit le groupe $V(R)$ de Karoubi; le lecteur pressé lira les paragraphes 5.1 et 5.4.

Les appendices ont un caractère technique, à l'exception de l'appendice C par lequel on pourra terminer une lecture rapide du mémoire.

Avertissement

Anneaux commutatifs *versus* anneaux avec anti-involution

Considérés comme des foncteurs définis sur la catégorie des anneaux commutatifs et à valeurs dans la catégorie des ensembles, les foncteurs $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}$ et leur généralisations (voir chapitre 6) sont des ind- $\mathbb{Z}$ -schémas (en fait limite inductive de suites de $\mathbb{Z}$ -schémas “classiques”) dont les points complexes sont les espaces classifiants de la périodicité de Bott réelle. C’est ce point de vue “géométrique” qui est à l’origine du choix que nous avons fait :

Dans ce mémoire les anneaux seront supposés commutatifs (sauf mention expresse du contraire).

Cependant, comme le cadre naturel de la K-théorie hermitienne est celui des anneaux avec anti-involution (un anneau commutatif n’étant pas autre chose qu’un anneau avec anti-involution dont l’anti-involution est triviale!), nous avons veillé, dans la mesure du possible, à ce que nos constructions et arguments puissent s’adapter à ce cadre-là.

Compte tenu du choix ci-dessus, le mot “anneau” signifiera dans ce mémoire “anneau commutatif” (sauf mention expresse du contraire). Cependant nous nous réservons le droit de laisser traîner parfois l’adjectif “commutatif” après le substantif “anneau”.

Crédits

Ce mémoire, comme son titre l’indique, revisite des sujets fort classiques. Il est relié aux travaux de nombreux auteurs, notamment : Richard W. Sharpe, Max Karoubi, Andrew Ranicki, François Latour ... En particulier l’influence de l’article [LT] de notre ami François Latour est primordiale ; nous lui dédions ce mémoire.

Chapitre 2

Algèbre linéaire symplectique

2.1 Définitions et notations

Soient R un anneau commutatif et L un R -module libre de dimension finie. La notation L^* désigne le R -module dual de L : $L^* = \text{Hom}_R(L, R)$.

ESPACES SYMPLECTIQUES HYPERBOLIQUES

On note $H(L)$ le R -module $L \oplus L^*$ muni de la forme bilinéaire alternée

$$((x, \xi), (y, \eta)) \mapsto \langle x, \eta \rangle - \langle y, \xi \rangle$$

(on dit que $H(L)$ est l'espace symplectique hyperbolique associé à L et que la forme bilinéaire ci-dessus est sa forme symplectique).

Définition-Proposition 2.1.1. *On note $\sigma : L \oplus L^* \rightarrow L^* \oplus L$ l'isomorphisme de R -modules $(x, \xi) \mapsto (\xi, -x)$. Il s'identifie à l'isomorphisme de $H(L)$ dans $H(L)^*$ induit par la forme symplectique :*

$$\langle x, \eta \rangle - \langle y, \xi \rangle = \langle (x, \xi), \sigma(y, \eta) \rangle .$$

Considérez comme un isomorphisme de $H(L)$ dans $H(L^)$, σ préserve les formes symplectiques.*

GROUPES SYMPLECTIQUES

On note Sp_L le groupe constitué des automorphismes du R -module $H(L)$ qui préservent la forme symplectique. Nous considérerons très souvent un endomorphisme du R -module $H(L)$ comme une matrice, carrée d'ordre 2, d'endomorphismes de R -modules

$$\begin{array}{c} L \\ L^* \end{array} \begin{array}{cc} L & L^* \\ \left[\begin{array}{cc} a & c \\ b & d \end{array} \right] \end{array}$$

avec $a \in \text{Hom}_R(L, L)$, $b \in \text{Hom}_R(L, L^*)$, $c \in \text{Hom}_R(L^*, L)$, $d \in \text{Hom}_R(L^*, L^*)$. Nous dirons qu'une telle matrice est une matrice de type $(L, L^*) \times (L, L^*)$.

Plus généralement :

Terminologie. Soient $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ deux suites finies de R -modules. Nous appelons *matrice de type* $(X_1, X_2, \dots, X_m) \times (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ une matrice à m colonnes et n lignes dont le coefficient sur la i -ème colonne et la j -ème ligne est un homomorphisme de X_i dans Y_j .

Revenons au groupe Sp_L . Un endomorphisme $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ de $\text{H}(L)$ appartient à Sp_L si et seulement si l'on a

$$\begin{bmatrix} d^* & -c^* \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(la notation $()^*$ désigne ici le dual d'un homomorphisme de R -modules et l'on identifie L^{**} avec L). Il est à remarquer que l'égalité ci-dessus est équivalente à la suivante

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^* & -c^* \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Voici maintenant des exemples d'éléments de Sp_L .

On note GL_L le groupe des automorphismes du R -module L . L'application de GL_L dans Sp_L ,

$$a \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{bmatrix},$$

est un homomorphisme de groupes que l'on note H .

Soit $q : L \rightarrow L^*$ (resp. $q : L^* \rightarrow L$) un homomorphisme de R -modules. L'automorphisme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{resp.} \quad \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$$

du R -module $\text{H}(L)$ appartient à Sp_L si et seulement si l'on a $q = q^*$. On observera qu'un tel q s'identifie à une forme bilinéaire symétrique sur L (resp. L^*) ; nous noterons $\mathcal{S}_L$ (resp. $\mathcal{S}_{L^*}$) le sous-module de $\text{Hom}_R(L, L^*)$ (resp. $\text{Hom}_R(L^*, L)$) constitué des homomorphismes q vérifiant $q = q^*$. Les automorphismes symplectiques de $\text{H}(L)$ du type précédent sont dits *élémentaires* ; nous noterons ESp_L le sous-groupe de Sp_L qu'ils engendrent.

On note Sp_n le groupe algébrique, défini sur $\mathbb{Z}$, dont le groupe des R -points est Sp_{R^n} (on observera que Sp_1 s'identifie à SL_2). On note ESp_n le foncteur $R \mapsto \text{ESp}_{R^n}$, défini sur la catégorie des anneaux commutatifs et à valeurs dans la catégorie des groupes.

Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie. L'espace symplectique hyperbolique $H(L \oplus L')$ est canoniquement isomorphe à la somme orthogonale $H(L) \oplus H(L')$; cet isomorphisme induit des monomorphismes, tout aussi canoniques, $\mathrm{Sp}_L \times \mathrm{Sp}_{L'} \rightarrow \mathrm{Sp}_{L \oplus L'}$, $\mathrm{ESp}_L \times \mathrm{ESp}_{L'} \rightarrow \mathrm{ESp}_{L \oplus L'}$, $\mathrm{Sp}_L \rightarrow \mathrm{Sp}_{L \oplus L'}$, $\mathrm{ESp}_L \rightarrow \mathrm{ESp}_{L \oplus L'}$, et en particulier des applications de “stabilisation”, $\mathrm{Sp}_n \rightarrow \mathrm{Sp}_{n+1}$, $\mathrm{ESp}_n \rightarrow \mathrm{ESp}_{n+1}$. On note Sp (resp. ESp) le foncteur limite directe des foncteurs Sp_n (resp. ESp_n) suivant ces applications.

LAGRANGIENS

Un *lagrangien* de l'espace symplectique $H(L)$ est un sous-module Λ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Λ est facteur direct ;
- Λ est égal à son orthogonal (pour la forme symplectique) : $\Lambda = \Lambda^\perp$.

On observera que ces propriétés impliquent que le sous-module Λ est un R -module projectif de type fini dont le rang est égal à la dimension de L (voir le point (a) de la proposition 2.1.5 ci-après).

Nous noterons $\mathcal{L}_L$ l'ensemble des lagrangiens de $H(L)$; L et L^* sont deux exemples d'éléments de $\mathcal{L}_L$.

Soit X un élément de $\mathcal{L}_L$; nous noterons $\mathcal{U}_X$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}_L$ constitué des lagrangiens Λ transverses à X .

On rappelle que l'on dit que deux sous-modules E' et E'' d'un R -module E sont *transverses*, ou que E' est *transverse* à E'' , si l'on a $E' + E'' = E$; cette relation binaire est notée $E' \pitchfork E''$. On a donc avec cette notation $\mathcal{U}_X = \{\Lambda ; \Lambda \pitchfork X\}$.

La paire $\{L, L^*\}$ est un exemple de paire de lagrangiens transverses.

Les deux propositions suivantes sont immédiates :

Proposition 2.1.2. *Les deux applications suivantes sont bijectives :*

$$\mathcal{S}_L \rightarrow \mathcal{U}_{L^*}, \quad q \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \cdot L; \quad \mathcal{S}_{L^*} \rightarrow \mathcal{U}_L, \quad q \mapsto \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*.$$

Proposition 2.1.3. *Soit q une forme bilinéaire symétrique sur L , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \cdot L$ est transverse à L ;
- (ii) q est non-dégénérée.

Plus précisément, soient q une forme bilinéaire symétrique sur L et r une forme bilinéaire symétrique sur L^* , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) les deux lagrangiens $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \cdot L$ et $\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*$ coïncident ;
- (ii) q et r (vus comme des homomorphismes) sont inverses l'un de l'autre.

Variante :

- (i) on a l'égalité $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* = L$;
- (ii) q et $-r$ (vus comme des homomorphismes) sont inverses l'un de l'autre.

Scholie 2.1.4. *L'application*

$$\mathcal{S}_L \rightarrow \mathcal{U}_{L^*} \quad , \quad q \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \cdot L$$

induit une bijection du sous-ensemble de $\mathcal{S}_L$, constitué des formes bilinéaires symétriques non-dégénérées, sur l'intersection $\mathcal{U}_L \cap \mathcal{U}_{L^*}$.¹

Le point (b) de la proposition 2.1.5 ci-après généralise la proposition 2.1.2 ci-dessus. Dans son énoncé apparaît subrepticement l'espace symplectique hyperbolique $H(X)$, avec X un R -module projectif de type fini, dont la définition est l'extension évidente de celle que nous avons donnée plus haut dans le cas où X est libre.

Proposition 2.1.5. *Soit X un lagrangien de $H(L)$. Soient $i_X : X \rightarrow H(L)$ l'inclusion de X dans $H(L)$ et $p_X : H(L) \rightarrow X^*$ l'homomorphisme composé de l'isomorphisme $\sigma : H(L) \rightarrow H(L)^*$ induit par la forme symplectique (voir 2.1.1) et de l'homomorphisme i_X^* . Alors :*

- (a) *La suite de R -modules*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i_X} H(L) \xrightarrow{p_X} X^* \longrightarrow 0$$

est exacte.

- (b) *Les ensembles suivants sont canoniquement en bijection, non-vides et munis d'une structure canonique d'espace affine sous le R -module des formes bilinéaires symétriques sur X^* :*

1. Dans son lumineux article [WA], C.T.C. Wall associe à tout triplet (L_1, L_2, L_3) de lagrangiens d'un espace vectoriel symplectique un "indice de Maslov", disons $m(L_1, L_2, L_3)$, qui est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée ; l'application $\Lambda \mapsto m(L, L^*, \Lambda)$ est l'inverse de la bijection de 2.1.4.

- l'ensemble $\mathcal{U}_X$ des lagrangiens de $H(L)$ transverses à X ;
- l'ensemble des sections R -linéaires s de p_X telles que la forme bilinéaire alternée $(\xi, \eta) \mapsto s(\xi) \cdot s(\eta)$ de X^* est nulle (la notation $-\cdot-$ désigne ici la forme bilinéaire alternée de $H(L)$) ;
- l'ensemble des isomorphismes de R -modules $H(X) \cong H(L)$ préservant les formes symplectiques et prolongeant i_X .

(c) Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est un R -module libre ;
- (ii) il existe un isomorphisme de R -modules $L \cong X$;
- (iii) il existe un automorphisme symplectique Φ de $H(L)$ tel que l'on a $X = \Phi \cdot L$.

Démonstration. Le point (a) est clair.

Passons au point (b). Nous laissons au lecteur le soin d'explicitier les applications que ce point affirme être des bijections et nous vérifions que le deuxième ensemble est non vide et muni d'une structure canonique d'espace affine sous le R -module des formes bilinéaires symétriques sur X^* .

Soit Σ l'ensemble des sections R -linéaires de p_X . L'ensemble Σ n'est pas vide puisque X^* est projectif ; de plus Σ possède une structure canonique d'espace affine sous $\text{Hom}_R(X^*, X)$ (que l'on peut voir comme le R -module des formes bilinéaires sur X^*). Soient $\mathcal{A}_{X^*}$ le sous-module de $\text{Hom}_R(X^*, X)$ constitué des formes bilinéaires alternées et $a : \Sigma \rightarrow \mathcal{A}_{X^*}$ l'application qui associe à une section s la forme bilinéaire alternée $(\xi, \eta) \mapsto s(\xi) \cdot s(\eta)$. Soit u un élément de $\text{Hom}_R(X^*, X)$, on constate que l'on a :

$$a(s + u) = a(s) + (u - u^*),$$

en d'autres termes que a est une application affine dont l'application linéaire sous-jacente est l'application, disons $\tilde{a} : u \mapsto u - u^*$ de $\text{Hom}_R(X^*, X)$ dans $\mathcal{A}_{X^*}$. Le fait que $a^{-1}(0)$ n'est pas vide résulte maintenant du fait que $\tilde{a}$ est surjective pour tout R -module projectif de type fini X . Ceci est clair si X est libre : une matrice carrée "alternée" à coefficients dans R est une "antisymétrisée" ; le cas général en découle. Comme a est affine, $a^{-1}(0)$ est bien un espace affine sous le noyau de $\tilde{a}$, à savoir le R -module des formes bilinéaires symétriques sur X^* .

Venons-en enfin au point (c). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est facile : si X est libre alors L et X ont même dimension. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte essentiellement du point (b) : soient $\alpha : L \rightarrow X$ un isomorphisme de R -modules, $H(\alpha) : H(L) \rightarrow H(X)$ l'isomorphisme symplectique induit et $\Psi : H(X) \rightarrow H(L)$ un isomorphisme symplectique prolongeant i_X donné par le point (b), alors on a $X = (\Psi \circ H(\alpha)) \cdot L$. Enfin l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. $\square$

Scholie-Définition 2.1.6. Soit $\phi : L \rightarrow H(L)$ un homomorphisme de R -modules ; un tel homomorphisme s'identifie à une matrice $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ de type $(L) \times (L, L^*)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'homomorphisme ϕ est injectif et son image est un lagrangien.
- (ii) Il existe un automorphisme symplectique Φ de $H(L)$ tel que l'on a $\phi = \Phi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; en d'autres termes $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ est la première colonne d'une "matrice symplectique" $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.
- (iii) On a $a^*b = b^*a$ et il existe un homomorphisme de R -modules $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} : H(L) \rightarrow L$ tel que l'on a $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1$.
- (iv) On a $a^*b = b^*a$ et le couple (b, b^*) considéré comme un homomorphisme de complexes de chaînes, du complexe $L \xrightarrow{a} L$ dans le complexe $L^* \xrightarrow{a^*} L^*$, est une équivalence d'homotopie.

Nous appelons plongement lagrangien de L dans $H(L)$ un homomorphisme de R -modules qui vérifie les conditions équivalentes ci-dessus.

L'équivalence (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du point (c) de 2.1.5 ; l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est immédiate. Nous vérifions ci-après (iii) $\Rightarrow$ (ii) et (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (ii). On constate que l'on a

$$\begin{bmatrix} u & v \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -v^* \\ b & u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & vu^* - uv^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si l'on a $uv^* = vu^*$ alors l'affaire est entendue. Dans le cas général on remplace $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$ par $\begin{bmatrix} u' & v' \end{bmatrix}$ avec $u' = u - \gamma b^*$ et $v' = v + \gamma a^*$, γ désignant un homomorphisme de L^* dans L . On constate que l'on a

$$u'v'^* - v'u'^* = uv^* - vu^* - (\gamma - \gamma^*) ;$$

on peut prendre par exemple $\gamma = uv^*$. □

Démonstration de (iv) $\Rightarrow$ (iii). Si (b, b^*) est une équivalence d'homotopie alors il existe en particulier des homomorphismes $v : L^* \rightarrow L$ et $u : L \rightarrow L$ tels que l'on a $1 - vb = ua$. □

2.2 Formes de Sturm

Soit L un R -module libre de dimension finie.

Soit q un élément de $\mathcal{S}_L$ (resp. $\mathcal{S}_{L^*}$), on note $E_0(q)$ (resp. $E_1(q)$) l'automorphisme symplectique élémentaire de $H(L)$ introduit en 2.1 ; on a donc :

$$E_0(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1(q) = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

PRODUIT D'AUTOMORPHISMES SYMPLECTIQUES ÉLÉMENTAIRES
ET RELATION DE RÉCURRENCE LINÉAIRE

Cet intertitre énigmatique fait référence à l'énoncé 2.2.2 ci-dessous.

Soit k un entier relatif. On pose

$$L_k = \begin{cases} L & \text{pour } k \text{ pair,} \\ L^* & \text{pour } k \text{ impair.} \end{cases}$$

Définition 2.2.1. Nous appelons *suite de Sturm* sur L la donnée :

- de deux entiers (relatifs) m et n avec $m \leq n$
- et d'une suite finie $\underline{q} = (q_m, \dots, q_k, \dots, q_n)$ d'éléments de la réunion disjointe $\mathcal{S}_L \amalg \mathcal{S}_{L^*}$ avec $q_k \in \mathcal{S}_{L_k}$ pour $m \leq k \leq n$.

Nous appelons *type* de la suite de Sturm $\underline{q}$ le couple d'entiers (m, n) . L'entier $l = n - m + 1$ est appelé *longueur* de la suite $\underline{q}$; nous le noterons parfois $|\underline{q}|$.

Remarque. La notion de suite de Sturm est intimement liée à celle de suite de lagrangiens consécutivement transverses. Voir Proposition C.1.

Soit $\underline{q} = (q_m, \dots, q_k, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L ; on pose

$$E(\underline{q}) = E_{p(m)}(q_m) E_{p(m+1)}(q_{m+1}) \dots E_{p(n)}(q_n),$$

avec $p(k) = 0$ pour k pair et $p(k) = 1$ pour k impair ($E(\underline{q})$ est donc un élément de ESp_L).

On note enfin $\sigma_k : H(L) \rightarrow H(L_k)$ l'isomorphisme symplectique qui est l'identité pour k pair et l'isomorphisme σ (voir 2.1.1) pour k impair.

Cette terminologie et ces notations introduites, nous pouvons énoncer la proposition suivante dont la vérification est immédiate :

Proposition 2.2.2. *Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . Soit $(x_{m-1}, x_m, \dots, x_k, \dots, x_n, x_{n+1})$ une suite d'éléments de $L \amalg L^*$ avec $x_k \in L_k$ pour $m - 1 \leq k \leq n + 1$.*

On fixe k , avec $m \leq k \leq n$; les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) vérifie

$$x_{k-1} + (-1)^k q_k x_k + x_{k+1} = 0 ,$$

en considérant x_{k-1} et x_{k+1} comme des éléments de L_k^* .

(ii) La suite (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) vérifie

$$(x_{k-1}, x_k) = (-1)^{k-1} (\sigma_{k-1} \circ E(q_k) \circ \sigma_k^{-1})(x_k, x_{k+1}) ,$$

en considérant (x_{k-1}, x_k) comme un élément de $H(L_{k-1})$ et (x_k, x_{k+1}) comme un élément de $H(L_k)$.

Si la condition (i) est vérifiée pour $m \leq k \leq n$, alors on a

$$(x_{m-1}, x_m) = (-1)^{\frac{(n-m+1)(m+n-2)}{2}} (\sigma_{m-1} \circ E(\underline{q}) \circ \sigma_n^{-1})(x_n, x_{n+1}) ,$$

en considérant (x_{m-1}, x_m) comme un élément de $H(L_{m-1})$ et (x_n, x_{n+1}) comme un élément de $H(L_n)$.

FORMES DE STURM

La proposition 2.2.2 conduit à la proposition 2.2.3 ci-dessous, un peu plus conceptuelle, dont l'énoncé fait intervenir les “formes de Sturm”.

On reprend les notations de 2.2.2.

On pose $L_{m,n} = \bigoplus_{k=m}^n L_k$ et on note $S(\underline{q})$, la forme bilinéaire symétrique sur le R -module libre $L_{m,n}$ dont la matrice est la suivante :

$$\begin{array}{c} L_m \quad L_{m+1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad L_n \\ \begin{array}{c} L_m^* \\ L_{m+1}^* \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ L_n^* \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc} (-1)^m q_m & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (-1)^{m+1} q_{m+1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (-1)^n q_n \end{array} \right] \end{array}$$

(en clair : les coefficients diagonaux sont les homomorphismes $(-1)^k q_k$, les coefficients qui bordent la diagonale sont les homomorphismes qui identifient L_k à $L_{k\pm 1}^*$, tous les autres coefficients sont nuls) ; c'est cette forme bilinéaire symétrique que nous appelons *forme de Sturm* associée à la suite de Sturm $\underline{q}$. Signalons que ce type de forme apparaît notamment comme forme d'intersection de certains “plumbings” [HNK, §8].

On fera enfin les observations suivantes :

- $L_{m+1,n}$ s'identifie à un sous-module de $L_{m,n}$ et donc aussi à un sous-module de l'espace symplectique hyperbolique $H(L_{m,n})$;
- le sous-module $L_{m+1,n}^\perp$ (orthogonal de $L_{m+1,n}$ pour la forme symplectique) s'identifie à la somme directe $L_{m,n} \oplus L_m^* \subset L_{m,n} \oplus L_{m,n}^* = H(L_{m,n})$;
- le quotient $L_{m+1,n}^\perp / L_{m+1,n}$, muni de la forme bilinéaire alternée induite par celle de $H(L_m)$, s'identifie à l'espace symplectique hyperbolique $H(L_m)$.

Proposition 2.2.3. *Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L ; soit q_{n+1} un élément de $\mathcal{S}_{L_{n+1}}$, on note $(\underline{q}, q_{n+1})$ la suite de Sturm (sur L) $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n, q_{n+1})$. Soit $X(\underline{q})$ le graphe de $S(\underline{q})$ dans l'espace symplectique hyperbolique $H(L_{m,n})$; ce graphe est un lagrangien qui vérifie les propriétés suivantes :*

- (a) $X(\underline{q})$ est transverse à $L_{m,n}^*$;
- (b) $X(\underline{q})$ est transverse à $L_{m+1,n}^\perp$ et l'image du composé de l'homomorphisme (injectif) $X(\underline{q}) \cap L_{m+1,n}^\perp \rightarrow L_{m+1,n}^\perp / L_{m+1,n}$ et de l'isomorphisme symplectique canonique $L_{m+1,n}^\perp / L_{m+1,n} \cong H(L_m)$ est $\sigma_m(E(\underline{q}) \cdot L_n)$;
- (c) $X(\underline{q})$ est transverse à $\sigma_m(E(\underline{q}, q_{n+1}) \cdot L_{n+1}) \oplus L_{m+1,n}$.

[Dans l'expression $E(\underline{q}) \cdot L_n$ (resp. $E(\underline{q}, q_{n+1}) \cdot L_{n+1}$) qui apparaît dans l'énoncé de la propriété (b) (resp. (c)), L_n (resp. L_{n+1}) doit être considéré comme un sous-module de $H(L)$, à savoir, selon nos conventions, le lagrangien L si n est pair (resp. impair) ou le lagrangien L^* si n est impair (resp. pair).]

Démonstration. La propriété (a) est évidente.

Vérifions la propriété (b).

On note ι l'inclusion de $L_{m+1,n}$ dans $L_{m,n}$.

- La transversalité $X(\underline{q}) \pitchfork L_{m+1,n}^\perp$ est impliquée par la surjectivité de l'homomorphisme $\iota^* \circ S(\underline{q}) : L_{m,n} \rightarrow L_{m+1,n}^*$. Celle-ci est due au fait que le bloc obtenu à partir de la matrice de $S(\underline{q})$ “en supprimant la première ligne et la dernière colonne” est “triangulaire supérieur avec des 1 sur la diagonale”. On observera incidemment que l'égalité $X(\underline{q}) + L_{m+1,n}^\perp = H(L_{m,n})$ implique “en passant à l'orthogonal” l'égalité $X(\underline{q}) \cap L_{m+1,n} = 0$.
- L'intersection $X(\underline{q}) \cap L_{m+1,n}^\perp$ est l'image du noyau de $\iota^* \circ S(\underline{q})$, disons N , par l'homomorphisme $\begin{bmatrix} 1 \\ S(\underline{q}) \end{bmatrix} : L_{m,n} \rightarrow L_{m,n} \oplus L_{m,n}^* = H(L_{m,n})$.

Soit $\underline{x}$ un élément de $L_{m,n}$; on a donc $\underline{x} = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ avec $x_k \in L_k$ pour $m \leq k \leq n$. On constate que $\underline{x}$ appartient à N si et seulement si l'on a

$$x_{k-1} + (-1)^k q_k x_k + x_{k+1} = 0$$

(en considérant x_{k-1} et x_{k+1} comme des éléments de L_k^*) pour $m+1 \leq k \leq n$, en convenant que l'on a $x_{n+1} = 0$. On en déduit que la projection canonique de $L_{m,n}$ sur L_n induit un isomorphisme, disons ρ , de N sur L_n .

Soient maintenant $\underline{x} = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ un élément de N et x_{m-1} l'élément de L_{m-1} défini par l'équation $x_{m-1} + (-1)^m q_m x_m + x_{m+1} = 0$; on constate que l'image de x_n par le composé des homomorphismes ci-dessous

$$L_n \xrightarrow{\rho^{-1}} N \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ S(\underline{q}) \end{bmatrix}} X(\underline{q}) \cap L_{m+1,n}^\perp \longrightarrow L_{m+1,n}^\perp / L_{m+1,n} \cong H(L_m)$$

est l'élément $(x_m, -x_{m-1})$ de $H(L_m)$ (on considère ici x_{m-1} comme un élément de L_m^*). Or on a $(x_m, -x_{m-1}) = (-1)^{m-1} (\sigma_m \circ \sigma_{m-1}^{-1})(x_{m-1}, x_m)$ (en considérant (x_{m-1}, x_m) comme un élément de $H(L_{m-1})$) si bien que la formule finale de la proposition 2.2.2 montre que le composé ci-dessus est aussi, au signe près, le composé des homomorphismes ci-dessous

$$L_n \xrightarrow{\subset} H(L) \xrightarrow{E(\underline{q})} H(L) \xrightarrow{\sigma_m} H(L_m)$$

(le signe est $(-1)^{\frac{(n-m-1)(m+n-2)}{2}}$). Ceci achève la vérification du point (b).

Vérifions enfin la propriété (c). Comme les deux lagrangiens $\sigma_m(E(\underline{q}) \cdot L_n)$ et $\sigma_m(E(\underline{q}) \cdot (E(q_{n+1}) \cdot L_{n+1}))$ de $H(L_m)$ sont tranverses, la propriété (c) résulte de la propriété (b) et du point suivant : soient X un sous-module de $H(L_{m,n})$ transverse à $L_{m,n}^\perp$, Y l'image de $X \cap L_{m+1,n}^\perp$ dans $H(L_m)$ et Θ un sous-module de $H(L_m)$, alors on a l'équivalence $X \pitchfork (\Theta \oplus L_{m+1,n}) \iff Y \pitchfork \Theta$. $\square$

Dans la suite du mémoire nous utiliserons essentiellement le point (c) de la proposition 2.2.3, et ceci dans le cas où m est pair et n impair. Pour le confort du lecteur nous explicitons ci-dessous, *ab initio*, l'énoncé correspondant. Cet énoncé dit en particulier que si un lagrangien Λ de $H(L)$ est obtenu en faisant subir au lagrangien L une suite de transformations symplectiques élémentaires, alors il existe "une stabilisation" de $H(L)$ en $H(L \oplus L')$, pour un L' convenable, qui contient un lagrangien à la fois transverse au lagrangien stabilisé $\Lambda \oplus L'$ et au lagrangien $(L \oplus L')^*$.

Proposition 2.2.4. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Soit Λ un lagrangien de l'espace symplectique hyperbolique $H(L)$ avec*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & q_{2m-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m} & 1 \end{bmatrix} \cdot L,$$

$(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}, q_{2m})$, $m \geq 1$, désignant une suite de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur L et L^* .

On pose $L' = \underbrace{L^* \oplus L \oplus L^* \oplus L \oplus \dots \oplus L^*}_{2m-1 \text{ facteurs}}$ et on note S la forme bilinéaire symétrique sur $L \oplus L'$ qui, lorsqu'on la considère comme un homomorphisme de $\underbrace{L \oplus L^* \oplus L \oplus L^* \oplus \dots \oplus L^*}_{2m \text{ facteurs}}$ dans $\underbrace{L^* \oplus L \oplus L^* \oplus L \oplus \dots \oplus L}_{2m \text{ facteurs}}$, a pour matrice

$$\begin{bmatrix} q_0 & 1 & 0 & & & & & \\ 1 & -q_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & q_2 & 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & -q_{2m-3} & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & q_{2m-2} & 1 & \\ & & & & 0 & 1 & -q_{2m-1} & \end{bmatrix}.$$

Alors les deux lagrangiens suivants de l'espace symplectique hyperbolique $H(L \oplus L')$:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')$ (le graphe de S)
- $\Lambda \oplus L'$ (le "stabilisé" de Λ)

sont transverses.

2.3 Réduction symplectique, formes génératrices

On commente dans ce paragraphe la propriété (b) de la proposition 2.2.3. Le lecteur averti aura remarqué que la formulation de cette propriété fait intervenir, sans les nommer, les notions de réduction symplectique et de forme génératrice, notions que nous rappelons ci-après.

RÉDUCTION SYMPLECTIQUE

Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie et X un lagrangien de $H(L \oplus L')$ avec $X \cap L'^\perp$ (L' s'identifie à un sous-module de $L \oplus L'$ et donc aussi à un sous-module de $H(L \oplus L')$, $L'^\perp$ désigne son orthogonal pour la forme symplectique); on observera que l'on a $L' \subset L'^\perp$ et que $X \cap L'^\perp$ implique $X \cap L' = 0$. Soit Y l'image du composé de l'homomorphisme (injectif) $X \cap L'^\perp \rightarrow L'^\perp/L'$ et de l'isomorphisme symplectique canonique $L'^\perp/L' \cong$

$H(L)$; alors Y est un lagrangien de $H(L)$ que l'on appelle le *réduit symplectique* de X .

[Il est clair que l'on a $Y \subset Y^\perp$; pour se convaincre de ce que Y est un lagrangien de $H(L)$ on montre que l'homomorphisme canonique $H(L)/Y \rightarrow Y^*$ induit par la forme symplectique est un isomorphisme et que Y est un R -module projectif de type fini. Détaillons. On pose $Z = X \cap L'^\perp$; on a donc un isomorphisme canonique $Z \cong Y$. On constate que l'on dispose de deux suites exactes de R -modules

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow X \xrightarrow{f} L'^* \longrightarrow 0 ,$$

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{f^*} X^* \longrightarrow H(L)/Y \longrightarrow 0 ,$$

f désignant l'homomorphisme induit par la forme symplectique (qui est surjectif à cause de la condition de transversalité $X \pitchfork L'^\perp$). On en déduit que Z (et donc Y) est un R -module projectif de type fini et que l'on a un isomorphisme canonique $H(L)/Y \cong Z^*$. On vérifie enfin que le composé de cet isomorphisme et de l'isomorphisme $Z^* \cong Y^*$ est l'homomorphisme évoqué plus haut.]

FORMES GÉNÉRATRICES

Soient L un R -module libre de dimension finie et Θ un lagrangien de $H(L)$.

Soient L' un R -module libre de dimension finie et S une forme bilinéaire symétrique sur $L \oplus L'$. On constate que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a-i) L'homomorphisme composé

$$L \oplus L' \xrightarrow{S} L^* \oplus L'^* \xrightarrow{\text{pr}} L'^* ,$$

pr désignant la projection canonique, est surjectif.

(a-ii) Le graphe de S et $L'^\perp$ sont transverses dans $H(L \oplus L')$.

Le graphe de S est un lagrangien de $H(L \oplus L')$; si la condition (a-ii) est satisfaite, alors on peut considérer son réduit symplectique, qui est un lagrangien de $H(L)$. On dit que S est une *forme génératrice* pour le lagrangien Θ si ce réduit symplectique est Θ .

Soient S une forme génératrice de Θ au sens précédent et Λ un lagrangien de $H(L)$. Comme nous l'avons déjà dit (fin de la démonstration de 2.2.3) les conditions suivantes sont équivalentes :

(b-i) Λ et Θ sont deux lagrangiens transverses de $H(L)$;

(b-ii) $\Lambda \oplus L'$ et le graphe de S sont deux lagrangiens transverses de $H(L \oplus L')$.

On observera incidemment que les conditions (a-i) et (a-ii) ci-dessus sont encore équivalentes à la suivante :

- (a-iii) Il existe un lagrangien Λ de $H(L)$ tel que le graphe de S est transverse à $\Lambda \oplus L'$ dans $H(L \oplus L')$.

Nous pouvons maintenant paraphraser la propriété (b) de la proposition 2.2.3, disons dans le cas où m est pair et n impair qui correspond à la proposition 2.2.4. On reprend les notations de 2.2.4. La propriété (b) de la proposition 2.2.3 dit que S est une forme génératrice pour le lagrangien

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & q_{2m-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*$$

de l'espace symplectique hyperbolique $H(L)$. (Par construction le lagrangien Θ est transverse au lagrangien Λ , ce qui conduit à la proposition 2.2.4.)

2.4 Raffinements de la proposition 2.2.4

La proposition 2.1.2 implique :

Lemme 2.4.1. *Soit L un R -module libre de dimension finie ; soient Λ un lagrangien de $H(L)$ et S une forme bilinéaire symétrique sur L . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Les lagrangiens Λ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \cdot L$ sont transverses.*
- (ii) *Il existe une forme bilinéaire symétrique Y sur L^* telle que l'on a*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* .$$

De plus, si ces conditions sont vérifiées, alors la forme Y est uniquement déterminée en fonction de Λ et S .

On revient maintenant sur l'énoncé 2.2.4. D'après le lemme précédent, il existe une forme bilinéaire symétrique Y sur $(L \oplus L')^*$, uniquement déterminée en fonction de la suite $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}, q_{2m})$, telle que l'on a :

$$\Lambda \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* .$$

On explicite cette forme Y dans la proposition 2.4.3 ci-après. L'énoncé 2.4.3 est une spécialisation du point (d) de l'énoncé 2.4.2 ci-dessous. La vérification de l'énoncé 2.4.2 ne présente pas de difficulté :

Proposition 2.4.2. *Soient L_0 , M et L_1 trois R -modules libres de dimension finie. Soit S une forme bilinéaire symétrique sur $L_0 \oplus M \oplus L_1$; on note respectivement S_0 et S_1 les restrictions de S à $L_0 \oplus M$ et $M \oplus L_1$ et U l'homomorphisme de $L_0 \oplus M$ dans $(M \oplus L_1)^*$ induit par S . On suppose que U est inversible; on note $\Phi(S)$ l'isomorphisme symplectique composé des isomorphismes symplectiques suivants :*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(M \oplus L_1) &\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_1 & 1 \end{bmatrix}} \mathrm{H}(M \oplus L_1) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & -U^{-1} \\ U^* & 0 \end{bmatrix}} \mathrm{H}(L_0 \oplus M) \\ &\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0 & 1 \end{bmatrix}} \mathrm{H}(L_0 \oplus M) . \end{aligned}$$

L'inversibilité de U fait que le graphe de S , qui est un lagrangien de l'espace symplectique $\mathrm{H}(L_0 \oplus (M \oplus L_1))$, est transverse au sous-module $(M \oplus L_1)^\perp$; on peut donc considérer son réduit symplectique, qui est un lagrangien de l'espace symplectique $\mathrm{H}(L_0)$ (voir 2.3), que l'on note Λ .

Alors :

(a) *L'homomorphisme composé*

$$M \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{H}(M \oplus L_1) \xrightarrow{\Phi(S)} \mathrm{H}(L_0 \oplus M) \xrightarrow{\text{projection}} \mathrm{H}(M)$$

est l'opposé de l'inclusion de M dans $\mathrm{H}(M)$.

(b) *L'homomorphisme composé*

$$L_1 \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{H}(M \oplus L_1) \xrightarrow{\Phi(S)} \mathrm{H}(L_0 \oplus M) \xrightarrow{\text{projection}} \mathrm{H}(L_0)$$

est un monomorphisme dont l'image est Λ et l'homomorphisme composé

$$L_1 \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathrm{H}(M \oplus L_1) \xrightarrow{\Phi(S)} \mathrm{H}(L_0 \oplus M) \xrightarrow{\text{projection}} M^*$$

est nul.

(c) *Le lagrangien $\Lambda \oplus M$ de $\mathrm{H}(L_0 \oplus M)$ est l'image par $\Phi(S)$ du lagrangien $M \oplus L_1$ de $\mathrm{H}(M \oplus L_1)$:*

$$\Lambda \oplus M = \Phi(S) \cdot (M \oplus L_1) .$$

(d) *On a dans $\mathrm{H}(L_0 \oplus M)$:*

$$\Lambda \oplus M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -U^{-1}S_1U^{*-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L_0 \oplus M)^* .$$

Proposition 2.4.3 (raffinement de la proposition 2.2.4). *Soit L un R -module libre de dimension finie. Soit Λ un lagrangien de l'espace symplectique hyperbolique $H(L)$ avec*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & q_{2m-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m} & 1 \end{bmatrix} \cdot L,$$

$(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}, q_{2m})$ désignant une suite de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur L et L^* .

On pose

$$S = \begin{bmatrix} q_0 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & -q_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & q_2 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -q_{2m-2} & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & q_{2m-1} & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -q_{2m} \end{bmatrix};$$

S est donc une matrice de type $\underbrace{(L, L^*, L, L^*, \dots, L)}_{2m+1 \text{ termes}} \times \underbrace{(L^*, L, L^*, L, \dots, L)}_{2m+1 \text{ termes}}$ (et l'on a $S = S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}, q_{2m})$ avec la notation introduite en 2.2).

On introduit également les matrices extraites de S suivantes :

- S_0 obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne (on a donc $S = S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$),
- S_1 obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne (on a donc $S_1 = S(q_1, q_2, \dots, q_{2m})$),
- U obtenue en supprimant la première ligne et la dernière colonne.

On pose $L' = \underbrace{L^* \oplus L \oplus L^* \oplus L \oplus \dots \oplus L^*}_{2m-1 \text{ facteurs}}$. On considère respectivement

S_0 , S_1 et U , comme une forme bilinéaire symétrique sur $L \oplus L'$, une forme bilinéaire symétrique sur $(L \oplus L')^*$ et comme un automorphisme de $L \oplus L'$.

Alors on a dans $H(L \oplus L')$ l'égalité de lagrangiens suivante :

$$\Lambda \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -U^{-1}S_1U^{*-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^*.$$

On continue à raffiner la proposition 2.2.4.

Soit L un R -module libre de dimension finie.

Soient $m \geq 1$ un entier et $\underline{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{2m+1})$ une suite de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur L et L^* .

On note $\text{st} : \text{Sp}_L \rightarrow \text{Sp}_{L_{0,2m-1}}$ le monomorphisme de groupes canonique (la notation $L_{-,-}$ est introduite en 2.2).

On observera que l'on a

$$E(q_0, q_1, \dots, q_{2m}) \cdot L = E(q_0, q_1, \dots, q_{2m}, q_{2m+1}) \cdot L$$

et

$$E(\underline{q}) \cdot L \oplus L_{1,2m-1} = \text{st}(E(\underline{q})) \cdot L_{0,2m-1} .$$

Comme nous l'avons déjà dit, la proposition 2.2.4 montre qu'il existe une forme bilinéaire symétrique Y sur $L_{0,2m-1}^*$, uniquement déterminée en fonction de $\underline{q}$, telle que l'on a

$$\text{st}(E(\underline{q})) \cdot L_{0,2m-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L_{0,2m-1}^*$$

(cet Y a été explicité en 2.4.3). On en déduit qu'il existe une forme bilinéaire symétrique Z sur $L_{0,2m-1}$ et un isomorphisme G de $L_{0,2m-1}$ sur $L_{0,2m-1}^*$, toujours uniquement déterminés en fonction de $\underline{q}$, tels que l'on a

$$\text{st}(E(\underline{q})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -G^{*-1} \\ G & 0 \end{bmatrix} .$$

La proposition 2.4.4 ci-après permet d'expliciter Z et G (et Y).

On pose :

- $S = S(q_0, q_1, \dots, q_{2m+1})$,
- $S_0 = S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$ (S_0 est la matrice extraite de S obtenue en supprimant les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes),
- $S_1 = S(q_1, q_2, \dots, q_{2m})$ (S_1 est la matrice extraite de S obtenue en supprimant la première et la dernière ligne, la première et la dernière colonne),
- $S_2 = S(q_2, q_3, \dots, q_{2m+1})$ (S_2 est la matrice extraite de S obtenue en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes).

On introduit également les matrices extraites de S suivantes :

- U_1 , carrée d'ordre $2m$, obtenue en supprimant les premières et dernières lignes et les deux dernières colonnes,
- U_2 , carrée d'ordre $2m$, obtenue en supprimant les deux premières lignes, la première et la dernière colonnes,
- U_3 , carrée d'ordre $2m - 1$, obtenue en supprimant les deux premières lignes, la dernière ligne, la première colonne et les deux dernières colonnes (le bloc U_3 est "l'intersection" des blocs U_1 et U_2).

On considère S_0, S_2 comme des formes bilinéaires symétriques sur $L_{0,2m-1}$ et S_1 comme une forme bilinéaire symétrique sur $L_{0,2m-1}^*$. On considère U_1 comme un automorphisme de $L_{0,2m-1}$, U_2 comme un automorphisme de $L_{0,2m-1}^*$ et U_3 comme un isomorphisme de $L_{1,2m-1}$ sur $L_{0,2m-2}^*$.

On introduit enfin la matrice de type $(L, L_{1,2m-1}) \times (L_{0,2m-2}^*, L)$ suivante :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & U_3 \\ (-1)^{m-1} & 0 \end{bmatrix} ;$$

on considère F comme un isomorphisme de $L_{0,2m-1}$ sur $L_{0,2m-1}^*$.

Proposition 2.4.4. *L'image de $E(\underline{q})$ par le monomorphisme de groupes canonique $\mathrm{Sp}_L \rightarrow \mathrm{Sp}_{L_{0,2m-1}}$ coïncide avec le produit suivant :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{-1} & 0 \\ 0 & U_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -S_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^* & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & F^{*-1} \\ -F & 0 \end{bmatrix} .$$

La vérification de cette formule est renvoyée à l'appendice B.

Chapitre 3

Sur la “composante connexe” du point base dans la lagrangienne infinie

3.1 La proposition clé

Les mots “composante connexe” ci-dessus font référence à la condition (v) de la proposition 3.1.1 ci-après (la “proposition clé”). Afin que l’énoncé de cette condition soit irréprochable, il nous faut clarifier au préalable quelques notations et conventions.

Soient R un anneau (commutatif) et L un R -module libre de dimension finie. On rappelle que les notations $\mathcal{L}_L$, Sp_L , GL_L , ESp_L , $\mathcal{S}_L, \dots$ qui apparaissent ci-dessous et dans les énoncés 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3, ont été introduites en 2.1.

Soit A une R -algèbre commutative. On pose $\mathcal{L}_L(A) = \mathcal{L}_{A \otimes_R L}$; l’application $A \mapsto \mathcal{L}_L(A)$ est un foncteur de la catégorie des R -algèbres (commutatives) vers la catégorie des ensembles (c’est en fait un R -schéma). On définit pareillement les foncteurs en groupes, $A \mapsto \mathrm{Sp}_L(A) := \mathrm{Sp}_{A \otimes_R L}$, $\mathrm{GL}_L(A) := \mathrm{GL}_{A \otimes_R L}$ et $\mathrm{ESp}_L(A) := \mathrm{ESp}_{A \otimes_R L}$ (les deux premiers sont des R -schémas en groupes).

On considère le diagramme suivant de la catégorie des R -algèbres

$$R \begin{array}{c} \xleftarrow{d_0} \\ \xleftarrow{d_1} \\ \xrightarrow{s} \end{array} R[T] ,$$

s désignant l’homomorphisme structurel, et d_0, d_1 les homomorphismes d’évaluation en 0 et 1 ; on observera que les composés $d_0 \circ s$ et $d_1 \circ s$ sont l’identité. Soit maintenant $\mathcal{X}$ un foncteur du type précédent, nous identifions ci-après

$\mathcal{X}(R)$ à un sous-objet de $\mathcal{X}(R[T])$ via $\mathcal{X}(s)$ et nous notons simplement $\xi \mapsto \xi(0)$ et $\xi \mapsto \xi(1)$ les applications d'évaluation $\mathcal{X}(d_0)$ et $\mathcal{X}(d_1)$.

Proposition 3.1.1. *Soient R un anneau et L un R -module libre de dimension finie. Soit Λ un élément de $\mathcal{L}_L$; on considère les conditions suivantes :*

- (i) *il existe un élément X de $\mathcal{L}_L$ tel que l'on a $X \vdash L^*$ et $X \vdash \Lambda$;*
- (ii) *il existe un élément S de $\mathcal{S}_L$ tel que l'on a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \cdot L \vdash \Lambda$;*
- (iii) *il existe un élément S de $\mathcal{S}_L$ et un élément Y de $\mathcal{S}_{L^*}$ tels que l'on a $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*$;*
- (iv) *Λ appartient à $\text{ESp}_L \cdot L$;*
- (v) *il existe un élément α de $\mathcal{L}_L(R[T])$ avec $\alpha(0) = L$ et $\alpha(1) = \Lambda$.*

Alors :

- (a) *On a les implications (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\implies$ (iv) $\implies$ (v).*
- (b) *On a l'implication (iv) $\implies$ (ii) “après stabilisation”. En clair, la condition (iv) implique qu'il existe un R -module libre de dimension finie L' et un élément S de $\mathcal{S}_{L \oplus L'}$ tels que l'on a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L') \vdash (\Lambda \oplus L')$ dans $H(L \oplus L')$.*
- (c) *On a l'implication (v) $\implies$ (iv) “après stabilisation” lorsque R est régulier et 2 inversible dans R . En clair, la condition (v) implique sous ces hypothèses qu'il existe un R -module libre de dimension finie L' tel que le lagrangien $\Lambda \oplus L'$ de $H(L \oplus L')$ appartient à $\text{ESp}_{L \oplus L'} \cdot (L \oplus L')$.*

Démonstration du point (a). Celle-ci est très élémentaire :

L'équivalence (i) $\iff$ (ii) résulte de la proposition 2.1.2. L'équivalence (ii) $\iff$ (iii) est le point principal du lemme 2.1.2 (qui lui aussi résulte de la proposition 2.1.2).

Démonstration de (iv) $\implies$ (v). Supposons que l'on a, avec les notations du paragraphe 2, $\Lambda = E(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) \cdot L$. On prend pour α le lagrangien $E(Tq_m, Tq_{m+1}, \dots, Tq_n) \cdot (R[T] \otimes_R L)$ de $H(R[T] \otimes_R L)$. $\square$

Démonstration du point (b). Le point (b) est simplement une forme affaiblie de la proposition 2.2.4 (observer que tout élément de $\text{ESp}_L \cdot L$ peut s'écrire $E(q_0, q_1, \dots, q_{2m}) \cdot L$, quitte à prendre $q_0 = 0$). $\square$

Commentaire

Le lecteur a peut être vu l'apparition des formes de Sturm dans la démonstration du point (b) de la proposition 3.1.1 comme un *deus ex machina*. L'objet de ce commentaire est d'essayer de le convaincre qu'une telle apparition n'est pas si mystérieuse.

L'argument que nous avons utilisé pour démontrer ce point (b) est très rustique et il n'est pas difficile de vérifier qu'il s'adapte au cadre des anneaux avec anti-involution ; on note (b^{a-i}) la version "avec anti-involution" du point (b).

Soit $m \geq 1$ un entier. On note $\mathbb{V}$ la $\mathbb{Z}$ -algèbre librement engendrée par des indéterminées "non-commutatives", $Q_0, Q_1, \dots, Q_{2m}$; on munit $\mathbb{V}$ de l'anti-involution qui est l'identité sur ces indéterminées.

Soit Λ le lagrangien de l'espace symplectique hyperbolique $H(\mathbb{V})$ défini par

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & Q_{2m-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_{2m} & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{V}.$$

L'énoncé (b^{a-i}) dit qu'il existe un entier $n \geq 1$ et une matrice, disons $\mathbf{S}$, de taille $n \times n$, à coefficients dans $\mathbb{V}$ et à symétrie hermitienne, telle que l'on a

$$(T) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{S} & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{V}^n \cap (\Lambda \oplus \mathbb{V}^{n-1})$$

dans $H(\mathbb{V}^n)$. La proposition 2.2.4 dit que l'on peut prendre pour $\mathbf{S}$ la matrice de Sturm

$$\begin{bmatrix} Q_0 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & -Q_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & Q_2 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -Q_{2m-3} & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & Q_{2m-2} & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -Q_{2m-1} \end{bmatrix}$$

(et donc $n = 2m$). Pourrait-on exhiber une matrice $\mathbf{S}$ de taille plus petite ? La réponse est non. Voici pourquoi. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[T]$, sans racines multiples dans $\mathbb{C}$, avec $P(0) \neq 0$ et $P(1) \neq 0$, de degré $2m$; alors la théorie classique des suites de Sturm (voir chapitre 1) et la théorie de l'indice de Maslov algébrique (voir chapitre 1 et 4) montrent qu'il existe un homomorphisme d'anneaux avec anti-involution $\epsilon : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}[T]$ (l'anneau commutatif $\mathbb{R}[T]$ est muni de son anti-involution triviale, ϵ est juste une suite $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$ de polynômes de $\mathbb{R}[T]$, qui est une légère modification de la suite des quotients de la théorie de Sturm) telle que le nombre, disons N , de zéros de P dans l'intervalle $]0, 1[$ est donné par la formule

$$2N = \operatorname{sgn}((\mathbf{S} \circ \epsilon)(0)) - \operatorname{sgn}((\mathbf{S} \circ \epsilon)(1)) ;$$

En prenant P avec $N = 2m$, on voit que l'on a forcément $n \geq 2m$.

Montrons pour terminer ce commentaire que la relation (T) implique réciproquement le point (b) de la proposition 3.1.1 (ou *mutatis mutandis* l'énoncé (b^{a-i})).

Soit $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ l'image de l'élément

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & Q_{2m-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_{2m} & 1 \end{bmatrix}$$

de $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{V})$ dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{V})$; on observe que la relation $(\mathcal{T})$ équivaut au fait que la matrice $\mathbf{B} - \mathbf{S}\mathbf{A}$ est inversible. Cette observation faite, on obtient (b) en invoquant cette fois une spécialisation $\epsilon : \mathbb{V} \rightarrow \mathrm{M}_d(R)$, $\mathrm{M}_d(R)$ désignant l’anneau (non-commutatif pour $d > 1$) des matrices $d \times d$ à coefficients dans un anneau commutatif R , muni de l’anti-involution donnée par la transposition des matrices. Nous laissons les détails au lecteur.

Démonstration du point (c). Elle est conséquence des deux lemmes ci-après.

Lemme 3.1.2. *Soit α un élément de $\mathcal{L}_L(R[T])$ avec $\alpha(0) = L$. Si l’anneau R est régulier alors il existe un R -module libre de dimension finie L' et un élément Φ de $\mathrm{Sp}_{L \oplus L'}(R[T])$ avec $\Phi(0) = 1$ tels que l’on a*

$$\alpha \oplus L' = \Phi \cdot (L \oplus L')$$

dans $\mathcal{L}_{L \oplus L'}(R[T])$.

Démonstration. Si α est un $R[T]$ -module libre alors le point (c) de la proposition 2.1.5 dit qu’il existe un élément Φ de $\mathrm{Sp}_L(R[T])$ tel que l’on a $\alpha = \Phi \cdot L$ et, quitte à remplacer Φ par $\Phi \Phi(0)^{-1}$, on peut supposer $\Phi(0) = 1$. Il suffit donc de montrer que α est “stablement libre”, c’est-à-dire qu’il existe un entier n' tel que $\alpha \oplus R[T]^{n'}$ est un $R[T]$ -module libre, en d’autres termes que la classe de α (qui est *a priori* un $R[T]$ -module projectif de type fini) dans le groupe de Grothendieck $\tilde{K}_0(R[T])$ est nulle. Comme $\alpha(0)$ est un R -module libre, cette classe est bien nulle lorsque l’anneau R est régulier puisque dans ce cas l’évaluation en 0, $\tilde{K}_0(R[T]) \rightarrow \tilde{K}_0(R)$, est un isomorphisme (voir par exemple [BS1]). $\square$

Lemme 3.1.3. *Soit Φ un élément de $\mathrm{Sp}_L(R[T])$ avec $\Phi(0) = 1$. Si 2 est inversible dans l’anneau R alors il existe un R -module libre de dimension finie L' , un élément Ψ de $\mathrm{ESp}_{L \oplus L'}(R[T])$ et un élément Γ de $\mathrm{GL}_{L \oplus L'}(R[T])$ tels que l’on a*

$$\Phi = \Psi H(\Gamma)$$

dans $\mathrm{Sp}_{L \oplus L'}(R[T])$.

(On rappelle que l’on dispose d’inclusions canoniques des groupes $\mathrm{Sp}_L(R[T])$ et $\mathrm{GL}_{L \oplus L'}(R[T])$ dans le groupe $\mathrm{Sp}_{L \oplus L'}(R[T])$, la seconde étant notée H , voir 2.1.)

Démonstration. Soit R un anneau, disons commutatif, arbitraire. On sait que $\mathrm{ESp}(R)$ est le sous-groupe dérivé de $\mathrm{Sp}(R)$ (voir par exemple [BS2]). Il en résulte que le sous-ensemble $\mathrm{ESp}(R)H(\mathrm{GL}(R))$ du groupe $\mathrm{Sp}(R)$, constitué des produits $eH(g)$ avec e dans $\mathrm{ESp}(R)$ et g dans $\mathrm{GL}(R)$, est un sous-groupe, que ce sous-groupe est distingué et que le groupe quotient

$\mathrm{Sp}(R) / \mathrm{ESp}(R)\mathrm{H}(\mathrm{GL}(R))$ est abélien ; ce groupe quotient est noté ${}_{-}\mathrm{W}_1(R)$. On se convainc sans difficulté du point suivant : Le fait qu’il existe, pour tout élément Φ de $\mathrm{Sp}_L(R[T])$ avec $\Phi(0) = 1$, L' , Ψ et Γ comme ci-dessus, équivaut au fait que l’évaluation en 0, ${}_{-}\mathrm{W}_1(R[T]) \rightarrow {}_{-}\mathrm{W}_1(R)$, est un monomorphisme (et du coup un isomorphisme). Or ceci est le cas dès que l’on suppose 2 inversible dans l’anneau R (voir Appendice D). $\square$

Il est maintenant facile d’achever la démonstration du point (c). Soit α un élément de $\mathcal{L}_L(R[T])$ avec $\alpha(0) = L$ et $\alpha(1) = \Lambda$. Si l’anneau R est régulier et 2 inversible dans R alors il existe d’après les deux lemmes précédents un R -module libre de dimension finie L' et un élément Ψ de $\mathrm{ESp}_{L \oplus L'}(R[T])$ tels que l’on a $\alpha \oplus L' = \Psi \cdot (L \oplus L')$ dans $\mathcal{L}_{L \oplus L'}(R[T])$ (observer que $\mathrm{H}(\Gamma)$ stabilise le lagrangien $L \oplus L'$ pour tout Γ dans $\mathrm{GL}_{L \oplus L'}(R[T])$). En évaluant en 1, on obtient $\Lambda \oplus L' = \Psi(1) \cdot (L \oplus L')$. $\square\square$

SUR L’HYPOYHÈSE “2 INVERSIBLE DANS R ”

Soit $\mathcal{K}$ un foncteur défini sur la catégorie des anneaux, disons commutatifs. On dit que R est $\mathcal{K}$ -rigide si l’évaluation en 0, $\mathcal{K}(R[T]) \rightarrow \mathcal{K}(R)$, est un isomorphisme. La démonstration que nous venons de donner du point (c) de la proposition 3.1.1 conduit au scholie suivant :

Scholie 3.1.4. *On considère les conditions (iv) et (v) de la proposition 3.1.1. Alors on a l’implication (v) $\implies$ (iv) “après stabilisation” lorsque l’anneau R est K_0 -rigide et ${}_{-}\mathrm{W}_1$ -rigide.*

La justification de ce scholie est la suivante : il existe des anneaux (raisonnables) dans lesquels 2 n’est pas inversible et qui sont cependant ${}_{-}\mathrm{W}_1$ -rigide. Voici des exemples d’anneaux qui satisfont les hypothèses de 3.1.4. Soit A un anneau de Dedekind (ou plus généralement un anneau “localement principal”). Grunewald, Mennicke et Vaserstein montrent dans [GMV] que l’évaluation en $(0, 0, \dots, 0)$, $\mathrm{KSp}_1(A[T_1, T_2, \dots, T_n]) \rightarrow \mathrm{KSp}_1(A)$, est un isomorphisme (la notation $\mathrm{KSp}_1(-)$ désigne le K_1 symplectique, voir Appendice D) ; ceci implique que l’anneau $A[T_1, T_2, \dots, T_n]$ (avec $n \geq 0$) est KSp_1 -rigide et *a fortiori* ${}_{-}\mathrm{W}_1$ -rigide. D’autre part, $A[T_1, T_2, \dots, T_n]$ est régulier, et donc *a fortiori* K_0 -rigide, si l’anneau A est lui-même régulier. On voit donc que l’anneau $R = A[T_1, T_2, \dots, T_n]$ (avec $n \geq 0$) satisfait les hypothèses de 3.1.4 lorsque l’anneau A est de Dedekind. En particulier, on peut prendre $R = \mathbb{Z}$ dans le scholie 3.1.4.

3.2 Relations entre la proposition 3.1.1 et la théorie de Ranicki [Ra4] [Ra1]

Soit Λ un élément de $\mathcal{L}_L$.

On suppose tout d’abord que la condition (iii) de 3.1.1 est satisfaite: il existe un élément S de $\mathcal{S}_L$ et un élément Y de $\mathcal{S}_{L^*}$ tels que l’on a

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* .$$

L’automorphisme symplectique $\begin{bmatrix} 1 & -Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S & 1 \end{bmatrix}$ induit un isomorphisme de formations

$$(\mathrm{H}(L); \Lambda, L^*) \cong (\mathrm{H}(L); L^*, \begin{bmatrix} 1 & -Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*) .$$

L’isomorphisme symplectique $\sigma : \mathrm{H}(L) \rightarrow \mathrm{H}(L^*)$ (voir 2.1.1) induit un isomorphisme de formations

$$(\mathrm{H}(L); L^*, \begin{bmatrix} 1 & -Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*) \cong (\mathrm{H}(L^*); L^*, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*)$$

(attention, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$ est ci-dessus une matrice de type $(L^*, L) \times (L^*, L)!$).

On constate donc que (la classe d’isomorphismes de) la formation $(\mathrm{H}(L); \Lambda, L^*)$ est le bord au sens de [Ra1] de (la classe d’isomorphismes de) la forme bilinéaire symétrique Y .

On se propose maintenant d’expliquer comment la théorie de Ranicki implique le point (b) de la proposition 3.1.1.

On suppose que la condition (iv) de 3.1.1 est satisfaite: il existe un élément Φ de ESp_L tel que l’on a $\Lambda = \Phi \cdot L$.

On commence par montrer (en suivant Ranicki) que la classe de la formation $(\mathrm{H}(L); \Lambda, L^*)$ dans le groupe $V_{-1}(R)$ de [Ra1] est nulle. On observe que l’application, disons γ_L , de ESp_L dans $V_{-1}(R)$, qui associe à un élément Φ de Sp_L la classe de la formation $(\mathrm{H}(L); \Lambda, L^*)$ dans le groupe $V_{-1}(R)$, est un homomorphisme de groupes et que pour tout R -module L' de dimension finie, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}_L & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{Sp}_{L \oplus L'} \\ & \searrow \gamma_L & \swarrow \gamma_{L \oplus L'} \\ & V_{-1}(R) & \end{array} ,$$

dans lequel la flèche horizontale désigne l'homomorphisme de stabilisation, est commutatif. Le fait que $\gamma_L(\Phi)$ est nul pour $\Phi \in \text{ESp}_L$ résulte de ce que le groupe $V_{-1}(R)$ est commutatif et de ce que Φ est produit de commutateurs dans $\text{Sp}_{L \oplus L'}$ dès que la dimension de L' est assez grande.

Le point (iii) de la proposition 1.6.5 de [RA4] affirme ensuite que la formation $(H(L); \Lambda, L^*)$ est “stablement isomorphe au bord d'une forme”. D'après le lemme 2.2 de [RA1] (version bilinéaire) ceci équivaut à l'existence d'un R -module de dimension finie L' et d'un lagrangien X de $H(L \oplus L')$ transverse à la fois à $\Lambda \oplus L'$ et à $(L \oplus L')^*$. En d'autres termes, Λ satisfait la condition (i) de 3.1.1 “après stabilisation”.

Signalons pour conclure ce paragraphe que la proposition 1.7.1 de [RA4] traite de “l'unicité” de la forme dont la classe d'isomorphismes stable de la formation $(H(L); \Lambda, L^*)$ est le bord ; nous reviendrons sur cette question en 4.4.

3.3 Compléments : formes primitives, formes d'enlacement

L'objet principal de ce paragraphe est de parvenir à l'énoncé 3.3.2.4 que nous utiliserons en 4.6.

3.3.1 Formes primitives

Soit L un R -module libre de dimension finie.

Soit Λ un lagrangien de $H(L)$; soient respectivement $\alpha : \Lambda \rightarrow L$ et $\beta : \Lambda \rightarrow L^*$ les restrictions à Λ des projections sur L et L^* . Le fait que la restriction à Λ de la forme symplectique est nulle équivaut à la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\alpha} & L \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta^* \\ L^* & \xrightarrow{\alpha^*} & \Lambda^* \end{array} .$$

Si l'on interprète les flèches horizontales de ce diagramme comme des complexes de chaînes (de R -modules) et les flèches verticales comme un homomorphisme de complexes, alors on constate que cet homomorphisme est une équivalence d'homotopie. Cette observation est classique, elle généralise l'implication (i) $\implies$ (iv) de 2.1.6 : Soient $\Phi : H(\Lambda) \rightarrow H(L)$ un isomorphisme symplectique prolongeant l'inclusion de Λ dans L (voir 2.1.5) et $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ la matrice de Φ dans les décompositions $H(\Lambda) = \Lambda \oplus \Lambda^*$ et $H(L) = L \oplus L^*$, alors l'homomorphisme de complexes $(-\gamma^*, -\gamma)$ est un inverse homotopique de l'homomorphisme de complexes (β, β^*) .

Soit maintenant Y une forme bilinéaire symétrique définie sur un module libre de dimension finie M . Nous dirons que Y est une *forme primitive au sens strict* pour le lagrangien Λ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\alpha} & L \\ \phi_1 \downarrow & & \downarrow \phi_0 \\ M & \xrightarrow{Y} & M^* \end{array}$$

tel que (ϕ_1, ϕ_0) est une équivalence d'homotopie (le diagramme ci-dessus étant interprété comme précédemment) et que l'on a $\beta = \phi_0^* \phi_1$. On observera que cette dernière égalité signifie que l'on a une factorisation d'équivalences d'homotopie $(\beta, \beta^*) = (\phi_0^*, \phi_1^*) \circ (\phi_1, \phi_0)$ ou encore que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda & \xrightarrow{\alpha} & L & & \\ & \searrow \phi_1 & \downarrow \beta^* & \searrow \phi_0 & \\ & & M & \xrightarrow{Y} & M^* \\ & \nearrow \phi_0^* & \downarrow \beta & \nearrow \phi_1^* & \\ L^* & \xrightarrow{\alpha^*} & \Lambda^* & & \end{array}$$

est commutatif. Pour un exemple illustrant la notion de forme primitive au sens strict, voir le point (a) de la proposition A.5.2. Nous dirons que Y est une *forme primitive* pour le lagrangien Λ s'il existe une forme bilinéaire symétrique S sur L telle que Y est une forme primitive au sens strict pour le lagrangien $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S & 1 \end{bmatrix} \cdot \Lambda$, en d'autres termes s'il existe une équivalence d'homotopie (ϕ_1, ϕ_0) comme ci-dessus telle que l'on a $\beta - S\alpha = \phi_0^* \phi_1$.

Remarques.

- L'existence de l'équivalence d'homotopie (ϕ_1, ϕ_0) entraîne que les R -modules $\Lambda \oplus M^*$ et $L \oplus M$ sont isomorphes et donc que Λ est stablement libre.
- Soit L' un R -module libre de dimension finie ; les conditions suivantes sont équivalentes :
 - Y est une forme primitive (resp. une forme primitive au sens strict) pour le lagrangien Λ ;
 - Y est une forme primitive (resp. une forme primitive au sens strict) pour le lagrangien $\Lambda \oplus L'$ de $H(\Lambda \oplus L')$.

- Soit Q une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée définie sur un module libre de dimension finie ; les conditions suivantes sont équivalentes :
 - Y est une forme primitive pour le lagrangien Λ ;
 - $Y \oplus Q$ est une forme primitive pour le lagrangien Λ .
- Si Y est une forme primitive (resp. une forme primitive au sens strict) pour Λ alors il en est de même pour toute forme bilinéaire symétrique isomorphe à Y .

Ces deux dernières remarques soulèvent la question de l'unicité d'une forme primitive pour un lagrangien donné. Pour une réponse, voir 4.4.4. Pour la question de l'existence, voir le commentaire à la fin de 3.3.1.

L'énoncé 3.3.1.1 ci-après est immédiat. Il illustre la notion de forme primitive d'un lagrangien et montre que celle-ci est intimement liée à la proposition 3.1.1 et à la théorie de Ranicki évoquée en 3.2.

Proposition 3.3.1.1 *Soit Λ un élément de $\mathcal{L}_L$. On suppose qu'il existe un R -module libre de dimension finie L' et des formes bilinéaires symétriques S et Y définies respectivement sur $L \oplus L'$ et $(L \oplus L')^*$ tels que l'on a*

$$\Lambda \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* .$$

Alors Y est une forme primitive pour Λ .

(On peut vérifier également que la somme orthogonale $Y \oplus \begin{bmatrix} S & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, forme définie sur $(L \oplus L')^* \oplus (L \oplus L' \oplus (L \oplus L')^*)$, est primitive au sens strict.)

La proposition suivante peut être vue comme une réciproque de la précédente :

Proposition 3.3.1.2. *Soient Λ un élément de $\mathcal{L}_L$ et Y une forme bilinéaire symétrique sur un R -module libre de dimension finie M . Si Y est une forme primitive pour Λ , alors il existe*

- une forme bilinéaire symétrique S sur $L \oplus M \oplus L^*$
- un isomorphisme U de $(L \oplus M \oplus L^*)^*$ sur $M \oplus L \oplus L^*$

tels que l'on a

$$\Lambda \oplus M \oplus L^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U^*(Y \oplus h_L)U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus M \oplus L^*)^*$$

dans $H(L \oplus M \oplus L^)$, h_L désignant la forme bilinéaire symétrique hyperbolique sur $L \oplus L^*$.*

Démonstration. Compte tenu des remarques faites plus haut on peut supposer que Λ est libre et est par conséquent l'image d'un plongement lagrangien de L dans $H(L)$,

disons $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Il est clair aussi que l'on peut supposer que Y est une forme primitive au sens strict. Cette hypothèse se traduit alors de la façon suivante :

Il existe un diagramme commutatif de R -modules

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{a} & L \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 \\ M & \xrightarrow{Y} & M^* \end{array}$$

tel que (f_1, f_0) est une équivalence d'homotopie entre les complexes $L \xrightarrow{a} L$ et $M \xrightarrow{Y} M^*$ et que l'on a $b = f_0^* f_1$.

Soient (g_1, g_0) un inverse homotopique de (f_1, f_0) et k une homotopie entre l'identité du complexe $L \xrightarrow{a} L$ et le composé $(g_1, g_0) \circ (f_1, f_0)$, c'est-à-dire un endomorphisme de L avec $g_0 f_0 - 1 = ak$ et $g_1 f_1 - 1 = ka$. Soit S la forme bilinéaire symétrique sur $L \oplus M \oplus L^*$ dont la matrice, de type $(L, M, L^*) \times (L^*, M^*, L)$, est la suivante

$$- \begin{bmatrix} 0 & f_0^* & k^* \\ f_0 & Y & g_1^* \\ k & g_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On commence par vérifier que dans l'espace symplectique hyperbolique $H(L \oplus M \oplus L^*)$, les lagrangiens

$$\Lambda \oplus M \oplus L^*, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus M \oplus L^*)^*$$

sont transverses (ce qui doit être le cas si l'égalité de 3.3.1.2 est satisfaite). Soient A et B les matrices suivantes, de types respectifs $(L, M, L^*) \times (L, M, L^*)$ et $(L, M, L^*) \times (L^*, M^*, L)$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La transversalité en question équivaut à l'inversibilité de la matrice $B - SA$. On a :

$$\begin{aligned} B - SA &= \begin{bmatrix} b & f_0^* & k^* \\ f_0 a & Y & g_1^* \\ ka & g_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^* f_1 & f_0^* & k^* \\ Y f_1 & Y & g_1^* \\ g_1 f_1 - 1 & g_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & f_0^* & k^* \\ 0 & Y & g_1^* \\ -1 & g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Or la matrice $\begin{bmatrix} f_0^* & k^* \\ Y & g_1^* \end{bmatrix}$ est inversible. En effet, sa “transposée” $\begin{bmatrix} f_0 & Y \\ k & g_1 \end{bmatrix}$ est inversible : voir par exemple la démonstration du lemme D.2.2 (lointain cousin du lemme de Schanuel).

On écrit ensuite :

$$\Lambda \oplus M \oplus L^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & A(B-SA)^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus M \oplus L^*)^* .$$

On pose $Q = A(B-SA)^{-1}$; il s'agit donc d'une forme bilinéaire symétrique sur $(L \oplus M \oplus L^*)^*$. On a :

$$(B-SA)^* Q (B-SA) = (B-SA)^* A = \begin{bmatrix} f_1^* Y f_1 & f_1^* Y & f_1^* g_1^* - 1 \\ Y f_1 & Y & g_1^* \\ g_1 f_1 - 1 & g_1 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -f_1^* & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^* Y f_1 & f_1^* Y & f_1^* g_1^* - 1 \\ Y f_1 & Y & g_1^* \\ g_1 f_1 - 1 & g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -f_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & Y & g_1^* \\ -1 & g_1 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_1^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & Y & g_1^* \\ -1 & g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & Y & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ces égalités conduisent à celle de 3.3.1.2 en prenant

$$U^{-1} = (B-SA) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -f_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(la dernière matrice du produit ci-dessus est de type $(M, L, L^*) \times (L, M, L^*)$). $\square$

Commentaire

Les propositions 3.3.1.1 et 3.3.1.2 fournissent l'addendum à la proposition 3.1.1 suivant :

Soit Λ un lagrangien de $H(L)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe un R -module libre de dimension finie L' et un élément S de $\mathcal{S}_{L \oplus L'}$ tels que l'on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L') \pitchfork (\Lambda \oplus L')$$

dans $H(L \oplus L')$;

- Λ possède une forme primitive.

En d'autres termes, on peut rajouter une sixième condition aux cinq de la proposition 3.1.1.

3.3.2 Lagrangiens et formes d’enlacement

(Pour un exposé plus complet et plus conceptuel sur le sujet voir [Ra5, §3].)

On suppose dans ce paragraphe que l’anneau (commutatif) R est intègre ; on note K son corps des fractions.

Un R -module *d’enlacement* est un R -module C , admettant une résolution projective $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow C \rightarrow 0$ avec P_0 et P_1 de type fini, muni d’une application bilinéaire symétrique

$$C \times C \rightarrow K/R$$

non-dégénérée, c’est-à-dire, dans ce contexte, telle que l’homomorphisme induit $C \rightarrow \text{Hom}_R(C, K/R)$ est un isomorphisme. Une telle application bilinéaire symétrique est appelée *forme d’enlacement*. On observera que C est de torsion (puisqu’il en est ainsi pour $\text{Hom}_R(C, K/R)$ lorsque C est de type fini) si bien que les modules projectifs de type fini P_0 et P_1 qui apparaissent ci-dessus ont même rang.

On trouvera ci-après des exemples de formes d’enlacement.

RÉSIDU D’UNE FORME BILINÉAIRE SYMÉTRIQUE NON-SINGULIÈRE

Soit P un R -module projectif de type fini muni d’une forme bilinéaire symétrique S (que l’on identifie encore avec un homomorphisme de P dans son dual P^*) *non-singulière*. Rappelons la terminologie. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L’homomorphisme $S : P \rightarrow P^*$ est injectif.
- (ii) La forme bilinéaire symétrique $K \otimes_R S$, définie sur le K -espace vectoriel $K \otimes_R P$ est non-dégénérée.

On dit que S est non-singulière si elles sont satisfaites. La forme bilinéaire symétrique $(K \otimes_R S)^{-1} : K \otimes_R P^* \times K \otimes_R P^* \rightarrow K$ induit par restriction une application $P^* \times P^* \rightarrow K$, qui induit à son tour une application bilinéaire symétrique non-dégénérée

$$\text{coker } S \times \text{coker } S \rightarrow K/R.$$

Le R -module $\text{coker } S$ muni de cette forme d’enlacement est un R -module d’enlacement que nous appelons le *résidu* (ou le *conoyau*, voir [BLLV]) de P ou de S et que nous notons $\text{rés } P$ ou $\text{rés } S$.

RÉSIDU D'UN COUPLE DE LAGRANGIENS D'INTERSECTION TRIVIALE

Soit L un R -module libre de dimension finie. Soient Λ et Θ deux lagrangiens de l'espace symplectique hyperbolique $H(L)$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) On a $\Lambda \cap \Theta = 0$ dans $H(L)$.
- (ii) Les deux lagrangiens $K \otimes_R \Lambda$ et $K \otimes_R \Theta$ de $H(K \otimes_R L)$ sont transverses.

On suppose que ces conditions sont satisfaites.

On note π le projecteur sur $K \otimes_R \Lambda$ parallèlement à $K \otimes_R \Theta$ du K -espace vectoriel symplectique $K \otimes_R H(L)$; la composée

$$\begin{aligned} H(L) \times H(L) &\longrightarrow H(K \otimes_R L) \times H(K \otimes_R L) \\ &\xrightarrow{1 \times \pi} H(K \otimes_R L) \times H(K \otimes_R L) \longrightarrow K, \end{aligned}$$

la dernière flèche désignant la forme symplectique de $H(K \otimes_R L)$, induit une application bilinéaire symétrique non-dégénérée

$$H(L)/(\Lambda + \Theta) \times H(L)/(\Lambda + \Theta) \rightarrow K/R.$$

Le R -module quotient $H(L)/(\Lambda + \Theta)$ muni de cette forme d'enlacement est un R -module d'enlacement que nous appelons le *résidu* du couple de lagrangiens (Λ, Θ) et que nous notons $\text{rés}(\Lambda, \Theta)$.

On observera que l'on a $\text{rés}(\Theta, \Lambda) = -\text{rés}(\Lambda, \Theta)$. Expliquons la notation. Soit C un R -module d'enlacement, nous notons $-C$ le R -module d'enlacement obtenu en changeant la forme d'enlacement en son opposée.

Exemple. Soit $\phi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ un plongement lagrangien de L dans $H(L)$; soit Λ son image. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'endomorphisme a est injectif.
- (ii) L'endomorphisme $K \otimes_R a$ est inversible.
- (iii) On a $\Lambda \cap L^* = 0$ dans $H(L)$.
- (iv) Les deux lagrangiens $K \otimes_R \Lambda$ et $K \otimes_R L^*$ de $H(K \otimes_R L)$ sont transverses.

On suppose ces conditions satisfaites. La forme bilinéaire symétrique (la symétrie est due au fait que l'on a $a^*b = b^*a$)

$$(K \otimes_R b) \circ (K \otimes_R a)^{-1} : K \otimes_R L \times K \otimes_R L \rightarrow K$$

induit par restriction une application $L \times L \rightarrow K$, qui induit à son tour une application bilinéaire symétrique non-dégénérée

$$\text{coker } a \times \text{coker } a \rightarrow K/R.$$

Le R -module coker a muni de cette forme d’enlacement est un R -module d’enlacement que nous notons $[\frac{b}{a}]$. Le lecteur se convaincra sans difficulté de ce que le R -module d’enlacement $\text{rés}(\Lambda, L^*)$ est canoniquement isomorphe à $[\frac{b}{a}]$.

Remarque. Le résidu d’une forme bilinéaire symétrique non-singulière, définie disons sur un R -module libre de dimension finie, est en fait le résidu d’un couple de lagrangiens d’intersection triviale. En effet, soit S une forme bilinéaire symétrique non-singulière définie sur un R -module libre de dimension finie L et soit Γ le graphe de S , que l’on considère comme un lagrangien de $H(L)$, alors le résidu de S s’identifie au résidu du couple (L, Γ) . Pareillement, soit Y une forme bilinéaire symétrique non-singulière définie sur L^* et soit Γ le graphe de Y , que l’on considère comme un lagrangien de $H(L)$, alors le résidu de Y s’identifie au résidu du couple (Γ, L^*) .

L’énoncé suivant, dont la vérification est laissée au lecteur, généralise l’observation précédente :

Proposition 3.3.2.1. *Soit (Λ, Θ) un couple de lagrangiens de $H(L)$ d’intersection triviale. On suppose qu’il existe un lagrangien X de $H(L)$ transverse à la fois à Λ et à Θ ; on note $d_X(\Lambda, \Theta)$ la forme bilinéaire symétrique sur X^* “différence entre Λ et Θ ” (on rappelle, voir 2.1.5, que l’ensemble des lagrangiens transverses à X possède une structure canonique d’espace affine sous le R -module des formes bilinéaires symétriques sur X^* , $d_X(\Lambda, \Theta)$ est définie par l’égalité $\Theta = \Lambda + d_X(\Lambda, \Theta)$). Alors la forme $d_X(\Lambda, \Theta)$ est non-singulière et l’on a un isomorphisme de R -modules d’enlacement*

$$\text{rés}(\Lambda, \Theta) \cong -\text{rés} d_X(\Lambda, \Theta) .$$

Le point (b) de la proposition ci-dessous est un cas particulier de la proposition ci-dessus.

Proposition 3.3.2.2. *Soit Λ un lagrangien de $H(L)$. On suppose qu’il existe, un R -module libre de dimension finie L' , une forme bilinéaire symétrique S sur $L \oplus L'$ et une forme bilinéaire symétrique Y sur $(L \oplus L')^*$ tels que l’on a*

$$\Lambda \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* .$$

Alors :

- (a) Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) l’intersection de Λ et L^* est triviale ;
 - (ii) Y est non-singulière.

- (b) *Si ces conditions sont satisfaites, on a un isomorphisme de R -modules d'enlacement*

$$\text{rés}(\Lambda, L^*) \cong \text{rés} Y .$$

Pour nous faire pardonner d'avoir sauté la démonstration de 3.3.2.1, donnons celle du point (b) de 3.3.2.2. Elle résulte de la concaténation de la suite suivante d'isomorphismes de R -modules d'enlacement :

$$\begin{aligned} \text{rés}(\Lambda, L^*) &\cong \text{rés}(\Lambda \oplus L', L^* \oplus L'^*) \\ &\cong \text{rés} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^*, (L \oplus L')^* \right) \\ &\cong \text{rés} \left(\begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^*, (L \oplus L')^* \right) \\ &\cong \text{rés} Y . \end{aligned}$$

Proposition 3.3.2.3. *Soit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ un plongement lagrangien de L dans $H(L)$ avec a injectif ; soit Λ son image. Soit Y une forme bilinéaire symétrique non-singulière définie sur un R -module libre de dimension finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *On a un isomorphisme de R -modules d'enlacement*

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \cong \text{rés} Y .$$

- (ii) *La forme Y est une forme primitive pour le lagrangien Λ .*

Démonstration. On vérifie l'implication (i) $\implies$ (ii) ; la vérification de l'implication inverse est sans surprise. Soit M le R -module libre sur lequel est défini Y . Soit f un isomorphisme de R -modules de $\text{coker} a$ sur $\text{coker} Y$. Cet homomorphisme s'insère dans un diagramme de R -modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{a} & L & \longrightarrow & \text{coker} a \longrightarrow 0 \\ & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & f \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{Y} & M^* & \longrightarrow & \text{coker} Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes ; par construction le couple (f_1, f_0) est une équivalence d'homotopie entre les complexes $L \xrightarrow{a} L$ et $M \xrightarrow{Y} M^*$. Supposons maintenant que f préserve les formes d'enlacement. Dans ce cas, on a, pour tous x et y dans L :

$$\langle f_0 x, Y^{-1} f_0 y \rangle - \langle x, b a^{-1} y \rangle \in K ;$$

on identifie ci-dessus L avec un sous-module de $K \otimes_R L$ et les notations f_0, Y, b et a désignent en fait les applications $K \otimes_R f_0, K \otimes_R Y, K \otimes_R b$ et $K \otimes_R a$. La relation ci-dessus s'écrit encore (avec le même type de conventions) :

$$\langle x, f_0^* f_1 a^{-1} y \rangle - \langle x, b a^{-1} y \rangle \in K ;$$

l'application $f_0^* f_1 a^{-1} - b a^{-1} : L \rightarrow K \otimes_R L^*$ prend donc en fait ses valeurs dans L^* . On note $q : L \rightarrow L^*$ l'homomorphisme induit ; cet homomorphisme est symétrique, par exemple parce que $a^* q a$ est symétrique et que a est injectif. L'égalité $f_0^* f_1 = b + q a$ signifie bien que Y est une forme primitive pour le lagrangien Λ . $\square$

La proposition 3.3.1.2 et l'implication (i) $\implies$ (ii) de la proposition 3.3.2.3 entraînent l'énoncé que nous avons en vue :

Proposition 3.3.2.4. *Soit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ un plongement lagrangien de L dans $H(L)$ avec a injectif ; soit Λ son image. On suppose qu'il existe une forme bilinéaire symétrique non-singulière Y définie sur un R -module libre de dimension finie M dont le résidu est isomorphe au R -module d'enlacement $[\frac{b}{a}]$.*

Alors il existe une forme bilinéaire symétrique S sur $L \oplus M \oplus L^$ et un isomorphisme U de $(L \oplus M \oplus L^*)^*$ sur $M \oplus L \oplus L^*$ tels que l'on a*

$$\Lambda \oplus M \oplus L^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U^*(Y \oplus h_L)U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus M \oplus L^*)^* .$$

Chapitre 4

Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne, à la Karoubi-Villamayor

4.1 Énoncé

L'énoncé du théorème en question nécessite quelques préparatifs.

Soit L un R -module libre de dimension finie. On note $\mathcal{F}_L$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur $L \oplus L^*$; nous considérerons souvent une telle forme comme une matrice (symétrique) de type $(L, L^*) \times (L^*, L)$. L'ensemble $\mathcal{F}_L$ possède un “point base” naturel, à savoir la forme bilinéaire symétrique hyperbolique sur $L \oplus L^*$ que nous notons $\hbar_L$:

$$\hbar_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient L et L' deux modules libres de dimension finie, on note $(q, q') \mapsto q \oplus q'$ l'application de $\mathcal{F}_L \times \mathcal{F}_{L'}$ dans $\mathcal{F}_{L \oplus L'}$ induite par la somme orthogonale et l'isomorphisme canonique $(L \oplus L^*) \oplus (L' \oplus L'^*) \cong (L \oplus L') \oplus (L \oplus L')^*$.

On pose $\mathcal{F}_{R^n} = \mathcal{F}_n(R)$. On note $\mathcal{F}$ la limite directe des foncteurs $\mathcal{F}_n$ suivant les applications (dites de stabilisation), $\mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n+1}$, $q \mapsto q \oplus \hbar_R$. Comme les applications de stabilisation “préservent les points base”, le foncteur $\mathcal{F}$ est *pointé*, c'est-à-dire qu'il peut être enrichi en un foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés.

Soit $\mathcal{X}$ un foncteur défini sur la catégorie des anneaux (disons commutatifs) et à valeurs dans la catégorie des ensembles, on note $\pi_0 \mathcal{X}$ le foncteur qui associe à l'anneau R l'ensemble quotient de $\mathcal{X}(R)$, coégalisateur des évaluations

en 0 et 1 de $\mathcal{X}(R[T])$ dans $\mathcal{X}(R)$:

$$(\pi_0 \mathcal{X})(R) := \operatorname{colim} (\mathcal{X}(R[T]) \xrightleftharpoons[\mathrm{d}_1]{\mathrm{d}_0} \mathcal{X}(R)) .$$

On dit que deux éléments ξ_0 et ξ_1 de $\mathcal{X}(R)$ sont *homotopes* s'ils ont même image dans $(\pi_0 \mathcal{X})(R)$; on écrit dans ce cas $\xi_0 \sim \xi_1$. L'image (la classe d'homotopie) dans $(\pi_0 \mathcal{X})(R)$ d'un élément ξ de $\mathcal{X}(R)$ est notée $[\xi]$.

Convention. Soit $\mathcal{X}$ un foncteur du type précédent, il sera souvent commode de noter $\xi(T_1, T_2, \dots, T_n)$ un élément de $\mathcal{X}(R[T_1, T_2, \dots, T_n])$ (en fait, dans ce qui suit, le nombre n d'indéterminées vérifiera $0 \leq n \leq 2$). Soient $F_1, F_2, \dots, F_m$, des polynômes de $R[T_1, T_2, \dots, T_n]$ et $F : R[T_1, T_2, \dots, T_m] \rightarrow R[T_1, T_2, \dots, T_n]$ l'homomorphisme d'anneaux correspondant, il sera également commode de noter $\xi(F_1, F_2, \dots, F_m)$ l'élément $\mathcal{X}(F)(\xi(T_1, T_2, \dots, T_n))$ de $\mathcal{X}(R[T_1, T_2, \dots, T_m])$.

Fixons maintenant l'anneau R . Les définitions ci-dessus se "spécialisent" de façon évidente aux foncteurs définis sur la catégorie des R -algèbres (commutatives). Le foncteur $A \mapsto \mathcal{F}_{A \otimes_R L}$, que nous notons encore $\mathcal{F}_L$, est un tel foncteur ; on peut donc considérer l'ensemble $(\pi_0 \mathcal{F}_L)(R)$ qui, pour alléger, sera aussi noté $\pi_0 \mathcal{F}_L$.

STRUCTURE DE $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$

On commence par introduire l'application de stabilisation de $\pi_0 \mathcal{F}_L$ dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$.

Proposition-Définition 4.1.1. *Soient L un R -module libre de dimension n et b un isomorphisme de R^n sur L . Alors la composée de l'application de $\pi_0 \mathcal{F}_L$ dans $(\pi_0 \mathcal{F}_n)(R)$ induite par b et de l'application canonique de $(\pi_0 \mathcal{F}_n)(R)$ dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ est indépendante du choix de b ; on la note*

$$\operatorname{st} : \pi_0 \mathcal{F}_L \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R) .$$

Scholie 4.1.2. *Soit $f : L \rightarrow L'$ un isomorphisme entre R -modules libres de dimension finie. Alors le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 \mathcal{F}_L & \xrightarrow{f_*} & \pi_0 \mathcal{F}_{L'} \\ \operatorname{st} \searrow & & \swarrow \operatorname{st} \\ & (\pi_0 \mathcal{F})(R) & \end{array} ,$$

dans lequel f_* désigne l'application induite par f , est commutatif.

Ces énoncés sont conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 4.1.3. *Soient L un R -module libre de dimension finie et a un automorphisme de L ; soient $h(a)$ l'automorphisme de $L \oplus L^*$ de matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{bmatrix}$, $g(a)$ l'automorphisme de $L \oplus L$ de matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$, $\mathcal{F}^a$ l'automorphisme $q \mapsto h(a)^* \circ q \circ h(a)$ de $\mathcal{F}_L$ et s l'application $q \mapsto q \oplus h_L$ de $\mathcal{F}_L$ dans $\mathcal{F}_{L \oplus L}$. Alors :*

(a) *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_L & \xrightarrow{s} & \mathcal{F}_{L \oplus L} \\ \mathcal{F}^a \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}^{g(a)} \\ \mathcal{F}_L & \xrightarrow{s} & \mathcal{F}_{L \oplus L} \end{array}$$

est commutatif.

(b) *L'automorphisme $g(a)$ est élémentaire.*

Lemme 4.1.4. *Soient L un R -module libre de dimension finie et g un automorphisme de L (un élément de GL_L). Si g est élémentaire, alors il existe un automorphisme γ de $R[T] \otimes_R L$ (un élément de $\mathrm{GL}_{R[T] \otimes_R L}$) avec $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = g$.*

Démonstration. L'énoncé 4.1.4 est évident. Le point (a) de 4.1.3 résulte du fait que $h(a)$ préserve h_L : $h(a)^* \circ h_L \circ h(a) = h_L$. Le point (b) de 4.1.3 est bien connu, on a par exemple :

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

On constate ensuite que la somme orthogonale fait de $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ un groupe abélien :

Proposition-Définition 4.1.5. *Il existe une unique application*

$$(\pi_0 \mathcal{F})(R) \times (\pi_0 \mathcal{F})(R) \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 \mathcal{F}_L \times \pi_0 \mathcal{F}_{L'} & \longrightarrow & \pi_0 \mathcal{F}_{L \oplus L'} \\ \text{st} \times \text{st} \downarrow & & \downarrow \text{st} \\ (\pi_0 \mathcal{F})(R) \times (\pi_0 \mathcal{F})(R) & \longrightarrow & (\pi_0 \mathcal{F})(R) \end{array}$$

pour tous R -modules libres de dimension finie, L et L' , la flèche horizontale supérieure étant induite par la somme orthogonale. Cette application fait de $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ un groupe abélien dont le point base est l'élément neutre.

Démonstration. Le seul point qui ne découle pas de la proposition 4.1.1 ou de la définition même du foncteur $\mathcal{F}$ est l'existence d'un inverse ; celle-ci découle du lemme suivant (prendre $M = L \oplus L^*$) :

Lemme 4.1.6. *Soient M un R -module libre et q une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur M . Alors on a*

$$q \oplus -q^{-1} \sim \hbar_M$$

dans $\mathcal{F}_M$.

Démonstration. Contempler l'identité

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(que l'on peut voir comme un cas particulier de A.4.1!). □□

On introduit maintenant les foncteurs “espaces de lacets”, à la Karoubi-Villamayor.

Soit $\mathcal{X}$ un foncteur défini sur la catégorie des anneaux (disons commutatifs) et à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés. On note $\Omega\mathcal{X}$ le foncteur, du même type, qui associe à un anneau R le sous-ensemble de $\mathcal{X}(R[T])$ formé des éléments α vérifiant $d_0\alpha = d_1\alpha = *$:

$$\mathcal{X}(R[T]) \supset (\Omega\mathcal{X})(R) := \{\alpha ; d_0\alpha = d_1\alpha = *\}.$$

Quelques rappels concernant les ensembles de lagrangiens :

- On choisit comme point base de $\mathcal{L}_L$, le lagrangien L .
- Soient L et L' deux modules libres de dimension finie, on note $(\Lambda, \Lambda') \mapsto \Lambda \oplus \Lambda'$ l'application de $\mathcal{L}_L \times \mathcal{L}_{L'}$ dans $\mathcal{L}_{L \oplus L'}$ induite par la somme orthogonale et l'isomorphisme canonique $(L \oplus L^*) \oplus (L' \oplus L'^*) \cong (L \oplus L') \oplus (L \oplus L')^*$.
- On pose $\mathcal{L}_{R^n} = \mathcal{L}_n(R)$. On note $\mathcal{L}$ la limite directe des foncteurs $\mathcal{L}_n$ suivant les applications (dites de stabilisation), $\mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_{n+1}$, $\Lambda \mapsto \Lambda \oplus R$. Comme les applications de stabilisation préservent les points base, le foncteur $\mathcal{L}$ est pointé.

Comme précédemment, la définition de $\Omega\mathcal{X}$ se spécialise, après avoir fixé l'anneau R , aux foncteurs définis sur la catégorie des R -algèbres (commutatives). Le foncteur $A \mapsto \mathcal{L}_L(A) := \mathcal{L}_{A \otimes_R L}$ est un tel foncteur ; on peut donc considérer les ensembles $(\Omega\mathcal{L}_L)(R)$ et $(\pi_0\Omega\mathcal{L}_L)(R)$ qui, pour alléger, seront aussi notés $\Omega\mathcal{L}_L$ et $\pi_0\Omega\mathcal{L}_L$.

STRUCTURE DE $(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$

On a *mutatis mutandis* :

Proposition-Définition 4.1.7. *Soient L un R -module libre de dimension n et b un isomorphisme de R^n sur L . Alors la composée de l'application de $\pi_0 \Omega \mathcal{L}_L$ dans $(\pi_0 \Omega \mathcal{L}_n)(R)$ induite par b et de l'application canonique de $(\pi_0 \Omega \mathcal{L}_n)(R)$ dans $(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$ est indépendante du choix de b ; on la note*

$$\text{st} : \pi_0 \Omega \mathcal{L}_L \rightarrow (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) .$$

Proposition-Définition 4.1.8. *Il existe une unique application*

$$(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \times (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 \Omega \mathcal{L}_L \times \pi_0 \Omega \mathcal{L}_{L'} & \longrightarrow & \pi_0 \Omega \mathcal{L}_{L \oplus L'} \\ \text{st} \times \text{st} \downarrow & & \downarrow \text{st} \\ (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \times (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) & \longrightarrow & (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \end{array}$$

pour tous R -modules libres de dimension finie, L et L' , la flèche horizontale supérieure étant induite par la somme orthogonale. Cette application fait de $(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$ un monoïde abélien dont le point base est l'élément neutre.

Nous sommes enfin en mesure d'énoncer le théorème fondamental de la K -théorie hermitienne à la Karoubi-Villamayor; cet énoncé sera précisé en 4.2.8 et 4.2.10.

Théorème 4.1.9. *Si l'anneau R est régulier et si 2 est inversible dans R , alors il existe un isomorphisme naturel de monoïdes abéliens*

$$(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \cong (\pi_0 \mathcal{F})(R) .$$

Commentaire

On abstrait dans ce commentaire quelques points communs aux constructions que nous avons faites dans ce paragraphe.

Définition 4.1.10. On note $\mathcal{C}$ la catégorie suivante :

- un objet de $\mathcal{C}$ est la donnée $(R; L)$ d'un anneau R et d'un R -module libre de dimension finie L ;
- un $\mathcal{C}$ -morphisme de $(R; L)$ dans $(R'; L')$ est la donnée $(f; i, r)$ d'un homomorphisme d'anneaux $f : R \rightarrow R'$ et de deux homomorphismes de R' -modules, $i : R' \otimes_R L \rightarrow L'$ et $r : L' \rightarrow R' \otimes_R L$, avec $r \circ i = 1$ (si bien que $R' \otimes_R L$ s'identifie à un facteur direct de L').

Soit R un anneau fixé ; on note $\mathcal{C}(R)$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ dont les morphismes sont les morphismes $(f; i, r)$ avec $f = \text{id}_R$. En clair :

- un objet de $\mathcal{C}(R)$ est un R -module libre de dimension finie ;
- un $\mathcal{C}(R)$ -morphisme de L dans L' est un couple d'homomorphismes de R -modules, $i : L \rightarrow L'$ et $r : L' \rightarrow L$, avec $r \circ i = 1$ (si bien que L s'identifie à un facteur direct de L').

Si l'on considère l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$ comme une catégorie, alors l'application $n \mapsto R^n$ induit un foncteur de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{C}(R)$, dont l'image sera notée $\mathbb{N}(R)$.

Proposition-Définition 4.1.11. *Soit Θ un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles ; soient $\mathcal{T}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $\mathcal{T}$ les foncteurs de la catégorie des anneaux commutatifs dans la catégorie des ensembles, définis par*

$$\mathcal{T}_n(R) = \Theta(R^n), \quad \mathcal{T}(R) = \text{colim}_{\mathbb{N}(R)} \Theta(R^n)$$

(ou encore $\mathcal{T} = \text{colim}_{\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$).

Soit L un R -module libre de dimension finie n ; soit $\mathcal{T}_L$ le foncteur de la catégorie des R -algèbres dans la catégorie des ensembles défini par $\mathcal{T}_L(A) = \Theta(A \otimes_R L)$. Soit enfin b un isomorphisme de R^n sur L .

Alors la composée de l'application de $\pi_0 \mathcal{T}_L := (\pi_0 \mathcal{T}_L)(R)$ dans $(\pi_0 \mathcal{T}_n)(R)$ induite par b et de l'application canonique de $(\pi_0 \mathcal{T}_n)(R)$ dans $(\pi_0 \mathcal{T})(R)$ est indépendante du choix de b ; on la note

$$\text{st} : \pi_0 \mathcal{T}_L \rightarrow (\pi_0 \mathcal{T})(R).$$

4.2 Démonstrations

Dans ce paragraphe, R est un anneau régulier dans lequel 2 est inversible (on dira aussi “contenant $\frac{1}{2}$ ”).

Le point essentiel de la démonstration du théorème 4.1.9 est la définition de l'application de $(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$ dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$, à savoir “l'indice de Maslov”, qui s'avèrera au bout du compte être un isomorphisme de monoïdes abéliens.

L'INDICE DE MASLOV D'UN LACET DE LAGRANGIENS

Soit α (que l'on notera également $\alpha(T)$) un élément de $\Omega \mathcal{L}_L$, on dira aussi un *lacet* de $\mathcal{L}_L$ (en L) ; α est donc un lagrangien de $\mathcal{L}_L(R[T])$ avec $\alpha(0) = \alpha(1) = L$.

Ce lagrangien appartient à la composante connexe, au sens de la condition (v) de la proposition 3.1.1, du lagrangien $R[T] \otimes_R L$: considérer le lagrangien $\alpha(UT) = \alpha(T)(U)$ de $\mathcal{L}_L(R[T, U]) = \mathcal{L}_L(R[T][U])$. Comme l'anneau

$R[T]$ hérite de l'anneau R la propriété d'être régulier et de contenir $\frac{1}{2}$, on peut appliquer le point (c) de la proposition 3.1.1.

On sait donc qu'il existe un R -module libre de dimension finie L' et une forme bilinéaire symétrique $S(T)$ sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')$ tels que l'on a

$$\alpha(T) \oplus (R[T] \otimes_R L') \ni \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \cdot (R[T] \otimes_R (L \oplus L')) ,$$

ce que l'on peut écrire sous la forme plus concise suivante :

$$\alpha \oplus L' \ni \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L') .$$

On rappelle que la condition de transversalité ci-dessus équivaut à l'existence d'une forme bilinéaire symétrique $Y(T)$ sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')^*$, uniquement déterminée par la donnée du lagrangien $\alpha(T) \oplus L'$ et de la forme $S(T)$, telle que l'on a :

$$\alpha \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* .$$

On observe enfin que les formes $S(0)$ et $S(1)$ sont inversibles puisque l'on a $\alpha(0) = L$ et $\alpha(1) = L$; leurs inverses sont respectivement $-Y(0)$ et $-Y(1)$ (voir 2.1.3).

On considère maintenant la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée

$$S(1) \oplus -S(0)^{-1}$$

définie sur $(L \oplus L') \oplus (L \oplus L')^*$ (il s'agit donc d'un élément de $\mathcal{F}_{L \oplus L'}$) :

Proposition-Définition 4.2.1. *Soit α un lacet de $\mathcal{L}_L$. Soient L' un R -module libre de dimension finie et $S(T)$ une forme bilinéaire symétrique sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')$ tels que l'on a*

$$\alpha \oplus L' \ni \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L') .$$

Alors l'élément $\text{st}([S(1) \oplus -S(0)^{-1}])$ de $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$, image de la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $S(1) \oplus -S(0)^{-1}$ par la composée

$$\mathcal{F}_{L \oplus L'} \longrightarrow \pi_0 \mathcal{F}_{L \oplus L'} \xrightarrow{\text{st}} (\pi_0 \mathcal{F})(R) ,$$

est indépendant du choix de L' et $S(T)$; on le note $\text{Mas}(\alpha)$ et on l'appelle l'indice de Maslov du lacet α :

$$\text{Mas}(\alpha) = \text{st}([S(1) \oplus -S(0)^{-1}]) .$$

Démonstration. On pose $S(1) \oplus -S(0)^{-1} = \text{Mas}(\alpha; L', S(T))$. On montre tout d'abord que $\text{st}([\text{Mas}(\alpha; L', S(T))])$ ne dépend pas du choix de $S(T)$. Cette indépendance est conséquence du lemme 4.2.2 ci-après et du lemme 4.1.6. Le lemme 4.2.2, qui est en germe dans [LT], est le point-clef de la démonstration de la proposition 4.2.1.

Lemme 4.2.2. *Soient $S_i(T)$, $i = 0, 1$, deux formes bilinéaires symétriques sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')$ telles que la condition de transversalité de 4.2.1 est vérifiée. Alors les deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur*

$$L \oplus L', \quad S_1(0) \oplus -S_0(0)^{-1} \quad \text{et} \quad S_1(1) \oplus -S_0(1)^{-1}$$

sont homotopes dans $\mathcal{F}_{L \oplus L'}$.

Démonstration. On écrit

$$\alpha \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y_0(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* .$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_1(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y_0(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* \cap (L \oplus L') ,$$

ce qui équivaut au fait que l'endomorphisme $(S_0(T) - S_1(T))Y_0(T) + 1$ de $(L \oplus L')^*$ est inversible ou encore que la forme bilinéaire symétrique sur $(L \oplus L') \oplus (L \oplus L')^*$ (de matrice)

$$\begin{bmatrix} S_1(T) - S_0(T) & 1 \\ 1 & Y_0(T) \end{bmatrix}$$

est non-dégénérée. On a donc par définition même

$$\begin{bmatrix} S_1(0) - S_0(0) & 1 \\ 1 & Y_0(0) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} S_1(1) - S_0(1) & 1 \\ 1 & Y_0(1) \end{bmatrix}$$

dans $\mathcal{F}_{L \oplus L'}$. On conclut en se souvenant que l'on a $Y_0(i) = -S_0(i)^{-1}$ pour $i = 0, 1$ et en utilisant l'identité

$$\begin{bmatrix} 1 & s_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 - s_0 & 1 \\ 1 & -s_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s_0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & -s_0^{-1} \end{bmatrix}$$

(que l'on peut voir à nouveau comme un cas particulier de A.4.1!). $\square$

Il n'est pas difficile maintenant d'achever la démonstration de l'indépendance de $\text{st}([\text{Mas}(\alpha; L', S(T))])$ par rapport à $S(T)$. L'homotopie

$$S_1(0) \oplus -S_0(0)^{-1} \sim S_1(1) \oplus -S_0(1)^{-1}$$

dans $\mathcal{F}_{L \oplus L'}$ implique la suivante

$$\begin{aligned} Q_0 &:= (S_1(0) \oplus -S_0(0)^{-1}) \oplus (S_0(1) \oplus -S_1(0)^{-1}) \\ &\sim Q_1 := (S_1(1) \oplus -S_0(1)^{-1}) \oplus (S_0(1) \oplus -S_1(0)^{-1}) \end{aligned}$$

dans $\mathcal{F}_{L \oplus L' \oplus L \oplus L'}$. D'après 4.1.1 l'image de Q_0 dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ coïncide avec celle de la forme $(S_0(1) \oplus -S_0(0)^{-1}) \oplus (S_1(0) \oplus -S_1(0)^{-1})$. Or on a

$$S_1(0) \oplus -S_1(0)^{-1} \sim \hbar_{L \oplus L'}$$

d'après 4.1.6. On constate donc que l'on a

$$\text{st}([\text{Mas}(\alpha; L', S_0(T))]) = \text{st}([Q_0])$$

dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$. On a pareillement

$$\text{st}([\text{Mas}(\alpha; L', S_1(T))]) = \text{st}([Q_1]),$$

d'où l'égalité

$$\text{st}([\text{Mas}(\alpha; L', S_0(T))]) = \text{st}([\text{Mas}(\alpha; L', S_1(T))]).$$

Compte tenu de ce qui précède, l'indépendance de $\text{st}([\text{Mas}(\alpha; L', S(T))])$ par rapport à L' tient aux observations ci-après. Soient L'' un R -module libre de dimension finie et q une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur L'' , on observe tout d'abord que l'on a

$$\alpha \oplus L' \oplus L'' \curvearrowright \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) \oplus q & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L' \oplus L'').$$

On constate ensuite que l'élément $\text{Mas}(\alpha; L' \oplus L'', S(T) \oplus q)$ de $\mathcal{F}_{L \oplus L' \oplus L''}$ est la somme orthogonale de l'élément $\text{Mas}(\alpha; L', S(T))$ de $\mathcal{F}_{L \oplus L'}$ et de l'élément $q \oplus -q^{-1}$ de $\mathcal{F}_{L''}$. On conclut en invoquant à nouveau le lemme 4.1.6. $\square\square$

Scholie 4.2.3. Soit α un lacet de $\mathcal{L}_L$. Soient L' un R -module libre de dimension finie, $S(T)$ une forme bilinéaire symétrique sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')$ et $Y(T)$ une forme bilinéaire symétrique sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')^*$ tels que l'on a

$$\alpha \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^*.$$

Alors les formes $Y(0)$ et $Y(1)$ sont non-dégénérées et l'on a

$$\text{Mas}(\alpha) = \text{st}([-Y(1)^{-1} \oplus Y(0)]) = -\text{st}([Y(1) \oplus -Y(0)^{-1}]).$$

Démonstration. Le seul point à vérifier est la dernière égalité, c'est-à-dire l'énoncé suivant :

Lemme 4.2.4. *Soit L un R -module libre de dimension finie muni de deux formes symétriques non-dégénérées q_0 et q_1 . Alors on a dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$:*

$$\text{st}([-q_1^{-1} \oplus q_0]) = -\text{st}([q_1 \oplus -q_0^{-1}]) .$$

Ce lemme résulte du lemme 4.1.6 et du fait que $\hbar_{L*}$ s'identifie à $\hbar_L^{-1}$. $\square$

Exemple. Nous avons tout fait pour que la proposition suivante soit vérifiée (voir Proposition 2.2.3) :

Proposition 4.2.5. *Soit α un lacet de $\mathcal{L}_L$. On suppose qu'il existe une suite de Sturm $(q_0(T), q_1(T), \dots, q_{2m-1}(T), q_{2m}(T))$ sur $R[T] \otimes_R L$ telle que l'on a*

$$\alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & q_{2m-1}(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m}(T) & 1 \end{bmatrix} \cdot L .$$

On note $\underline{q}(T)$ la sous-suite de Sturm $(q_0(T), q_1(T), \dots, q_{2m-1}(T))$.

Alors les formes de Sturm $S(\underline{q}(0))$ et $S(\underline{q}(1))$ sont non-dégénérées et l'on a

$$\text{Mas}(\alpha) = \text{st}([S(\underline{q}(1)) \oplus -S(\underline{q}(0))^{-1}]) .$$

Proposition-Définition 4.2.6. *Si deux lacets α_0 et α_1 de $\mathcal{L}_L$ sont homotopes, alors on a $\text{Mas}(\alpha_0) = \text{Mas}(\alpha_1)$. On note encore*

$$\text{Mas} : \pi_0 \Omega \mathcal{L}_L \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

l'application induite par l'application $\Omega \mathcal{L}_L \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$, $\alpha \mapsto \text{Mas}(\alpha)$.

Démonstration. Soit $\alpha(T, U)$ une "homotopie (à extrémités fixes)" entre $\alpha_0(T)$ et $\alpha_1(T)$. A nouveau, l'anneau $R[T, U]$ hérite de l'anneau R la propriété d'être régulier et de contenir $\frac{1}{2}$ si bien que l'on peut appliquer le point (c) de la proposition 3.1.1 :

Il existe un R -module libre de dimension finie L' et une forme bilinéaire symétrique $S(T, U)$ sur $R[T, U] \otimes_R (L \oplus L')$ tels que l'on a

$$\alpha(T, U) \oplus (R[T, U] \otimes_R L') \curvearrowright \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T, U) & 1 \end{bmatrix} \cdot (R[T, U] \otimes_R (L \oplus L')) ,$$

ou plus concisément

$$\alpha(T, U) \oplus L' \curvearrowright \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T, U) & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L') .$$

Le fait que l'on a $\alpha(0, U) \cdot L = L$ et $\alpha(1, U) \cdot L = L$ implique à nouveau que les deux formes bilinéaires symétriques $S(0, U)$ et $S(1, U)$, définies sur $R[U] \otimes_R (L \oplus L')$, sont non-dégénérées. On constate donc que l'élément

$$S(1, U) \oplus -S(0, U)^{-1}$$

de $\mathcal{F}_{R[U] \otimes_R (L \oplus L')}$ est une homotopie entre les éléments $S(1, 0) \oplus -S(0, 0)^{-1}$ et $S(1, 1) \oplus -S(0, 1)^{-1}$ de $\mathcal{F}_{L \oplus L'}$, dont les images dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ sont respectivement $\text{Mas}(\alpha_0)$ et $\text{Mas}(\alpha_1)$. $\square$

La vérification de la proposition suivante ne présente plus de difficulté :

Proposition-Définition 4.2.7. *Les applications*

$$\text{Mas} : \pi_0 \Omega \mathcal{L}_L \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

induisent un homomorphisme de monoïdes abéliens que l'on note encore

$$\text{Mas} : (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

et que l'appelle toujours l'indice de Maslov.

Voici maintenant une des formes précises du théorème 4.1.9 que nous avions promises :

Théorème 4.2.8. *Soit R un anneau régulier dans lequel 2 est inversible. Alors l'indice de Maslov*

$$\text{Mas} : (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

est un isomorphisme de monoïdes abéliens.

Démonstration. La proposition 3.1.1 montre que tout élément de $(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$ est représenté par un lacet α de $\mathcal{L}_L$, pour un certain R -module libre de dimension finie L , de la forme suivante :

$$\alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* .$$

Soient

$$\alpha_i(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_i(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y_i(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* ,$$

$i = 0, 1$, deux lacets de ce type. On constate que si l'on a $S_0(0) = S_1(0)$ et $S_0(1) = S_1(1)$ alors les lacets α_0 et α_1 sont homotopes : considérer l'homotopie

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ (1-U)S_0(T) + US_1(T) & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 & (1-U)Y_0(T) + UY_1(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^*$$

(se souvenir de ce que l'on a $Y_i(j) = -S_i(j)^{-1}$ pour $i = 0,1$ et $j = 0,1$). On voit donc en particulier que le lacet $\alpha(T)$ ci-dessus est homotope au lacet $\lambda(T)$ défini par

$$\lambda(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-T)S(0) + TS(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -((1-T)S(0)^{-1} + TS(1)^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* .$$

Ce qui précède conduit à la définition d'un inverse pour l'indice de Maslov. Soit L un R -module libre de dimension finie, muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées q_0 et q_1 . On note $\ell(q_0, q_1)$ le lacet de $\mathcal{L}_L$ défini par la formule

$$\ell(q_0, q_1)(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1-T)q_0 + Tq_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -((1-T)q_0^{-1} + Tq_1^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* .$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

- (P_1) L'indice de Maslov du lacet $\ell(q_0, q_1)$ est l'image de $q_1 \oplus -q_0^{-1}$ dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$.
- (P_2) Pour toute forme bilinéaire symétrique non-dégénérée q sur L , le lacet $\ell(q, q)$ est le lacet constant (en L) de $\mathcal{L}_L$.
- (P_3) Soit L' un R -module libre de dimension finie, muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées q'_0 et q'_1 . Alors le lacet $\ell(q_0 \oplus q'_0, q_1 \oplus q'_1)$ de $\mathcal{L}_{L \oplus L'}$ est la somme orthogonale du lacet $\ell(q_0, q_1)$ de $\mathcal{L}_L$ et du lacet $\ell(q'_0, q'_1)$ de $\mathcal{L}_{L'}$.

On note $\ell_L : \mathcal{F}_L \rightarrow \Omega \mathcal{L}_{L \oplus L^*}$ l'application $q \mapsto \ell(\hbar_L, q)$. La proposition ci-dessous est essentiellement conséquence des propriétés (P_2) et (P_3) :

Proposition-Définition 4.2.9. *Il existe une unique application, que l'on note*

$$\ell : (\pi_0 \mathcal{F})(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) ,$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_L & \xrightarrow{\ell_L} & \Omega \mathcal{L}_{L \oplus L^*} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0 \mathcal{F}_L & & \pi_0 \Omega \mathcal{L}_{L \oplus L^*} \\ \text{st} \downarrow & & \downarrow \text{st} \\ (\pi_0 \mathcal{F})(R) & \xrightarrow{\ell} & (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \end{array}$$

pour tout R -module libre de dimension finie L . Cette application est un homomorphisme de monoïdes abéliens.

Remarque. Il est clair que la définition de l'application $\ell : (\pi_0 \mathcal{F})(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$, contrairement à celle de l'indice de Maslov, ne nécessite aucune hypothèse sur l'anneau R .

On démontre le théorème 4.2.8 en vérifiant en fait l'énoncé encore plus précis suivant :

Théorème 4.2.10. *Soit R un anneau régulier dans lequel 2 est inversible. Alors les applications*

$$\ell : (\pi_0 \mathcal{F})(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R), \quad \text{Mas} : (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

sont des isomorphismes de monoïdes abéliens inverses l'un de l'autre.

Démonstration. On a déjà vu que tout élément de $(\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$ est représenté par un lacet du type $\ell(q_0, q_1)$. Ceci montre que l'application $\ell : (\pi_0 \mathcal{F})(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R)$ est surjective. On a en effet :

- $\text{st}([\ell(q_0, q_1)]) = \text{st}([\ell(q_0 \oplus q_0^{-1}, q_1 \oplus q_0^{-1})])$ d'après (P_3) et (P_2) ;
- $\text{st}([\ell(q_0 \oplus q_0^{-1}, q_1 \oplus q_0^{-1})]) = \text{st}([\ell(h_L, q_1 \oplus q_0^{-1})])$ d'après 4.1.6.

On constate d'autre part que la composée $\text{Mas} \circ \ell$ est l'identité. En effet, soit q un élément de $\mathcal{F}_L$, on a :

- $(\text{Mas} \circ \ell)(\text{st}([q])) = \text{st}([q \oplus -h_L^*])$ d'après (P_1) (observer que h_L^{-1} s'identifie à h_L^*) ;
- $\text{st}([q \oplus -h_L^*]) = \text{st}([q])$ d'après le lemme 4.2.11 ci-après, dont la vérification est laissée au lecteur, et le lemme 4.1.4.

Lemme 4.2.11. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Alors il existe un automorphisme élémentaire e de $L \oplus L^*$ tel que l'on a : $-h_L = e^* \circ h_L \circ e$. $\square \square$*

4.3 Indice de Maslov d'un quasi-lacet de lagrangiens

On étend dans ce paragraphe la définition de l'indice de Maslov que l'on a donnée dans le paragraphe 4.2 pour les lacets de $\mathcal{L}_L$ basés en L , aux chemins $\alpha(T)$ (la terminologie est sans surprise : on appelle *chemin* de $\mathcal{L}_L$ un élément de $\mathcal{L}_{R[T] \otimes L}$) dont les “extrémités” $\alpha(0)$ et $\alpha(1)$ sont transverses à L^* (en d'autres termes, on remplace le point base L par son “voisinage ouvert contractile” $\mathcal{U}_L^*$).

On appelle *quasi-lacet* un tel chemin et on note $\Omega^{\text{qu}} \mathcal{L}_L$ l'ensemble des quasi-lacets de $\mathcal{L}_L$:

$$\mathcal{L}_L(R[T]) \supset \Omega^{\text{qu}} \mathcal{L}_L := \{\alpha ; \alpha(0) \pitchfork L^*, \alpha(1) \pitchfork L^*\}.$$

On introduit *mutatis mutandis* les foncteurs $A \mapsto (\Omega^{\text{qu}} \mathcal{L}_L)(A)$, définis sur la catégorie des R -algèbres (commutatives).

L'inclusion naturelle de $\Omega \mathcal{L}_L$ dans $\Omega^{\text{qu}} \mathcal{L}_L$, disons i , admet une rétraction tout aussi naturelle, disons r , qui est définie de la façon suivante. Soit α un quasi-lacet. Puisque $\alpha(i)$, $i = 0, 1$, est transverse à L^* , il existe un unique élément $s(i)$ de $\mathcal{S}_L$ tel que l'on a

$$\alpha(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s(i) & 1 \end{bmatrix} \cdot L ;$$

on pose

$$(r\alpha)(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -((1-T)s(0) + Ts(1)) & 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha(T) .$$

On observera que les applications i et r sont compatibles avec les applications de stabilisation (induites par les applications $\mathcal{L}_L \rightarrow \mathcal{L}_{L \oplus L'}$, $\Lambda \mapsto \Lambda \oplus L'$).

On constate que l'élément

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -U((1-T)s(0) + Ts(1)) & 1 \end{bmatrix} \cdot \alpha(T)$$

de $(\Omega^{\text{qu}} \mathcal{L}_L)(R[U])$ est une homotopie entre α et $(i \circ r)\alpha$; d'où :

Proposition 4.3.1. *Les applications i et r induisent des bijections, inverses l'une de l'autre, entre $\pi_0 \Omega \mathcal{L}_L$ et $\pi_0 \Omega^{\text{qu}} \mathcal{L}_L$.*

On suppose maintenant que R est un anneau régulier dans lequel 2 est inversible.

Soit α un quasi-lacet de $\mathcal{L}_L$. On définit l'indice de Maslov de α comme celui du lacet $r\alpha$; on le note encore $\text{Mas}(\alpha)$:

$$\text{Mas}(\alpha) := \text{Mas}(r\alpha) .$$

D'après 4.3.1 et 4.2.6 l'application $\Omega^{\text{qu}} \mathcal{L}_L \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$, $\alpha \mapsto \text{Mas}(\alpha)$, se factorise à travers $\pi_0 \Omega^{\text{qu}} \mathcal{L}_L$.

La définition de l'indice de Maslov d'un quasi-lacet est exactement faite pour que l'on puisse remplacer dans l'énoncé 4.2.3 le mot lacet par le mot quasi-lacet :

Proposition 4.3.2. *Soit α un quasi-lacet de $\mathcal{L}_L$. Soient L' un R -module libre de dimension finie, $S(T)$ une forme bilinéaire symétrique sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')$ et $Y(T)$ une forme bilinéaire symétrique sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')^*$ tels que l'on a*

$$\alpha \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* .$$

Alors les formes $Y(0)$ et $Y(1)$ sont non-dégénérées et l'on a

$$\text{Mas}(\alpha) = \text{st}([-Y(1)^{-1} \oplus Y(0)]) = -\text{st}([Y(1) \oplus -Y(0)^{-1}]) .$$

Démonstration. Observer que l'on a

$$r\alpha \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) - ((1-T)S(0) + TS(1)) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* . \quad \square$$

Exemple. La proposition 4.3.2 conduit à la variante suivante de la proposition 4.2.5 :

Proposition 4.3.3. *Soit α un quasi-lacet de $\mathcal{L}_L$. On suppose qu'il existe une suite de Sturm $(q_0(T), q_1(T), \dots, q_{2m-1}(T), q_{2m}(T))$ sur $R[T] \otimes_R L$ telle que l'on a*

$$\alpha(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & q_{2m-1}(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m}(T) & 1 \end{bmatrix} \cdot L .$$

On note $\underline{q}(T)$ la sous-suite de Sturm $(q_1(T), q_2(T), \dots, q_{2m}(T))$.

Alors les formes de Sturm $S(\underline{q}(0))$ et $S(\underline{q}(1))$ sont non-dégénérées et l'on a

$$\text{Mas}(\alpha) = \text{st}([S(\underline{q}(1))^{-1} \oplus -S(\underline{q}(0))]) .$$

Démonstration. On utilise les propositions 2.4.3 et 4.3.2, et le lemme suivant :

Lemme 4.3.4. *Soit L un R -module libre de dimension finie muni de deux formes symétriques non-dégénérées q_0 et q_1 ; soit $a(T)$ un automorphisme de $R[T] \otimes_R L$. Alors on a dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$:*

$$\text{st}([(a(1)^* q_1 a(1)) \oplus -(a(0)^* q_0 a(0))^{-1}]) = \text{st}([q_1 \oplus -q_0^{-1}]) .$$

Démonstration. On a

$$[(a(1)^* q_1 a(1)) \oplus -(a(0)^* q_0 a(0))^{-1}] \sim [(a(0)^* q_1 a(0)) \oplus -(a(0)^* q_0 a(0))^{-1}]$$

dans $\mathcal{F}_L$ et

$$\text{st}([(a(0)^* q_1 a(0)) \oplus -(a(0)^* q_0 a(0))^{-1}]) = \text{st}([q_1 \oplus -q_0^{-1}]))$$

dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ d'après le scholie 4.1.2. $\square \square$

Remarque. Comme nous ne cessons de le répéter, tout chemin α de $\mathcal{L}_L$ s'écrit "après stabilisation" :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* ;$$

α est un quasi-lacet si et seulement si $Y(0)$ et $Y(1)$ sont inversibles, ce que nous supposons ci-après. Posons :

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* ; \quad \gamma(T, U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ US(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* ;$$

β est un quasi-lacet et γ une homotopie de quasi-lacets entre α et β . Enfin, comme en 4.2, β est homotope “à extrémités fixes” au quasi-lacet

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & (1-T)Y(0) + TY(1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* .$$

Nous pouvons donc paraphraser la définition de l’indice de Maslov d’un quasi-lacet de la façon suivante. Tout quasi-lacet α de $\mathcal{L}_L$ est homotope “après stabilisation” à un chemin β de $\mathcal{U}_L$ dont les extrémités sont dans $\mathcal{U}_L \cap \mathcal{U}_L^*$. Dans l’espace affine $\mathcal{U}_L$ (voir 2.1.5), le chemin β est quant à lui homotope à extrémités fixes à “la droite affine” joignant $\beta(0)$ à $\beta(1)$. Si l’on identifie $\mathcal{U}_L \cap \mathcal{U}_L^*$ avec l’ensemble des formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur L (voir 2.1.4) alors l’indice de Maslov de α est “la différence des extrémités” de β :

$$\text{Mas}(\alpha) = \text{st}([\beta(1) \oplus -\beta(0)^{-1}]) .$$

4.4 Commentaires sur la définition de l’indice de Maslov, relation avec la théorie de Ranicki (suite)

L’énoncé 4.4.1 ci-dessous apparaît en filigrane dans notre théorie de l’indice de Maslov ; bien que très élémentaire, il y joue un rôle non négligeable. Nous nous proposons dans ce paragraphe d’expliciter sa relation avec la proposition 1.7.1 de [RA4].

Lemme 4.4.1. *Soient S_0, S_1 , deux formes bilinéaires symétriques sur L et Y_0, Y_1 , deux formes bilinéaires symétriques sur L^* telles que l’on a*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* .$$

Alors la forme bilinéaire symétrique sur $L \oplus L^*$ (de matrice)

$$\begin{bmatrix} S_1 - S_0 & 1 \\ 1 & Y_0 \end{bmatrix}$$

est non-dégénérée.

Considérons maintenant la forme bilinéaire symétrique sur $L^* \oplus L \oplus L^*$ (de matrice) suivante :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & S_1 - S_0 & 1 \\ 0 & 1 & Y_0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice contient deux blocs diagonaux inversibles,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & S_1 - S_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} S_1 - S_0 & 1 \\ 1 & Y_0 \end{bmatrix},$$

si bien que l'on dispose de deux "identités du trinôme" (voir A.4.1). On vérifie que ces identités s'écrivent :

$$(F.1) \quad S = U_0^* \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & S_1 - S_0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_0 \end{bmatrix} U_0 ; \quad S = U_1^* \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 - S_0 & 1 \\ 0 & 1 & Y_0 \end{bmatrix} U_1$$

avec U_0 et U_1 deux automorphismes "triangulaires" de $L^* \oplus L \oplus L^*$.

Remarque. On peut retrouver ce qui précède à l'aide de la "technologie des formes de Sturm" (Appendice A) :

La suite $(-Y_1, S_0 - S_1, Y_0)$ est une suite de Sturm sur L de type $(-1, 1)$ et l'égalité de 4.4.1 implique la suivante :

$$(F.2) \quad E(-Y_1, S_0 - S_1, Y_0) \cdot L^* = L^*.$$

L'implication (iv) $\implies$ (i) du point (a) de la proposition A.2.1 montre que la forme de Sturm $S(S_0 - S_1, Y_0)$ est non-dégénérée. Comme l'on a

$$(F.3) \quad S(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) = -D^* S(-q_m, -q_{m+1}, \dots, -q_n) D$$

pour toute suite de Sturm $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$, D désignant la matrice diagonale de coefficients $(-1)^m, (-1)^{m+1}, \dots, (-1)^n$, on retrouve bien (de façon un tantinet pédante!) le lemme 4.4.1. On applique ensuite la proposition A.4.2 à la suite de Sturm $(0, S_0 - S_1, Y_0)$ (toujours de type $(-1, 1)$). Le point (a) montre qu'il existe un automorphisme triangulaire U'_0 de $L^* \oplus L \oplus L^*$ tel que l'on a :

$$S(0, S_0 - S_1, Y_0) = U_0'^* \begin{bmatrix} S(0, S_0 - S_1) & 0 \\ 0 & -Y_0 \end{bmatrix} U_0'$$

car l'on a $\partial_r(0, S_0 - S_1) = 0$; le point (b) montre qu'il existe un automorphisme triangulaire U'_1 de $L^* \oplus L \oplus L^*$ tel que l'on a :

$$S(0, S_0 - S_1, Y_0) = U_1'^* \begin{bmatrix} -Y_1 & 0 \\ 0 & S(S_0 - S_1, Y_0) \end{bmatrix} U_1'$$

car l'on a $\partial_g(S_0 - S_1, Y_0) = -Y_1$ d'après (F.2). On retrouve alors (F.2) à l'aide de (F.3).

Les formules (F.1) conduisent à l'énoncé suivant :

Lemme 4.4.2. *On reprend les hypothèses du lemme 4.4.1. Alors il existe deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées Q_0 et Q_1 sur $L \oplus L^*$ et un automorphisme ("élémentaire") U de $L^* \oplus L \oplus L^*$ tels que l'on a*

$$Y_1 \oplus Q_1 \cong U^*(Y_0 \oplus Q_0)U.$$

Enfin, en invoquant l'identité

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* \right) \oplus M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S \oplus q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \oplus -q^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus M)^*,$$

q désignant une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur un R -module libre de dimension finie M (cet argument est un avatar de celui utilisé à la fin de la démonstration du lemme 4.2.2), on obtient :

Proposition 4.4.3. *Soit Λ un lagrangien de $H(L)$. On suppose qu'il existe deux R -modules libres de dimension finie L'_i , $i = 0, 1$, et des formes bilinéaires symétriques S_i , Y_i , définies respectivement sur $L \oplus L'_i$ et $(L \oplus L'_i)^*$, tels que l'on a*

$$\Lambda \oplus L'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L'_i)^*$$

pour $i = 0, 1$. Alors il existe deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées Q_i , $i = 0, 1$, définies sur deux R -modules libres de dimension finie L''_i , et un isomorphisme U de $(L \oplus L'_0)^* \oplus L''_0$ sur $(L \oplus L'_1)^* \oplus L''_1$ tels que l'on a

$$Y_1 \oplus Q_1 \cong U^*(Y_0 \oplus Q_0)U.$$

Compte tenu de la discussion de 3.2, on retrouve la proposition 1.7.1 de [RA4].

En invoquant la proposition 3.3.1.2, on obtient la variante suivante de 4.4.3 :

Proposition 4.4.4. *Soit Λ un lagrangien de $H(L)$. Si Y_0 et Y_1 sont deux formes primitives pour Λ , alors il existe deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées Q_0 et Q_1 , définies sur des R -modules libres de dimension finie, telles que les formes bilinéaires symétriques $Y_0 \oplus Q_0$ et $Y_1 \oplus Q_1$ sont isomorphes.*

On conclura ce paragraphe en observant que la proposition 4.4.3 (ou 4.4.4) pourrait être l'un des ingrédients d'une définition alternative de l'indice de Maslov.

4.5 Un avatar du groupe $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$: le groupe $V(R)$ de Karoubi

Nous avons défini, dans le paragraphe 4.2 (resp. 4.3), l'indice de Maslov des lacets (resp. quasi-lacets) de lagrangiens, comme à valeurs dans le groupe $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$, en supposant R régulier et contenant $\frac{1}{2}$. Nous allons voir dans ce paragraphe que sous ces mêmes hypothèses, le groupe $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$ est isomorphe au groupe $V(R)$, introduit par Karoubi, dont la définition est “plus algébrique”. *Grosso modo*, $V(R)$ est le groupe universel dans lequel vit la “différence formelle” des deux composantes d’une classe d’isomorphisme de couples de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées définies sur un même R -module libre de dimension finie (à dire vrai, notre définition diffère légèrement de celle de Karoubi qui définit $V(R)$ en termes de modules projectifs de rang fini et de formes quadratiques non-dégénérées [KA2]). On constatera donc au bout du compte que l’indice de Maslov peut être considéré comme un invariant à valeurs dans le groupe $V(R)$.

Dans ce paragraphe la notation R désigne un anneau (commutatif) arbitraire... sauf mention expresse du contraire.

4.5.1 Le groupe $V(R)$

On considère tout d’abord les couples $(L; q)$ du type suivant :

- L est un R -module libre de dimension finie ;
- q est une forme bilinéaire symétrique sur L que l’on suppose non-dégénérée.

On dit que deux couples de ce type, $(L; q)$, $(L'; q')$, sont isomorphes s’il existe un isomorphisme de R -modules $a : L \rightarrow L'$ tel que l’on a $q = q' \cdot a$, la notation $q' \cdot a$ désignant le composé $a^* \circ q' \circ a : L \rightarrow L^*$ (on dit alors que les deux couples sont isomorphes par a) ; nous notons $[L; q]$, ou simplement $[q]$, la classe d’isomorphismes de $(L; q)$. La somme orthogonale fait de l’ensemble de ces classes d’isomorphismes un monoïde (abélien) que l’on note $MW^{\text{lib}}(R)$; on note $GW^{\text{lib}}(R)$ le groupe de Grothendieck associé ($GW^{\text{lib}}(R)$ est le groupe de Grothendieck-Witt de R défini en termes de modules libres de dimension finie et de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées, la notation $GW(R)$ est réservée au groupe de Grothendieck-Witt défini en termes de modules projectif de rang fini et de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées).

On considère ensuite les triples $(L; q_0, q_1)$ du type suivant :

- L est un R -module libre de dimension finie ;
- q_0 et q_1 sont des formes bilinéaires symétriques sur L que l’on suppose non-dégénérées.

On dit à nouveau que deux triples de ce type, $(L; q_0, q_1)$, $(L'; q'_0, q'_1)$, sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de R -modules $a : L \rightarrow L'$ tel que l'on a $q_0 = q'_0 a$, $q_1 = q'_1 a$ (on dit alors que les deux triples sont isomorphes par a) ; nous notons $[L; q_0, q_1]$, ou simplement $[q_0, q_1]$, la classe d'isomorphismes de $(L; q_0, q_1)$. On note $\text{MW}_1^{\text{lib}}(R)$ le monoïde (abélien) de ces classes d'isomorphismes pour la somme orthogonale ; on note $\text{GW}_1^{\text{lib}}(R)$ le groupe de Grothendieck associé.

On note $d : \text{GW}_1^{\text{lib}}(R) \rightarrow \text{GW}^{\text{lib}}(R)$ "l'application bord", $[q_0, q_1] \mapsto [q_1] - [q_0]$.

On note enfin $V(R)$ le quotient de $\text{GW}_1^{\text{lib}}(R)$ par "les relations de Chasles", c'est-à-dire le quotient par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme

$$[L; q_0, q_1] + [L; q_1, q_2] - [L; q_0, q_2] .$$

La classe dans $V(R)$ de $(L; q_0, q_1)$ est encore notée $[L; q_0, q_1]$ ou $[q_0, q_1]$.

On observera que l'on a dans $V(R)$ les relations $[L; q, q] = 0$ et $[L; q_1, q_0] = -[L; q_0, q_1]$. Cette dernière relation conduit à l'énoncé suivant :

Proposition 4.5.1.1. *L'homomorphisme (de monoïdes) canonique*

$$\text{MW}_1^{\text{lib}}(R) \rightarrow V(R)$$

est surjectif (en clair, tout élément de $V(R)$ est de la forme $[L; q_0, q_1]$).

RELATIONS ENTRE LE GROUPE $V(R)$ ET LES GROUPE $\text{GW}^{\text{lib}}(R)$ ET $K_1(R)$

On note $I(R)$ le noyau de l'homomorphisme "dimension", de $\text{GW}^{\text{lib}}(R)$ dans $\mathbb{Z}$, qui associe à la classe de $(L; q)$ la dimension de L (il n'est pas difficile de se convaincre de ce que $I(R)$ est aussi le noyau de l'homomorphisme $\text{GW}(R) \rightarrow K_0(R)$ qui associe à la classe de $(P; q)$ la classe du R -module projectif de rang fini P). L'homomorphisme $d : \text{GW}_1^{\text{lib}}(R) \rightarrow \text{GW}^{\text{lib}}(R)$ induit un homomorphisme de $V(R)$ dans $I(R)$ que l'on note encore d .

Soit $(L; q_0, q_1)$ un R -module libre de dimension n muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées ; $q_0^{-1} \circ q_1$ est un automorphisme de L dont on peut considérer le "Déterminant", qui est un élément de $K_1(R)$. Rappelons la définition de cette notion. Soient a un automorphisme de L et b un isomorphisme de R^n sur L . La classe dans $K_1(R)$ de l'élément $b^{-1} \circ a \circ b$ de $\text{GL}_n(R)$ est indépendante du choix de b . On l'appelle le *Déterminant* de a et on la note $\text{Dét} a$; la majuscule est là pour distinguer ce Déterminant du déterminant habituel (dont la définition nécessite l'hypothèse " R commutatif") que nous notons $\det a$. On définit un homomorphisme de $V(R)$ dans $K_1(R)$, que l'on note encore Dét , en associant à la classe de $(L; q_0, q_1)$ le Déterminant de $q_0^{-1} \circ q_1$.

Soit L un R -module libre de dimension n muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée q . Soit b un isomorphisme de R^n sur L ; $b^* \circ q \circ b$

peut être considéré comme un élément de $GL_n(R)$ si l'on identifie $(R^n)^*$ avec R^n (moins pédamment, $b^* \circ q \circ b$ est la matrice de q dans la base b !). La classe, modulo le sous-groupe de $K_1(R)$ constitué des éléments de la forme k^*k , du Déterminant de $b^* \circ q \circ b$ est indépendante du choix de b . On l'appelle encore *Déterminant* de q et on la note $\text{Dét } q$. Si l'on note additivement la loi de groupe de $K_1(R)$ et $\tau : K_1(R) \rightarrow K_1(R)$ l'automorphisme $k \mapsto k^*$ alors le quotient implicitement évoqué plus haut peut être noté $K_1(R)/(1 + \tau)$. On définit un homomorphisme de $\text{GW}^{\text{lib}}(R)$ dans $K_1(R)/(1 + \tau)$, que l'on note encore Dét , en associant à la classe de $(L; q)$ le Déterminant de q .

La vérification de l'énoncé suivant est immédiate.

Proposition 4.5.1.2. *Le diagramme de groupes abéliens*

$$\begin{array}{ccc} V(R) & \xrightarrow{d} & I(R) \\ \text{Dét} \downarrow & & \downarrow \text{Dét} \\ K_1(R) & \longrightarrow & K_1(R)/(1 + \tau) \end{array}$$

est commutatif.

(On verra plus tard, Corollaire 4.5.1.5, que dans certains cas, ce diagramme est en fait cartésien.)

On en vient maintenant à l'étude des relations entre le groupe $V(R)$ et les groupes $I(R)$ et $K_1(R)$.

On commence par analyser le noyau de d . Soit $[L; q_0, q_1]$ un élément de $V(R)$. Supposons $d([L; q_0, q_1]) = 0$. Alors il existe un R -module libre de dimension finie L' muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée q' tel que $(L \oplus L'; q_0 \oplus q')$ et $(L \oplus L'; q_1 \oplus q')$ sont isomorphes. Compte tenu du fait que l'on a $[L; q_0, q_1] = [L \oplus L'; q_0 \oplus q', q_1 \oplus q']$ dans $V(R)$, nous pouvons supposer que $(L; q_0)$ et $(L; q_1)$ sont isomorphes. On fait alors intervenir la proposition suivante :

Proposition-Définition 4.5.1.3. *Soit L un R -module libre de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée q .*

(a) *L 'application*

$$GL_L \rightarrow V(R), \quad a \mapsto [L; q, q \cdot a]$$

est un homomorphisme de groupes.

(b) *Il existe un unique homomorphisme de $K_1(R)$ dans $V(R)$, indépendant du choix de L et q , que nous notons ν , tel que l'homomorphisme du point précédent est le composé*

$$GL_L \xrightarrow{\text{Dét}} K_1(R) \xrightarrow{\nu} V(R).$$

(c) *Le composé*

$$K_1(R) \xrightarrow{\nu} V(R) \xrightarrow{\text{Dét}} K_1(R)$$

est l'endomorphisme $1 + \tau$.

Démonstration du point (a). Elle résulte des relations

$$[q, q \cdot (aa')] = [q, q \cdot a'] + [q \cdot a', q \cdot (aa')]$$

et

$$[q, q \cdot a] = [q \cdot a', (q \cdot a) \cdot a'] .$$

□

Démonstration du point (b). Soient $(L; q)$, $(L'; q')$ et $(L''; q'')$ trois R -modules libres de dimension finie munis de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées; soient a un automorphisme de L et a' un automorphisme de L' . On a les relations

$$\begin{aligned} [L; q, q \cdot a] &= [L \oplus L' \oplus L''; q \oplus q' \oplus q'', (q \oplus q' \oplus q'') \cdot (a \oplus 1 \oplus 1)] , \\ [L'; q', q' \cdot a'] &= [L \oplus L' \oplus L''; q \oplus q' \oplus q'', (q \oplus q' \oplus q'') \cdot (1 \oplus a' \oplus 1)] . \end{aligned}$$

En utilisant le point (a), on obtient

$$[L'; q', q' \cdot a'] - [L; q, q \cdot a] = [L \oplus L' \oplus L''; q \oplus q' \oplus q'', (q \oplus q' \oplus q'') \cdot (a^{-1} \oplus a' \oplus 1)] .$$

Si l'on a $\text{Dét } a = \text{Dét } a'$ et si la dimension de L'' est assez grande, alors, d'après la définition même du foncteur K_1 , l'automorphisme $a^{-1} \oplus a' \oplus 1$ de $L \oplus L' \oplus L''$ est un produit de commutateurs; comme le groupe $V(R)$ est abélien, le point (a) montre que le second membre de la relation ci-dessus est nul. Ceci achève la démonstration du point (b). □

La vérification du point (c) est laissée au lecteur. □

Ce qui précède conduit à la proposition suivante :

Proposition 4.5.1.4. *La suite de groupes abéliens*

$$K_1(R) \xrightarrow{\nu} V(R) \xrightarrow{\text{d}} I(R) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Soit R un anneau commutatif. L'homomorphisme canonique $R^\times = \text{GL}_1(R) \rightarrow K_1(R)$ possède une rétraction tout aussi canonique, l'homomorphisme $\text{dét} : K_1(R) \rightarrow R^\times$; on a donc une décomposition en somme directe $K_1(R) := \text{SK}_1(R) \oplus R^\times$. On note encore dét les homomorphismes composés

$$V(R) \xrightarrow{\text{Dét}} K_1(R) \xrightarrow{\text{dét}} R^\times$$

et

$$I(R) \xrightarrow{\text{Dét}} K_1(R)/(1 + \tau) \xrightarrow{\text{dét}} R^\times / R^{\times 2}.$$

Corollaire 4.5.1.5. *Soit R un anneau commutatif avec $\text{SK}_1(R) = 0$ (par exemple un corps ou un anneau euclidien). Alors le diagramme commutatif de groupes abéliens*

$$\begin{array}{ccc} V(R) & \xrightarrow{d} & I(R) \\ \text{dét} \downarrow & & \downarrow \text{dét} \\ R^\times & \longrightarrow & R^\times / R^{\times 2} \end{array}$$

est cartésien (en d'autres termes, les homomorphismes d et dét induisent un isomorphisme de $V(R)$ sur le produit fibré de $I(R)$ et $R^\times$ au-dessus de $R^\times / R^{\times 2}$).

Démonstration. Le point (c) de 4.5.1.3 permet de se convaincre de ce que le noyau de $\nu : R^\times = K_1(R) \rightarrow V(R)$ est le sous-groupe $\{\pm 1\}$; l'énoncé 4.5.1.5 en résulte.

Remarque. La proposition 4.5.1.4 dit en particulier que l'homomorphisme $d : V(R) \rightarrow I(R)$ est surjectif. Nous verrons au chapitre 5 qu'il n'en est pas en général de même pour l'homomorphisme $\text{Dét} : V(R) \rightarrow K_1(R)$ (ce sera un sous-produit de l'énoncé 5.4.1, voir aussi le premier commentaire à la fin du chapitre 5).

La définition même de l'homomorphisme ν conduit à l'énoncé suivant :

Proposition 4.5.1.6. *Soit $(L; q_0, q_1)$ un R -module libre de dimension finie muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées; soient $a_0, a_1 : L' \rightarrow L$ deux isomorphismes de R -modules. Alors on a dans $V(R)$ la relation suivante :*

$$[L'; q_0 \cdot a_0, q_1 \cdot a_1] = [L; q_0, q_1] + \nu(\text{Dét}(a_1 \circ a_0^{-1})).$$

On explique à présent le rapport entre le groupe $I(R)$ et le groupe de Witt de l'anneau R . On dégage à cette occasion le lemme 4.5.1.7; son scholie aura son rôle à jouer au chapitre 5. Le lemme 4.5.1.10 est de la même veine; son scholie sera quant à lui utilisé en 4.5.2.

Soit L un R -module libre de dimension finie, on rappelle que l'on note $\hbar_L$ la forme bilinéaire symétrique hyperbolique sur $L \oplus L^*$. On note $W^{\text{lib}}(R)$ le quotient de $\text{GW}^{\text{lib}}(R)$ par le sous-groupe engendré par $[\hbar_R]$, ou ce qui revient au même par les $[\hbar_L]$ ($W^{\text{lib}}(R)$ est le groupe de Witt de R défini en termes de modules libres de dimension finie et de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées, la notation $W(R)$ est réservée au groupe de Witt défini en termes

de modules projectif de rang fini et de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées). On observe que le groupe $I(R)$ introduit plus haut peut aussi être vu comme le noyau de l'homomorphisme “dimension modulo 2”, de $W^{\text{lib}}(R)$ dans $\mathbb{Z}/2$. Soit $(L; q)$ un R -module libre de dimension paire muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée alors le Déterminant de sa classe dans $I(R)$ est le *Discriminant* de q , disons $\text{Dis } q$, défini par

$$\text{Dis } q = (-1)^{\frac{\dim L}{2}} \text{Dét } q$$

(dans cette formule la loi du groupe $K_1(R)/(1+\tau)$ est notée multiplicativement et -1 désigne l'image de -1 par l'homomorphisme composé $R^\times \rightarrow K_1(R) \rightarrow K_1(R)/(1+\tau)$).

Par définition la classe des formes hyperboliques (associées à des R -modules libre de dimension finie) est nulle dans $W^{\text{lib}}(R)$; le lemme ci-après montre en particulier qu'il en est de même de la classe des formes “neutres” c'est-à-dire, dans notre contexte, des $(L; q)$ tels qu'il existe un facteur direct libre de L qui est son propre orthogonal par rapport à q . On en déduit que le groupe $W^{\text{lib}}(R)$ est isomorphe au quotient du monoïde $MW^{\text{lib}}(R)$ par le sous-monoïde constitué des classes des formes neutres (on définit d'ailleurs classiquement $W^{\text{lib}}(R)$ comme ce quotient).

Lemme 4.5.1.7. *Soient L un R -module libre de dimension finie et q une forme bilinéaire symétrique sur L^* . Alors les deux R -modules libres de dimension finie munis de forme bilinéaire symétrique non-dégénérée suivants*

$$\begin{aligned} & \left(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right) \oplus \left(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right), \\ & \left(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

sont isomorphes par un automorphisme élémentaire de $L \oplus L^* \oplus L \oplus L^*$.

Démonstration. Soient

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & q \end{bmatrix}, \quad Q' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & q \end{bmatrix},$$

les matrices, de type $(L, L^*, L, L^*) \times (L^*, L, L^*, L)$, des formes bilinéaires symétriques de l'énoncé. On considère le produit suivant de matrices de type $(L, L^*, L, L^*) \times (L, L^*, L, L^*)$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -q \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

P est la matrice, de type $(L, L^*, L, L^*) \times (L, L^*, L, L^*)$, d'un automorphisme élémentaire de $L \oplus L^* \oplus L \oplus L^*$. On vérifie que l'on a $PQP = Q'$. $\square$

Scholie 4.5.1.8. *Soient L un R -module libre de dimension finie et q une forme bilinéaire symétrique sur L^* . Alors on a dans $V(R)$ l'égalité :*

$$\left[L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right] = 0.$$

En effet, on a dans $V(R)$

$$\begin{aligned} & \left[L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right] \\ &= \left[(L \oplus L^*) \oplus (L \oplus L^*); \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

et le second membre est nul d'après 4.5.1.6.

Remarque. Si 2 est inversible dans R alors le lemme 4.5.1.7 admet une version moins sophistiquée, puisque l'on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{q}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{q}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette remarque et l'identité de la démonstration du lemme 4.1.6 conduisent au lemme suivant :

Lemme 4.5.1.9. *Soit $(L; q)$ un R -module libre de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Si 2 est inversible dans R , alors les deux R -modules libres de dimension finie munis de forme bilinéaire symétrique non-dégénérée suivants*

$$\left(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{bmatrix} \right), \quad \left(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

sont isomorphes par un automorphisme élémentaire de $L \oplus L^*$.

Voici la version “sophistiquée” de ce lemme :

Lemme 4.5.1.10. *Soit $(L; q)$ un R -module libre de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Alors les deux R -modules libres de dimension finie munis de forme bilinéaire symétrique non-dégénérée suivants*

$$\left(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{bmatrix} \right) \oplus (L; q), \quad \left(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \oplus (L; q),$$

sont isomorphes par un automorphisme élémentaire de $L \oplus L^* \oplus L$.

Démonstration. Soient

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}, \quad Q' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix},$$

les matrices, de type $(L, L^*, L) \times (L^*, L, L^*)$, des formes bilinéaires symétriques de l'énoncé. On considère le produit suivant de matrices de type $(L, L^*, L) \times (L, L^*, L)$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -q & 1 & 0 \\ 0 & -q^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

P est la matrice, de type $(L, L^*, L) \times (L, L^*, L)$, d'un automorphisme élémentaire de $L \oplus L^* \oplus L$. On vérifie que l'on a ${}^tPQP = Q'$. $\square$

Scholie 4.5.1.11. Soit $(L; q_0, q_1, q_2)$ un R -module libre de dimension finie muni de trois formes bilinéaires symétriques non-dégénérées. Alors :

(a) On a dans $V(R)$ l'égalité

$$[L; q_0, q_1] = \left[L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & -q_0^{-1} \end{bmatrix} \right].$$

(b) Les deux formes bilinéaires symétriques sur $((L \oplus L^*) \oplus (L \oplus L^*)) \oplus (L \oplus L^*)$

$$\begin{aligned} ((q_1 \oplus -q_0^{-1}) \oplus (q_2 \oplus -q_1^{-1})) \oplus (q_1 \oplus -q_1^{-1}), \\ ((q_2 \oplus -q_0^{-1}) \oplus \hbar_L) \oplus (q_1 \oplus -q_1^{-1}) \end{aligned}$$

sont isomorphes par un automorphisme élémentaire.

Vérifions par exemple le point (a). On a dans $V(R)$:

$$\begin{aligned} [L; q_0, q_1] &= [L \oplus (L^* \oplus L); q_0 \oplus (-q_0^{-1} \oplus q_0), q_1 \oplus (-q_0^{-1} \oplus q_0)] \\ &= [(L \oplus L^*) \oplus L; \hbar_L \oplus q_0, (q_1 \oplus -q_0^{-1}) \oplus q_0] = [L \oplus L^*; \hbar_L, q_1 \oplus -q_0^{-1}]; \end{aligned}$$

la deuxième relation s'obtenant à l'aide du lemme 4.5.1.10 et de la proposition 4.5.1.6.

Scholie 4.5.1.12. Soit $(L; q_0, q_1)$ un R -module libre de dimension finie muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées. Alors on a dans $V(R)$ la relation suivante :

$$[L^*; -q_0^{-1}, -q_1^{-1}] = -[L; q_0, q_1].$$

4.5.2 Liens entre les groupes $V(R)$ et $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$

Soit L un R -module libre de dimension finie. Le groupe $G_{L \oplus L^*}$ opère, à droite, sur l'ensemble $\mathcal{F}_L$ de façon $\mathcal{C}$ -naturelle (la définition de la catégorie $\mathcal{C}$ est donnée en 4.1.10). Précisons un peu ce que nous entendons par là. Les correspondances $L \mapsto \mathcal{F}_L$ et $L \mapsto G_{L \oplus L^*}$ induisent des foncteurs définis sur la catégorie $\mathcal{C}$ et à valeurs respectivement dans la catégorie des ensembles et celle des groupes, et l'action $\mathcal{F}_L \times G_{L \oplus L^*} \rightarrow \mathcal{F}_L$ est une transformation naturelle. En passant à la limite directe sur $\mathbb{N}(R)$ (voir encore 4.1.10), on obtient une action, à droite, du groupe $GL(R)$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(R)$ (naturelle en R).

Les liens évoqués dans le titre de ce sous-paragraphe font intervenir l'ensemble quotient $\mathcal{F}(R)/EGL(R)$, $EGL(R)$ désignant le sous-groupe de $GL(R)$, constitué des “matrices élémentaires”. Pour alléger la notation, on pose $V'(R) = \mathcal{F}(R)/EGL(R)$. La somme orthogonale fait de $V'(R)$ un monoïde abélien.

Remarque. Le monoïde abélien $V'(R)$ n'est pas en général un groupe. Le lecteur vérifiera par exemple que $V'(\mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$ muni de la multiplication. Ce genre de pathologie disparaît si l'on travaille avec des formes quadratiques plutôt que des formes bilinéaires symétriques [KA2] et en particulier si l'on suppose que 2 est inversible dans R (voir ci-dessous).

Le lemme suivant, qui est une variante de la proposition 4.1.1 et dont la démonstration est identique, sera implicitement utilisé à plusieurs reprises ci-après :

Lemme 4.5.2.1. *Soient L un R -module libre de dimension n et b un isomorphisme de R^n sur L . Alors la composée de l'application de $\mathcal{F}_L$ dans $\mathcal{F}_n(R)$ induite par b et des applications canoniques de $\mathcal{F}_n(R)$ dans $\mathcal{F}(R)$ et de $\mathcal{F}(R)$ dans $V'(R)$, est indépendante du choix de b .*

Proposition-Définition 4.5.2.2.

(a) *Les applications*

$$\mathcal{F}_L \rightarrow V(R), \quad q \mapsto [L \oplus L^*; \hbar_L, q]$$

induisent un homomorphisme de monoïdes, que nous notons ϕ , de $V'(R)$ dans $V(R)$; cet homomorphisme est surjectif.

On suppose maintenant que 2 est inversible dans R . Alors :

- (b) *Le monoïde $V'(R)$ est un groupe.*
- (c) *Les applications à valeurs dans $\mathcal{F}_L$,*

$$(L; q_0, q_1) \mapsto (L \oplus L^*; q_1 \oplus -q_0^{-1}),$$

induisent un homomorphisme de groupes, que nous notons δ' , de $V(R)$ dans $V'(R)$.

- (d) Les homomorphismes de groupes, $\phi: V'(R) \rightarrow V(R)$ et $\delta': V(R) \rightarrow V'(R)$, sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Démonstration du point (a). La factorisation à travers $V'(R)$ de l'application $\mathcal{F}_L \rightarrow V(R)$, $q \mapsto [L; \hbar_L, q]$, résulte de la proposition 4.5.1.6. Le fait que ϕ est un homomorphisme de monoïdes est évident. Le fait que ϕ est surjectif est une paraphrase du point (a) de 4.5.1.11.

Démonstration du point (b). On utilise le lemme 4.5.1.9.

Démonstration du point (c). On utilise à nouveau le lemme 4.5.1.9.

Démonstration du point (d). Le composé $\phi \circ \delta'$ est l'identité d'après le point (a) de 4.5.1.11. Le fait que le composé $\delta' \circ \phi$ est aussi l'identité résulte essentiellement du lemme ci-dessous, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 4.5.2.3. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Alors $(L \oplus L^*; \hbar_L)$ et $(L \oplus L^*; -\hbar_L)$ sont isomorphes par un automorphisme élémentaire de $L \oplus L^*$. $\square$*

Remarque. Le point (b) du scholie 4.5.1.11 conduit à la proposition suivante :

Proposition 4.5.2.4. *L'homomorphisme $\phi: V'(R) \rightarrow V(R)$ induit un isomorphisme du groupe de Grothendieck associé au monoïde abélien $V'(R)$ sur le groupe abélien $V(R)$, pour tout anneau commutatif R .*

Soient q_0 et q_1 deux éléments de $\mathcal{F}(R)$. Il est clair que si q_0 et q_1 sont isomorphes par un élément de $\text{EGL}(R)$ alors il existe un élément α de $\mathcal{F}(R[T])$ avec $\alpha(0) = q_0$ et $\alpha(1) = q_1$. On dispose donc d'une application canonique, disons γ , de $V'(R)$ dans $(\pi_0 \mathcal{F})(R)$, qui est par définition un homomorphisme surjectif de monoïdes, de groupes si 2 est inversible dans R .

Le théorème suivant est implicite dans [KA1] :

Théorème 4.5.2.5. *Si 2 est inversible dans R et si R est K_1 -rigide, alors l'homomorphisme de groupes canonique*

$$\gamma: V'(R) \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il faut montrer que γ est injectif. Nous suivons [OJ1]. Soient q_0 et q_1 deux éléments de $\mathcal{F}(R)$ tels qu'il existe un élément α de $\mathcal{F}(R[T])$ avec $\alpha(0) = q_0$ et $\alpha(1) = q_1$. D'après [OJ1] (pour un argument plus direct dans le cas d'un corps, voir par exemple [OJ2]), si 2 est inversible dans R alors il

existe un élément β de $\mathrm{GL}(R[T])$, avec $\beta(0) = 1$, tel que l'on a $\alpha = q_0 \cdot \beta$ (on considère ici q_0 comme un élément de $\mathcal{F}(R[T])$). Si R est K_1 -rigide alors $\beta(1)$ appartient à $\mathrm{EGL}(R)$, ce qui montre bien que les classes de q_0 et q_1 dans $V'(R)$ coïncident. $\square$

Nous notons δ l'application de $V(R)$ dans $(\pi_0\mathcal{F})(R)$ qui associe à la classe de $(L; q_0, q_1)$ la classe de $(L \oplus L^*; q_1 \oplus -q_0^{-1})$; on vérifie comme précédemment que δ est un homomorphisme de groupes. Par définition, dans le cas où 2 est inversible dans R , δ est le composé $\delta' \circ \gamma$; le point (d) de la proposition 4.5.2.2 et le théorème 4.5.2.5 donnent donc :

Corollaire 4.5.2.6. *Si 2 est inversible dans R et si R est K_1 -rigide alors l'homomorphisme de groupes canonique*

$$\delta : V(R) \rightarrow (\pi_0\mathcal{F})(R)$$

est un isomorphisme.

4.5.3 Retour sur la définition de l'indice de Maslov

On suppose à nouveau que l'anneau R est régulier et contient $\frac{1}{2}$.

Compte tenu du corollaire 4.5.2.6, nous pouvons redéfinir l'indice de Maslov des lacets (quasi-lacets) de lagrangiens comme à valeurs dans le groupe $V(R)$ (on observera que la seconde égalité du point (a) de l'énoncé ci-dessous utilise le lemme 4.2.4 ou le scholie 4.5.1.12) :

Proposition-Définition 4.5.3.1. *Soit L un R -module de dimension finie ; soit α un chemin de $\mathcal{L}_L$. Soient L' un R -module libre de dimension finie, $S(T)$ une forme bilinéaire symétrique sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')$ et $Y(T)$ une forme bilinéaire symétrique sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L')^*$ tels que l'on a*

$$\alpha \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^* .$$

Alors :

(a) *Si α est un lacet, on a dans $V(R)$:*

$$\delta^{-1}(\mathrm{Mas}(\alpha)) = [S(0), S(1)] = -[Y(0), Y(1)] .$$

(b) *Si α est un quasi-lacet, on a dans $V(R)$:*

$$\delta^{-1}(\mathrm{Mas}(\alpha)) = -[Y(0), Y(1)] .$$

L'application composée $\delta^{-1} \circ \mathrm{Mas}$, définie sur l'ensemble des (classes d'homotopie) de lacets ou quasi-lacets de lagrangiens, et à valeurs dans $V(R)$, est encore appelée indice de Maslov et notée également Mas .

On considère enfin les homomorphismes composés $d \circ \text{Mas}$ et $\text{Dét} \circ \text{Mas}$, respectivement à valeurs dans $I(R)$ et $K_1(R)$.

Il paraît raisonnable d'appeler encore indice de Maslov (à valeurs dans $I(R)$) l'invariant $d \circ \text{Mas}$; pour abrégé, nous le noterons aussi mas . Les égalités des points (a) et (b) de la proposition ci-dessus se spécialisent de la façon suivante:

(a-bis) Si α est un lacet, on a dans $I(R)$:

$$\text{mas}(\alpha) = [S(1)] - [S(0)] = [Y(0)] - [Y(1)].$$

(b-bis) Si α est un quasi-lacet, on a dans $I(R)$:

$$\text{mas}(\alpha) = [Y(0)] - [Y(1)].$$

La proposition ci-dessous montre que l'invariant $\text{Dét} \circ \text{Mas}$ est quant à lui facilement accessible:

Proposition 4.5.3.2. *Soit L un R -module de dimension finie. Soit $\begin{bmatrix} a(T) \\ b(T) \end{bmatrix}$ un plongement lagrangien de $R[T] \otimes_R L$ dans $H(R[T] \otimes_R L)$; soit α son image. On suppose que α est un quasi-lacet de $\mathcal{L}_L$, c'est-à-dire que les endomorphismes de L , $a(0)$ et $a(1)$, sont inversibles.*

Alors on a dans $K_1(R)$:

$$(\text{Dét} \circ \text{Mas})(\alpha) = \text{Dét } a(0) - \text{Dét } a(1)$$

(la loi du groupe abélien $K_1(R)$ étant notée "additivement").

Démonstration. On reprend les notations de 4.5.3.1. On pose

$$A(T) = \begin{bmatrix} a(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(T) = \begin{bmatrix} b(T) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(matrices de type $(R[T] \otimes_R L, R[T] \otimes_R L') \times (R[T] \otimes_R L, R[T] \otimes_R L')$) et $U(T) = B(T) - S(T)A(T)$. L'égalité

$$\alpha \oplus L' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (L \oplus L')^*$$

équivalent au fait que $U(T)$ est inversible et que l'on a $Y(T) = A(T)U(T)^{-1}$. On en déduit $Y(0)^{-1}Y(1) = U(0)A(0)^{-1}A(1)U(1)^{-1}$, ce qui entraîne

$$\text{Dét}(Y(0)^{-1}Y(1)) = \text{Dét}(A(0)^{-1}A(1)) + \text{Dét}(U(1)^{-1}U(0))$$

dans $K_1(R)$. Comme l'anneau R est K_1 -rigide (ce que l'on peut paraphraser en disant que l'application naturelle $K_1(R) \rightarrow (\pi_0 \text{GL})(R)$ est un isomorphisme), le terme $\text{Dét}(U(1)^{-1}U(0))$ est nul. $\square$

4.6 Indice de Maslov et formes d'enlacement sur $k[T]$ (k un corps)

Ce paragraphe se veut une illustration de la théorie générale de l'indice de Maslov.

Dans ce paragraphe, l'anneau (commutatif) R est un corps (on observera que le scholie 3.1.4 permet d'éviter de supposer que la caractéristique est différente de 2). On rappelle que dans ce cas le groupe $V(R)$ est isomorphe au produit fibré $I(R) \times_{R^\times/R^{\times 2}} R^\times$ via les homomorphismes d et $\det$ (Corollaire 4.5.1.5).

Soit k un corps; soit A un polynôme de $k[T]$. On suppose que A est séparable (c'est-à-dire que toutes les racines de A dans une clôture algébrique de k sont simples, ou encore que A est premier avec son dérivé A') et que $A(0)$ et $A(1)$ sont non-nuls. Sous ces hypothèses, la matrice colonne $\begin{bmatrix} A(T) \\ A'(T) \end{bmatrix}$ peut être vue comme un plongement lagrangien de $k[T]$ dans $H(k[T])$ et l'image de ce plongement, que nous notons α_A , comme un quasi-lacet de $\mathcal{L}_1(k) = \mathbf{P}^1(k)$ (le "point base" de $\mathbf{P}^1(k)$ est ∞ , son "voisinage ouvert contractile" $\mathcal{U}_{L^*}$ de la théorie générale est ici $\mathbf{P}^1(k) - \{0\}$).

Proposition 4.6.1. *Soit k un corps; soit A un polynôme de $k[T]$. On suppose que A est séparable et que $A(0)$ et $A(1)$ sont non-nuls. On note E la k -algèbre étale $k[T]/A(T)$ et θ la classe de T dans E ; on note b_i , $i = 0, 1$, la forme bilinéaire symétrique sur E , $(x, y) \mapsto \text{tr}_{E/k}((i - \theta)xy)$. Alors les formes b_0 et b_1 sont non-dégénérées et l'indice de Maslov dans $V(k)$ du quasi-lacet α_A est donné par la formule :*

$$-\text{Mas}(\alpha_A) = [E; b_0, b_1] .$$

En particulier, la composante de $\text{Mas}(\alpha_A)$ dans $I(k)$ est donnée par la formule :

$$-\text{mas}(\alpha_A) = [E; b_1] - [E; b_0]$$

(sa composante dans $k^\times$ est simplement $\frac{A(0)}{A(1)}$).

Exemple 4.6.2. Spécialisons au cas $k = \mathbb{R}$. Dans ce cas la $\mathbb{R}$ -algèbre étale E est isomorphe à un produit

$$\prod_{\xi \in R} \mathbb{R} \times \prod_{\zeta \in C} \mathbb{C} ,$$

R désignant l'ensemble des racines réelles de A et C l'ensemble des paires de racines complexes (non-réelles) conjuguées. En observant que les formes sur

$\mathbb{C}, (z_1, z_2) \mapsto \text{tr}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\gamma z_1 z_2)$ avec $\gamma \in \mathbb{C}^\times$, sont toutes isomorphes (par exemple parce que γ est un carré) et que $\text{tr}_{\mathbb{R}/\mathbb{R}}$ est l'identité, on constate que l'on a

$$-\text{mas}(\alpha_A) = \sum_{\xi \in R} \langle 1 - \xi, \xi \rangle$$

(on considère ci-dessus $I(\mathbb{R})$ comme un idéal de $W(\mathbb{R})$). Enfin, puisque $I(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ via l'application $w \mapsto \frac{1}{2} \text{sgn } w$, cette formule est équivalente au fait que le nombre de racines réelles de A dans l'intervalle $]0, 1[$ est égale à $-\frac{1}{2} \text{sgn mas}(\alpha_A)$.

La proposition 4.6.1 est un cas particulier de la proposition 4.6.4. Celle-ci est conséquence de la proposition 3.3.2.4 et de la proposition 4.6.3 ci-après dans laquelle on dégage le phénomène suivant, spécifique à l'anneau $k[T]$: Tout $k[T]$ -module d'enlacement est naturellement isomorphe au résidu d'une forme bilinéaire symétrique non-singulière (au sens de 3.3.2).

Pour énoncer la proposition 4.6.3, il est commode d'introduire l'application "résidu" de $k(T)/k[T]$ dans k , dont voici une définition *ad hoc*. On note r la rétraction k -linéaire de $k(T)$ dans $k[T]$, qui associe à une fraction rationnelle f sa partie entière. L'application $k(T) \rightarrow k[T]$, $f \mapsto r(Tf) - \text{Tr}(f)$, est en fait à valeurs dans k ; on note $\rho : k(T) \rightarrow k$ l'application k -linéaire induite (ρ est l'opposé du résidu à l'infini de f ou la somme des résidus en dehors de l'infini). Il est manifeste que $\rho(k[T])$ est nul si bien que ρ se factorise par une application k -linéaire de $k(T)/k[T]$ dans k , que nous notons encore ρ .

L'application ρ induit, pour tout $k[T]$ -module de torsion E , un isomorphisme de $k[T]$ -modules

$$\nu_E : \text{Hom}_{k[T]}(E, k(T)/k[T]) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_k(E, k)$$

naturel en E . (On observera qu'une telle transformation naturelle est nécessairement induite par l'application k -linéaire $\nu_{k(T)/k[T]}(1)$; si l'on exhibe *a priori*, par des arguments d'algèbre homologique, un isomorphisme naturel ν , alors on est conduit à la formule que nous avons donnée pour ρ .)

Il est bien connu que les deux catégories suivantes sont équivalentes :

- (1) la catégorie des $k[T]$ -modules de type fini et de torsion ;
- (2) la catégorie des k -espaces vectoriels de dimension finie munis d'un endomorphisme.

Pareillement, ce qui précède montre que les deux notions suivantes sont équivalentes (nous ne parlons pas de catégories pour ne pas avoir à préciser les morphismes!) :

- ($\tilde{1}$) la notion de $k[T]$ -module d'enlacement ;
- ($\tilde{2}$) la notion de k -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée et d'un endomorphisme auto-adjoint (pour cette forme).

Explicitons la correspondance entre ces deux notions (dans le sens ($\tilde{1}$) $\rightarrow$ ($\tilde{2}$)). Soit E un $k[T]$ -module d'enlacement ; soit $\beta : E \times E \rightarrow k(T)/k[T]$ sa forme d'enlacement. Alors le k -espace vectoriel sous-jacent à E est de dimension finie, la forme k -bilinéaire symétrique $\rho \circ \beta : E \times E \rightarrow k$ est non dégénérée et la multiplication par T est un endomorphisme de k -espace vectoriel, qui est auto-adjoint pour cette forme.

L'énoncé 4.6.3 ci-dessous reprend une partie de la discussion ci-dessus ; la vérification des deux derniers points est laissée au lecteur.

Proposition-définition 4.6.3. *Soit E un $k[T]$ -module d'enlacement. On note u l'endomorphisme $x \mapsto Tx$ du k -espace vectoriel sous-jacent à E ; on pose $E^* = \text{Hom}_k(E, k)$. Soit $\beta : E \times E \rightarrow k(T)/k[T]$ la forme d'enlacement de E . On note $b : E \times E \rightarrow k$ la forme k -bilinéaire symétrique $\rho \circ \beta$; on note encore b l'application k -linéaire de E dans E^* qui lui correspond. Alors :*

- la dimension du k -espace vectoriel E est finie ;
- b est non-dégénérée ;
- u est auto-adjoint par rapport à b : $b \circ u = u^* \circ b$;
- la forme $k[T]$ -bilinéaire, que l'on note Σ_E , définie sur le $k[T]$ -module de dimension finie $k[T] \otimes_k E$ par l'homomorphisme composé

$$k[T] \otimes_k E \xrightarrow{T \otimes 1 - 1 \otimes u} k[T] \otimes_k E \xrightarrow{1 \otimes b} k[T] \otimes_k E^* \\ \cong \text{Hom}_{k[T]}(k[T] \otimes_k E, k[T])$$

est symétrique et non-singulière ;

- le résidu de la forme Σ_E est naturellement isomorphe au $k[T]$ -module d'enlacement E .

Proposition 4.6.4. *Soit L un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ un plongement lagrangien de $k[T] \otimes_k L$ dans $H(k[T] \otimes_k L)$; soit α son image. On suppose que α est un quasi-lacet de $\mathcal{L}_L$, c'est-à-dire que les endomorphismes de L , $A(0)$ et $A(1)$, sont inversibles.*

Alors l'endomorphisme A est injectif (si bien que le $k[T]$ -module d'enlacement $\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ est défini, voir 3.3.2).

Soit β la forme d'enlacement de $[\frac{B}{A}]$; soient E le k -espace vectoriel de dimension finie sous-jacent à $[\frac{B}{A}]$ (ou au $k[T]$ -module de type fini et de torsion coker A) et b_i , $i = 0, 1$, la forme bilinéaire symétrique sur E , $(x, y) \mapsto (\rho \circ \beta)((i - T)x, y)$. Alors les formes b_0 et b_1 sont non-dégénérées et l'indice de Maslov dans $V(k)$ du quasi-lacet α est donné par la formule

$$-\text{Mas}(\alpha) = [b_0, b_1].$$

Démonstration. L'injectivité de A est claire: s'il existe un élément t_0 de k tel que $A(t_0)$ est inversible alors $\det A$ est un polynôme non-nul de $k[T]$. On s'intéresse maintenant à l'indice de Maslov du quasi-lacet α . On abrège la notation $\Sigma_{[\frac{B}{A}]}$ en Σ . La proposition 3.3.2.4 dit qu'il existe une forme bilinéaire symétrique Γ sur $k[T] \otimes_k (L \oplus E \oplus L^*)$ et un isomorphisme U de $(k[T] \otimes_k (L \oplus E \oplus L^*))^*$ sur $k[T] \otimes_k (E \oplus L \oplus L^*)$ tels que l'on a, dans l'espace symplectique $H(k[T] \otimes_k (L \oplus E \oplus L^*))$:

$$\begin{aligned} \alpha \oplus k[T] \otimes_k (E \oplus L^*) \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U^*(\Sigma \oplus \hbar_{k[T] \otimes_k E})U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (k[T] \otimes_k (L \oplus E \oplus L^*))^*. \end{aligned}$$

On en déduit d'après la proposition 4.3.2, ou le point (b) de la proposition 4.5.3.1, et le lemme 4.3.4, ou la proposition 4.5.1.6 (invoquer alors la K_1 -rigidité de R): $-\text{Mas}(\alpha) = [\Sigma(0) \oplus \hbar_L, \Sigma(1) \oplus \hbar_L]$; or on a $[\Sigma(0) \oplus \hbar_L, \Sigma(1) \oplus \hbar_L] = [\Sigma(0), \Sigma(1)]$. $\square$

Démonstration de la proposition 4.6.1. Compte tenu de la proposition 4.6.4, la proposition 4.6.1 résulte de ce que l'on a

$$\rho \left(\frac{A'P}{A} \right) = \text{tr}(P(\theta)),$$

pour tout polynôme P de $k[T]$. Cette formule est classique, on peut s'en convaincre de la façon suivante. Soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ les racines de A dans une extension de scindement de A ; on a dans cette extension :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{A'P}{A} \right) &= \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{P(T)}{T - \theta_i} \right) = \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{P(\theta_i)}{T - \theta_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n P(\theta_i) \rho \left(\frac{1}{T - \theta_i} \right) = \sum_{i=1}^n P(\theta_i). \end{aligned} \quad \square$$

QUESTIONS DE SIGNES

On suppose à nouveau dans cette digression que R est un anneau régulier dans lequel 2 est inversible. Soit α un lacet de $\mathcal{L}_L$ en L (L désignant, comme d'habitude, un R -module libre de dimension finie) “stablement” de la forme

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y(T) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot L^* .$$

Nous avons défini l'indice de Maslov de α , disons dans $V(R)$, par la formule :

$$\text{Mas}(\alpha) = [S(0), S(1)] = -[Y(0), Y(1)] .$$

Le fait que nous avons choisi, dans notre exposition initiale, de privilégier la forme S plutôt que la forme Y explique les signes disgracieux qui apparaissent en divers endroits et tout particulièrement dans l'exemple 4.6.2.

Insistons lourdement. Le fait qu'un lacet “algébrique” de $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ induit un lacet “topologique” fournit une application canonique de $(\pi_0 \Omega \mathbf{P}^1)(\mathbb{R})$ dans $\pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbb{R}); \infty) = H_1(\mathbf{P}^1(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$. Si l'on oriente $\mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ en identifiant l'ouvert $\mathbf{P}^1(\mathbb{R}) - \{\infty\}$ avec $\mathbb{R}$ et en orientant “positivement” $\mathbb{R}$, alors on obtient un isomorphisme, disons ω_p , de $\pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbb{R}); \infty)$ sur $\mathbb{Z}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\pi_0 \Omega \mathbf{P}^1)(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbb{R}); \infty) \\ \text{mas} \downarrow & & \downarrow \omega_p \\ \mathbb{I}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\frac{1}{2} \text{sgn}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

est anticommutatif.

Voici cependant un contexte dans lequel notre convention est raisonnable. On considère l'application canonique, disons $c : (\pi_0 \Omega \text{Sp}_n)(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega \mathcal{L}_n)(R)$, obtenue en faisant agir le groupe Sp_n sur le point base de $\mathcal{L}_n$. D'après la proposition 4.5.3.2, l'application composée $\text{Mas} \circ c : (\pi_0 \Omega \text{Sp}_n)(R) \rightarrow V(R)$ est à valeurs dans le noyau de l'homomorphisme $\text{Dét} : V(R) \rightarrow K_1(R)$. Nous notons $V^{(1)}(R)$ ce noyau. On observera incidemment que si R est un corps alors $V^{(1)}(R)$ s'identifie, d'après le corollaire 4.5.1.5, au carré de l'idéal fondamental $I(R)$ (vu comme un idéal de $W(R)$ ou $\text{GW}(R)$) : $V^{(1)}(R) = I^2(R)$. On dispose donc d'un homomorphisme naturel de $(\pi_0 \Omega \text{Sp}_n)(R)$ dans $V^{(1)}(R)$ que nous notons encore Mas ; on observera au passage que la définition de cet indice de Maslov ne nécessite pas l'hypothèse “ R régulier” (seule l'invariance homotopique du $-W_1$ est utilisée). On spécialise maintenant au cas $n = 1$ et $R = \mathbb{R}$. Comme précédemment, le fait qu'un lacet “algébrique” de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ induit un lacet “topologique” fournit une application canonique de

$(\pi_0 \Omega \mathrm{SL}_2)(\mathbb{R})$ dans $\pi_1 \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \pi_1 \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = H_1(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$. Si l'on oriente "trigonométriquement" $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, alors on obtient un isomorphisme, disons ω_t , de $\pi_1 \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{Z}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\pi_0 \Omega \mathrm{SL}_2)(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \pi_1 \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{Mas} \downarrow & & \downarrow \omega_t \\ \mathbb{I}^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\frac{1}{4} \mathrm{sgn}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

est cette fois commutatif.

4.7 Versions topologiques du théorème 4.2.10

On prend $R = \mathbb{C}$. Dans ce cas, les ensembles $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ possèdent une topologie naturelle (au sens naïf). On note $\Omega^{\mathrm{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C})$ l'espace des lacets topologiques de l'espace pointé $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ (comme tous les ensembles $\mathcal{L}(R)$, l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ est muni d'un point base), c'est-à-dire l'espace (topologique) constitué des applications continues $\alpha : [0,1] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C})$ avec $\alpha(0) = \alpha(1) = *$. En remplaçant dans la définition de l'application $\ell_{\mathbb{C}^n} : \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n} \rightarrow \Omega \mathcal{L}_{\mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*}$ (qui précède l'énoncé 4.2.9) l'indéterminée T par un point t de $[0,1]$ et en passant à la limite directe en n , on obtient une application continue (pointée) de $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ dans $\Omega^{\mathrm{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C})$ que l'on note ℓ^{top} .

Voici l'un des énoncés auxquels le titre du paragraphe fait référence.

Théorème 4.7.1. *L'application*

$$\ell^{\mathrm{top}} : \mathcal{F}(\mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{\mathrm{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C})$$

est une équivalence d'homotopie.

Cette équivalence d'homotopie s'identifie à l'une des huit de la périodicité de Bott réelle. En effet, on a un homéomorphisme $\mathcal{L}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Spq}/\mathrm{U}$ et une équivalence d'homotopie $\mathcal{F}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{U}/\mathrm{O}$, Spq désignant la limite directe des groupes unitaires quaternionniens $\mathrm{Spq}(n)$ ($\mathrm{Spq}(n)$ est un sous-groupe compact maximal du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$, dans la littérature $\mathrm{Spq}(n)$ est souvent noté $\mathrm{Sp}(n)$), U désignant la limite directe des groupes unitaires $\mathrm{U}(n)$ et O la limite directe des groupes orthogonaux euclidiens $\mathrm{O}(n)$. Nous nous proposons de montrer qu'il est très facile d'adapter la démonstration que nous avons donnée du théorème 4.2.10 pour obtenir une démonstration du théorème 4.7.1.

Compte tenu de la proposition ("folklorique") 4.7.2 ci-dessous, le théorème 4.7.1 est impliqué par le théorème 4.7.3 ci-après (qui est d'ailleurs plus proche de l'énoncé 4.2.10 que ne l'était 4.7.1).

Ci-après la notation $[-, -]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie libre d'applications.

Proposition 4.7.2. *Soit $f : Y \rightarrow Z$ une application continue entre deux CW-complexes. Si le groupe fondamental de chaque composante connexe de Z est engendré par un nombre fini d'éléments alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *pour tout CW-complexe fini X l'application $[X, Y] \rightarrow [X, Z]$ induite par f est une bijection ;*
- (ii) *f est une équivalence d'homotopie.*

Nous laissons la démonstration de la proposition ci-dessus en exercice au lecteur ; signalons cependant que Jean-Pierre Serre nous a communiqué un exemple, venant de la théorie des groupes, qui montre que la restriction sur l'espace Z n'est pas superflue.

Théorème 4.7.3. *Pour tout espace compact X , l'application*

$$[X, \mathcal{F}(\mathbb{C})] \rightarrow [X, \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C})]$$

induite par ℓ^{top} , est une bijection.

Démonstration. Comme dans le cas algébrique le point essentiel de cette démonstration est la définition d'un indice de Maslov

$$\text{Mas} : [X, \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C})] \rightarrow [X, \mathcal{F}(\mathbb{C})] .$$

On rappelle que les notations $\mathcal{S}_{\mathbb{C}^n}$ et $\mathcal{S}_{(\mathbb{C}^n)^*}$ et la notation matricielle pour les automorphismes symplectiques sont introduites en 2.1. On pose ci-après $\mathcal{S}_{\mathbb{C}^n} = \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{S}_{(\mathbb{C}^n)^*} = \check{\mathcal{S}}_n(\mathbb{C})$; ces ensembles sont munis de leurs topologies naturelles. On rappelle que l'on pose $\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n} = \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{C}^n} = \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$; ces ensembles sont également munis de leurs topologies naturelles si bien que $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ sont limites directes comme espaces topologiques des $\mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ (ce point est déjà implicite dans la définition de l'application ℓ^{top}). On rappelle enfin que la notation matricielle pour les éléments de $\mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ est introduite au tout début de ce chapitre.

Voici le pendant topologique des définitions 4.2.1, 4.2.6 et 4.2.7 :

Proposition-Définition 4.7.4. *Soient $n \geq 1$ un entier, X un espace compact et $\alpha : X \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ une application continue avec $\alpha(x, 0) = \alpha(x, 1) = \mathbb{C}^n$ pour tout x dans X .*

- (a) *Il existe un entier $n' \geq 0$ et une application continue $S : X \times [0,1] \rightarrow \mathcal{S}_{n+n'}(\mathbb{C})$ tels que l'on a*

$$\alpha(x,t) \oplus \mathbb{C}^{n'} \ni \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S(x,t) & 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n'})$$

pour tout (x,t) dans $X \times [0,1]$.

- (b) *Soit S comme ci-dessus. Alors les deux formes bilinéaires symétriques $S(x,0)$ et $S(x,1)$ sont non-dégénérées pour tout x dans X et l'image par l'application canonique $[X, \mathcal{F}_{n+n'}(\mathbb{C})] \rightarrow [X, \mathcal{F}(\mathbb{C})]$ de la classe d'homotopie de l'application*

$$X \rightarrow \mathcal{F}_{n+n'}(\mathbb{C}), \quad x \mapsto \begin{bmatrix} S(x,1) & 0 \\ 0 & -S(x,0)^{-1} \end{bmatrix}$$

est indépendante du choix de n' et S ; on la note $\text{Mas}(\alpha)$ et on l'appelle l'indice de Maslov de α .

- (c) *L'indice de Maslov $\text{Mas}(\alpha)$ ne dépend que la classe, disons $[\alpha]$, de α dans $[X, \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}_n(\mathbb{C})]$. On note $\text{Mas} : [X, \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}_n(\mathbb{C})] \rightarrow [X, \mathcal{F}(\mathbb{C})]$ l'application $[\alpha] \mapsto \text{Mas}(\alpha)$. Ces applications induisent une application que l'on note encore*

$$\text{Mas} : [X, \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C})] \rightarrow [X, \mathcal{F}(\mathbb{C})]$$

et que l'on appelle toujours l'indice de Maslov.

Démonstration. Les démonstrations des points (b) et (c) sont exactement les mêmes, *mutatis mutandis*, que dans le cas algébrique. La structure de la démonstration du point (a) que nous allons expliciter est également la même que dans le cas algébrique. Cette démonstration coûte cependant moins cher dans le cas topologique : en particulier les arguments de K_0 -rigidité et de ${}_W1$ -rigidité sont remplacés par de simples arguments de continuité. Pour une autre démonstration du point (a) voir [LT].

Notre démonstration du point (a) invoque les lemmes 4.7.5 et 4.7.8 ci-après et la proposition 2.2.4.

Le lemme suivant est l'analogie du lemme 3.1.2 :

Lemme 4.7.5. *Soient $n \geq 1$ un entier, X un espace compact et $\alpha : X \times [0,1] \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ une application continue avec $\alpha(x,0) = \mathbb{C}^n$ pour tout x dans X . Alors il existe une application continue $\Phi : X \times [0,1] \rightarrow \text{Sp}_n(\mathbb{C})$ avec $\Phi(x,0) = 1$ pour tout x dans X telle que l'on a*

$$\alpha(x,t) = \Phi(x,t) \cdot \mathbb{C}^n$$

pour tout (x,t) dans $X \times [0,1]$.

Démonstration. Comme la grassmannienne lagrangienne $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ s'identifie à un sous-espace de la grassmannienne des n -plans dans $\mathbb{C}^{2n}$, l'application α définit un $\mathbb{C}$ -fibré vectoriel de dimension n de base $X \times [0,1]$. Ce fibré est trivial puisque, par hypothèse, sa restriction à $X \times \{0\}$ est triviale. On conclut de la même manière que dans la démonstration du lemme 3.1.2, en invoquant le point (c) de la proposition 2.1.5 (l'anneau R est ici celui des fonctions continues sur $X \times [0,1]$ à valeurs complexes). $\square$

Remarque. Dans le cas où la base est supposée compacte, le théorème d'homotopie pour les fibrés vectoriels, utilisé ci-dessus, résulte bien d'un simple argument de continuité. En effet, il est alors équivalent à l'énoncé 4.7.6 ci-dessous, qui, comme on va le voir, peut se démontrer par un tel argument.

Soit $n \geq 1$ un entier, on note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$; on note $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace de l'espace $M_n(\mathbb{C})$ constitué des projecteurs.

Proposition 4.7.6. *Soient $n \geq 1$ un entier, X un espace compact et $p : X \times [0,1] \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ une application continue. Alors il existe une application continue $u : X \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ telle que l'on a*

$$p(x,1) = u(x) \circ p(x,0) \circ u(x)^{-1}$$

pour tout x dans X .

Démonstration. La clef de cette proposition est le lemme suivant :

Lemme 4.7.7. *Soit E un espace de Banach. Soient p_0 et p_1 deux projecteurs (continus) de E ; on pose $u(p_0, p_1) = p_1 \circ p_0 + (1 - p_1) \circ (1 - p_0)$ ($u(p_0, p_1)$ est donc un endomorphisme de E).*

Si l'on a l'inégalité $\|p_1 - p_0\| < \|2p_0 - 1\|^{-1}$, alors $u(p_0, p_1)$ est inversible et l'on a :

$$p_1 = u(p_0, p_1) \circ p_0 \circ u(p_0, p_1)^{-1}.$$

Démonstration. On observe que l'on a pour tous p_0 et p_1 les deux égalités suivantes :

- $p_1 \circ u(p_0, p_1) = u(p_0, p_1) \circ p_0$ (les deux membres sont tous deux égaux à $p_1 \circ p_0$) ;
- $u(p_0, p_1) - 1 = (p_1 - p_0) \circ (2p_0 - 1).$ $\square$

Avec ce lemme, la démonstration de la proposition est aisée : la compacité de l'espace $X \times [0,1]$ implique qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que l'on a

$$\left\| p \left(x, \frac{k+1}{n} \right) - p \left(x, \frac{k}{n} \right) \right\| < \left\| 2p \left(x, \frac{k}{n} \right) - 1 \right\|^{-1}$$

pour tout x dans X et $k = 0, 1, \dots, n-1$. $\square\square$

Lemme 4.7.8. *Soient $n \geq 1$ un entier, X un espace compact et $\Phi : X \times [0,1] \rightarrow Sp_n(\mathbb{C})$ une application continue avec $\Phi(x,0) = 1$ pour tout x dans X . Alors il*

existe un entier $m \geq 0$ et des applications continues $q_{2i} : X \times [0,1] \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, $q_{2i+1} : X \times [0,1] \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}_n(\mathbb{C})$, $i = 0, 1, \dots, m$, et $a : X \times [0,1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que l'on a

$$\Phi(x,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0(x,t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1(x,t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & q_{2m+1}(x,t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x,t) & 0 \\ 0 & a(x,t)^{* -1} \end{bmatrix}$$

pour tout (x,t) dans $X \times [0,1]$.

Démonstration. Soit $\text{Sp}_n^0(\mathbb{C})$ l'ouvert de $\text{Sp}_n(\mathbb{C})$ constitué des éléments $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ avec a inversible; on observe que cet ouvert est homéomorphe au produit $\mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \times \tilde{\mathcal{S}}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$ via l'application

$$(q,r,a) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{bmatrix}.$$

Compte tenu de cette observation et de l'identité

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^{*-1}ua^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & ava^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{bmatrix},$$

le lemme 4.7.8 est conséquence du suivant (prendre pour G le groupe des applications continues de X dans $\text{Sp}_n(\mathbb{C})$, muni de la topologie compacte-ouverte, et pour U l'ouvert constitué des applications à valeurs dans $\text{Sp}_n^0(\mathbb{C})$):

Lemme 4.7.9. *Soient G un groupe topologique et U un ouvert de G contenant l'élément neutre. Soit $\alpha : [0,1] \rightarrow G$ une application continue avec $\alpha(0) = 1$. Alors il existe un entier $n \geq 1$ et des applications continues $\alpha_i : [0,1] \rightarrow U$ (avec $\alpha_i(0) = 1$), $i = 0, 1, \dots, n-1$, telles que l'on a*

$$\alpha(t) = \alpha_0(t)\alpha_1(t)\dots\alpha_{n-1}(t)$$

pour tout t dans $[0,1]$.

Démonstration. En voici une de très concrète. Soient n et i des entiers avec $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n-1$, on note α_i l'application continue de $[0,1]$ dans G (vérifiant $\alpha_i(0) = 1$) définie par

$$\alpha_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \leq \frac{i}{n}, \\ \alpha(\frac{i}{n})^{-1} \alpha(t) & \text{pour } \frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}, \\ \alpha(\frac{i}{n})^{-1} \alpha(\frac{i+1}{n}) & \text{pour } t \geq \frac{i+1}{n}. \end{cases}$$

On a tout fait pour avoir $\alpha(t) = \alpha_0(t)\alpha_1(t)\dots\alpha_{n-1}(t)$ et, si n est assez grand, les α_i sont à valeurs dans U . $\square\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le point (a) de 4.7.4:

Soit $\alpha : X \times [0,1] \rightarrow \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ une application continue avec $\alpha(x,0) = \alpha(x,1) = \mathbb{C}^n$ pour tout x dans X . D'après les lemmes 4.7.5 et 4.7.8, il existe un entier m (que l'on peut supposer supérieur ou égal à 1) et des applications continues $q_{2i} : X \times [0,1] \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$, $q_{2i+1} : X \times [0,1] \rightarrow \check{\mathcal{S}}_n(\mathbb{C})$, $i = 0, 1, \dots, m$, telles que l'on a

$$\alpha(x,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_0(x,t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_1(x,t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2m}(x,t) & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{C}^n$$

pour tout (x,t) dans $X \times [0,1]$. La proposition 2.2.4 nous dit que l'on peut prendre pour $S(x,t)$ la forme de Sturm $S(q_0(x,t), q_1(x,t), \dots, q_{2m-1}(x,t))$ (et donc pour n' l'entier $(2m-1)n$). $\square$

Fin de la démonstration du théorème 4.7.3. A nouveau, elle est exactement la même, *mutatis mutandis*, que dans le cas algébrique.

Soit X un espace compact ; on note $\ell_*^{\text{top}} : [X, \mathcal{F}(\mathbb{C})] \rightarrow [X, \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C})]$ l'application induite par l'application $\ell^{\text{top}} : \mathcal{F}(\mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

On constate que la composition $\text{Mas} \circ \ell_*^{\text{top}}$ est l'identité et on montre que ℓ_*^{top} est surjective. $\square$

GÉNÉRALISATIONS À LA LATOUR

– Si l'on remplace dans ce qui précède $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ on obtient l'équivalence d'homotopie $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \cong \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Cette équivalence d'homotopie s'identifie à nouveau à l'une des huit de la périodicité de Bott réelle. En effet, on a cette fois un homéomorphisme $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \cong \text{U/O}$ et une équivalence d'homotopie $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \times \text{BO}$.

– Les constructions faites dans ce mémoire avec des anneaux commutatifs se généralisent aux anneaux munis d'une anti-involution. Soit $\text{conj} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la conjugaison complexe ; si l'on remplace dans la démonstration du théorème 4.7.3 l'anneau commutatif $\mathbb{C}$ par l'anneau avec anti-involution $(\mathbb{C}, \text{conj})$, alors on obtient une équivalence d'homotopie $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \text{conj}) \cong \Omega^{\text{top}} \mathcal{L}(\mathbb{C}, \text{conj})$. Celle-ci s'identifie à l'équivalence d'homotopie “non-triviale” de la périodicité de Bott complexe. En effet, on constate que l'on a un homéomorphisme $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \text{conj}) \cong \text{U}$ et une équivalence d'homotopie $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \text{conj}) \cong \mathbb{Z} \times \text{BU}$.

François Latour démontre, dans le même esprit, à la fois les huit équivalences d'homotopie de la périodicité de Bott réelle et les deux de la périodicité de Bott complexe [LT].

4.8 Bande-annonce du chapitre 6

Nous esquissons dans ce dernier paragraphe ce que sera le chapitre 6.

Pour étayer notre propos nous commençons par revenir sur la périodicité de Bott complexe.

Soit $n \geq 1$ un entier.

On note $\mathcal{G}_n$ le foncteur de la catégorie des anneaux commutatifs dans celle des ensembles qui associe à un anneau commutatif R l'ensemble des projecteurs de $R^n \oplus R^n$; on choisit comme point base de $\mathcal{G}_n(R)$ le projecteur sur $R^n \oplus 0$ parallèlement à $0 \oplus R^n$. On dispose d'une application pointée naturelle $\mathcal{G}_n(R) \rightarrow \mathcal{G}_{n+1}(R)$ (le lecteur devinera sans peine la définition de cette application... et pourra vérifier qu'il a deviné juste en se reportant au chapitre 6 où le foncteur $\mathcal{G}_n$ réapparaîtra sous la notation $\tilde{\mathcal{K}}_{0,n}$) ; on note $\mathcal{G}(R)$ la limite directe des ensembles pointés $\mathcal{G}_n(R)$ suivant ces applications.

On note $\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL}_n$ le foncteur, disons du même type que $\mathcal{G}_n$, qui associe à R le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(R[T, T^{-1}])$ constitué des éléments α avec $\alpha(1) = 1$.

On note

$$\ell_n : \mathcal{G}_n \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL}_{2n}$$

la transformation naturelle qui associe à un projecteur p de $R^n \oplus R^n$ l'automorphisme

$$(Tp + 1 - p) \circ (Tp_0 + 1 - p_0)^{-1}$$

de $R[T, T^{-1}] \otimes_R (R^n \oplus R^n)$, p_0 désignant le point base de $\mathcal{G}_n(R)$.

(On observera que $\mathcal{G}_n$ est un schéma affine, défini sur $\mathbb{Z}$, et que la transformation naturelle ℓ_n est induite par un morphisme de schémas

$$\mathcal{G}_n \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathrm{GL}_{2n}$$

“envoyant $\mathcal{G}_n \times 1$ sur 1” ; cette observation justifie la notation que nous avons adoptée.)

En passant à la limite directe en n on obtient une transformation naturelle

$$\ell : \mathcal{G} \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL} .$$

On prend maintenant $R = \mathbb{C}$. Les ensembles $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ possèdent des topologies naturelles et en remplaçant dans la définition de la transformation naturelle ℓ l'indéterminée T par un complexe de module 1, on obtient une application continue

$$\ell^{\mathrm{top}} : \mathcal{G}(\mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{\mathrm{top}} \mathrm{GL}(\mathbb{C}) ;$$

on identifie ici l'espace de lacets $\Omega^{\mathrm{top}} \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ avec l'espace des applications continues du cercle S^1 (vu comme l'ensemble des complexes de module 1) dans $\mathrm{GL}(\mathbb{C})$.

On verra au chapitre 6 que l'énoncé suivant (qui réapparaîtra sous le numéro 6.1.3) est essentiellement une conséquence du calcul du groupe $K_1(R[T, T^{-1}])$ ([Bs1], [Sw], ...):

Théorème 4.8.1. *Pour tout anneau R , l'application induite par la transformation naturelle ℓ induit une bijection*

$$\ell : (\pi_0 \mathcal{G})(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL})(R) .$$

Il est apparu très clairement, dès les débuts de la K-théorie algébrique (voir par exemple [Bs1][Sw]), que le résultat évoqué ci-dessus concernant le groupe $K_1(R[T, T^{-1}])$ était un proche parent de celui de la périodicité de Bott complexe. Compte tenu des équivalences d'homotopie $\mathcal{G}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} \times \mathrm{BU}$ et $\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{U}$, le théorème de périodicité de Bott complexe est équivalent à l'énoncé suivant :

Théorème 4.8.2. *L'application*

$$\ell^{\mathrm{top}} : \mathcal{G}(\mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{\mathrm{top}} \mathrm{GL}(\mathbb{C})$$

est une équivalence d'homotopie.

Ou encore au suivant (invoquer 4.7.2) :

Théorème 4.8.3. *Pour tout espace compact X , l'application*

$$[X, \mathcal{G}(\mathbb{C})] \rightarrow [X, \Omega^{\mathrm{top}} \mathrm{GL}(\mathbb{C})]$$

induite par ℓ^{top} , est une bijection.

Nous sommes maintenant en mesure d'esquisser le contenu du chapitre 6.

Les énoncés 4.7.1 et 4.8.1 sont deux des dix énoncés de la périodicité de Bott (deux pour la périodicité de Bott complexe et huit pour la périodicité de Bott réelle) ; on traitera au chapitre 6 de dix analogues algébriques dont 4.2.10 et 4.8.1 sont les prototypes. On verra en particulier apparaître huit foncteurs $\mathcal{L}_i$, $i \in \mathbb{Z}/8$, définis sur la catégorie des anneaux commutatifs et à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés et huit bijections naturelles

$$(\mathrm{BR}_i) \quad (\pi_0 \mathcal{L}_{i+1})(R) \cong \begin{cases} (\pi_0 \Omega \mathcal{L}_i)(R) & \text{pour } i \equiv 0 \pmod{2} \\ (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_i)(R) & \text{pour } i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

(avec la restriction “ R régulier et contenant $\frac{1}{2}$ ” dans le premier cas et “ R contenant $\frac{1}{2}$ ” dans le second), les foncteurs $\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_i$ étant définis de la même manière que le foncteur $\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL}$. Le slogan est le suivant : les lacets qui apparaissent dans le cas où i est pair sont définis en termes de polynômes en T

tandis que ceux qui apparaissent dans le cas où i est impair sont définis en termes de polynômes en T et T^{-1} .

Exemple. Les foncteurs $\mathcal{L}_6$ et $\mathcal{L}_7$ sont ceux que nous avons notés $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$ précédemment et l'isomorphisme naturel (BR_6) est celui de 4.2.10.

Exemple. L'analogue topologique de l'isomorphisme naturel (BR_7) est une équivalence d'homotopie $\mathcal{L}_0(\mathbb{C}) \cong \Omega^{\mathrm{top}} \mathcal{L}_7(\mathbb{C})$ qui s'identifie à l'équivalence d'homotopie $\mathbb{Z} \times \mathrm{BO} \cong \Omega^{\mathrm{top}}(\mathrm{U}/\mathrm{O})$. Rappelons que celle-ci est aussi un avatar de l'équivalence d'homotopie $\mathcal{L}_7(\mathbb{R}) \cong \Omega^{\mathrm{top}} \mathcal{L}_6(\mathbb{R})$, que nous avons rencontrée (et vérifiée) en 4.7. Nous espérons que cet exemple intriguera le lecteur !

Chapitre 5

Suites de Sturm et H_2 de l'homomorphisme hyperbolique

On montre dans ce chapitre comment utiliser certaines idées des chapitres précédents pour obtenir des variantes des résultats de Sharpe [SH].

Dans ce chapitre, l'anneau (commutatif) R est *a priori* arbitraire.

5.1 L'extension centrale canonique de $\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R)$ par $V(R)$

On revient sur le début du paragraphe 2.1. Soit L un R -module libre de dimension finie. Les trois homomorphismes de groupes

$$\begin{aligned} H : \mathrm{GL}_L &\rightarrow \mathrm{Sp}_L, \quad a \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{bmatrix}, \\ E_0 : \mathcal{S}_L &\rightarrow \mathrm{Sp}_L, \quad q \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 : \mathcal{S}_{L^*} \rightarrow \mathrm{Sp}_L, \quad q \mapsto \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

induisent un homomorphisme du produit semi-direct $(\mathcal{S}_L * \mathcal{S}_{L^*}) \rtimes \mathrm{GL}_L$ dans Sp_L . Précisons. Le groupe GL_L agit à gauche sur $\mathcal{S}_L$ et $\mathcal{S}_{L^*}$, et donc sur le coproduit de groupes $\mathcal{S}_L * \mathcal{S}_{L^*}$, *via* les applications

$$\mathrm{GL}_L \times \mathcal{S}_L \rightarrow \mathcal{S}_L, \quad (q, a) \mapsto a^{*-1} q a^{-1}; \quad \mathrm{GL}_L \times \mathcal{S}_{L^*} \rightarrow \mathcal{S}_{L^*}, \quad (q, a) \mapsto a q a^*;$$

le produit semi-direct ci-dessus est relatif à cette action. Nous notons $\rho_L : (\mathcal{S}_L * \mathcal{S}_{L^*}) \rtimes \mathrm{GL}_L \rightarrow \mathrm{Sp}_L$ l'homomorphisme canonique évoqué plus haut; par définition, l'image de ρ_L est le sous-groupe $\mathrm{ESp}_L \cdot \mathrm{GL}_L$ de Sp_L engendré par les sous-groupes ESp_L et GL_L (on identifie ici GL_L avec son image par H). Pour alléger la notation nous posons $\Gamma_L = \mathrm{ESp}_L \cdot \mathrm{GL}_L$; nous posons également

$\tilde{\tilde{\Gamma}}_L = (\mathcal{S}_L * \mathcal{S}_{L^*}) \rtimes GL_L$ (la justification de cette curieuse double tilde ne va pas tarder!).

On “centralise” maintenant la suite exacte

$$1 \longrightarrow \ker \rho_L \longrightarrow \tilde{\tilde{\Gamma}}_L \xrightarrow{\rho_L} \Gamma_L \longrightarrow 1.$$

Soit $[\tilde{\tilde{\Gamma}}_L, \ker \rho_L]$ le sous-groupe (distingué) de $\tilde{\tilde{\Gamma}}_L$ constitué des produits de commutateurs d'éléments de $\tilde{\tilde{\Gamma}}_L$ et de $\ker \rho_L$; nous notons respectivement $\tilde{\tilde{\Gamma}}_L$ et A_L les groupes quotients $\tilde{\tilde{\Gamma}}_L / [\tilde{\tilde{\Gamma}}_L, \ker \rho_L]$ et $\ker \rho_L / [\tilde{\tilde{\Gamma}}_L, \ker \rho_L]$, nous notons $\pi : \tilde{\tilde{\Gamma}}_L \rightarrow \text{Sp}_L$ l'homomorphisme induit par ρ_L . Nous avons tout fait pour que la suite exacte

$$1 \longrightarrow A_L \longrightarrow \tilde{\tilde{\Gamma}}_L \xrightarrow{\pi} \Gamma_L \longrightarrow 1$$

soit une extension centrale. Pour une interprétation de A_L en termes d'homologie de graphe, voir l'appendice C.

Il est clair que les applications $L \mapsto \tilde{\tilde{\Gamma}}_L$, $L \mapsto \tilde{\tilde{\Gamma}}_L$ et $L \mapsto A_L$ induisent des foncteurs de la catégorie $\mathcal{C}(R)$ (voir définition 4.1.10) dans la catégorie des groupes.

Comme dans les chapitres précédents, nous posons $\tilde{\tilde{\Gamma}}_n(R) = \tilde{\tilde{\Gamma}}_{R^n}$, $\tilde{\tilde{\Gamma}}(R) = \text{colim}_{\mathbb{N}} \tilde{\tilde{\Gamma}}_n(R)$, $\tilde{\tilde{\Gamma}}_n(R) = \tilde{\tilde{\Gamma}}_{R^n}$, $\tilde{\tilde{\Gamma}}(R) = \text{colim}_{\mathbb{N}} \tilde{\tilde{\Gamma}}_n(R)$, $\Gamma_n(R) = \Gamma_{R^n}$, $\Gamma(R) = \text{colim}_{\mathbb{N}} \Gamma_n(R)$, $A_n(R) = A_{R^n}$, $A(R) = \text{colim}_{\mathbb{N}} A_n(R)$. On observera que le fait qu'un automorphisme de L induit l'identité de A_L entraîne que l'on a aussi $A(R) = \text{colim}_{\mathcal{C}(R)} A_L$; nous notons encore $\text{st} : A_L \rightarrow A(R)$ l'homomorphisme de “stabilisation”.

L'extension centrale

$$1 \longrightarrow A(R) \longrightarrow \tilde{\tilde{\Gamma}}(R) \xrightarrow{\pi} \Gamma(R) \longrightarrow 1,$$

limite directe des extensions centrales

$$1 \longrightarrow A_n(R) \longrightarrow \tilde{\tilde{\Gamma}}_n(R) \xrightarrow{\pi} \Gamma_n(R) \longrightarrow 1,$$

est l'extension centrale à laquelle fait référence le titre de ce paragraphe; en effet, le résultat principal du chapitre 5 est que le groupe abélien $A(R)$ est canoniquement isomorphe à $V(R)$.

LES HOMOMORPHISMES $\lambda : V(R) \rightarrow A(R)$ ET $\mu : A(R) \rightarrow V(R)$

On définit ces deux homomorphismes ci-après et l'on formule les énoncés qui entraînent que ce sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. La plupart des démonstrations sont renvoyées en 5.2 et 5.3.

On va commencer par définir μ ; mais avant cela il nous faut introduire un peu de terminologie et de notations.

Soit L un R -module libre de dimension finie.

La suite de Sturm $(q_m, \dots, q_k, \dots, q_n)$ sur L avec $q_k = 0$ pour $m \leq k \leq n$ est appelée *la suite de Sturm nulle de type (m, n)* et est notée $\underline{q}_{m,n}$.

Nous appelons *suite de Sturm augmentée* sur L la donnée

$$(\underline{q}; a) = (q_m, \dots, q_k, \dots, q_n; a)$$

d'une suite de Sturm $(q_m, \dots, q_k, \dots, q_n)$ sur L et d'un élément a de GL_L . Nous appelons *type* de $(\underline{q}; a)$ le type de $\underline{q}$. Nous posons :

$$E(\underline{q}; a) = E(\underline{q}) H(a) .$$

Nous notons respectivement $\tilde{E}(\underline{q}; a)$ et $\tilde{E}(\underline{q}; a)$ le produit des éléments de la suite $(q_m, \dots, q_k, \dots, q_n; a)$ dans $\tilde{\Gamma}_L$ et son image dans $\tilde{\Gamma}_L$. On a donc $\rho_L(\tilde{E}(\underline{q}; a)) = E(\underline{q}; a)$ et $\pi(\tilde{E}(\underline{q}; a)) = E(\underline{q}; a)$. Les applications $(\underline{q}; a) \mapsto \tilde{E}(\underline{q}; a), \tilde{E}(\underline{q}; a), E(\underline{q}; a)$, respectivement à valeurs dans les groupes $\tilde{\Gamma}_L, \tilde{\Gamma}_L$ et Γ_L , sont par définition surjectives ; nous dirons qu'un élément θ de $\tilde{\Gamma}_L$ (resp. γ de $\tilde{\Gamma}_L$, resp. Φ de $\mathrm{ESp}_L \cdot \mathrm{GL}_L$) est *représenté* par $(\underline{q}; a)$ si l'on a $\theta = \tilde{E}(\underline{q}; a)$ (resp. $\gamma = \tilde{E}(\underline{q}; a)$, resp. $\Phi = E(\underline{q}; a)$). On observera que l'application $(\underline{q}; a) \mapsto \tilde{E}(\underline{q}; a)$ n'est pas bijective car l'on n'impose pas que tous les q_k de la suite de Sturm $\underline{q}$ soient non-nuls. Nous dirons enfin qu'une suite de Sturm augmentée $(\underline{q}; a)$ est une *relation symplectique* sur L si elle représente l'élément trivial de $\tilde{\Gamma}_L$: $E(\underline{q}; a) = 1$; on observera que dans ce cas l'élément a est fonction de la suite de Sturm $\underline{q}$, puisque l'on a $H(a) = E(\underline{q})^{-1}$.

Proposition 5.1.1. *Soit L un R -module libre de dimension finie ; soit $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ une relation symplectique sur L avec $m \geq 1$. Alors la forme de Sturm $S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$ est non-dégénérée.*

Démonstration. L'égalité $E(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a) = 1$ entraîne en particulier $E(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}) \cdot L^* = L^*$, si bien que l'on peut invoquer l'implication (ii) $\implies$ (i) du point (a) de la proposition A.2.1. $\square$

Remarque. Pour un raffinement de la proposition 5.1.1 voir le scholie A.2.2.

Exemple. La forme de Sturm $S(\underline{q}_{0,2m-1})$ est non-dégénérée. On a en effet $E(\underline{q}_{0,2m-1}; 1) = 1$.

On en vient maintenant à la définition de μ .

Soit $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ une relation symplectique sur L avec $m \geq 1$. D'après ce qui précède le R -module libre $L_{0,2m-1}$ est muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées, à savoir les formes de Sturm $S(\underline{0}_{0,2m-1})$ et $S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$; on dispose donc d'un élément du groupe $V(R)$ que l'on note $\mu_L(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$:

$$\mu_L(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a) := [L_{0,2m-1}; S(\underline{0}_{0,2m-1}), S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})] .$$

Proposition-Définition 5.1.2. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Il existe un unique homomorphisme de groupes $\mu_L : \ker \rho_L \rightarrow V(R)$ tel que l'on a*

$$\mu_L(\tilde{\tilde{E}}(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)) = \mu_L(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$$

pour toute relation symplectique $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ sur L avec $m \geq 1$.

Commentaires

Expliquons l'origine de la définition ci-dessus. On commence par observer qu'une relation symplectique sur L , disons $(\underline{q}; a)$, donne naissance à un lacet de $\mathcal{L}_L$ en L . Détaillons. L'égalité $E(\underline{q}; a) = 1$ entraîne $E(\underline{q}) \cdot L = L$, on pose

$$\alpha = E(T\underline{q}) \cdot L$$

(la notation $T\underline{q}$ désigne la suite de Sturm sur $R[T] \otimes_R L$ obtenue en multipliant chaque élément de la suite $\underline{q}$ par T); α est donc un élément de $\mathcal{L}_L(R[T])$ avec $\alpha(0) = L$ et $\alpha(1) = L$, c'est-à-dire un lacet en L . On constate que α ne dépend en fait que de l'élément $\theta = \tilde{\tilde{E}}(\underline{q}; a)$ de $\ker \rho_L$ représenté par $(\underline{q}; a)$. On suppose ensuite que R est régulier et contient $\frac{1}{2}$, afin de disposer de la théorie de l'indice de Maslov du paragraphe 4.2. Nous avons tout fait pour que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \ker \rho_L & \xrightarrow{\mu_L} & V(R) \\ \downarrow & & \downarrow \delta \\ \pi_0 \Omega \mathcal{L}_L & \xrightarrow{\text{Mas}} & (\pi_0 \mathcal{F})(R) \end{array} ,$$

dans lequel la flèche verticale de gauche désigne l'application qui associe à θ la classe d'homotopie de α (l'application δ est introduite juste avant le corollaire 4.5.2.6), soit commutatif. Rappelons enfin que sous les hypothèses faites ci-dessus concernant R , les homomorphismes Mas et δ sont tous deux des isomorphismes.

Exemple. On prend $R = \mathbb{Z}$ et $L = \mathbb{Z}$; on a donc $\text{Sp}_L = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. On a dans $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ;$$

$(1, -1, 1, -1, 1, -1; -1)$ est donc une relation symplectique sur $\mathbb{Z}$ de type $(0, 5)$. On constate que l'image de l'élément correspondant de $\ker \rho_{\mathbb{Z}}$ par l'homomorphisme $\mu_{\mathbb{Z}}$, dont la proposition-définition 5.1.2 affirme l'existence, est un générateur de $V(\mathbb{Z})$. Détaillons un peu. Les trois homomorphismes qui apparaissent ci-dessous sont des isomorphismes :

$$V(\mathbb{Z}) \xrightarrow{d} I(\mathbb{Z}) \longrightarrow I(\mathbb{R}) \xrightarrow{\frac{1}{2} \mathrm{sgn}} \mathbb{Z}$$

(pour le premier voir 4.5.1.5, pour le second voir par exemple [MH]) et l'on constate que les signatures des matrices de Sturm

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sont respectivement 0 et 2 (pour la première il s'agit d'un phénomène général, voir 5.2.5).

Proposition-Définition 5.1.3. *L'homomorphisme $\mu_L : \ker \rho_L \rightarrow V(R)$ est trivial sur le sous-groupe $[\widetilde{\Gamma}_L, \ker \rho_L]$. Nous notons encore*

$$\mu_L : A_L \rightarrow V(R)$$

l'homomorphisme induit.

Proposition-Définition 5.1.4. *Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie. Alors le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} A_L & \xrightarrow{\quad} & A_{L \oplus L'} \\ & \searrow \mu_L & \swarrow \mu_{L \oplus L'} \\ & V(R) & \end{array},$$

dans lequel la flèche horizontale désigne l'application induite par le $\mathcal{C}(R)$ -morphisme canonique de L dans $L \oplus L'$, est commutatif.

Nous notons $\mu : A(R) \rightarrow V(R)$ l'homomorphisme de groupes abéliens induit par les homomorphismes μ_L .

Démonstration. Elle résulte de l'observation ci-après. Soient L' et L'' deux R -modules libres de dimension finie ; soient $\underline{q}' = (q'_m, q'_{m+1}, \dots, q'_n)$ et $\underline{q}'' = (q''_m, q''_{m+1}, \dots, q''_n)$ deux suites de Sturm de même type, respectivement sur

L' et L'' . On pose $L = L' \oplus L''$ et on note $\underline{q'} \oplus \underline{q''}$ la suite de Sturm $(q'_m \oplus q''_m, q'_{m+1} \oplus q''_{m+1}, \dots, q'_n \oplus q''_n)$. Alors la forme de Sturm $S(\underline{q'} \oplus \underline{q''})$ est isomorphe à la somme orthogonale $S(\underline{q'}) \oplus S(\underline{q''})$ via l'isomorphisme canonique de $L_{m,n}$ sur $L'_{m,n} \oplus L''_{m,n}$. $\square$

On passe maintenant à la définition de l'homomorphisme $\lambda : V(R) \rightarrow A(R)$; il s'agit du pendant (voir les commentaires suivant l'énoncé 5.1.2) de l'homomorphisme ℓ introduit à la fin de 4.2.

Nous notons respectivement $\tilde{E}_0 : \mathcal{S}_L \rightarrow \tilde{\Gamma}_L$, $\tilde{E}_1 : \mathcal{S}_{L^*} \rightarrow \tilde{\Gamma}_L$, $\tilde{H} : GL_L \rightarrow \tilde{\Gamma}_L$ les homomorphismes canoniques et $\tilde{E}_0$, $\tilde{E}_1$, $\tilde{H}$ les composés de ces homomorphismes et de l'homomorphisme de passage au quotient $\tilde{\Gamma}_L \rightarrow \tilde{\Gamma}_L$.

Soit q une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur L . Nous notons $m(q)$ l'élément $\begin{bmatrix} 0 & -q^{-1} \\ q & 0 \end{bmatrix}$ de Sp_L et nous posons

$$\tilde{m}(q) = \tilde{E}_0(q) \tilde{E}_1(-q^{-1}) \tilde{E}_0(q)$$

$(\tilde{m}(q))$ est donc un élément de $\tilde{\Gamma}_L$; on constate que l'on a dans Sp_L :

$$\pi(\tilde{m}(q)) = m(q)$$

(ce qui montre que $m(q)$ appartient à ESp_L). Il pourra être utile d'observer que l'on a $\tilde{m}(q)^{-1} = \tilde{m}(-q)$.

Soient q_0 et q_1 deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur L ; on a dans Sp_L :

$$m(q_1)m(-q_0) = \begin{bmatrix} q_1^{-1}q_0 & 0 \\ 0 & q_1q_0^{-1} \end{bmatrix},$$

si bien que l'on constate que l'élément de $\tilde{\Gamma}_L$

$$\tilde{m}(q_1)\tilde{m}(-q_0)\tilde{H}(q_0^{-1}q_1)$$

appartient au noyau de π , à savoir A_L .

Proposition-Définition 5.1.5. *Il existe un unique homomorphisme de groupes*

$$\lambda : V(R) \rightarrow A(R)$$

tel que l'image par λ de la classe dans $V(R)$ d'un R -module libre de dimension finie muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées $(L; q_0, q_1)$ est l'image dans $A(R)$ de l'élément $\tilde{m}(q_1)\tilde{m}(-q_0)\tilde{H}(q_0^{-1}q_1)$ de A_L :

$$\lambda([L; q_0, q_1]) := \text{st}(\tilde{m}(q_1)\tilde{m}(-q_0)\tilde{H}(q_0^{-1}q_1)).$$

Proposition 5.1.6. *L'homomorphisme composé*

$$\mu \circ \lambda : V(R) \rightarrow V(R)$$

est l'identité.

Théorème 5.1.7. *L'homomorphisme $\lambda : V(R) \rightarrow A(R)$ est surjectif.*

La proposition 5.1.6 et le théorème 5.1.7 impliquent :

Théorème 5.1.8. *Les deux homomorphismes de groupes abéliens*

$$\lambda : V(R) \rightarrow A(R) , \quad \mu : V(R) \rightarrow A(R)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

5.2 Démonstrations concernant l'homomorphisme μ

Celles-ci mettent en œuvre la “technologie des formes de Sturm” (Appendice A).

Démonstration de la proposition 5.1.2 L'unicité de μ_L résulte de ce que tout élément de $\ker \rho_L$ peut être représenté par une relation symplectique de la forme $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$, avec $m \geq 1$, quitte à prendre $q_0 = 0$ ou $q_{2m-1} = 0$. $\square$

Le fait que l'application μ_L est bien définie résulte de la proposition suivante :

Proposition 5.2.1. *Soit $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ une relation symplectique sur L avec $m \geq 2$. On suppose $q_{k_0} = 0$ avec $1 \leq k_0 \leq 2m-2$ si bien que $(q_0, q_1, \dots, q_{k_0-2}, q_{k_0-1} + q_{k_0+1}, q_{k_0+2}, \dots, q_{2m-1}; a)$ est encore une relation symplectique sur L .*

Alors les éléments

$$\mu_L(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a), \quad \mu_L(q_0, q_1, \dots, q_{k_0-2}, q_{k_0-1} + q_{k_0+1}, q_{k_0+2}, \dots, q_{2m-1}; a)$$

de $V(R)$ sont égaux.

Démonstration. On suppose tout d'abord $1 < k_0 < 2m-2$. On applique dans ce cas le corollaire A.4.4 à la sous-suite de Sturm (q_{k_0-1}, q_{k_0}) .

On a $e(q_{k_0-1}, 0) = -1$, $\partial_r(q_{k_0-1}, 0) = -q_{k_0-1}$ et $\partial_g(q_{k_0-1}, 0) = 0$.

Le corollaire A.4.4 dit que la forme $S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$ est isomorphe à la somme orthogonale

$$S(q_0, q_1, \dots, q_{k_0-2}, q_{k_0-1} + q_{k_0+1}, q_{k_0+2}, \dots, q_{2m-1}) \oplus S(q_{k_0-1}, 0)$$

par un isomorphisme explicite, disons $A : L_{0,2m-1} \rightarrow L_{0,2m-3} \oplus L_{k_0-1,k_0}$, et pareillement que la forme $S(\underline{0}_{0,2m-1})$ est isomorphe à la somme orthogonale

$$S(\underline{0}_{0,2m-3}) \oplus S(\underline{0}_{k_0-1,k_0})$$

par un isomorphisme explicite, disons $A_0 : L_{0,2m-1} \rightarrow L_{0,2m-3} \oplus L_{k_0-1,k_0}$. Le corollaire A.4.4 montre également que $\text{Dét}(A \circ A_0^{-1})$ est trivial. On en déduit, grâce à la proposition 4.5.1.6, que l'on a dans $V(R)$ l'égalité

$$\begin{aligned} \mu_L(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a) = & \mu_L(q_0, q_1, \dots, q_{k_0-2}, q_{k_0-1} + q_{k_0+1}, q_{k_0+2}, \dots, q_{2m-1}; a) \\ & + [S(\underline{0}_{k_0-1,k_0}), S(q_{k_0-1}, 0)]. \end{aligned}$$

Or le scholie 4.5.1.8 (en échangeant les rôles de L et L^*) dit que l'on a $[S(\underline{0}_{k_0-1,k_0}), S(q_{k_0-1}, 0)] = 0$ dans $V(R)$.

Dans le cas $k_0 = 1$ (resp. $k_0 = 2m - 2$) on applique le point (a) (resp. (b)) de la proposition A.4.2 à la sous-suite (q_0, q_1) (resp. (q_{2m-2}, q_{2m-1})). $\square$

On vérifie enfin que μ_L est un homomorphisme de groupes. Soient θ et κ deux éléments de $\ker \rho_L$ représentés respectivement par des relations symplectiques $(\underline{q}; a) = (q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ et $(\underline{r}; b) = (r_0, r_1, \dots, r_{2n-1}; b)$; l'élément $\theta\kappa$ est donc représenté, d'après la définition même du groupe $\widetilde{\Gamma}_L$, par la relation symplectique

$$(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}, a^{*-1} r_0 a^{-1}, a r_1 a^*, \dots, a r_{2n-1} a^*; ab).$$

On pose $a \cdot \underline{r} = (a^{*-1} r_0 a^{-1}, a r_1 a^*, \dots, a r_{2n-1} a^*)$ et l'on note $(\underline{q}, a \cdot \underline{r})$ la suite de Sturm, disons de type $(0, 2(m+n) - 1)$, sous-jacente à la relation symplectique ci-dessus.

Le point (b) de la proposition A.4.2 et la proposition 4.5.1.6 montrent que l'on a

$$[S(\underline{0}_{0,2(m+n)-1}), S(\underline{q}, a \cdot \underline{r})] = [S(\underline{0}_{0,2m-1}), S(\underline{q})] + [S(\underline{0}_{0,2n-1}), S(a \cdot \underline{r})]$$

dans $V(R)$ (observer notamment que l'on a $\partial_r(\underline{q}) = 0$). Comme les formes $S(a \cdot \underline{r})$ et $S(\underline{r})$ sont isomorphes par l'automorphisme $a \oplus a^{*-1} \oplus \dots \oplus a \oplus a^{*-1}$ de $L_{0,2n-1} = L \oplus L^* \oplus \dots \oplus L^*$ qui préserve la forme $S(\underline{0}_{0,2n-1})$, on obtient bien l'égalité

$$\mu_L(\underline{q}, a \cdot \underline{r}; ab) = \mu_L(\underline{q}; a) + \mu_L(\underline{r}; b),$$

c'est-à-dire $\mu_L(\theta\kappa) = \mu_L(\theta) + \mu_L(\kappa)$. $\square\square$

Interlude

La démonstration de la proposition 5.1.2 terminée, nous nous proposons de décrire les homomorphismes composés

$$\ker \rho_L \xrightarrow{\mu_L} V(R) \xrightarrow{\text{Dét}} K_1(R), \quad \ker \rho_L \xrightarrow{\mu_L} V(R) \xrightarrow{d} I(R).$$

La proposition suivante est le pendant de la proposition 4.5.3.2 :

Proposition 5.2.2. *Soit $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ une relation symplectique sur L avec $m \geq 1$. Alors on a dans $K_1(R)$:*

$$\text{Dét}([L_{0,2m-1}; S(\underline{0}_{0,2m-1}), S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})]) = \text{Dét}(a).$$

Démonstration. On pose $\underline{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$. Le point (c) du scholie A.3.2 dit que l'on a

$$\text{Dét}(S(\underline{0})^{-1} \circ S(\underline{q})) = \text{Dét}(a^*)$$

($\underline{0}$ étant une abbréviation pour $\underline{0}_{0,2m-1}$). “En transposant” cette égalité on obtient $\text{Dét}(S(\underline{q}) \circ S(\underline{0})^{-1}) = \text{Dét}(a)$; or on a, par définition même du $K_1(R)$, $\text{Dét}(S(\underline{q}) \circ S(\underline{0})^{-1}) = \text{Dét}(S(\underline{0})^{-1} \circ S(\underline{q}))$. $\square$

Scholie 5.2.3. *L'homomorphisme composé*

$$\ker \rho_L \xrightarrow{\mu_L} V(R) \xrightarrow{\text{Dét}} K_1(R)$$

coïncide avec le suivant

$$\ker \rho_L \longrightarrow \widetilde{\Gamma}_L \longrightarrow GL_L \xrightarrow{\text{Dét}} K_1(R)$$

(les première et deuxième flèches désignent respectivement l'inclusion et la projection canonique).

Nous nous intéressons maintenant à l'homomorphisme $d \circ \mu_L$, que nous noterons aussi $\bar{\mu}_L : \ker \rho_L \rightarrow I(R)$. Dans ce chapitre, $I(R)$ est considéré comme “l'idéal fondamental” de $W^{\text{lib}}(R)$: le noyau de l'homomorphisme “dimension modulo 2” (voir 4.5.1).

Proposition 5.2.4. *Soit $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ une relation symplectique sur L avec $m \geq 1$. Alors on a dans $I(R)$:*

$$d([L_{0,2m-1}; S(\underline{0}_{0,2m-1}), S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})]) = [S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})]$$

(la notation $[S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})]$ désigne ici la classe de Witt de la forme de Sturm $S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$).

Démonstration. L'énoncé ci-dessus résulte du lemme suivant :

Lemme 5.2.5. *Soit L un R -module libre de dimension finie ; soit $m \geq 1$ un entier. Alors il existe un automorphisme élémentaire U du R -module libre $L_{0,2m-1}$ tel que l'on a*

$$S(\underline{0}_{0,2m-1}) = U^* \underbrace{(\hbar_L \oplus \hbar_L \oplus \cdots \oplus \hbar_L)}_{m \text{ facteurs}} U .$$

Démonstration. Par récurrence sur m en appliquant la proposition A.4.2 (a) ou (b) (observer que l'on a $\hbar_L = S(\underline{0}_{0,1})$). $\square$

Scholie 5.2.6. *Soit $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ une relation symplectique sur L avec $m \geq 1$. Alors on a dans $K_1(R)/(1 + \tau)$:*

$$\text{Dis}([S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})]) = \text{Dét}(a)$$

(la notation Dis est définie dans la discussion qui suit 4.5.1.6).

Scholie 5.2.7. *L'homomorphisme de groupes $\bar{\mu}_L : \ker \rho_L \rightarrow I(R)$ est caractérisé par le fait que l'on a*

$$\bar{\mu}_L(\tilde{\tilde{E}}(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)) = [S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})]$$

pour toute relation symplectique $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ sur L avec $m \geq 1$.

Nous achevons notre discussion concernant $\bar{\mu}_L$ par l'énoncé 5.2.8 ci-après, qui explicite la valeur de $\bar{\mu}_L$ sur un élément θ de $\ker \rho_L$ représenté par une relation symplectique $(\underline{q}; a) = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n; a)$ avec $|\underline{q}| \geq 4$. Observons tout de suite que cette restriction est inoffensive ; en effet, si l'on a $|\underline{q}| \leq 3$ alors θ est trivial ; plus précisément, pour $|\underline{q}| \leq 2$ on a $(\underline{q}; a) = (\underline{0}; 1)$ ($\underline{0}$ désignant la suite de Sturm nulle de même type que $\underline{q}$) et pour $|\underline{q}| = 3$ on a $(\underline{q}; a) = (q_m, 0, -q_m; 1)$. Afin d'énoncer 5.2.8, introduisons la terminologie suivante : disons qu'une suite de Sturm $\underline{q}'$ est une *sous-suite* de la suite de Sturm $\underline{q}$ si elle est la restriction de cette suite à un sous-intervalle de $[m, n]$.

Proposition 5.2.8. *Soit $(\underline{q}; a) = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n; a)$ une relation symplectique sur L avec $|\underline{q}| \geq 4$; soit $\underline{q}'$ une sous-suite de $\underline{q}$ avec $|\underline{q}'| \equiv 0 \pmod 2$ et $|\underline{q}'| \geq |\underline{q}| - 2$. Alors la forme de Sturm $S(\underline{q}')$ est non-dégénérée et l'on a dans $I(R)$:*

$$\bar{\mu}_L(\tilde{\tilde{E}}(\underline{q}; a)) = [S(\underline{q}')] .$$

Démonstration. Vérifions par exemple l'égalité ci-dessus dans le cas m impair et n pair. D'après 5.2.5 on a $\bar{\mu}_L(\tilde{\tilde{E}}(\underline{q}; a)) = [S(0, \underline{q}, 0)]$ (la notation $(0, \underline{q}, 0)$

désigne la suite de Sturm de type $(m-1, n+1)$ dont les premier et dernier termes sont nuls et dont $\underline{q}$ est une sous-suite). D'après le point (a) de A.2.2, $S(\underline{q})$ est non-dégénérée et d'après la seconde partie de A.4.5 on a $[S(0, \underline{q}, 0)] = [S(\underline{q})]$. Pour exactement les mêmes raisons, $S(\underline{q}')$ est non-dégénérée et on a $[S(\underline{q})] = [S(\underline{q}')] . \quad \square$

Remarque. Le lecteur attentif aura observé que nous n'avons invoqué ci-dessus que la seconde partie de A.4.5. Si l'on utilise toute la force de A.4.5, alors on obtient une formule plus précise (dans $V(R)$) :

$$\mu_L(\tilde{\tilde{E}}(\underline{q}; a)) = [S(\underline{0}'), S(\underline{q}')] + \epsilon \nu(\text{Déta}) ,$$

$\underline{0}'$ désignant la suite de Sturm nulle de même type que $\underline{q}'$ et ϵ désignant la valeur dans l'ensemble $\{0, 1\}$ d'une fonction des types respectifs de $\underline{q}$ et $\underline{q}'$ qu'il n'est pas difficile d'expliciter.

Démonstration de la proposition 5.1.3. La démonstration “naturelle” utilise l'énoncé A.4.4 (voir la remarque ci-après). Nous décrivons ci-dessous une démonstration *ad hoc* qui utilise seulement A.4.2 et ce que nous savons déjà sur μ_L (que nous avons appris en utilisant... A.4.4).

Soit $(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$ une relation symplectique sur L avec $m \geq 1$; on pose $w = \tilde{\tilde{E}}(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}; a)$. On doit vérifier les trois points suivants :

- $\mu_L(\tilde{\tilde{H}}(b)w\tilde{\tilde{H}}(b^{-1})) = \mu_L(w)$ pour tout b dans GL_L ;
- $\mu_L(\tilde{\tilde{E}}_0(q)w\tilde{\tilde{E}}_0(-q)) = \mu_L(w)$ pour tout q dans S_L ;
- $\mu_L(\tilde{\tilde{E}}_1(q)w\tilde{\tilde{E}}_1(-q)) = \mu_L(w)$ pour tout q dans S_{L^*} .

Le premier point tient au fait, déjà invoqué, que les formes de Sturm

$$S(b^{*-1}q_0b^{-1}, bq_1b^*, \dots, bq_{2m-1}b^*) , \quad S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$$

sont isomorphes par un automorphisme de $L_{0, 2m-1}$ qui préserve la forme $S(\underline{0}_{0, 2m-1})$. Passons au deuxième point. L'élément $\tilde{\tilde{E}}_0(q)w\tilde{\tilde{E}}_0(-q)$ de $\ker \rho_L$ est représenté par la relation symplectique sur L de type $(-2, 2m+1)$ (ou ce qui revient au même de type $(0, 2m+3)$) suivante :

$$(q, 0, q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}, -q \cdot a, 0; a) .$$

On a donc :

$$\mu_L(\tilde{\tilde{E}}_0(q)w\tilde{\tilde{E}}_0(-q)) = [S(\underline{0}_{-2, 2m+1}), S(q, 0, q_0, q_1, \dots, q_{2m-1}, -q \cdot a, 0)] .$$

En utilisant le point (b) de A.4.2 et 4.5.1.6 on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_L(\widetilde{\widetilde{E}}_0(q)w\widetilde{\widetilde{E}}_0(-q)) \\ = [S(\underline{\mathbb{Q}}_{-2,2m-1}), S(q,0,q_0,q_1,\dots,q_{2m-1})] + [S(\underline{\mathbb{Q}}_{2m,2m+1}), S(-q \cdot a, 0)] , \end{aligned}$$

puis

$$\mu_L(\widetilde{\widetilde{E}}_0(q)w\widetilde{\widetilde{E}}_0(-q)) = [S(\underline{\mathbb{Q}}_{-2,2m-1}), S(q,0,q_0,q_1,\dots,q_{2m-1})]$$

en utilisant 4.5.1.8. En utilisant à nouveau le point (b) de A.4.2 et 4.5.1.6 on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_L(\widetilde{\widetilde{E}}_0(q)w\widetilde{\widetilde{E}}_0(-q)) = \\ [S(\underline{\mathbb{Q}}_{-2,-1}), S(q,0)] + [S(\underline{\mathbb{Q}}_{0,2m-1}), S(q_0,q_1,\dots,q_{2m-1})] , \end{aligned}$$

puis

$$\mu_L(\widetilde{\widetilde{E}}_0(q)w\widetilde{\widetilde{E}}_0(-q)) = [S(\underline{\mathbb{Q}}_{0,2m-1}), S(q_0,q_1,\dots,q_{2m-1})]$$

en utilisant une fois encore 4.5.1.8. La vérification du troisième point est analogue. $\square$

Remarque. On esquisse dans cette remarque une démonstration unifiée des deux énoncés obtenus en remplaçant dans 5.1.2 et 5.1.3 l'homomorphisme μ_L par l'homomorphisme $\bar{\mu}_L$.

On note $MW_g^{\text{lib}}(R)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de formes symétriques (pas nécessairement non-dégénérées, le "g" en indice est pour "généralisé") définies sur des R -modules libres de dimension finie ; la somme orthogonale fait de $MW_g^{\text{lib}}(R)$ un monoïde abélien. On note $W_g^{\text{lib}}(R)$ le quotient de ce monoïde par le sous-monoïde constitué des classes d'isomorphismes des formes neutres (qui elles sont non-dégénérées). On constate que $W^{\text{lib}}(R)$ s'identifie au groupe des éléments inversibles de $W_g^{\text{lib}}(R)$.

Par des arguments analogues à ceux utilisés au début de la démonstration de 5.1.2, on se convainc tout d'abord de ce qu'il existe une unique application, ensembliste, $f : \widetilde{\widetilde{\Gamma}}_L \rightarrow W_g^{\text{lib}}(R)$, telle que l'on a

$$f(\widetilde{\widetilde{E}}(q_0,q_1,\dots,q_{2m-1};a)) = [S(q_0,q_1,\dots,q_{2m-1})]$$

pour toute suite de Sturm augmentée $(q_0,q_1,\dots,q_{2m-1};a)$ sur L avec $m \geq 1$.

On se convainc ensuite, grâce à la proposition A.4.4, de ce que cette application f possède la propriété suivante :

$$f(\theta \kappa \theta') = f(\theta \theta') + f(\kappa)$$

pour tous θ et θ' dans $\widetilde{\widetilde{\Gamma}}_L$ et tout κ dans $\ker \rho_L$.

On définit enfin $\bar{\mu}_L$ comme la restriction de f à $\ker \rho_L$ ($\bar{\mu}_L$ est bien à valeurs dans $I(R)$); la propriété ci-dessus de f implique à la fois que $\bar{\mu}_L$ est un homomorphisme et que cet homomorphisme est “central”.

Démonstration de la proposition 5.1.6. Cette proposition est une traduction de l'énoncé technique suivant :

Proposition 5.2.10. *Soit $(L; q_0, q_1)$ un R -module libre de dimension finie muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées. Alors on a dans $V(R)$:*

$$\mu_L(\tilde{m}(q_1)\tilde{m}(-q_0)\tilde{H}(q_0^{-1}q_1)) = [L; q_0, q_1] .$$

Démonstration. Posons $w = \tilde{m}(q_1)\tilde{m}(-q_0)\tilde{H}(q_0^{-1}q_1)$ (w est donc un élément de A_L); w est représenté par la relation symplectique sur L de type (0,4) suivante :

$$(q_1, -q_1^{-1}, q_1 - q_0, q_0^{-1}, -q_0; q_0^{-1}q_1) .$$

On a par définition :

$$\mu_L(w) = [S(\underline{0}_{0,5}), S(q_1, -q_1^{-1}, q_1 - q_0, q_0^{-1}, -q_0, 0)] .$$

En utilisant comme précédemment le point (b) de A.4.2, 4.5.1.6 et 4.5.1.8 on obtient :

$$\mu_L(w) = [S(\underline{0}_{0,3}), S(q_1, -q_1^{-1}, q_1 - q_0, q_0^{-1})] .$$

En utilisant successivement les points (b) et (a) de A.4.2, on constate que la forme de Sturm $S(q_1, -q_1^{-1}, q_1 - q_0, q_0^{-1})$ est isomorphe à la somme orthogonale $S(q_1) \oplus S(0, q_1) \oplus S(q_0^{-1})$, ou encore à la somme orthogonale

$$(q_1 \oplus -q_0^{-1}) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{bmatrix} ,$$

par un automorphisme élémentaire de $L_{0,3} = (L \oplus L^*) \oplus (L \oplus L^*)$. Comme $S(\underline{0}_{0,3})$ est isomorphe à la somme orthogonale $\hbar_L \oplus \hbar_L$ par un automorphisme élémentaire de ce même module (Lemme 5.2.5), il vient :

$$\mu_L(w) = [\hbar_L, q_1 \oplus -q_0^{-1}] + \left[\hbar_L, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{bmatrix} \right] .$$

On conclut en invoquant le point (a) de 4.5.1.11 et 4.5.1.8. □

Remarque. La proposition 5.2.11 ci-dessous est une variante de la proposition 5.2.10; sa démonstration est analogue. Le lecteur observera que l'exemple qui suit la proposition-définition 5.1.2 peut être aussi vu comme une illustration de 5.2.11.

Proposition 5.2.11. *Soit $(L; q_0, q_1)$ un R -module libre de dimension finie muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées. Alors*

$$(q_1, -q_1^{-1}, q_1, q_0^{-1}, -q_0, q_0^{-1}; q_0^{-1}q_1)$$

est une relation symplectique sur L (de type $(0,5)$) et on a dans $V(R)$:

$$\mu_L(q_1, -q_1^{-1}, q_1, q_0^{-1}, -q_0, q_0^{-1}; q_0^{-1}q_1) = [L; q_0, q_1] \quad .$$

5.3 Démonstrations concernant l'homomorphisme λ

Démonstration de la proposition 5.1.5. On doit tout d'abord vérifier que l'application

$$MW_1^{\text{lib}}(R) \rightarrow A(R), \quad [L; q_0, q_1] \mapsto \text{st}(\tilde{m}(q_1)\tilde{m}(-q_0)\tilde{H}(q_0^{-1}q_1)),$$

est un homomorphisme de monoïdes (pour la définition de la notation $MW_1^{\text{lib}}(R)$ se reporter à 4.5.1). Cette propriété résulte du lemme suivant :

Lemme 5.3.1. *Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie. Alors il existe deux R -modules libres de dimension finie, M et M' , tels que tout élément de $\tilde{\Gamma}_L$ et tout élément de $\tilde{\Gamma}_{L'}$ commutent dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus M \oplus L' \oplus M'}$.*

Démonstration. Comme les extensions

$$1 \longrightarrow A_L \longrightarrow \tilde{\Gamma}_L \xrightarrow{\pi} \Gamma_L \longrightarrow 1$$

sont fonctoriellement scindées sur GL_L (via $\tilde{H}_L$), on est ramené à vérifier que tout élément de $\pi^{-1}(\text{ESp}_L)$ et tout élément de $\pi^{-1}(\text{ESp}_{L'})$ commutent dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus M \oplus L' \oplus M'}$. On peut se convaincre de cette propriété en faisant les observations suivantes :

- L'application “commutateur”, définie sur

$$\pi^{-1}(\text{ESp}_{L \oplus M}) \times \pi^{-1}(\text{ESp}_{L' \oplus M'})$$

et à valeurs dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus M \oplus L' \oplus M'}$, est en fait à valeurs dans $A_{L \oplus M \oplus L' \oplus M'}$.

- Cette application

$$\pi^{-1}(\text{ESp}_{L \oplus M}) \times \pi^{-1}(\text{ESp}_{L' \oplus M'}) \rightarrow A_{L \oplus M \oplus L' \oplus M'}$$

est composée de $\pi \times \pi$ et d'une application

$$\text{ESp}_{L \oplus M} \times \text{ESp}_{L' \oplus M'} \rightarrow A_{L \oplus M \oplus L' \oplus M'}.$$

- Cette dernière application se factorise à son tour par une application bilinéaire

$$\begin{aligned} & \text{ESp}_{L \oplus M} / [\text{ESp}_{L \oplus M}, \text{ESp}_{L \oplus M}] \times \text{ESp}_{L' \oplus M'} / [\text{ESp}_{L' \oplus M'}, \text{ESp}_{L' \oplus M'}] \\ & \rightarrow \text{A}_{L \oplus M \oplus L' \oplus M'}. \end{aligned}$$

- Les homomorphismes

$$\begin{aligned} & \text{ESp}_L / [\text{ESp}_L, \text{ESp}_L] \rightarrow \text{ESp}_{L \oplus M} / [\text{ESp}_{L \oplus M}, \text{ESp}_{L \oplus M}] \\ \text{et } & \text{ESp}_{L'} / [\text{ESp}_{L'}, \text{ESp}_{L'}] \rightarrow \text{ESp}_{L' \oplus M'} / [\text{ESp}_{L' \oplus M'}, \text{ESp}_{L' \oplus M'}] \end{aligned}$$

sont triviaux si les dimensions de M et M' sont assez grandes. $\square$

On doit ensuite vérifier que l'homomorphisme $\text{MW}_1^{\text{lib}}(R) \rightarrow \text{A}(R)$ “passe au quotient par les relations de Chasles”. En fait, ces relations sont déjà vérifiées avant de stabiliser. Soit $(L; q_0, q_1, q_2)$ un R -module libre de dimension finie muni de trois formes bilinéaires symétriques non-dégénérées, alors on a dans le groupe abélien A_L :

$$\begin{aligned} & \tilde{m}(q_2) \tilde{m}(-q_1) \tilde{H}(q_1^{-1} q_2) \tilde{m}(q_1) \tilde{m}(-q_0) \tilde{H}(q_0^{-1} q_1) \\ & = \tilde{m}(q_2) \tilde{m}(-q_1) \tilde{m}(q_1) \tilde{m}(-q_0) \tilde{H}(q_0^{-1} q_1) \tilde{H}(q_1^{-1} q_2), \end{aligned}$$

parce que $\tilde{m}(q_1) \tilde{m}(-q_0) \tilde{H}(q_0^{-1} q_1)$ est dans le centre de $\tilde{\Gamma}_L$ et :

$$\tilde{m}(q_2) \tilde{m}(-q_1) \tilde{m}(q_1) \tilde{m}(-q_0) \tilde{H}(q_0^{-1} q_1) \tilde{H}(q_1^{-1} q_2) = \tilde{m}(q_2) \tilde{m}(-q_0) \tilde{H}(q_0^{-1} q_2),$$

parce que $\tilde{m}(-q_1)$ est l'inverse de $\tilde{m}(q_1)$. $\square$

Démonstration du théorème 5.1.7. Cette démonstration n'est pas tout à fait celle dont nous avons rêvée; c'est le pourquoi des petits caractères.

Nous commençons par esquisser la démonstration dont nous avons rêvée.

Soit $m \geq 1$ un entier. Soit $\underline{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{2m}, q_{2m+1})$ une suite de Sturm sur L de type $(0, 2m+1)$; cette suite de Sturm “se stabilise” en une suite de Sturm sur $L_{0, 2m-1}$ que nous notons $\underline{Q} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{2m}, Q_{2m+1})$: Q_k est la somme orthogonale de q_k et de la forme nulle sur $L_{1, 2m-1}$ ou $L_{1, 2m-1}^*$ suivant la parité de k . La proposition 2.2.4 (on observera que la présence de la forme q_{2m+1} , qui n'apparaît pas dans 2.2.4, est inoffensive puisque $E_1(q_{2m+1})$ fixe L) dit que le lagrangien

$$E_0(-S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})) E(\underline{Q}) \cdot L_{0, 2m-1}$$

de $H(L_{0, 2m-1})$ est transverse au lagrangien $L_{0, 2m-1}$. Posons

$$P(\underline{q}) = \tilde{E}_0(-S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})) \tilde{E}(\underline{Q}) \tilde{m}(S(\underline{Q}')),$$

$\underline{0}'$ désignant ci-dessus la suite de Sturm sur L nulle de type $(0, 2m-1)$; $P(\underline{q})$ est donc un élément de $\tilde{\Gamma}_{L_{0,2m-1}}$ qui vérifie :

$$\pi(P(\underline{q})) \cdot L_{0,2m-1}^* \cap L_{0,2m-1}.$$

En d'autres termes, $\pi(P(\underline{q}))$ appartient au sous-ensemble $\mathrm{Sp}_{L_{0,2m-1}}^1$ de $\mathrm{Sp}_{L_{0,2m-1}}$, la notation Sp_M^1 désignant, pour tout R -module libre de dimension finie M , le sous-ensemble de Sp_M constitué des éléments $\Phi = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ avec d inversible. On observe qu'un tel élément s'écrit

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & cd^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ bd^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{*-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix};$$

en fait l'application $\mathrm{Sp}_M^1 \rightarrow \mathcal{S}_M^* \times \mathcal{S}_M \times \mathrm{GL}_M$, $\Phi \mapsto (cd^{-1}, bd^*, d^{*-1})$, est une bijection dont l'inverse est l'application $(Y, Z, J) \mapsto E_1(Y) E_0(Z) H(J)$. Cette égalité montre que Sp_M^1 est contenu dans $\mathrm{ESp}_M \cdot \mathrm{GL}_M$ et que la projection $\pi : \tilde{\Gamma}_M \rightarrow \mathrm{ESp}_M \cdot \mathrm{GL}_M$ possède une section sur Sp_M^1 , disons s , définie par

$$s(\Phi) = \tilde{E}_1(cd^{-1}) \tilde{E}_0(bd^*) \tilde{H}(d^{*-1}).$$

L'élément $P(\underline{q}) s(\pi(P(\underline{q})))^{-1}$ appartient donc à $A_{L_{0,2m-1}}$; nous notons $R(\underline{q})$ son image dans $A(R)$.

Nous avons pensé démontrer, *a priori*, la proposition suivante :

Proposition 5.3.2. *Soit $m \geq 1$ un entier. Soit L un R -module libre de dimension finie. Pour tout suite de Sturm $\underline{q}$ sur L de type $(0, 2m+1)$ on a $R(\underline{q}) = 0$.*

Le fait que la proposition 5.3.3 ci-après est satisfaite est l'une des raisons de croire qu'il en est de même pour la proposition 5.3.2. On observera que 5.3.3 implique 5.3.2... une fois 5.1.7 démontré (ce que nous finirons bien par faire!).

Proposition 5.3.3. *Soit $m \geq 1$ un entier. Soit L un R -module libre de dimension finie. Pour tout suite de Sturm $\underline{q}$ sur L de type $(0, 2m+1)$ on a $\mu(R(\underline{q})) = 0$.*

Démonstration. Soit n la dimension de L . On fait intervenir, comme à la fin de la démonstration de la proposition B.2 (Appendice B), l'anneau $\mathbb{U}$ qui représente le foncteur qui associe à un anneau commutatif R l'ensemble des suites de Sturm sur R^n de type $(0, 2m+1)$; l'anneau $\mathbb{U}$ est isomorphe à un anneau de polynômes, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, en $(m+1)n(n+1)$ indéterminées. Soit $\underline{Q}$ la suite de Sturm sur $\mathbb{U}^m$ représentée par l'identité de $\mathbb{U}$; il est clair que pour démontrer la proposition 5.3.3 il suffit de vérifier que l'on a $\mu(R(\underline{Q})) = 0$.

L'avantage d'avoir remplacé R par $\mathbb{U}$ est le suivant : l'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}$ induit un isomorphisme $K_1(\mathbb{Z}) \cong K_1(\mathbb{U})$, si bien que l'on a $SK_1(\mathbb{U}) = 0$ et que l'on peut invoquer la proposition 4.5.1.5.

Avant de poursuivre, observons que nous pouvons pousser encore plus loin notre avantage si nous acceptons dans l'énoncé 5.3.3 de faire l'hypothèse " $\frac{1}{2} \in R$ ". En effet,

sous cette hypothèse on peut remplacer $\mathbb{U}$ par $\mathbb{U}[\frac{1}{2}]$. Le corollaire 4.5.2.6 montre que l'anneau $\mathbb{U}[\frac{1}{2}]$ est V -rigide. On en déduit $\mu(R(\underline{Q})) = \mu(R(\underline{Q}))$, $\underline{Q}$ désignant la suite de Sturm nulle de type $(0, 2m+1)$ sur $(\mathbb{U}[\frac{1}{2}])^n$: considérer l'élément $\mu(R(T\underline{Q}))$ de $V(\mathbb{U}[\frac{1}{2}][T])$. Or, par définition même, $R(\underline{Q})$ est trivial.

Revenons maintenant à la vérification de l'égalité $\mu(R(\underline{Q})) = 0$ dans $V(\mathbb{U})$. Compte tenu de 4.5.1.5, il suffit de vérifier que l'on a $(\det \circ \mu)(R(\underline{Q})) = 0$ dans $\mathbb{U}^\times$ et $(d \circ \mu)(R(\underline{Q})) = 0$ dans $I(\mathbb{U})$. La première égalité se démontre par un argument de rigidité analogue à celui utilisé précédemment. Passons à la seconde (nous posons $\bar{\mu} = d \circ \mu$) :

Proposition 5.3.4. *Soit $m \geq 1$ un entier. Soit L un R -module libre de dimension finie. Pour toute suite de Sturm $\underline{q}$ sur L de type $(0, 2m+1)$, on a $\bar{\mu}(R(\underline{q})) = 0$.*

Démonstration. Posons $\pi(P(\underline{q})) = E_1(Y) E_0(Z) H(J)$; Y , Z et J sont donc des fonctions de $\underline{q}$. L'élément $R(\underline{q})$ de $A(R)$ est représenté par la relation symplectique sur $L_{0,2m-1}$ de type $(-2, 2m+5)$ suivante :

$$(-Z, -Y, -S(0, q_1, \dots, q_{2m-1}), Q_1, Q_2, \dots, Q_{2m}, Q_{2m+1}, S(\underline{Q}'), -S(\underline{Q}')^{-1}, S(\underline{Q}'), 0; J^{-1})$$

(se rappeler que $A_{L_{0,2m-1}}$ est central dans $\tilde{\Gamma}_{L_{0,2m-1}}$).

D'après 5.2.7, $\bar{\mu}(R(\underline{q}))$ est la classe de Witt de la forme de Sturm associée à la suite de Sturm de type $(0, 2m+5)$ suivante :

$$(-S(0, q_1, \dots, q_{2m-1}), Q_1, Q_2, \dots, Q_{2m}, Q_{2m+1}, S(\underline{Q}'), -S(\underline{Q}')^{-1}, S(\underline{Q}'), 0) .$$

En utilisant trois fois successivement le point (b) de A.4.2 et le fait que la forme $-S(\underline{Q}')^{-1}$ est hyperbolique (Lemme 5.2.5), on voit que $\bar{\mu}(R(\underline{q}))$ est la classe de Witt de la forme de Sturm associée à la suite de Sturm de type $(0, 2m)$ suivante :

$$(-S(0, q_1, \dots, q_{2m-1}), Q_1, Q_2, \dots, Q_{2m}) .$$

Posons $S = S(-S(0, q_1, \dots, q_{2m-1}), Q_1, Q_2, \dots, Q_{2m})$. Le domaine de définition de S est le R -module libre

$$L_{0,2m-1} \oplus (L^* \oplus L_{1,2m-1}^*) \oplus (L \oplus L_{1,2m-1}) \oplus (L^* \oplus L_{1,2m-1}^*) \oplus \dots \oplus (L \oplus L_{1,2m-1}) ,$$

soit encore le R -module libre

$$(L_{0,2m-1} \oplus L_{1,2m}) \oplus (L_{1,2m-1})_{1,2m} .$$

Par définition, la restriction de S au facteur $(L_{1,2m-1})_{1,2m}$ est la forme de Sturm $S(\underline{Q}'')$, $\underline{Q}''$ désignant la suite de Sturm nulle de type $(1, 2m)$ sur $L_{1,2m-1}$. Cette forme est non-dégénérée d'après le point (a) de A.2.1. On peut donc appliquer la proposition A.4.1 (Identité du trinôme); celle-ci dit dans ce cas que S est isomorphe à la somme orthogonale de la restriction de S au facteur $L_{0,2m-1} \oplus L_{1,2m}$, disons $S_{1,1}$, et de $S(\underline{Q}'')$, et ceci même si $L_{0,2m-1} \oplus L_{1,2m}$ et $(L_{1,2m-1})_{1,2m}$ ne sont pas orthogonaux par rapport à S . Détaillons un peu. Soit $S_{1,2}$ l'homomorphisme induit par S

de $L_{0,2m-1} \oplus L_{1,2m}$ dans $(L_{1,2m-1})_{1,2m}^*$; on constate que $S_{1,2}$ est composé de la projection de $L_{0,2m-1} \oplus L_{1,2m}$ sur $L_{0,2m-1}$, de la projection de $L_{0,2m-1}$ sur $L_{1,2m-1}$, de l'isomorphisme canonique $L_{1,2m-1} \cong (L_{1,2m-1}^*)^*$ et de l'inclusion $(L_{1,2m-1}^*)^*$ dans $(L_{1,2m-1})_{1,2m}^*$ comme premier facteur; on en déduit $S_{1,2} S(\underline{0}'')^{-1} S_{1,2} = 0$: cette égalité est essentiellement équivalente à l'égalité $\partial_g(\underline{0}'') = 0$. On identifie maintenant la classe d'isomorphismes de la forme $S_{1,1}$. On note ι l'isomorphisme de $L_{-(2m-1),0} = \bigoplus_{k=0}^{2m-1} L_{-k}$ sur $L_{0,2m-1} = \bigoplus_{k=0}^{2m-1} L_k$, somme directe des isomorphismes $(-1)^k \iota_k$, ι_k désignant l'identification canonique $L_k = L_{-k}$; on note $\iota \oplus 1$ l'isomorphisme de $L_{-(2m-1),2m} = L_{-(2m-1),0} \oplus L_{1,2m}$ sur $L_{0,2m-1} \oplus L_{1,2m}$, somme directe de ι et de l'identité de $L_{1,2m}$. On constate que l'on a

$$(\iota \oplus 1)^* S_{1,1} (\iota \oplus 1) = S(-q_{2m-1}, -q_{2m-2} \dots, -q_1, 0, q_1, q_2, \dots, q_{2m-1}, q_{2m}) .$$

On a donc obtenu, au bout du compte, l'isomorphisme de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées suivant :

$$\begin{aligned} & S(-S(0, q_1, \dots, q_{2m-1}), Q_1, Q_2, \dots, Q_{2m}) \\ & \cong S(-q_{2m-1}, -q_{2m-2} \dots, -q_1, 0, q_1, q_2, \dots, q_{2m-1}, q_{2m}) \oplus S(\underline{0}'') . \end{aligned}$$

Puisque $S(\underline{0}'')$ est hyperbolique (Lemme 5.2.5), la classe de Witt du premier membre est égale à celle de $S(-q_{2m-1}, -q_{2m-2} \dots, -q_1, 0, q_1, q_2, \dots, q_{2m-1}, q_{2m})$. Toujours d'après 5.2.7, on a

$$\begin{aligned} & [S(-q_{2m-1}, -q_{2m-2} \dots, -q_1, 0, q_1, q_2, \dots, q_{2m-1}, q_{2m})] \\ & = \bar{\mu}_L(\tilde{\tilde{E}}(-q_{2m-1}, -q_{2m-2} \dots, -q_1, 0, q_1, q_2, \dots, q_{2m-1}, q_{2m}, 0, -q_{2m}; 1)) , \end{aligned}$$

or l'élément de $\tilde{\tilde{E}}_L$ qui apparaît au second membre est trivial. $\square\square$

Expliquons maintenant comment la proposition 5.3.2 conduirait à une démonstration du théorème 5.1.7. La proposition 5.3.2 est équivalente à la suivante :

Proposition 5.3.5. *Soit $m \geq 1$ un entier. Soit L un R -module libre de dimension finie. Soit $\underline{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{2m}, q_{2m+1})$ une suite de Sturm sur L de type $(0, 2m+1)$. Alors il existe une forme bilinéaire symétrique Y sur $L_{0,2m-1}^*$, une forme bilinéaire symétrique Z sur $L_{0,2m-1}$ et un automorphisme J de $L_{0,2m-1}$ tels que l'on a "stabilité" (en clair, dans $\tilde{\Gamma}_{L_{0,2m-1} \oplus M}$, pour M un R -module libre dimension assez grande) :*

$$\tilde{\tilde{E}}(\underline{q}) = \tilde{\tilde{E}}_0(S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})) \tilde{\tilde{E}}_1(Y) \tilde{\tilde{E}}_0(Z) \tilde{\tilde{H}}(J) \tilde{\tilde{m}}(-S(\underline{q}')) ,$$

$\underline{q}'$ désignant ci-dessus la suite de Sturm nulle de type $(0, 2m-1)$.

(On observera que si l'on a une telle formule alors Y , Z et J sont tous trois uniquement déterminés en fonction de $\underline{q}$; pour une explicitation de ce type de formule dans $\text{Sp}_{L_{0,2m-1}}$ voir 2.4.4.)

L'énoncé ci-dessus admet la variante suivante :

Corollaire 5.3.6. *Soit $m \geq 1$ un entier. Soit L un R -module libre de dimension finie. Soit $\underline{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{2m}, q_{2m+1})$ une suite de Sturm sur L de type $(0, 2m+1)$. Alors il existe une forme bilinéaire symétrique Y sur $L_{0,2m-1}^*$, une forme bilinéaire symétrique Z sur $L_{0,2m-1}$ et un automorphisme K de $L_{0,2m-1}$ tels que l'on a “stablement” :*

$$\tilde{E}(\underline{q}) = \tilde{E}_0(S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})) \tilde{E}_1(Y) \tilde{E}_0(Z) \tilde{m}(-S(\underline{q}')) \tilde{H}(K) .$$

Démonstration (de 5.3.5 $\implies$ 5.3.6). On a $\tilde{H}(J) \tilde{m}(-S(\underline{q}')) = \tilde{m}(-J \cdot S(\underline{q}')) \tilde{H}(J)$ dans le groupe $\tilde{\Gamma}_{L_{0,2m-1}}$. On en déduit $\tilde{H}(J) \tilde{m}(-S(\underline{q}')) = \tilde{m}(-S(\underline{q}')) \tilde{H}(K) \lambda([J \cdot S(\underline{q}'), S(\underline{q}')])$ en posant $K = S(\underline{q}')^{-1} J^{*-1} S(\underline{q}')$. Or $\lambda([J \cdot S(\underline{q}'), S(\underline{q}')])$ est “stablement” trivial d'après 4.5.1.6. En effet l'égalité de 5.3.5 implique que $\text{Dét}(J)$ est trivial (observer que l'homomorphisme canonique de $\tilde{\Gamma}_{L_{0,2m-1}}$ dans $\text{GL}_{L_{0,2m-1}}$ induit un homomorphisme de $\tilde{\Gamma}_{L_{0,2m-1}}$ dans $K_1(R)$). $\square$

Démonstration de l'implication 5.3.6 $\implies$ 5.1.7. Soit $(\underline{q}; a) = (q_0, q_1, \dots, q_{2m}, q_{2m+1}; a)$ une relation symplectique sur L de type $(0, 2m+1)$. On pose $S = S(q_0, q_1, \dots, q_{2m-1})$ et $S_0 = S(\underline{q}')$. On réécrit l'égalité de 5.3.6 de la façon suivante :

$$\tilde{E}(\underline{q}) \tilde{H}(K^{-1}) \tilde{m}(S_0) = \tilde{E}_0(S) \tilde{E}_1(Y) \tilde{E}_0(Z)$$

(ici et ci-dessous la stabilisation est implicite). L'égalité $E(\underline{q}) = H(a^{-1})$ fait que l'image dans $\text{Sp}_{L_{0,2m-1}}$ du premier membre, vue comme une matrice de type

$$(L_{0,2m-1}, L_{0,2m-1}^*) \times (L_{0,2m-1}, L_{0,2m-1}^*),$$

est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{bmatrix}$. Il en est donc de même pour l'image dans $\text{Sp}_{L_{0,2m-1}}$ du second membre. Ceci implique que S est inversible et que l'on a $Y = -S^{-1}$ et $Z = S$. En effet, on constate que l'on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + YZ & Y \\ S + (1 + SY)Z & 1 + SY \end{bmatrix} .$$

On a donc

$$\tilde{E}(\underline{q}) = \tilde{m}(S) \tilde{m}(-S_0) \tilde{H}(K) ,$$

ou encore

$$\tilde{E}(\underline{q}; a) = \lambda([L_{0,2m-1}; S_0, S]) \tilde{H}(a') ,$$

a' étant un automorphisme de $L_{0,2m-1}$. On achève en projetant à nouveau dans $\text{Sp}_{L_{0,2m-1}}$. La projection du premier membre est triviale et celle du second est $H(a')$, ce qui force $a' = 1$:

$$\tilde{E}(\underline{q}; a) = \lambda([L_{0,2m-1}; S_0, S])$$

(on observera incidemment que cette formule est bien en accord avec 5.2.8). $\square$

Voilà pour la démonstration rêvée, nous en venons à présent à la démonstration réelle. Notre stratégie est de démontrer une version de la proposition 5.3.5 pour $m = 1$ (Proposition 5.3.8), ce qui suffira à notre bonheur.

Proposition 5.3.7 (Relations de Sharpe). *Soit L un R -module libre de dimension finie.*

(a) *Soit q une forme bilinéaire symétrique sur L . Alors l'élément suivant de $A_{L \oplus L^*}$*

$$\tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(- \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est nul dans $A(R)$. En d'autres termes, il existe un R -module libre de dimension finie M (ne dépendant en fait que de L) tel que l'on a

$$\left[\tilde{E}_0(q), \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right] = \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{bmatrix} \right)$$

dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L^ \oplus M}$ (la notation $[,]$ au premier membre désigne le commutateur, on observera que les deux facteurs du second membre commutent).*

(b) *Soit q une forme bilinéaire symétrique sur L^* . Alors l'élément suivant de $A_{L \oplus L^*}$*

$$\tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(- \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

est nul dans $A(R)$. En d'autres termes, il existe un R -module libre de dimension finie M (ne dépendant en fait que de L) tel que l'on a

$$\left[\tilde{E}_1(q), \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right] = \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L^ \oplus M}$ (on observera que les deux facteurs du second membre commutent).*

Démonstration du point (a). Le scholie 4.5.1.8 (en échangeant les rôles de L et L^*) dit que la classe de $(L \oplus L^*; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$ dans $V(R)$ est nulle. Il en est donc de même pour son image par λ dans $A(R)$:

$$\begin{aligned} & \text{st} \left(\tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right. \\ & \quad \times \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \right) \Big) = 0. \end{aligned}$$

Or on a dans $A_{L \oplus L^*}$:

$$\begin{aligned} & \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ & \quad \times \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&\quad \times \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{bmatrix} \right) \\
&= \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(- \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

(pour la première égalité se rappeler que l'action par conjugaison de $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L^*}$ sur $A_{L \oplus L^*}$ est triviale, pour la seconde que $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L^*}$ est un quotient de $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{L \oplus L^*}$ qui est défini comme un produit semi-direct). $\square$

Démonstration du point (b). Le scholie 4.5.1.8 implique comme précédemment :

$$\text{st} \left(\tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(- \begin{bmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) = 0 ;$$

on peut également obtenir cette relation en faisant $L = L^*$ dans (a) et en utilisant l'isomorphisme de $A_{L^* \oplus L}$ sur $A_{L \oplus L^*}$ induit par l'isomorphisme évident de $L^* \oplus L$ sur $L \oplus L^*$. On en déduit le point (b) grâce à un argument de dualité plus subtil que l'on décrit ci-dessous.

LES ISOMORPHISMES (NATURELS) C_σ

On observe tout d'abord que les applications $L \mapsto L^*$ et $(i, r) \mapsto (r^*, i^*)$ définissent un endofoncteur covariant de la catégorie $\mathcal{C}(R)$.

On rappelle que nous notons $\sigma : H(L) \rightarrow H(L^*)$ l'isomorphisme symplectique $(x, \xi) \mapsto (\xi, -x)$.

Nous notons $C_\sigma : \text{Sp}_L \rightarrow \text{Sp}_{L^*}$, l'isomorphisme de groupes $\phi \mapsto \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}$; C_σ peut être considéré comme un isomorphisme naturel entre les foncteurs de $\mathcal{C}(R)$ dans la catégorie des groupes, $L \mapsto \text{Sp}_L$ et $L^* \mapsto \text{Sp}_{L^*}$.

Si l'on considère respectivement GL_L , $\mathcal{S}_L$ et $\mathcal{S}_{L^*}$, GL_{L^*} , $\mathcal{S}_L$ et $\mathcal{S}_{L^*}$ comme des sous-groupes de Sp_L et Sp_{L^*} , on constate que l'isomorphisme C_σ induit les isomorphismes $a \mapsto a^{*-1}$, $q \mapsto -q$ et $q' \mapsto -q'$. Ceci conduit à introduire l'isomorphisme de groupes, que nous notons encore C_σ , de $\tilde{\tilde{\Gamma}}_L$ dans $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{L^*}$, vérifiant $C_\sigma(\tilde{H}(a)) = \tilde{H}(a^{*-1})$, $C_\sigma(\tilde{E}_0(q)) = \tilde{E}_1(-q)$ et $C_\sigma(\tilde{E}_1(q')) = \tilde{E}_0(-q')$. Nous avons tout fait pour que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\tilde{\Gamma}}_L & \xrightarrow{\rho_L} & \text{Sp}_L \\
\downarrow C_\sigma & & \downarrow C_\sigma \\
\tilde{\tilde{\Gamma}}_{L^*} & \xrightarrow{\rho_{L^*}} & \text{Sp}_{L^*}
\end{array}$$

soit commutatif; l'isomorphisme C_σ induit donc des isomorphismes, $\ker \rho_L \rightarrow \ker \rho_{L^*}$, $\tilde{\tilde{\Gamma}}_L \rightarrow \tilde{\tilde{\Gamma}}_{L^*}$ et $A_L \rightarrow A_{L^*}$, que nous notons toujours C_σ .

Soit enfin b un isomorphisme de L sur L^* . Nous notons c_b l'automorphisme de $\tilde{\tilde{\Gamma}}_L$ composé de C_σ et de l'isomorphisme de $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{L^*}$ sur $\tilde{\tilde{\Gamma}}_L$ induit par b^{-1} ; on a donc

$c_b(\tilde{H}(a)) = \tilde{H}(b^{-1}a^{*-1}b)$, $c_b(\tilde{E}_0(q)) = \tilde{E}_1(-b^{-1}qb^{*-1})$ et $c_b(\tilde{E}_1(q')) = \tilde{E}_0(-b^*q'b)$. L'automorphisme c_b induit des automorphismes de $\ker \rho_L$, $\tilde{\Gamma}_L$ et A_L , que nous notons toujours c_b .

On obtient maintenant le point (b) de la proposition 5.3.7 en observant que l'on a dans $A_{L \oplus L^*}$ (ne pas confondre c_σ et C_σ !)

$$\begin{aligned} c_\sigma \left(\tilde{E}_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right) \tilde{E}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \tilde{E}_1 \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{H} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \\ = \tilde{E}_1 \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{E}_1 \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q \end{pmatrix} \tilde{H} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(et en changeant q en $-q$). $\square$

Voici la version promise de la proposition 5.3.5 pour $m = 1$; on observera que la projection dans $\mathrm{Sp}_{L \oplus L^*}$ du second membre de la formule qu'elle contient est bien le produit qui apparaît dans la proposition 2.4.4 (pour $m = 1$).

Proposition 5.3.8. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Soit (q_0, q_1, q_2, q_3) une suite de Sturm sur L de type $(0,3)$. Alors il existe un R -module libre de dimension finie M (ne dépendant que de L) tel que l'on a*

$$\begin{aligned} \tilde{E}(q_0, q_1, q_2, q_3) = \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \tilde{H} \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{E}_1 \begin{pmatrix} q_1 & -1 \\ -1 & -q_2 \end{pmatrix} \\ \times \tilde{H} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{pmatrix} \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & -q_3 \end{pmatrix} \tilde{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L^* \oplus M}$ (le premier membre appartient à $\tilde{\Gamma}_L$ et le second à $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L^*}$, la proposition dit, en clair, que leurs images dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L^* \oplus M}$ sont égales).

Démonstration. On a par définition :

$$\tilde{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{E}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le point (a) de la proposition 5.3.7, il vient (après stabilisation) :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0(q_2) \tilde{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{E}_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -q_2 \end{pmatrix} \tilde{H} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{pmatrix} \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En appliquant le point (b) de la proposition 5.3.7, il vient (après stabilisation) :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(q_1) \tilde{E}_0(q_2) \tilde{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \tilde{H} \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{E}_1 \begin{pmatrix} q_1 & -1 \\ -1 & -q_2 \end{pmatrix} \\ \times \tilde{H} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{pmatrix} \tilde{E}_0 \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il en résulte (après stabilisation) :

$$\begin{aligned} & \tilde{E}_0(q_0) \tilde{E}_1(q_1) \tilde{E}_0(q_2) \tilde{m} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{bmatrix} \right) \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & q_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} q_1 & -1 \\ -1 & -q_2 \end{bmatrix} \right) \\ & \quad \times \tilde{H} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} q_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) . \end{aligned}$$

On achève en observant que l'on a (après stabilisation) :

$$\tilde{m} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q_3 \end{bmatrix} \right) = \tilde{E}_1(q_3) \tilde{m} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) .$$

On se convainc de cette relation en appliquant les points (b) et (a) de la proposition 5.3.7 (et la variante de ce point obtenue en faisant $L = L^*$, évoquée au début de la démonstration du point (b)) ; on montre en fait que l'on a (après stabilisation) :

$$\begin{aligned} & \tilde{E}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_0 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1(q_3) \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{E}_1 \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \tilde{E}_0 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -q_3 \end{bmatrix} \right) . \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire 5.3.9. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Soient $(q_0, q_1, q_2, q_3 ; a)$ une relation symplectique sur L de type $(0,3)$. Alors la forme bilinéaire symétrique sur $L \oplus L^*$ de matrice $\begin{bmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{bmatrix}$ est non-dégénérée et l'on a dans $A(R)$:*

$$\text{st}(\tilde{E}(q_0, q_1, q_2, q_3 ; a)) = \lambda \left(\left[L \oplus L^* ; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{bmatrix} \right] \right) .$$

Démonstration. Spécialiser au cas $m = 1$ les démonstrations des implications 5.3.5 $\implies$ 5.3.6 et 5.3.6 $\implies$ 5.1.7 que nous avons données précédemment. $\square$

Corollaire 5.3.10. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Soient $(q_0, q_1, \dots, q_6)$ une suite de Sturm sur L de type $(0,6)$. Alors il existe*

- une suite de Sturm $(Q_0, Q_1, \dots, Q_4)$ sur $L \oplus L^*$ de type $(0,4)$
- un automorphisme (élémentaire) F de $L \oplus L^*$
- un R -module libre de dimension finie M (ne dépendant que de L)

tels que l'on a

$$\tilde{E}(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = \tilde{E}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ; F)$$

dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L^* \oplus M}$.

Démonstration. La proposition 5.3.8 montre qu'il existe des formes bilinéaires symétriques $Q'_0, Q'_1, Q'_2, Q''_0, Q''_1, Q''_2$, sur $L \oplus L^*$ ou $(L \oplus L^*)^*$, et des automorphismes élémentaires F', F'' de $L \oplus L^*$ tels que l'on a (après stabilisation) :

$$\tilde{E}_0(q_0) \tilde{E}_1(q_1) \tilde{E}_0(q_2) \tilde{E}_1(q_3) = \tilde{E}_0(Q'_0) \tilde{E}_1(Q'_1) \tilde{E}_0(Q'_2) \tilde{H}(F') \tilde{m} \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

et

$$\tilde{E}_0(-q_6) \tilde{E}_1(-q_5) \tilde{E}_0(-q_4) = \tilde{E}_0(Q''_0) \tilde{E}_1(Q''_1) \tilde{E}_0(Q''_2) \tilde{H}(F'') \tilde{m} \left(- \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

ou encore

$$\tilde{E}_0(q_4) \tilde{E}_1(q_5) \tilde{E}_0(q_6) = \tilde{m} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \tilde{H}(F''^{-1}) \tilde{E}_0(-Q''_2) \tilde{E}_1(-Q''_1) \tilde{E}_0(-Q''_0).$$

On conclut en multipliant membre à membre. $\square$

L'énoncé ci-dessus conduit par récurrence au suivant (observer que l'on a $4 \leq 6!$) :

Corollaire 5.3.11. *Soient L un R -module libre de dimension finie et w un élément de $\tilde{\Gamma}_L$. Alors il existe*

- *un R -module libre de dimension finie L'*
- *une suite de Sturm augmentée $(q_0, q_1, \dots, q_4; a)$ sur $L \oplus L'$ de type $(0, 4)$*

tels que l'on a

$$w = \tilde{E}(q_0, q_1, q_2, q_3, q_4; a)$$

dans $\tilde{\Gamma}_{L \oplus L'}$. En d'autres termes, tout élément de $\tilde{\Gamma}(R)$ est représenté par une suite de Sturm augmentée de type $(0, 4)$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la surjectivité de l'homomorphisme λ .

Soit w un élément de $\tilde{\Gamma}(R)$. D'après 5.3.11, w est représenté par une suite de Sturm augmentée de type $(0, 4)$:

$$w = \text{st}(\tilde{E}_0(q_0) \tilde{E}_1(q_1) \tilde{E}_0(q_2) \tilde{E}_1(q_3) \tilde{E}_0(q_4) \tilde{H}(a)).$$

Si w appartient à $A(R)$, alors w peut être en fait représenté par une relation symplectique de type $(0, 3)$. En effet, on a

$$w = \text{st}(\tilde{E}_0(q_0) \tilde{E}_1(q_1) \tilde{E}_0(q_2) \tilde{E}_1(q_3) \tilde{H}(a) \tilde{E}_0(q_4 \cdot a))$$

(sans hypothèse sur w) et

$$w = \text{st}(\tilde{E}_0(q_0 + q_4 \cdot a) \tilde{E}_1(q_1) \tilde{E}_0(q_2) \tilde{E}_1(q_3) \tilde{H}(a))$$

puisque A_L est central dans $\tilde{\Gamma}_L$. Le corollaire 5.3.9 montre alors que w est bien dans l'image de l'homomorphisme λ . $\square \square$

5.4 Interprétation de l'isomorphisme $A(R) \cong V(R)$ en termes d'homologie des groupes

On rappelle que l'on a $K_1(R) = H_1(GL(R); \mathbb{Z})$ et $K_2(R) = H_2(EGL(R); \mathbb{Z})$ (la notation $EGL(R)$ désignant le sous-groupe de $GL(R)$ engendré par les matrices élémentaires). On pose pareillement $KSp_1(R) = H_1(Sp(R); \mathbb{Z})$ et $KSp_2(R) = H_2(ESp(R); \mathbb{Z})$. L'objet principal de ce paragraphe est de montrer que l'isomorphisme $A(R) \cong V(R)$ du théorème 5.1.8 conduit à l'énoncé suivant :

Théorème 5.4.1. *Le groupe $V(R)$ prend place dans une suite exacte naturelle de groupes abéliens :*

$$K_2(R) \longrightarrow KSp_2(R) \longrightarrow V(R) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow KSp_1(R)$$

dans laquelle :

- les homomorphismes $K_2(R) \rightarrow KSp_2(R)$ et $K_1(R) \rightarrow KSp_1(R)$ sont induits par l'homomorphisme hyperbolique $H : GL(R) \rightarrow Sp(R)$ (qui envoie $EGL(R)$ dans $ESp(R)$)
- l'homomorphisme $V(R) \rightarrow K_1(R)$ est l'homomorphisme Dét de 4.5.1.2
- l'homomorphisme $KSp_2(R) \rightarrow V(R)$ est l'image de la classe caractéristique de l'extension centrale

$$1 \longrightarrow A(R) \longrightarrow \tilde{\Gamma}(R) \xrightarrow{\pi} \Gamma(R) \longrightarrow 1$$

par la composition

$$\begin{aligned} H^2(\Gamma(R); A(R)) &\rightarrow H^2(ESp(R); A(R)) \rightarrow \text{Hom}(KSp_2(R), A(R)) \\ &\rightarrow \text{Hom}(KSp_2(R), V(R)) \end{aligned}$$

(la dernière flèche étant induite par l'homomorphisme μ).

Pour faire dériver cet énoncé de l'énoncé 5.1.8, il sera commode de disposer de la notion d'homologie “relative” des groupes (discrets), et pour l'interpréter, de disposer de la notion d'extension centrale relative.

DÉFINITION DE L'HOMOLOGIE RELATIVE DES GROUPES

Cette définition est sans surprise.

Soit G un groupe (discret), on note $C_\bullet(G)$ la résolution libre standard du $\mathbb{Z}[G]$ -module trivial $\mathbb{Z}$ (on peut voir $C_\bullet(G)$ comme le complexe de chaînes associé au G -ensemble simplicial EG) ; on a donc pour tout $\mathbb{Z}[G]$ -module M , disons à droite, et tout entier n , $H_n(G; M) = H_n(M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_\bullet(G))$.

Soit maintenant $\rho : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes (discrets). On note $C_\bullet^{\text{rel}}(\rho)$ le cône de l'homomorphisme de $\mathbb{Z}[G]$ -complexes, induit par ρ , de $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} C_\bullet(H)$ dans $C_\bullet(G)$; $C_\bullet^{\text{rel}}(\rho)$ est donc un $\mathbb{Z}[G]$ -complexe de chaînes, $\mathbb{Z}[G]$ -libre en chaque degré. Soient M un $\mathbb{Z}[G]$ -module à droite (resp. à gauche) et n un entier, on pose :

$$H_n^{\text{rel}}(\rho; M) = H_n(M \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_\bullet^{\text{rel}}(\rho))$$

(resp. $H_{-n}^{\text{rel}}(\rho; M) = H_{-n}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(C_\bullet^{\text{rel}}(\rho), M))$).

On a donc, par définition, une longue suite exacte

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_n(H; M) &\xrightarrow{\rho_*} H_n(G; M) \longrightarrow H_n^{\text{rel}}(\rho; M) \\ &\longrightarrow H_{n-1}(H; M) \xrightarrow{\rho_*} H_{n-1}(G; M) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

(resp. une longue suite exacte analogue en cohomologie).

On observera que si ρ est une inclusion alors $H_n^{\text{rel}}(\rho; M)$ et $H_{\text{rel}}^n(\rho; M)$ sont classiquement notés $H_n(G, H; M)$ et $H^n(G, H; M)$.

Proposition 5.4.2 (Formule de Hopf). *Soit $\rho : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes. Si ρ est surjectif, alors :*

- (a) *Le groupe $H_1^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z})$ est trivial.*
- (b) *On a un isomorphisme canonique*

$$H_2^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z}) \cong \ker \rho / [H, \ker \rho] ,$$

$[H, \ker \rho]$ désignant le sous-groupe (distingué) de H constitué des produits de commutateurs d'éléments de H et de $\ker \rho$.

En d'autres termes la "centralisée" de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \ker \rho \longrightarrow H \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 1$$

s'identifie à une extension centrale de la forme suivante :

$$1 \longrightarrow H_2^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z}) \longrightarrow H / [H, \ker \rho] \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 1 .$$

Démonstration. Le point (a) est évident. Passons au point (b). Soit $\rho : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes. Comme le $\mathbb{Z}[G]$ -complexe $C_\bullet^{\text{rel}}(\rho)$ est $\mathbb{Z}[G]$ -libre en chaque degré, on dispose d'une suite spectrale du premier quadrant :

$$E_{p,q}^2 = H_p(G; H_q C_\bullet^{\text{rel}}(\rho)) \implies H_{p+q}^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z}) .$$

Si ρ est surjectif, alors on a

$$H_q C_{\bullet}^{\text{rel}}(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{pour } q \leq 1, \\ H_{q-1}(\ker \rho; \mathbb{Z}) & \text{pour } q \geq 2. \end{cases}$$

Le point (b) en résulte (comme d'ailleurs le point (a)). $\square$

ESQUISSE D'UNE THÉORIE DES EXTENSIONS CENTRALES RELATIVES

Soit $\rho : H \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes; soit A un groupe abélien. On appelle *extension centrale de ρ par A* la donnée d'une extension centrale

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

et d'un homomorphisme $\tilde{\rho} : H \rightarrow \tilde{G}$ avec $\pi \circ \tilde{\rho} = \rho$ (c'est à cette notion que font référence les mots "extensions centrales relatives" de l'intertitre ci-dessus, il faut voir $\tilde{\rho}$ comme une "trivialisation" de l'image réciproque par ρ de l'extension centrale ci-dessus).

Soient

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H & & \\ & & & & \searrow \tilde{\rho}_i & \downarrow \rho & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \tilde{G}_i & \xrightarrow{\pi_i} & G \longrightarrow 1, \end{array}$$

$i = 0, 1$, deux extensions centrales de ρ par A , disons e_0 et e_1 . Un *isomorphisme de e_0 sur e_1* est un isomorphisme de groupes $\phi : \tilde{G}_0 \rightarrow \tilde{G}_1$ qui induit l'identité de A et de G et qui vérifie $\phi \circ \tilde{\rho}_0 = \tilde{\rho}_1$.

Ces définitions posées, la théorie des extensions centrales relatives se développe comme dans le cas "absolu" :

Soit e une extension centrale de ρ par A ; e possède une *classe caractéristique*, disons $\chi(e)$, appartenant à $H_{\text{rel}}^2(\rho; A)$ (A muni de l'action triviale de G).

[Soit $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ l'homomorphisme de groupe surjectif sous-jacent à e , on peut définir $\chi(e)$ en observant que le groupe $H_{\text{rel}}^2(\pi; A)$ possède, d'après 5.4.2, une "classe canonique" correspondant, *via* l'isomorphisme $H_{\text{rel}}^2(\pi; A) \cong \text{Hom}(A, A)$, à l'identité de A (une sorte de classe de Thom).]

Soient e_0 et e_1 deux extensions centrales de ρ par A ; e_0 et e_1 sont isomorphes si et seulement si l'on a $\chi(e_0) = \chi(e_1)$.

On définit *mutatis mutandis* la notion d'extension centrale universelle d'un homomorphisme de groupes. On vérifie notamment les deux points suivants :

- Un homomorphisme de groupes $\rho : H \rightarrow G$ possède une extension centrale universelle si et seulement si $H_1^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z})$ est trivial, en d'autres termes si l'homomorphisme $\rho_* : H_1(H; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(G; \mathbb{Z})$ est surjectif.
- Sous cette hypothèse, l'extension centrale universelle de ρ est une extension centrale de ρ par $H_2^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z})$, dont la classe caractéristique correspond, via l'isomorphisme $H_2^{\text{rel}}(\rho; H_2^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z})) \cong \text{Hom}(H_2^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z}), H_2^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z}))$, à l'identité.

Démonstration du théorème 5.4.1. La proposition suivante est une illustration du point (b) de la proposition 5.4.2 :

Proposition 5.4.3. *Soit $\rho : \tilde{\Gamma}(R) \rightarrow \Gamma(R)$ l'homomorphisme de groupes limite directe des homomorphismes de groupes $\rho_{R^n} : \tilde{\Gamma}_n(R) \rightarrow \Gamma_n(R)$. Alors le groupe d'homologie $H_2^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z})$ est naturellement isomorphe au groupe $A(R)$.*

Corollaire 5.4.4. *Soit encore $H : \text{GL}(R) \rightarrow \Gamma(R)$ l'homomorphisme de groupes induit par l'homomorphisme hyperbolique $H : \text{GL}(R) \rightarrow \text{Sp}(R)$. Alors le groupe d'homologie $H_2^{\text{rel}}(H; \mathbb{Z})$ (que l'on peut noter également $H_2(\Gamma(R), \text{GL}(R); \mathbb{Z})$ si l'on identifie $\text{GL}(R)$ à un sous-groupe de $\Gamma(R)$) est naturellement isomorphe au groupe $A(R)$.*

Démonstration. On considère le diagramme commutatif d'homomorphismes de groupes suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma}(R) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(R) \\ \downarrow & & \downarrow 1 \\ \text{GL}(R) & \xrightarrow{H} & \Gamma(R) \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale de gauche désigne la projection canonique. La proposition 5.4.5 ci-dessous, qui énonce un cas particulier d'un résultat dû à Stanislaw Betley, et le lemme des cinq montrent que les groupes $H_2^{\text{rel}}(\rho; \mathbb{Z})$ et $H_2^{\text{rel}}(H; \mathbb{Z})$ sont naturellement isomorphes.

Proposition 5.4.5. *La projection canonique de $\tilde{\Gamma}(R)$ sur $\text{GL}(R)$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homologie $H_n(\tilde{\Gamma}(R); \mathbb{Z}) \cong H_n(\text{GL}(R); \mathbb{Z})$ pour tout entier n .*

Démonstration. On suit Betley [BE, Exemple 4.4]. On dispose d'une suite spectrale du premier quadrant :

$$E_{p,q}^2 = \text{colim}_n H_p(\text{GL}_n(R); H_q(\mathcal{S}_{R^n} * \mathcal{S}_{R^{n*}}; \mathbb{Z})) \implies H_{p+q}(\tilde{\Gamma}(R); \mathbb{Z}).$$

La proposition résulte de ce que l'on a

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} H_p(\mathrm{GL}(R); \mathbb{Z}) & \text{pour } q = 0, \\ 0 & \text{pour } q \geq 1. \end{cases}$$

Le cas $q = 0$ est clair; détaillons un peu le cas $q \geq 1$. On a alors $H_q(\mathcal{S}_{R^n} * \mathcal{S}_{R^{n*}}; \mathbb{Z}) = H_q(\mathcal{S}_{R^n}; \mathbb{Z}) \oplus H_q(\mathcal{S}_{R^{n*}}; \mathbb{Z})$. Considérons le second facteur: celui-ci s'écrit $T(R^n)$, T désignant le foncteur, défini sur la catégorie des R -modules et à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, qui associe à un R -module M le groupe abélien $H_q((M \otimes_R M)^{\mathfrak{S}_2}; \mathbb{Z})$ (le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$ agit sur $M \otimes_R M$ par permutation des facteurs et $(M \otimes_R M)^{\mathfrak{S}_2}$ est le sous-groupe invariant). Ce foncteur T est de degré fini avec $T(0) = 0$; le théorème 4.2 de [BE] dit dans ce cas que l'on a

$$\mathrm{colim}_n H_p(\mathrm{GL}_n(R); T(R^n)) = 0$$

pour tout $p \geq 0$. Le sort du facteur du $H_q(\mathcal{S}_{R^n}; \mathbb{Z})$ est réglé pareillement en invoquant la version "contravariante" du théorème invoqué ci-dessus. $\square$

Le corollaire 5.4.4 et le théorème 5.1.8 montrent déjà que l'on a une suite exacte naturelle de groupes abéliens de la forme suivante:

$$\begin{aligned} H_2(\mathrm{GL}(R); \mathbb{Z}) &\rightarrow H_2(\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R); \mathbb{Z}) \rightarrow V(R) \\ &\rightarrow H_1(\mathrm{GL}(R); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R); \mathbb{Z}) \rightarrow 0; \end{aligned}$$

on va voir que des arguments similaires conduisent à la suite exacte que nous avons en vue:

$$\begin{aligned} H_2(\mathrm{EGL}(R); \mathbb{Z}) &\rightarrow H_2(\mathrm{ESp}(R); \mathbb{Z}) \rightarrow V(R) \\ &\rightarrow H_1(\mathrm{GL}(R); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathrm{Sp}(R); \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Le lemme suivant est bien connu:

Lemme 5.4.6. *L'action par conjugaison de $\mathrm{GL}(R)$ sur $\mathrm{EGL}(R)$ induit l'identité sur les groupes d'homologie $H_q(\mathrm{EGL}(R); \mathbb{Z})$ pour tout entier q .*

Démonstration. Soit $n \geq 1$ un entier; soient a un élément de $\mathrm{GL}_n(R)$ et $g(a)$ l'élément de $\mathrm{GL}_{2n}(R)$ de matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$. Soit $s: \mathrm{EGL}_n(R) \rightarrow \mathrm{EGL}_{2n}(R)$ l'homomorphisme de stabilisation $b \mapsto \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, soient respectivement c_a et

$c_{g(a)}$ la conjugaison par a dans $EGL_n(R)$ et par $g(a)$ dans $EGL_{2n}(R)$; alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} EGL_n(R) & \xrightarrow{s} & EGL_{2n}(R) \\ c_a \downarrow & & \downarrow c_{g(a)} \\ EGL_n(R) & \xrightarrow{s} & EGL_{2n}(R) \end{array}$$

est commutatif. Puisque l'automorphisme $c_{g(a)}$ est intérieur (point (b) du lemme 4.1.3), le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H_q(EGL_n(R); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{s_*} & H_q(EGL_{2n}(R); \mathbb{Z}) \\ c_{a*} \downarrow & & \downarrow 1 \\ H_q(EGL_n(R); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{s_*} & H_q(EGL_{2n}(R); \mathbb{Z}) \end{array}$$

est commutatif. Comme le groupe $H_q(EGL(R); \mathbb{Z})$ est la limite directe des groupes $H_q(EGL_n(R); \mathbb{Z})$, le lemme en résulte. $\square$

On note $\tilde{\tilde{\Gamma}}(R)$ le noyau de l'homomorphisme composé

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}(R) \longrightarrow GL(R) \xrightarrow{\text{Dét}} K_1(R)$$

la première flèche désignant la projection canonique.

Lemme 5.4.7. *L'action par conjugaison de $\tilde{\tilde{\Gamma}}(R)$ sur $\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R)$ induit l'identité sur les groupes d'homologie $H_q(\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R); \mathbb{Z})$ pour tout entier q .*

Démonstration. On adapte l'argument de la précédente. $\square$

La projection canonique de $\tilde{\tilde{\Gamma}}(R)$ sur $GL(R)$ en induit une de $\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R)$ sur $EGL(R)$. Celle-ci induit à nouveau un isomorphisme en homologie :

Proposition 5.4.8. *La projection canonique de $\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R)$ sur $EGL(R)$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homologie $H_n(\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R); \mathbb{Z}) \cong H_n(EGL(R); \mathbb{Z})$ pour tout entier n .*

Démonstration. On considère le diagramme commutatif de groupes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \tilde{\tilde{\Gamma}}'(R) & \longrightarrow & \tilde{\tilde{\Gamma}}(R) & \longrightarrow & K_1(R) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & EGL(R) & \longrightarrow & GL(R) & \longrightarrow & K_1(R) \longrightarrow 1 \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes. Le fait que le groupe $K_1(R)$ opère trivialement sur l'homologie des groupes $EGL(R)$ et $\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R)$ (Lemmes 5.4.6 et 5.4.7) permet d'obtenir 5.4.8 à partir de 5.4.5 par un argument de suite spectrale. $\square$

Soit $\rho' : \tilde{\tilde{\Gamma}}'(R) \rightarrow ESp(R)$ l'homomorphisme induit par l'homomorphisme $\rho : \tilde{\tilde{\Gamma}}(R) \rightarrow \Gamma(R)$. La proposition 5.4.2 montre que l'on a une suite exacte naturelle de groupes abéliens de la forme suivante :

$$H_2(\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R) ; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(ESp(R) ; \mathbb{Z}) \rightarrow \ker \rho' / [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho'] \rightarrow 0 .$$

D'après la proposition 5.4.8 cette suite exacte prend la forme suivante :

$$H_2(EGL(R) ; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(ESp(R) ; \mathbb{Z}) \rightarrow \ker \rho' / [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho'] \rightarrow 0 ,$$

la flèche de gauche étant induite par l'homomorphisme hyperbolique. Pour montrer que la suite naturelle de groupes abéliens

$$H_2(EGL(R) ; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(ESp(R) ; \mathbb{Z}) \rightarrow V(R) ,$$

extraite de la suite à cinq termes de 5.4.1, est exacte il faut donc montrer, compte tenu de 5.1.8, que l'application canonique

$$\ker \rho' / [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho'] \rightarrow \ker \rho / [\tilde{\tilde{\Gamma}}(R), \ker \rho]$$

est injective, ou encore vérifier le lemme *ad hoc* suivant :

Lemme 5.4.9. *Les deux sous-groupes de $\tilde{\tilde{\Gamma}}(R)$:*

$$[\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho'] , \quad [\tilde{\tilde{\Gamma}}(R), \ker \rho]$$

coïncident.

Démonstration. On montre que l'on a $[\tilde{\tilde{\Gamma}}(R), \ker \rho] = [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho]$ en adaptant à nouveau l'argument de la démonstration de 5.4.6. L'égalité

$$[\tilde{\tilde{\Gamma}}(R), \ker \rho] = [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho']$$

est un peu plus subtile. On commence par observer que la proposition 5.4.8 implique en particulier que le groupe $\tilde{\tilde{\Gamma}}(R)$ est parfait. On en déduit l'égalité

$$[\tilde{\tilde{\Gamma}}(R), \ker \rho] = [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho]] .$$

Détaillons. On observe tout d'abord que les deux sous-groupes $\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R)$ et $\ker \rho$ sont distingués dans $\tilde{\tilde{\Gamma}}(R)$ et que l'on a les inclusions

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\Gamma}}'(R) \supset [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho] &\supset [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho]] \\ &\supset [[\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho], [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho]] . \end{aligned}$$

On fixe ensuite un élément κ de $\ker \rho$ et on considère l'application

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R) \rightarrow [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho] / [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho]] , \quad \theta \mapsto [\theta, \kappa] .$$

Cette application est en fait un homomorphisme de groupes, dont le but est un groupe abélien ; comme sa source est un groupe parfait, il est trivial. On observe enfin que l'on a l'inclusion $[\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho] \subset \ker \rho'$; on en déduit $[\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho] \subset [\tilde{\tilde{\Gamma}}'(R), \ker \rho']$ et donc l'égalité cherchée puisque l'inclusion opposée est évidente. $\square$

On achève la démonstration du théorème 5.4.1 en constatant que l'on a une suite exacte de groupes naturelle

$$\ker \rho' \rightarrow \ker \rho \rightarrow K_1(R) \rightarrow \mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R) / \mathrm{ESp}(R) \rightarrow 0$$

et que le groupe quotient $\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R) / \mathrm{ESp}(R)$ s'identifie à l'image de l'homomorphisme de $K_1(R)$ dans $\mathrm{KSp}_1(R)$ induit par l'homomorphisme hyperbolique. $\square$

COMMENTAIRES

– L'exactitude de la suite

$$V(R) \xrightarrow{\mathrm{Dét}} K_1(R) \xrightarrow{H} \mathrm{KSp}_1(R)$$

est en fait indépendante du théorème 5.1.8. On peut s'en convaincre directement de la façon suivante. Soient $(L; q_0, q_1)$ un R -module libre de dimension finie muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées, l'inclusion $\mathrm{im} \mathrm{Dét} \subset \ker H$ est conséquence des égalités dans Sp_L :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_0^{-1} q_1 & 0 \\ 0 & q_0 q_1^{-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -q_0^{-1} \\ q_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -q_1^{-1} \\ q_1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} ; \\ \begin{bmatrix} 0 & -q_i^{-1} \\ q_i & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -q_i^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{pour } i = 0, 1 . \end{aligned}$$

L'inclusion $\ker H \subset \mathrm{im} \mathrm{Dét}$ résulte quant à elle de la proposition 5.2.2.

– Rappelons que nous avons posé $V^{(1)}(R) = \ker(\text{Dét} : V(R) \rightarrow K_1(R))$ (voir la discussion intitulée “questions de signes” à la fin de 4.6).

Compte tenu du premier commentaire ci-dessus le point essentiel du théorème 5.4.1 est le fait que le conoyau de l'homomorphisme de $K_2(R)$ dans $KSp_2(R)$ induit par l'homomorphisme hyperbolique s'identifie à $V^{(1)}(R)$. Nous concluons ce paragraphe en précisant ce résultat et en l'interprétant en termes d'extension centrale universelle relative.

Posons $\mathcal{S}(R) = \text{colim}_n \mathcal{S}_{R^n}$ et $\tilde{\mathcal{S}}(R) = \text{colim}_n \mathcal{S}_{R^{n*}}$. Le groupe $\tilde{\Gamma}'(R)$, que nous avons introduit dans la démonstration de 5.4.1, s'identifie par définition au produit semi-direct $(\mathcal{S}(R) * \tilde{\mathcal{S}}(R)) \rtimes \text{EGL}(R)$ et l'homomorphisme $\rho' : \tilde{\Gamma}'(R) \rightarrow \text{ESp}(R)$ est l'homomorphisme évident. La “centralisée” de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \ker \rho' \longrightarrow \tilde{\Gamma}'(R) \xrightarrow{\rho'} \text{ESp}(R) \longrightarrow 1$$

s'identifie à une extension centrale de la forme suivante :

$$1 \longrightarrow V^{(1)}(R) \longrightarrow \tilde{\Gamma}'(R) \longrightarrow \text{ESp}(R) \longrightarrow 1 ,$$

qui est canoniquement scindée sur $\text{EGL}(R)$ (vu comme un sous-groupe de $\text{ESp}(R)$) et qui est “universelle” pour cette propriété.

En clair : Cette extension, munie du relèvement $\tilde{H} : \text{EGL}(R) \rightarrow \tilde{\Gamma}'(R)$ de l'homomorphisme hyperbolique $H : \text{EGL}(R) \rightarrow \text{ESp}(R)$, est l'extension centrale universelle de cet homomorphisme ; ou encore :

Théorème 5.4.10. *Le groupe d'homologie relatif $H_2(\text{ESp}(R), \text{EGL}(R); \mathbb{Z})$ est canoniquement isomorphe à $V^{(1)}(R)$.*

Chapitre 6

Généralisations

Le cœur de ce chapitre est le paragraphe 6.2 où l'on décrit sept analogues du théorème 4.1.9. La concaténation de ces huit résultats fournit une version algébrique du théorème de périodicité de Bott réelle. En 6.1 on présente une version algébrique du théorème de périodicité de Bott complexe ; ce paragraphe est là, principalement pour servir d'échauffement au lecteur et accessoirement pour être utilisé comme référence en 6.2.

Ce chapitre est avant tout une reformulation dans notre langage naïf des “ π_0 -foncteurs” de résultats bien connus dans la littérature du sujet - à laquelle nous renverrons pour la démonstration de la plupart des énoncés.

Pour un complément à cette courte introduction se reporter à 4.8.

Pour formuler les énoncés évoqués ci-dessus, il nous faut introduire une seconde notion d'espace de lacets que nous notons $\Omega^{\mathbb{G}_m}$ ($\mathbb{G}_m$ pour groupe multiplicatif).

Soit $\mathcal{X}$ un foncteur défini sur la catégorie des anneaux commutatifs et à valeurs dans la catégorie des ensemble pointés. On note $\Omega^{\mathbb{G}_m}\mathcal{X}$ le foncteur, du même type, qui associe à tout anneau R le sous-ensemble de $\mathcal{X}(R[T, T^{-1}])$ constitué des éléments α tels que l'on a $e_1\alpha = *$, $e_1 : \mathcal{X}(R[T, T^{-1}]) \rightarrow \mathcal{X}(R)$ désignant l'application induite par l'homomorphisme d'évaluation en $T = 1$:

$$\mathcal{X}(R[T, T^{-1}]) \supset (\Omega^{\mathbb{G}_m}\mathcal{X})(R) := \{\alpha ; e_1\alpha = *\} .$$

Pour éviter toute confusion, l'espace de lacets $\Omega\mathcal{X}$, introduit en 4.1, sera dans ce chapitre noté $\Omega^S\mathcal{X}$ (S est pour “cercle simplicial”). (Le lecteur averti reconnaîtra ici le “discours des deux cercles” de la théorie de l'homotopie motivique [MV].)

6.1 Le cas linéaire (périodicité de Bott “complexe”)

Cette périodicité de Bott “complexe” se traduit *grosso modo* par l’existence de deux isomorphismes fonctoriels

$$\pi_0 \mathcal{K}_1 \cong \pi_0 \Omega^S \mathcal{K}_0, \quad \pi_0 \mathcal{K}_0 \cong \pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1,$$

$\mathcal{K}_0$ et $\mathcal{K}_1$ désignant deux foncteurs de la catégorie des anneaux commutatifs dans la catégorie des ensembles pointés (pour des énoncés plus précis, voir 6.1.2 et 6.1.3). Le foncteur $\mathcal{K}_1$ est simplement le foncteur $R \mapsto \mathrm{GL}(R)$; le lecteur se convaincra de ce que le foncteur $\mathcal{K}_0$ pourrait raisonnablement être noté $\mathbb{Z} \times \mathrm{BGL}$. Le lecteur se convaincra également de ce que les ensembles $\mathcal{K}_0(\mathbb{C})$ et $\mathcal{K}_1(\mathbb{C})$ possèdent une topologie naturelle (au sens naïf) et que l’on a des équivalences d’homotopie $\mathcal{K}_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z} \times \mathrm{BU}$ et $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}) \cong \mathrm{U}$; ceci justifie le sous-titre “périodicité de Bott complexe” de ce paragraphe (voir 4.8).

DÉFINITION DU FONCTEUR $\mathcal{K}_0$

Soit R un anneau. On note $\mathcal{K}_{0,n}(R)$ l’ensemble des sous-modules facteurs directs dans $R^n \oplus R^n$ (on observera que de tels sous-modules sont projectifs!); on choisit comme point base de $\mathcal{K}_{0,n}(R)$ le sous-module $R^n \oplus 0$. On note $\tilde{\mathcal{K}}_{0,n}(R)$ l’ensemble des projecteurs de $R^n \oplus R^n$; on choisit comme point-base de $\tilde{\mathcal{K}}_{0,n}(R)$ le projecteur sur $R^n \oplus 0$ parallèlement à $0 \oplus R^n$.

On observera que la transformation naturelle $\tilde{\mathcal{K}}_{0,n} \rightarrow \mathcal{K}_{0,n}$ qui associe à un projecteur son image induit un isomorphisme fonctoriel

$$\pi_0 \tilde{\mathcal{K}}_{0,n} \cong \pi_0 \mathcal{K}_{0,n}.$$

On dispose de transformations naturelles de stabilisation $\mathcal{K}_{0,n} \rightarrow \mathcal{K}_{0,n+1}$ et $\tilde{\mathcal{K}}_{0,n} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}_{0,n+1}$. Dans le premier cas, cette stabilisation est définie de la façon suivante. Soit ι l’isomorphisme composé

$$R^{n+1} \oplus R^{n+1} \cong (R^n \oplus R) \oplus (R^n \oplus R) \cong (R^n \oplus R^n) \oplus (R \oplus R);$$

à un facteur direct P de $R^n \oplus R^n$ on fait correspondre le facteur direct $\iota^{-1}(P \oplus (R \oplus 0))$ de $R^{n+1} \oplus R^{n+1}$. La stabilisation dans le second cas est définie *mutatis mutandis*. On note $\mathcal{K}_0$ (resp. $\tilde{\mathcal{K}}_0$) la limite directe en n des foncteurs $\mathcal{K}_{0,n}$ (resp. $\tilde{\mathcal{K}}_{0,n}$) suivant ces applications de stabilisation.

Remarque. Voici une façon un peu plus pédante d’introduire le foncteur $\mathcal{K}_0$. Soit L un R -module libre de dimension finie. On note $\mathcal{K}_{0,L}$ l’ensemble des sous-modules facteurs directs dans $L \oplus L$; on choisit le sous-module $L \oplus 0$ comme point base de $\mathcal{K}_{0,L}$. On constate que la correspondance $L \mapsto \mathcal{K}_{0,L}$ est

un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}$ (voir 4.1.10) dans la catégorie des ensembles pointés et que l'on a $\mathcal{K}_0(R) = \text{colim}_{\mathbb{N}(R)} \mathcal{K}_{0,R^n}$ (voir encore 4.1.10). La même remarque vaut *mutatis mutandis* pour le foncteur $\tilde{\mathcal{K}}_0$.

RELATION ENTRE $\mathcal{K}_0$ ET K_0

On note $k_0 : \mathcal{K}_0 \rightarrow K_0$ la transformation naturelle induite par les applications de $\mathcal{K}_{0,L}$ dans $K_0(R)$ qui associent à un facteur direct P de $L \oplus L$ la différence $[P] - [L]$.

Proposition 6.1.1. *La transformation naturelle k_0 induit un isomorphisme fonctoriel*

$$\pi_0 \mathcal{K}_0 \cong \pi_0 K_0 .$$

Démonstration. Soit L un R -module libre de dimension finie. Le groupe $\text{GL}_{L \oplus L}$ opère sur l'ensemble $\mathcal{K}_{0,L}$ de façon $\mathcal{C}$ -naturelle. En passant à la limite directe sur $\mathbb{N}(R)$, on obtient une action du groupe $\text{GL}(R)$ sur l'ensemble $\mathcal{K}_0(R)$ (naturelle en R) ; on note respectivement $\text{GL} \backslash \mathcal{K}_0$ et $\text{EGL} \backslash \mathcal{K}_0$ les foncteurs qui associent à un anneau R les ensembles quotients $\text{GL}(R) \backslash \mathcal{K}_0(R)$ et $\text{EGL}(R) \backslash \mathcal{K}_0(R)$. Il est clair que la transformation naturelle k_0 admet la factorisation suivante :

$$\mathcal{K}_0 \rightarrow \text{EGL} \backslash \mathcal{K}_0 \rightarrow \text{GL} \backslash \mathcal{K}_0 \rightarrow K_0 .$$

Nous allons montrer que les deux transformations naturelles de droite sont des isomorphismes fonctoriels. La proposition en résultera, car il est évident que la transformation naturelle de gauche induit un isomorphisme fonctoriel $\pi_0 \mathcal{K}_0 \cong \pi_0 (\text{EGL} \backslash \mathcal{K}_0)$.

Soient P et P' deux R -modules projectifs de rang fini ; soit L un R -module libre de dimension finie dans lequel P et P' sont tous deux facteurs directs. Soit Q' un supplémentaire de P' dans L , alors $P \oplus Q'$ est facteur direct dans $L \oplus L$ et l'on a $[P \oplus Q'] - [L] = [P] - [P']$ dans $K_0(R)$. Ceci montre que l'application $k_0 : \mathcal{K}_0(R) \rightarrow K_0(R)$ est surjective ; il en est donc de même pour l'application induite de $\text{GL}(R) \backslash \mathcal{K}_0(R)$ dans $K_0(R)$, disons $\bar{k}_0$.

On montre maintenant que l'application $\bar{k}_0$ est injective. Soient x et x' deux éléments de $\mathcal{K}_0(R)$ avec $k_0(x) = k_0(x')$. D'après la définition même de $\mathcal{K}_0(R)$, il existe un entier n tel que x et x' sont respectivement représentés par deux facteurs directs P et P' de $R^n \oplus R^n$ avec $[P] = [P']$ dans $K_0(R)$. Cette égalité implique qu'il existe un entier s tel que $P \oplus R^s$ et $P' \oplus R^s$ sont isomorphes. Quitte à remplacer n par $n + s$, on peut donc supposer qu'il existe un entier n tel que x et x' sont respectivement représentés par deux facteurs directs P et P' de $R^n \oplus R^n$ avec $P \cong P'$. Soient alors Q et Q' des supplémentaires respectifs de P et P' dans $R^n \oplus R^n$. Les égalités $Q \oplus (R^n \oplus R^n) = Q \oplus P' \oplus Q'$ et $Q' \oplus (R^n \oplus R^n) = Q' \oplus P \oplus Q$ montrent que les modules

$Q \oplus (R^n \oplus R^n)$ et $Q' \oplus (R^n \oplus R^n)$ sont isomorphes et donc qu'il existe un automorphisme de $(R^n \oplus R^n) \oplus (R^n \oplus R^n)$ qui induit un isomorphisme de P sur P' , P et P' étant facteurs directs dans le facteur $R^n \oplus R^n$ de gauche. Quitte à remplacer n par $3n$, on voit bien au bout du compte qu'il existe un entier n et un automorphisme a de $R^n \oplus R^n$ tels que x et x' sont respectivement représentés par deux facteurs directs P et P' de $R^n \oplus R^n$ avec $P' = a(P)$.

On montre enfin que l'application canonique

$$\mathrm{EGL}(R) \backslash \mathcal{K}_0(R) \rightarrow \mathrm{GL}(R) \backslash \mathcal{K}_0(R)$$

est une bijection. Ceci résulte des observations ci-après. Soient L un R -module libre de dimension finie, P un facteur direct de $L \oplus L$ et a un automorphisme de $L \oplus L$. On pose $M = L \oplus L$, $N = L \oplus M$ et on note st "l'application de stabilisation" de $\mathcal{K}_{0,L}$ dans $\mathcal{K}_{0,N}$ (en clair l'application induite par le $\mathcal{C}$ -morphisme évident de L dans N !). On note enfin e l'automorphisme de $N \oplus N$ correspondant à l'automorphisme $a \oplus \mathrm{id} \oplus a^{-1}$ de $M \oplus M \oplus M$ *via* les isomorphismes de groupes $\mathrm{GL}_{M \oplus M \oplus M} \cong \mathrm{GL}_{(L \oplus L) \oplus (M \oplus M)} \cong \mathrm{GL}_{(L \oplus M) \oplus (L \oplus M)} \cong \mathrm{GL}_{N \oplus N}$. On observe que l'on a l'égalité $\mathrm{st}(a(P)) = e(\mathrm{st}(P))$ et que l'automorphisme e est élémentaire (en fait, il suffit d'observer que son Déterminant dans $\mathrm{K}_1(R)$ est trivial). $\square$

DÉFINITION DU FONCTEUR $\mathcal{K}_1$

On pose $\mathcal{K}_{1,n}(R) = \mathrm{GL}_n(R)$ et $\mathcal{K}_1(R) = \mathrm{GL}(R)$.

RELATION ENTRE $\mathcal{K}_1$ ET K_1

Comme précédemment on dispose d'une transformation naturelle canonique, disons $k_1 : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathrm{K}_1$, qui induit un isomorphisme fonctoriel

$$\pi_0 \mathcal{K}_1 \cong \pi_0 \mathrm{K}_1 .$$

RELATION ENTRE $\mathcal{K}_1$ ET $\Omega^S \mathcal{K}_0$

On dispose, pour tout entier naturel n , d'une transformation naturelle ("S-lacet typique")

$$\ell_n : \mathcal{K}_{1,n} \rightarrow \Omega^S \mathcal{K}_{0,n}$$

dont la définition est détaillée ci-après.

Soit a un automorphisme de R^n . On considère les deux automorphismes suivants de $R^n \oplus R^n$:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

(matrices de type $(R^n, R^n) \times (R^n, R^n)$) et l’on fait les observation suivantes :

- Ces deux automorphismes fixent le point base de $\mathcal{K}_{0,n}(R)$:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (R^n \oplus 0) = R^n \oplus 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot (R^n \oplus 0) = R^n \oplus 0.$$

- On a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} j^{-1}$ avec $j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- On a $j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

On obtient donc un élément $\ell_n(a)$ de $(\Omega^S \mathcal{K}_{0,n})(R)$ en posant

$$\ell_n(a)(T) = j(T) \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} j(T)^{-1} \cdot (R^n \oplus 0)$$

avec

$$j(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix}$$

(notre notation est désinvolte : on devrait remplacer dans la formule définissant $\ell_n(a)(T)$ l’expression $R^n \oplus 0$ par $R[T]^n \oplus 0$; ce type d’abus de notation sera fréquent dans ce chapitre).

Les transformations naturelles ℓ_n commutent aux stabilisations et fournissent par passage à la limite directe une transformation naturelle

$$\ell : \mathcal{K}_1 \rightarrow \Omega^S \mathcal{K}_0.$$

Théorème 6.1.2. *Pour tout anneau régulier R la transformation naturelle ℓ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{K}_1)(R) \cong (\pi_0 \Omega^S \mathcal{K}_0)(R).$$

La démonstration de ce théorème est analogue (en plus simple) à celle du théorème 6.2.2.1, à laquelle nous renvoyons le lecteur.

RELATION ENTRE $\mathcal{K}_0$ (OU $\tilde{\mathcal{K}}_0$) ET $\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1$

A nouveau, on dispose, pour tout entier naturel n , d’une transformation naturelle (“ $\mathbb{G}_m$ -lacet typique”)

$$\ell_n : \tilde{\mathcal{K}}_{0,n} \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_{1,2n}.$$

On associe cette fois à un projecteur p de $R^n \oplus R^n$ l'automorphisme

$$(Tp + 1 - p) \circ (Tp_0 + 1 - p_0)^{-1}$$

de $R[T, T^{-1}] \otimes_R (R^n \oplus R^n)$, p_0 désignant le point base de $\tilde{\mathcal{K}}_{0,n}(R)$.

En passant à la limite directe en n on obtient une transformation naturelle

$$\ell : \tilde{\mathcal{K}}_0 \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1 .$$

Théorème 6.1.3. *Pour tout anneau R , la transformation naturelle ℓ induit une bijection*

$$(\pi_0 \tilde{\mathcal{K}}_0)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1)(R)$$

ou encore une bijection

$$(\pi_0 \mathcal{K}_0)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1)(R) .$$

Démonstration. On pose $(\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1)(R) := \ker (K_1(R[T, T^{-1}]) \xrightarrow{e_1} K_1(R))$ (cette notation est bien en accord avec celle que nous avons introduite au début de ce chapitre si l'on considère K_1 comme un foncteur en ensembles pointés) et on note $\bar{\ell} : K_0(R) \rightarrow (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1)(R)$ l'application "induite" par ℓ ; en clair, $\bar{\ell}$ est l'unique application qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{K}}_0(R) & \xrightarrow{k_0} & K_0(R) \\ \downarrow \ell & & \downarrow \bar{\ell} \\ (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1)(R) & \xrightarrow{k_1} & (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1)(R) \end{array}$$

(l'application k_1 est induite par la transformation naturelle $\mathcal{K}_1 \rightarrow K_1$). Le théorème de Swan ([SW], Theorem 16.4, page 226) nous dit que $\bar{\ell}$ admet une rétraction et que l'on a

$$(\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{K}_1)(R) = \bar{\ell}(K_0(R)) \oplus \text{Nil}(R) ,$$

$\text{Nil}(R)$ désignant ici le sous-groupe de $K_1(R[T, T^{-1}])$ engendré par les classes des matrices de la forme $\text{id} + (T - 1)N$ ou $\text{id} + (T^{-1} - 1)N$ avec N (à coefficients dans R) nilpotente. On en déduit que $\pi_0 \bar{\ell}$ est un isomorphisme. Or $\pi_0 k_0$ et $\pi_0 k_1$ sont aussi des bijections. $\square$

6.2 Le cas bilinéaire (périodicité de Bott “réelle”)

On dispose cette fois d’une liste $(\mathcal{L}_i)_{i \in \mathbb{Z}/8}$ de huit foncteurs, définis sur la catégorie des anneaux commutatifs et à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés, et la périodicité de Bott “réelle” se traduit *grosso modo* par l’existence de huit isomorphismes fonctoriels

$$\pi_0 \mathcal{L}_{i+1} \cong \begin{cases} \pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_i & \text{pour } i \equiv 0 \pmod{2} \\ \pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_i & \text{pour } i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

(pour des énoncés plus précis, voir 6.2.2.4 et 6.2.3.7). Les foncteurs $\mathcal{L}_6$ et $\mathcal{L}_7$ sont ceux que nous avons notés respectivement $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$ dans les chapitres précédents; la relation entre les foncteurs $\pi_0 \mathcal{F}$ et $\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}$ y a été étudiée en grands détails.

Le lecteur se convaincra de ce que la liste

$$\mathcal{L}_0 \quad \mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \mathcal{L}_3 \quad \mathcal{L}_4 \quad \mathcal{L}_5 \quad \mathcal{L}_6 \quad \mathcal{L}_7$$

pourrait raisonnablement être notée

$$\mathbb{Z} \times \mathrm{BO} \quad \mathrm{O} \quad \mathrm{O}/\mathrm{GL} \quad \mathrm{GL}/\mathrm{Sp} \quad \mathbb{Z} \times \mathrm{BSp} \quad \mathrm{Sp} \quad \mathrm{Sp}/\mathrm{GL} \quad \mathrm{GL}/\mathrm{O}.$$

[En fait, nous trichons un peu; pour que cette notation soit vraiment adaptée il faudrait remplacer les foncteurs $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_6$ par leur versions “épaisses”, disons $\tilde{\mathcal{L}}_2$ et $\tilde{\mathcal{L}}_6$, qui sont à $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_6$ ce qu’est le foncteur $\tilde{\mathcal{K}}_0$ au foncteur $\mathcal{K}_0$, il faudrait aussi remplacer la catégorie des anneaux commutatifs par celle des anneaux commutatifs dans lesquels 2 est inversible.]

Le lecteur se convaincra également de ce que les ensembles $\mathcal{L}_i(\mathbb{C})$ possèdent une topologie naturelle et que l’on a huit équivalences d’homotopie

$$\begin{array}{cccccccc} \mathcal{L}_0(\mathbb{C}) & \mathcal{L}_1(\mathbb{C}) & \mathcal{L}_2(\mathbb{C}) & \mathcal{L}_3(\mathbb{C}) & \mathcal{L}_4(\mathbb{C}) & \mathcal{L}_5(\mathbb{C}) & \mathcal{L}_6(\mathbb{C}) & \mathcal{L}_7(\mathbb{C}) \\ \cong & \cong & \cong & \cong & \cong & \cong & \cong & \cong \\ \mathbb{Z} \times \mathrm{BO} & \mathrm{O} & \mathrm{O}/\mathrm{U} & \mathrm{U}/\mathrm{Spq} & \mathbb{Z} \times \mathrm{BSpq} & \mathrm{Spq} & \mathrm{Spq}/\mathrm{U} & \mathrm{U}/\mathrm{O}, \end{array}$$

la notation O , U et Spq désignant dans la liste ci-dessus la limite directe en n , respectivement, des groupes orthogonaux euclidiens $\mathrm{O}(n)$, des groupes unitaires $\mathrm{U}(n)$ et des groupes unitaires quaternionniens $\mathrm{Spq}(n)$ ($\mathrm{Spq}(n)$ est un sous-groupe compact maximal du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$, dans la littérature $\mathrm{Spq}(n)$ et Spq sont souvent notés $\mathrm{Sp}(n)$ et Sp).

Ceci justifie le sous-titre “périodicité de Bott réelle” de ce paragraphe (voir 4.8).

Avertissement. Dans ce paragraphe tous les anneaux (commutatifs) seront supposés contenir $\frac{1}{2}$. Cette hypothèse permet de ne pas distinguer les notions de

forme bilinéaire symétrique et de forme quadratique (et les groupes orthogonaux qui vont avec), les notions de forme bilinéaire antisymétrique et de forme bilinéaire alternée. Elle apparaît par ailleurs dans la plupart des énoncés de la littérature auxquels nous ferons référence.

Compte tenu de l'hypothèse ci-dessus, les mots “anneau (commutatif)” signifieront dans ce paragraphe “anneau (commutatif) contenant $\frac{1}{2}$ ”. Cependant dans les énoncés où cette hypothèse jouera un rôle important nous insisterons lourdement et la rappellerons.

6.2.1 Définition des foncteurs $\mathcal{L}_i$

DÉFINITION DU FONCTEUR $\mathcal{L}_0$

Soit R un anneau (commutatif) et L un R -module libre de dimension finie. On note $H^+(L)$ le R -module libre $L \oplus L^*$ muni de sa forme bilinéaire symétrique hyperbolique; cette forme sera notée h_L^+ (elle était notée h_L depuis le début du chapitre 4, mais h_L^- va aussi apparaître dans ce paragraphe). On note $\mathcal{L}_{0,L}$ l'ensemble des facteurs directs P de $H^+(L) \oplus H^+(L)$ tels que la restriction à P de la somme orthogonale $h_L^+ \oplus h_L^+$ est non-dégénérée; on choisit pour point base de $\mathcal{L}_{0,L}$ le facteur direct $H^+(L) \oplus 0$. L'ensemble $\mathcal{L}_{0,L}$ s'identifie également à l'ensemble des projecteurs du R -module $H^+(L) \oplus H^+(L)$ qui sont auto-adjoints pour la forme $h_L^+ \oplus h_L^+$; le point base de $\mathcal{L}_{0,L}$ est alors le projecteur sur $H^+(L) \oplus 0$ parallèlement à $0 \oplus H^+(L)$.

On constate à nouveau que la correspondance $L \mapsto \mathcal{L}_{0,L}$ est un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles pointés; on pose :

$$\mathcal{L}_0(R) = \operatorname{colim}_{\mathbb{N}(R)} \mathcal{L}_{0,R^n} .$$

RELATION AVEC LE GROUPE DE GROTHENDIECK-WITT

Soit P un élément de $\mathcal{L}_{0,L}$. Par définition, P est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, à savoir la restriction de $h_L^+ \oplus h_L^+$; on peut donc considérer sa classe, que l'on note $[P]$, dans le groupe de Grothendieck-Witt $\mathrm{GW}^+(R)$ de l'anneau R (ce groupe est évoqué en 4.5.1, il est généralement noté $\mathrm{GW}(R)$, le “+” en exposant est là pour le distinguer de son “analogue antisymétrique” qui apparaîtra bientôt et qui sera quant à lui noté $\mathrm{GW}^-(R)$).

On note $\mathrm{gw}^+ : \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathrm{GW}^+$ la transformation naturelle induite par les applications $\mathcal{L}_{0,L} \rightarrow \mathrm{GW}^+(R), P \mapsto [P] - [P_0]$, P_0 désignant le point de base de $\mathcal{L}_{0,L}$.

Proposition 6.2.1.1. *Pour tout anneau R contenant $\frac{1}{2}$, la transformation naturelle gw^+ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_0)(R) \cong (\pi_0 \mathrm{GW}^+)(R) .$$

Démonstration. Elle est tout à fait semblable à celle de la proposition 6.1.1. Soit L un R -module libre de dimension finie. On note O_L le groupe orthogonal de la

forme h_L^+ . Le groupe $O_{L \oplus L}$ opère sur l'ensemble $\mathcal{L}_{0,L}$ de façon $\mathcal{C}$ -naturelle. En passant à la limite directe sur $\mathbb{N}(R)$ on obtient une action du groupe $O(R)$ sur l'ensemble $\mathcal{L}_0(R)$ (naturelle en R); on note respectivement $O \backslash \mathcal{L}_0$ et $EO \backslash \mathcal{L}_0$ les foncteurs qui associent à un anneau R les ensembles quotients $O(R) \backslash \mathcal{L}_0(R)$ et $EO(R) \backslash \mathcal{L}_0(R)$ (le sous-groupe $EO(R)$ de $O(R)$ est “l’analogue symétrique” du sous-groupe $ESp(R)$ de $Sp(R)$). Il est clair que la transformation naturelle gw^+ admet la factorisation suivante :

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow EO \backslash \mathcal{L}_0 \rightarrow O \backslash \mathcal{L}_0 \rightarrow GW^+(R).$$

On montre que les deux transformations naturelles de droite sont des isomorphismes fonctoriels (quitte à remplacer la catégorie des anneaux commutatifs par celle des anneaux commutatifs contenant $\frac{1}{2}$); la proposition en résulte, car il est à nouveau évident que la transformation naturelle de gauche induit un isomorphisme fonctoriel $\pi_0 \mathcal{L}_0 \cong \pi_0 (EO \backslash \mathcal{K}_0)$.

Les détails sont les mêmes, *mutatis mutandis*, que ceux de la démonstration de 6.1.1; la seule différence qui vaille la peine d’être signalée est la suivante : le fait que tout module projectif de rang fini est facteur direct dans un module libre de dimension finie est remplacé par l’énoncé ci-dessous.

Lemme 6.2.1.2. *Soit R un anneau contenant $\frac{1}{2}$. Soit P un R -module projectif de rang fini muni d’une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée p . Alors il existe un R -module projectif de rang fini Q muni d’une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée q et un R -module libre de dimension finie L tel que la somme orthogonale $p \oplus q$ est isomorphe à la forme hyperbolique h_L^+ .*

Démonstration. Soit P' un R -module projectif de rang fini tel que $P \oplus P'$ est libre; on pose $Q = P^* \oplus (P' \oplus P'^*)$ et $q = -p^{-1} \oplus h_{P'}^+$, (la notation $h_{P'}^+$ désigne la forme hyperbolique symétrique sur $P' \oplus P'^*$). Le lemme 4.5.1.9 implique que l’on a un isomorphisme $p \oplus q \cong h_{P \oplus P'}^+$. $\square$

DÉFINITION DU FONCTEUR $\mathcal{L}_1$

Comme nous l’avons déjà dit, on note O_L le groupe orthogonal de la forme h_L^+ . On pose $O_n(R) = O_{R^n}$. On note O ou $\mathcal{L}_1$ la limite directe des foncteurs O_n (observer que la musique est toujours la même : la correspondance $L \mapsto O_L$ est un foncteur défini sur la catégorie $\mathcal{C}$).

RELATION AVEC LA K-THÉORIE ORTHOGONALE

On note $ko_1 : O(R) \rightarrow KO_1(R)$ l’homomorphisme d’abélianisation du groupe $O(R)$. La transformation naturelle ko_1 induit là encore une bijection $(\pi_0 \mathcal{L}_1)(R) \cong (\pi_0 KO_1)(R)$, au moins si l’on suppose 2 inversible dans R , puisque le sous-groupe dérivé de $O(R)$ est “le sous-groupe élémentaire”

$\text{EO}(R)$ (voir par exemple [BS2], nous avons fait allusion à la définition de $\text{EO}(R)$ dans la démonstration de la proposition 6.2.1.1).

DÉFINITION DES FONCTEURS $\mathcal{L}_i$ POUR $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

La définition de chacun de ces foncteurs fait intervenir des formes bilinéaires ϵ -symétriques non-dégénérées avec $\epsilon = \pm 1$. On passe de la définition de $\mathcal{L}_i$ à celle de $\mathcal{L}_{i+4}$ en changeant ϵ en $-\epsilon$ (nous dirons “en changeant la symétrie” ou “par changement de symétrie”).

- Commençons par le cas $i = 4$. Soit L un R -module libre de dimension finie ; on note $H^-(L)$ le R -module $L \oplus L^*$ muni de sa forme antisymétrique hyperbolique (appelée forme symplectique au chapitre 2 où $H^-(L)$ est simplement noté $H(L)$) ; cette forme sera notée $\bar{h}_L$. On note $\mathcal{L}_{4,L}$ l'ensemble des sous-modules P de $H^-(L) \oplus H^-(L)$ telle que la restriction à P de la somme orthogonale $\bar{h}_L \oplus \bar{h}_L$ est non-dégénérée ($\mathcal{L}_{4,L}$ peut être également défini en termes de projecteurs auto-adjoints) et on choisit $H^-(L) \oplus 0$ comme point base de $\mathcal{L}_{4,L}$. L'ensemble pointé $\mathcal{L}_4(R)$ est la limite directe sur $\mathbb{N}(R)$ des $\mathcal{L}_{4,R^n}$. On dispose à nouveau d'une transformation naturelle $\text{gw}^- : \mathcal{L}_4 \rightarrow \text{GW}^-$, $\text{GW}^-(R)$ désignant le groupe de Grothendieck-Witt défini en termes de modules projectifs de type fini munis de formes bilinéaires antisymétriques non-dégénérées.
- Le foncteur $\mathcal{L}_5$ est le foncteur qui associe à un anneau (commutatif) R le groupe symplectique infini $\text{Sp}(R)$.

Comme nous l'avons déjà dit, les foncteurs $\mathcal{L}_6$ et $\mathcal{L}_7$ sont respectivement les foncteurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$ introduits au paragraphe 4.1. Rappelons que $\mathcal{L}_L$ est l'ensemble des lagrangiens de $H^-(L)$ (pointé par L) et que $\mathcal{F}_L$ est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur $L \oplus L^*$ (pointé par $\bar{h}_L^+$).

Appliquons le “principe de changement de symétrie” :

- Le foncteur $\mathcal{L}_2$ est la limite directe sur $\mathbb{N}(R)$ du foncteur qui associe à un R -module libre de dimension finie L l'ensemble des lagrangiens de $H^+(L)$ (pointé par L).
- Le foncteur $\mathcal{L}_3$ est la limite directe sur $\mathbb{N}(R)$ du foncteur qui associe à un R -module libre de dimension finie L l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques non-dégénérées sur $L \oplus L^*$ (pointé par la forme hyperbolique).

FONCTEURS EN GROUPES ABÉLIENS ATTACHÉS AUX FONCTEURS $\mathcal{L}_i$

A chaque foncteur $\mathcal{L}_i$, $i \in \mathbb{Z}/8$, est attaché un foncteur (toujours défini sur la catégorie des anneaux commutatifs) en groupes abéliens A_i , ainsi qu'une transformation naturelle $a_i : \mathcal{L}_i \rightarrow A_i$ qui induit, pour tout anneau (commutatif) R , une bijection $(\pi_0 \mathcal{L}_i)(R) \rightarrow (\pi_0 A_i)(R)$ (Proposition 6.2.1.5 ci-après).

En voici la liste :

$$\begin{array}{cccccccc}
 \mathcal{L}_0 & \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 & \mathcal{L}_4 & \mathcal{L}_5 & \mathcal{L}_6 & \mathcal{L}_7 \\
 \text{gw}^+ \downarrow & \text{ko}_1 \downarrow & \text{u}^+ \downarrow & \text{v}^- \downarrow & \text{gw}^- \downarrow & \text{ksp}_1 \downarrow & \text{u}^- \downarrow & \text{v}^+ \downarrow \\
 \text{GW}^+ & \text{KO}_1 & \text{U}^+ & \text{V}^- & \text{GW}^- & \text{KSp}_1 & \text{U}^- & \text{V}^+ .
 \end{array}$$

- Le groupe $V^+(R)$ est le groupe $V(R)$ introduit en 4.5.1 ; la transformation naturelle v^+ est induite par les applications $\mathcal{F}_L \rightarrow V(R)$, $q \mapsto [L \oplus L^*; h_L^+, q]$.
Le groupe $V^-(R)$ et la transformation naturelle v^- sont définis “en changeant la symétrie”.
Les groupes $U^\pm(R)$ ont eux aussi été introduits par Karoubi ([KA2], I, Appendice 3).
- Rappelons par exemple la définition de $U^-(R)$. On considère les triplets $(E; \Lambda_0, \Lambda_1)$ avec E un R -module libre de dimension finie muni d’une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée et Λ_0, Λ_1 deux lagrangiens de E . Le groupe $U^-(R)$ est le quotient du groupe abélien libre engendré par les classes d’isomorphismes de tels triplets, disons $[E; \Lambda_0, \Lambda_1]$, par les relations ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 [E; \Lambda_0, \Lambda_1] + [E'; \Lambda'_0, \Lambda'_1] &= [E \oplus E'; \Lambda_0 \oplus \Lambda'_0, \Lambda_1 \oplus \Lambda'_1] ; \\
 [E; \Lambda_0, \Lambda_1] + [E; \Lambda_1, \Lambda_2] &= [E; \Lambda_0, \Lambda_2] .
 \end{aligned}$$

La transformation naturelle $u^- : \mathcal{L}_6 \rightarrow U^-$ est obtenue en associant à un lagrangien Λ de $H^-(L)$ la classe dans $U^-(R)$ du triplet $(H^-(L); L, \Lambda)$.

- Le groupe $U^+(R)$ et la transformation naturelle $u^+ : \mathcal{L}_2 \rightarrow U^+$ sont définis “en changeant la symétrie”.

Le groupe $V(R)$ introduit en 4.5.1 a été défini en termes de R -modules libres de dimension finie munis de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées. Si l’on remplace dans cette définition les modules libres de dimension finie par des modules projectifs de rang fini, on obtient *a priori* un nouveau groupe, disons $V^{\text{proj}}(R)$. Pareillement, si l’on remplace dans la définition du groupe $U^-(R)$ l’hypothèse “ E libre de dimension finie” par “ E projectif de rang fini”, on obtient *a priori* un nouveau groupe, disons $U^{-, \text{proj}}(R)$. La proposition ci-dessous dit que ces généralisations sont en fait illusoires ; cependant, il sera commode par la suite de disposer des définitions “projectives” des groupes $V(R)$ et $U^-(R)$ (originellement adoptées par Karoubi).

Proposition 6.2.1.3. *Pour tout anneau R , les homomorphismes naturels*

$$V(R) \rightarrow V^{\text{proj}}(R) , \quad U^-(R) \rightarrow U^{-, \text{proj}}(R)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. On traite seulement le cas du groupe $V(R)$; l'autre cas se traite de manière analogue.

On constate pour commencer que le lemme 6.2.1.2 admet le scholie suivant :

Scholie 6.2.1.4. *Soit P un R -module projectif de rang fini muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée p . Alors il existe un R -module projectif de rang fini Q muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée q tel que le R -module $P \oplus Q$ est libre (de dimension finie).*

(Le lecteur attentif aura observé que l'hypothèse " R contient $\frac{1}{2}$ " n'est plus nécessaire dans ce scholie.)

Soit maintenant $i : V(R) \rightarrow V^{\text{proj}}(R)$ l'homomorphisme naturel dont il est question dans l'énoncé 6.2.1.3. On définit un homomorphisme naturel, disons $r : V^{\text{proj}}(R) \rightarrow V(R)$, de la façon suivante. Soit $(P; p_0, p_1)$ un R -module projectif de rang fini muni de deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées. Soit $(Q; q)$ un R -module projectif de rang fini muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée tel que le R -module $P \oplus Q$ est libre. On constate tout d'abord que la classe du triplet $(P \oplus Q; p_0 \oplus q, p_1 \oplus q)$ dans $V(R)$ est indépendante du choix de $(Q; q)$. En effet, soit $(Q'; q')$ un autre choix, on a

$$\begin{aligned} [P \oplus Q'; p_0 \oplus q', p_1 \oplus q'] - [P \oplus Q; p_0 \oplus q, p_1 \oplus q] \\ = [P \oplus Q' \oplus P \oplus Q; p_0 \oplus q' \oplus p_1 \oplus q, p_1 \oplus q' \oplus p_0 \oplus q] ; \end{aligned}$$

il n'est pas difficile de se convaincre de ce que le second membre est nul en invoquant la proposition 4.5.1.6 : les deux formes bilinéaires symétriques du second membre sont isomorphes par un isomorphisme "élémentaire". On constate ensuite que l'application $(P; p_0, p_1) \mapsto [P \oplus Q; p_0 \oplus q, p_1 \oplus q]$ passe au quotient pour donner l'homomorphisme promis $r : V^{\text{proj}}(R) \rightarrow V(R)$. On constate enfin que les deux composés $r \circ i$ et $i \circ r$ sont l'identité.

Proposition 6.2.1.5. *Pour tout anneau R contenant $\frac{1}{2}$, les transformations naturelles $a_i : \mathcal{L}_i \rightarrow A_i$ induisent des bijections*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_i)(R) \cong (\pi_0 A_i)(R) .$$

Démonstration. Les cas $i = 0$ et $i = 1$ ont déjà été traités. En fait, la structure de l'argument est la même dans les deux cas. Insistons lourdement. Posons $A'_i(R) = \text{EO}(R) \setminus \mathcal{L}_i(R)$, $i = 0, 1$; nous avons observé que la transformation naturelle a_i admettait une factorisation de la forme $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\bar{a}_i} A'_i \xrightarrow{\phi} A_i$ constaté que $\bar{a}_i$ induisait un isomorphisme fonctoriel $\pi_0 \mathcal{L}_i \cong \pi_0 A'_i$ et vérifié (dans le cas $i=1$ en consultant la littérature) que l'application $A'_i(R) \xrightarrow{\phi} A_i(R)$ est une

bijection pour tout anneau R contenant $\frac{1}{2}$. On procède de la même façon dans les six autres cas. Nous traitons en détails ci-après les cas $i = 7$ et $i = 6$; les cas $i = 4, 5, 3$ sont traités “par changement de symétrie”.

Cas $i = 7$. On prend pour A'_7 le foncteur $\mathcal{F}/\text{EGL}$ étudié en 4.5.2 sous le nom de V' . On a montré alors (Proposition 4.5.2.2) que v^+ admettait une factorisation de la forme $\mathcal{F}(R) \rightarrow \mathcal{F}(R)/\text{EGL}(R) \xrightarrow{\phi} V(R)$ et que ϕ était une bijection pour tout anneau R contenant $\frac{1}{2}$.

Cas $i = 6$. On prend pour A'_6 le foncteur $\text{ESp} \backslash \mathcal{L}$. La définition de ce dernier est sans surprise : soit L un R -module libre de dimension finie, alors le groupe Sp_L opère sur l'ensemble $\mathcal{L}_L$ de façon $\mathcal{C}$ -naturelle. La proposition 6.2.1.8 ci-après, très semblable à la proposition 4.5.2.2, dit que la transformation naturelle u^- admet une factorisation de la forme $\mathcal{L} \rightarrow \text{ESp} \backslash \mathcal{L} \xrightarrow{\phi} U^-$ et que la transformation naturelle ϕ est un isomorphisme fonctoriel.

Avant d'en arriver à la proposition 6.2.1.8, nous introduisons une terminologie et deux définitions (qui nous seront utiles par ailleurs), et énonçons deux lemmes (le second est *ad hoc*, le premier sera également invoqué plus tard).

Terminologie. Soit M un module muni d'une forme bilinéaire ϵ -symétrique; nous appelons *isométrie* de M un automorphisme de ce module qui préserve la forme bilinéaire. Cette terminologie est assez raisonnable dans le cas $\epsilon = 1$, beaucoup moins dans le cas $\epsilon = -1$, mais nous n'avons pas trouvé mieux!

Déterminant d'un automorphisme (d'un module projectif de rang fini). Nous rappelons brièvement la définition de cette notion (la définition dans le cas particulier d'un automorphisme d'un module libre de dimension finie a déjà été rappelée en 4.5.1). Soient P un R -module projectif de rang fini et ϕ un automorphisme de P . Soient Q un R -module projectif de rang fini et n un entier tels que $P \oplus Q$ est isomorphe à R^n ; le *Déterminant* de ϕ (observer que le D est majuscule), noté $\text{Dét} \phi$, est l'image de $\phi \oplus \text{id}_Q$ par le composé d'un isomorphisme du groupe $\text{GL}_{P \oplus Q}$ sur le groupe $\text{GL}_n(R)$, induit par un isomorphisme de $P \oplus Q$ sur R^n , et des homomorphismes canoniques $\text{GL}_n(R) \rightarrow \text{GL}(R)$ et $\text{GL}(R) \rightarrow \text{K}_1(R)$.

Déterminant d'une isométrie (d'un module projectif de rang fini muni d'une forme ϵ -symétrique non-dégénérée). Nous rappelons brièvement la définition de cette notion en nous limitant au cas antisymétrique. Soient P un R -module projectif de rang fini muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée et Φ une isométrie de P . Soient Q un R -module projectif de rang fini muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée et n un entier tels que la somme orthogonale $P \oplus Q$ est isomorphe à $H^-(R^n)$ (la “version antisymétrique” de 6.2.1.2 affirme l'existence d'un tel Q); le *Déterminant* de Φ , encore noté $\text{Dét} \Phi$, est cette fois l'image de $\Phi \oplus \text{id}_Q$ par le composé d'un isomorphisme du

groupe des isométries de $P \oplus Q$ sur le groupe $\mathrm{Sp}_n(R)$, induit par une isométrie de $P \oplus Q$ sur $H^-(R^n)$, et des homomorphismes canoniques $\mathrm{Sp}_n(R) \rightarrow \mathrm{Sp}(R)$ et $\mathrm{Sp}(R) \rightarrow \mathrm{KSp}_1(R)$.

La démonstration du lemme suivant est laissée en exercice au lecteur :

Lemme 6.2.1.6. *Soient P un R -module projectif de rang fini muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée et Φ une isométrie de P . On suppose que P possède un lagrangien Λ qui est invariant par Φ ; on note ϕ l'automorphisme de Λ induit par Φ . Alors on a l'égalité :*

$$\mathrm{Dét} \Phi = H(\mathrm{Dét} \phi) ,$$

H désignant ci-dessus l'homomorphisme de $\mathrm{K}_1(R)$ dans $\mathrm{KSp}_1(R)$ induit par l'homomorphisme symplectique de $\mathrm{GL}(R)$ dans $\mathrm{Sp}(R)$. En particulier, si Φ induit l'identité de Λ alors $\mathrm{Dét} \Phi$ est trivial.

Le lemme 6.2.1.7 ci-dessous, qui est le pendant du lemme 4.5.2.1, sera implicitement utilisé à plusieurs reprises ci-après ; il s'agit encore d'une variante de la proposition 4.1.1 (démonstration comprise).

On pose $U'^-(R) = \mathrm{ESp}(R) \backslash \mathcal{L}(R)$.

Lemme 6.2.1.7. *Soient L un R -module libre de dimension n et b un isomorphisme de R^n sur L . Alors la composée de l'application de $\mathcal{L}_L$ dans $\mathcal{L}_n(R)$ induite par b et des applications canoniques de $\mathcal{L}_n(R)$ dans $\mathcal{L}(R)$ et de $\mathcal{L}(R)$ dans $U'^-(R)$ est indépendante du choix de b .*

Ce lemme a notamment les conséquences suivantes :

- La somme orthogonale fait de $U'^-(R)$ un monoïde abélien dont l'élément neutre est la classe du point base de $\mathcal{L}(R)$.
- On l'égalité $U'^-(R) = (\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R)) \backslash \mathcal{L}(R)$ et l'action de $\mathrm{Sp}(R)$ sur $\mathcal{L}(R)$ induit une action de ${}_W1(R)$ sur $U'^-(R)$.

Cette action est fidèle. En effet, le lemme 6.2.1.6 implique que le sous-groupe d'isotropie, pour l'action de $\mathrm{Sp}(R)$, de tout point de $\mathcal{L}(R)$ est contenu dans $\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R)$.

[On rappelle que l'on identifie $\mathrm{GL}(R)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(R)$ via l'homomorphisme hyperbolique et que le sous-ensemble $\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R)$ de $\mathrm{Sp}(R)$ constitué des produits d'éléments de $\mathrm{ESp}(R)$ et de $\mathrm{GL}(R)$ est un sous-groupe distingué ; le groupe ${}_W1(R)$ est le quotient $\mathrm{Sp}(R)/(\mathrm{ESp}(R) \cdot \mathrm{GL}(R))$, il s'identifie au conoyau de $H : \mathrm{K}_1(R) \rightarrow \mathrm{KSp}_1(R)$ (en particulier, il est abélien).]

Voici enfin la proposition annoncée :

Proposition 6.2.1.8.

(a) *Les applications*

$$\mathcal{L}_L \rightarrow U^-(R) , \quad \Lambda \mapsto [H^-(L); L, \Lambda]$$

induisent un homomorphisme de monoïdes, disons ϕ , de $U'^-(R)$ dans $U^-(R)$.

(b) *Le monoïde $U'^-(R)$ est un groupe.*

(c) *L'homomorphisme $\phi : U'^-(R) \rightarrow U^-(R)$ est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. La vérification du point (a) est très semblable à celle du point (a) de 4.5.2.2. On remarque que l'application

$$\mathrm{Sp}_L \rightarrow U^-(R), \quad a \mapsto [H^-(L); \Lambda, a \cdot \Lambda]$$

est un homomorphisme de groupes ; puisque le groupe $U^-(R)$ est abélien cet homomorphisme est nul sur le sous-groupe dérivé de Sp_L .

Point (b). On peut se convaincre de ce que $U'^-(R)$ est un groupe de bien des façons. En voici une qui a l'avantage d'exhiber l'opposé d'un élément. Soit L un R -module libre de dimension finie. On note s l'automorphisme $(x, \xi) \mapsto (-x, \xi)$ du R -module $H^-(L) = L \oplus L^*$; on constate que s est une “anti-isométrie” de $H^-(L)$; en clair, que l'on a $s^* \circ \hbar_L \circ s = -\hbar_L$. Soient Λ et Θ deux lagrangiens de $H^-(L)$, transverses l'un à l'autre ; on va voir que la somme dans le monoïde abélien $U'^-(R)$ des classes de Λ et $s(\Theta)$ est l'élément neutre. On commence par montrer que cette somme, disons $\omega(\Lambda, \Theta)$, est indépendante du choix de Λ et Θ . L'élément $\omega(\Lambda, \Theta)$ de $U'^-(R)$ est représenté, *via* l'isomorphisme $H^-(L) \oplus H^-(L) \cong H^-(L \oplus L)$, par le lagrangien $\Lambda \underline{\oplus} s(\Theta)$ de $H^-(L) \oplus H^-(L)$ “somme directe externe” de Λ et $s(\Theta)$: $\Lambda \underline{\oplus} s(\Theta) = (\Lambda \oplus 0) \oplus (0 \oplus s(\Theta))$. On constate que $\Lambda \underline{\oplus} s(\Theta)$ est transverse au graphe de s , disons Γ , qui est également un lagrangien de $H^-(L) \oplus H^-(L)$. Soit (Λ', Θ') un autre couple de lagrangiens de $H^-(L)$ transverses l'un à l'autre ; ce qui précède montre qu'il existe une isométrie a de $H^-(L) \oplus H^-(L)$, qui est l'identité sur Γ et qui envoie $\Lambda \underline{\oplus} s(\Theta)$ sur $\Lambda' \underline{\oplus} s(\Theta')$ (invoquer par exemple le point (b) de 2.1.5). Comme le Déterminant dans $\mathrm{KSp}_1(R)$ de l'isométrie a est trivial (invoquer par exemple le lemme 6.2.1.6), on a bien $\omega(\Lambda, \Theta) = \omega(\Lambda', \Theta')$. On montre enfin $\omega(\Lambda, \Theta) = 0$ en prenant $(\Lambda', \Theta') = (L, L^*)$ et en observant que la classe de L^* dans $U'^-(R)$ est nulle (invoquer s'il le faut la proposition 2.1.3 et le fait qu'il existe des formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur L).

Avant de passer au point (c), quelques observations :

Soit E un R -module libre de dimension finie muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée. Soient Λ et Θ deux lagrangiens de E transverses l'un à l'autre : $E = \Lambda \oplus \Theta$. Alors il existe une unique isométrie de E sur $H^-(\Lambda)$ induisant l'identité de Λ et envoyant Θ sur Λ^* (invoquer à nouveau le point (b) de 2.1.5). On note $a(\Lambda, \Theta)$ cette isométrie. On note $A(\Lambda, \Theta)$ la composée des isométries suivantes :

$$E \oplus E \xrightarrow{a(\Lambda, \Theta) \oplus a(\Theta, \Lambda)} H^-(\Lambda) \oplus H^-(\Theta) \cong H^-(\Lambda \oplus \Theta) = H^-(E)$$

(les trois premiers symboles $\oplus$ ci-dessus désigne la somme orthogonale et à l'extrême droite E n'est plus qu'un R -module) et $\Lambda \underline{\oplus} \Theta$ le lagrangien de $E \oplus E$, somme directe externe de Λ et Θ (défini comme ci-dessus). On constate que l'on a tout fait pour que l'image du lagrangien $\Lambda \underline{\oplus} \Theta$ par l'isométrie $A(\Lambda, \Theta)$ soit le lagrangien E de $H^-(E)$.

Ces observations faites, on vérifie le point (b) de la proposition.

Soient Λ_0, Λ_1 deux lagrangiens de E ; soit Θ_0 un lagrangien de E transverse à Λ_0 . On a dans $U^-(R)$ la suite d'égalités suivantes :

$$\begin{aligned} [E; \Lambda_0, \Lambda_1] &= [E \oplus E; \Lambda_0 \underline{\oplus} \Theta_0, \Lambda_1 \underline{\oplus} \Theta_0] \\ &= [H^-(E); A(\Lambda_0, \Theta_0)(\Lambda_0 \underline{\oplus} \Theta_0), A(\Lambda_0, \Theta_0)(\Lambda_1 \underline{\oplus} \Theta_0)] \\ &= [H^-(E); E, A(\Lambda_0, \Theta_0)(\Lambda_1 \underline{\oplus} \Theta_0)] . \end{aligned}$$

Ceci montre déjà que l'homomorphisme $\phi : U'^-(R) \rightarrow U^-(R)$ est surjectif. En fait, nous avons mieux :

- (1) La classe dans $U'^-(R)$ du lagrangien $A(\Lambda_0, \Theta_0)(\Lambda_1 \underline{\oplus} \Theta_0)$ de $H^-(E)$, disons $\delta(E; \Lambda_0, \Lambda_1; \Theta_0)$, ne dépend pas du choix de Θ_0 .
- (2) L'application $(E; \Lambda_0, \Lambda_1) \mapsto \delta(E; \Lambda_0, \Lambda_1; \Theta_0)$ induit un homomorphisme de monoïdes abéliens, disons $\delta : U^-(R) \rightarrow U'^-(R)$, qui est l'inverse de ϕ .

Nous justifions ces deux affirmations ci-après. On commence par faire les trois constatations suivantes :

- (3) Pour tout couple (Λ, Θ) de lagrangiens de E transverses l'un à l'autre, on a $\delta(E; \Lambda, \Lambda; \Theta) = 0$.
- (4) L'application $(E; \Lambda_0, \Lambda_1; \Theta_0) \mapsto \delta(E; \Lambda_0, \Lambda_1; \Theta_0)$ préserve la somme orthogonale. En clair : soit $(E'; \Lambda'_0, \Lambda'_1; \Theta'_0)$ un quadruplet du même type que $(E; \Lambda_0, \Lambda_1; \Theta_0)$, alors on a dans $U'^-(R)$ l'égalité

$$\begin{aligned} \delta(E \oplus E'; \Lambda_0 \oplus \Lambda'_0, \Lambda_0 \oplus \Lambda'_0; \Theta_0 \oplus \Theta'_0) \\ = \delta(E; \Lambda_0, \Lambda_1; \Theta_0) + \delta(E'; \Lambda'_0, \Lambda'_1; \Theta'_0) . \end{aligned}$$

- (5) Soient $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ trois lagrangiens de E ; soit Θ_0, Θ_1 deux lagrangiens de E respectivement transverses à Λ_0 et Λ_1 . Alors on a dans $U'^-(R)$ l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \delta(E; \Lambda_0, \Lambda_2; \Theta_0) + \delta(E; \Lambda_1, \Lambda_1; \Theta_1) \\ = a \cdot (\delta(E; \Lambda_0, \Lambda_1; \Theta_0) + \delta(E; \Lambda_1, \Lambda_2; \Theta_1)) , \end{aligned}$$

a désignant l'image dans ${}_W W_1(R)$ du Déterminant (appartenant à $KSp_1(R)$) de l'isométrie de $E \oplus E \oplus E \oplus E$ "qui échange les premier

et troisième facteurs” et la notation $- \cdot -$ désignant au second membre l'action de ${}_W1(R)$ sur $U^-(R)$ évoquée plus haut.

Comme cette action est fidèle, on voit, en prenant $\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_2$ et en utilisant (3), que a est nul. Compte tenu de (3), on a donc :

$$(6) \quad \delta(E; \Lambda_0, \Lambda_2; \Theta_0) = \delta(E; \Lambda_0, \Lambda_1; \Theta_0) + \delta(E; \Lambda_1, \Lambda_2; \Theta_1) .$$

En prenant $\Lambda_0 = \Lambda_1$ dans (6) et en utilisant (3), on justifie l'affirmation (1). On peut donc poser $\delta(E; \Lambda_0, \Lambda_2; \Theta_0) = \delta(E; \Lambda_0, \Lambda_2)$; (4) et (6) montrent alors que l'application $(E; \Lambda_0, \Lambda_1) \mapsto \delta(E; \Lambda_0, \Lambda_1)$ induit bien un homomorphisme de monoïdes abéliens $\delta : U^-(R) \rightarrow U^-(R)$.

On achève maintenant de justifier (2). On a tout fait pour que l'application composée $\phi \circ \delta$ soit l'identité; on s'intéresse donc à l'application composée $\delta \circ \phi$. Soient L un R -module de dimension finie et Λ un lagrangien de $H^-(L)$; on note x la classe de Λ dans $U^-(R)$. L'élément $(\delta \circ \phi)(x)$ de $U^-(R)$ est représenté par le lagrangien $A(L, L^*)(\Lambda \oplus L^*)$ de $H^-(L \oplus L^*)$, disons Δ . Soit Σ le lagrangien de $H^-(L \oplus L^*)$ image du lagrangien $\Lambda \oplus L^*$ via l'isomorphisme $H^-(L) \oplus H^-(L^*) \cong H^-(L \oplus L^*)$; la classe de Σ dans $U^-(R)$ est x . On constate qu'il existe un isométrie de $H^-(L \oplus L^*)$, disons B , indépendante de Λ , telle que l'on a $\Delta = B(\Sigma)$; on a donc $(\delta \circ \phi)(x) = b \cdot x$, b désignant l'image dans ${}_W1(R)$ du Déterminant de B . On conclut comme précédemment : on voit que b est nul en prenant $\Lambda = L$. $\square\square$

Remarque. Le corollaire 6.2.1.9 ci-dessous est à comparer aux énoncés 4.5.2.6 et 4.5.2.5; la partie de l'énoncé 6.2.1.9 concernant la seconde transformation naturelle peut être vue comme une généralisation du point (c) de la proposition 3.1.1.

Corollaire 6.2.1.9. *Pour tout anneau régulier R contenant $\frac{1}{2}$, les transformations naturelles $u^- : \mathcal{L} \rightarrow U^-$ et $\mathcal{L} \rightarrow \text{ESp} \backslash \mathcal{L}$ induisent des bijections*

$$(\pi_0 \mathcal{L})(R) \cong U^-(R) , \quad (\pi_0 \mathcal{L})(R) \cong \text{ESp}(R) \backslash \mathcal{L}(R) .$$

Démonstration. Les hypothèses faites sur R garantissent que cet anneau est U^- -rigide (pour s'en convaincre le lecteur est invité à se reporter à 6.2.3.1), en d'autres termes que la surjection canonique $U^-(R) \rightarrow (\pi_0 U^-)(R)$ est une bijection. $\square$

Récapitulation

Nous avons vu lors de la démonstration de la proposition 6.2.1.5 que les huit transformations naturelles $a_i : \mathcal{L}_i \rightarrow A_i$ admettent des factorisations de la

forme suivante :

$$\begin{array}{cccccccc}
 \mathcal{L}_0 & \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 & \mathcal{L}_4 & \mathcal{L}_5 & \mathcal{L}_6 & \mathcal{L}_7 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathrm{EO} \backslash \mathcal{L}_0 & \mathrm{EO} \backslash \mathcal{L}_1 & \mathrm{EO} \backslash \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 / \mathrm{EGL} & \mathrm{ESp} \backslash \mathcal{L}_4 & \mathrm{ESp} \backslash \mathcal{L}_5 & \mathrm{ESp} \backslash \mathcal{L}_6 & \mathcal{L}_7 / \mathrm{EGL} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathrm{GW}^+ & \mathrm{KO}_1 & \mathrm{U}^+ & \mathrm{V}^- & \mathrm{GW}^- & \mathrm{KSp}_1 & \mathrm{U}^- & \mathrm{V}^+
 \end{array}$$

(en réalité, nous avons seulement traité des cas $i = 0, 1, 7, 6$, comme d'habitude les autres cas sont traités "par changement de symétrie") et que dans ce diagramme les huit transformations naturelles du bas sont des isomorphismes fonctoriels (quitte à remplacer, pour certaines valeurs de i , la catégorie des anneaux commutatifs par celle des anneaux commutatifs contenant $\frac{1}{2}$).

Le lecteur a dû déjà deviné la généralisation des énoncés 4.5.2.5, 4.5.2.6 et 6.2.1.9 : Pour tout anneau régulier R contenant $\frac{1}{2}$, on a des isomorphismes $(\pi_0 \mathcal{L}_i)(R) \cong A'_i(R) \cong A_i(R)$ (la liste des foncteurs A'_i est la ligne du milieu du diagramme ci-dessus).

6.2.2 Relation entre $\mathcal{L}_{i+1}$ et $\Omega^S \mathcal{L}_i$ pour $i \equiv 0 \pmod{2}$

RELATION ENTRE $\mathcal{L}_1$ ET $\Omega^S \mathcal{L}_0$

On dispose d'une transformation $\mathcal{C}$ -naturelle ("S-lacet typique")

$$\ell_L : \mathcal{L}_{1,L} \rightarrow \Omega^S \mathcal{L}_{0,L}$$

dont la définition est détaillée ci-après.

Soit a un automorphisme de $\hbar_L^+$. On considère les deux automorphismes suivants de $\hbar_L^+ \oplus \hbar_L^+$:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

(matrices de type $(\mathrm{H}^+(L), \mathrm{H}^+(L)) \times (\mathrm{H}^+(L), \mathrm{H}^+(L))$) et l'on fait les observations suivantes :

– Ces deux automorphismes fixent le point base de $\mathcal{L}_{0,L}$:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathrm{H}^+(L) \oplus 0) = \mathrm{H}^+(L) \oplus 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot (\mathrm{H}^+(L) \oplus 0) = \mathrm{H}^+(L) \oplus 0.$$

– On a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} J^{-1}$ avec $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

– Soient O_L^2 le groupe orthogonal de $\hbar_L^+ \oplus \hbar_L^+$ et $h : \mathrm{GL}_{L \oplus L} \rightarrow \mathrm{O}_L^2$ le composé de l'homomorphisme hyperbolique $\mathrm{GL}_{L \oplus L} \rightarrow \mathrm{O}_{L \oplus L}$, $u \mapsto \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{*-1} \end{bmatrix}$ (matrice

de type $(L \oplus L, (L \oplus L)^*) \times (L \oplus L, (L \oplus L)^*)$ et de l'isomorphisme $O_{L \oplus L} \cong O_L^2$ induit par l'isomorphisme canonique $\hbar_{L \oplus L}^+ \cong \hbar_L^+ \oplus \hbar_L^+$. On constate que l'on a

$J = h(j)$ avec $j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (matrice de type $(L, L) \times (L, L)$).

– On a $j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

On obtient donc un élément $\ell_L(a)$ de $\Omega^S \mathcal{L}_{0,L}$ en posant

$$\ell_L(a)(T) = h(j(T)) \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} h(j(T))^{-1} \cdot (H^+(L) \oplus 0)$$

(voir les excuses présentées juste avant la définition de la transformation naturelle $\ell : \mathcal{K}_1 \rightarrow \Omega^S \mathcal{K}_0$) avec, comme précédemment,

$$j(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix}.$$

Les transformations naturelles ℓ_L induisent par passage à la limite directe sur $\mathbb{N}(R)$ une transformation naturelle

$$\ell : \mathcal{L}_1 \rightarrow \Omega^S \mathcal{L}_0.$$

Théorème 6.2.2.1. *Pour tout anneau régulier R contenant $\frac{1}{2}$, la transformation naturelle ℓ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_1)(R) \cong (\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_0)(R).$$

Démonstration. Elle s'articule autour des lemmes 6.2.2.2 et 6.2.2.3 ci-après (le lecteur observera que le lemme 6.2.2.2 est de la même veine que le lemme 3.1.2).

Lemme 6.2.2.2. *Soient L un R -module libre de dimension finie et α un élément de $\mathcal{L}_{0,L}(R[T])$ avec $\alpha(0) = H^+(L) \oplus 0$. Si l'anneau R est régulier et contient $\frac{1}{2}$, alors il existe un R -module libre de dimension finie L' et une isométrie Φ de $R[T] \otimes_R (H^+(L \oplus L') \oplus H^+(L \oplus L'))$, avec $\Phi(0) = 1$, tels que l'image de α dans $\mathcal{L}_{0,L \oplus L'}(R[T])$ est $\Phi \cdot (H^+(L \oplus L') \oplus 0)$.*

Démonstration. En clair, α est un sous-module de $R[T] \otimes_R (H^+(L) \oplus H^+(L))$, avec $\alpha(0) = H^+(L) \oplus 0$, tel que la restriction de $R[T] \otimes_R (\hbar_L^+ \oplus \hbar_L^+)$ à α est non-dégénérée; pareillement son orthogonal $\alpha^\perp$ est un sous-module de $R[T] \otimes_R (H^+(L) \oplus H^+(L))$, avec $\alpha^\perp(0) = 0 \oplus H^+(L)$, tel que la restriction de $R[T] \otimes_R (\hbar_L^+ \oplus \hbar_L^+)$ à $\alpha^\perp$ est non-dégénérée.

L'hypothèse “ R est régulier et contient $\frac{1}{2}$ ” assure la GW^+ -rigidité de l'anneau R . En effet, on a une suite exacte de foncteurs

$$0 \rightarrow \mathbf{I} \rightarrow \text{GW}^+ \rightarrow \mathbf{K}_0 \rightarrow 0 ,$$

l'hypothèse “ R est régulier” assure qu'il est $\mathbf{K}_0$ -rigide et l'hypothèse “ R contient $\frac{1}{2}$ ” qu'il est $\mathbf{I}$ -rigide (voir Théorème 6.2.3.1) ; on pourrait alternativement invoquer la suite exacte $\mathbf{K}_0 \rightarrow \text{GW}^+ \rightarrow \mathbf{W} \rightarrow 0$.

Cette GW^+ -rigidité fait qu'il existe un R -module libre de dimension finie L' et deux isomorphismes de $R[T]$ -modules

$$\begin{aligned} \phi : R[T] \otimes_R (\mathbf{H}^+(L) \oplus 0 \oplus \mathbf{H}^+(L') \oplus 0) &\rightarrow \alpha \oplus R[T] \otimes_R (\mathbf{H}^+(L') \oplus 0) , \\ \psi : R[T] \otimes_R (0 \oplus \mathbf{H}^+(L) \oplus 0 \oplus \mathbf{H}^+(L')) &\rightarrow \alpha^\perp \oplus R[T] \otimes_R (0 \oplus \mathbf{H}^+(L')) , \end{aligned}$$

préservant les formes bilinéaires symétriques non-dégénérées induites par

$$R[T] \otimes_R (\mathbf{h}_L^+ \oplus \mathbf{h}_L^+ \oplus \mathbf{h}_{L'}^+ \oplus \mathbf{h}_{L'}^+).$$

Compte tenu de l'égalité $\alpha \oplus \alpha^\perp = R[T] \otimes_R (\mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L'))$, la somme directe $\phi \oplus \psi$ s'identifie à une isométrie Φ de $R[T] \otimes_R (\mathbf{H}^+(L \oplus L') \oplus \mathbf{H}^+(L \oplus L'))$, telle que l'image de α dans $\mathcal{L}_{0, L \oplus L'}(R[T])$ est $\Phi \cdot (\mathbf{H}^+(L \oplus L') \oplus 0)$.

On achève en remplaçant, s'il le faut, $\Phi(T)$ par $\Phi(T) \circ \Phi(0)^{-1}$. $\square$

Le lemme ci-dessus permet de définir, sous l'hypothèse “ R est régulier et contient $\frac{1}{2}$ ”, une rétraction naturelle

$$\mathbf{r} : (\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_0)(R) \rightarrow (\pi_0 \mathcal{L}_1)(R)$$

de l'application $\pi_0 \ell$:

Soit α un S -lacet de $\mathcal{L}_{0, L}$ basé en $\mathbf{H}^+(L) \oplus 0$; soit L' un R -module libre de dimension finie et Φ une isométrie de $R[T] \otimes_R (\mathbf{H}^+(L \oplus L') \oplus \mathbf{H}^+(L \oplus L'))$, avec $\Phi(0) = 1$, tels que l'image de α dans $\Omega^S \mathcal{L}_{0, L \oplus L'}$ est $\Phi \cdot (\mathbf{H}^+(L \oplus L') \oplus 0)$. La condition $\Phi(1) \cdot (\mathbf{H}^+(L \oplus L') \oplus 0) = \mathbf{H}^+(L \oplus L') \oplus 0$ montre que $\Phi(1)$ induit une isométrie de $\mathbf{H}^+(L \oplus L')$, disons $\phi(1)$. On vérifie que l'image, disons $[\phi(1)^{-1}]$, de $\phi(1)^{-1}$ par l'application composée

$$\mathbf{O}_{L \oplus L'} \cong \mathbf{O}_{R^{\dim(L \oplus L')}} \rightarrow \mathbf{O}(R) \rightarrow (\pi_0 \mathbf{O})(R) = (\pi_0 \mathcal{L}_1)(R) ,$$

l'isomorphisme ci-dessus étant induit par le choix d'un isomorphisme $L \oplus L' \cong R^{\dim(L \oplus L')}$, est indépendante des choix faits et ne dépend que de la classe $[\alpha]$ de α dans $\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_{0, L}$; on pose $\mathbf{r}_L([\alpha]) = [\phi(1)^{-1}]$. Les applications $\mathbf{r}_L : \pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_{0, L} \rightarrow (\pi_0 \mathcal{L}_1)(R)$ induisent une application de $(\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_0)(R)$ dans

$(\pi_0 \mathcal{L}_1)(R)$, que l’on note r . Il est clair que l’on a tout fait pour que la composition $r \circ \pi_0 \ell$ soit l’identité.

Le lemme ci-dessous entraîne que l’application r est injective et donc que r et $\pi_0 \ell$ sont des bijections inverses l’une de l’autre.

Lemme 6.2.2.3. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Soient Φ_i , $i = 0, 1$, deux isométries de $R[T] \otimes_R (\mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L))$, avec $\Phi_i(0) = 1$ et $\Phi_i(1) \cdot (\mathbf{H}^+(L) \oplus 0) = \mathbf{H}^+(L) \oplus 0$; on note α_i , $i = 0, 1$, les deux S-lacets $\Phi_i \cdot (\mathbf{H}^+(L) \oplus 0)$ de $\mathcal{L}_{0,L}$ (basés en $\mathbf{H}^+(L) \oplus 0$).*

Si les deux isométries de $\mathbf{H}^+(L)$ induites par $\Phi_0(1)$ et $\Phi_1(1)$ coïncident, alors les images de α_0 et α_1 dans $\Omega^S \mathcal{L}_{0,L \oplus L}$ sont homotopes.

Démonstration. Soit U une indéterminée. Il existe une isométrie, disons $C(U)$, de $R[U] \otimes_R (\mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L))$, avec

$$C(U) = \begin{bmatrix} c_{1,1}(U) & 0 & 0 & c_{1,4}(U) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_{4,1}(U) & 0 & 0 & c_{4,4}(U) \end{bmatrix},$$

$$C(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(pour s’en convaincre procéder comme lors de la définition du S-lacet typique $\ell_L : \mathcal{L}_{1,L} \rightarrow \Omega^S \mathcal{L}_{0,L}$). On pose

$$A(T, U) = \begin{bmatrix} \Phi_1(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C(U) \begin{bmatrix} \Phi_1(T)^{-1} \Phi_0(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \times C(U)^{-1} \cdot ((\mathbf{H}^+(L) \oplus 0) \oplus (\mathbf{H}^+(L) \oplus 0)),$$

les matrices précédentes étant de type $((\mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L)), (\mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L))) \times ((\mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L)), (\mathbf{H}^+(L) \oplus \mathbf{H}^+(L)))$. On constate que $A(T, U)$ s’identifie à une homotopie entre les images dans $\Omega^S \mathcal{L}_{0,L \oplus L}$ de α_0 et α_1 . En effet, on a

$$C(1) \begin{bmatrix} \Phi_1(T)^{-1} \Phi_0(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C(1)^{-1} \cdot ((\mathbf{H}^+(L) \oplus 0) \oplus (\mathbf{H}^+(L) \oplus 0)) \\ = (\mathbf{H}^+(L) \oplus 0) \oplus (\mathbf{H}^+(L) \oplus 0)$$

pour tous Φ_0 et Φ_1 , et

$$C(U) \begin{bmatrix} \Phi_1(1)^{-1} \Phi_0(1) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C(U)^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_1(1)^{-1} \Phi_0(1) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sous l’hypothèse de l’énoncé 6.2.2.3. □□

Récapitulation

Le point (a-0) de l'énoncé ci-dessous est la reprise de l'énoncé 6.2.2.1 et le point (a-6) est contenu dans l'énoncé 4.2.10 ; les points (a-4) et (a-2) sont obtenus "par changement de symétrie" (démonstrations comprises).

Théorème-Définition 6.2.2.4. *Pour tout anneau régulier R contenant $\frac{1}{2}$:*

(a-0) *La transformation naturelle $\ell : \mathcal{L}_1 \rightarrow \Omega^S \mathcal{L}_0$ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_1)(R) \cong (\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_0)(R) .$$

(a-4) *La transformation naturelle "analogue" $\ell : \mathcal{L}_5 \rightarrow \Omega^S \mathcal{L}_4$ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_5)(R) \cong (\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_4)(R) .$$

(a-6) *La transformation naturelle $\ell : \mathcal{L}_7 \rightarrow \Omega^S \mathcal{L}_6$ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_7)(R) \cong (\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_6)(R) .$$

(a-2) *La transformation naturelle "analogue" $\ell : \mathcal{L}_3 \rightarrow \Omega^S \mathcal{L}_2$ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_3)(R) \cong (\pi_0 \Omega^S \mathcal{L}_2)(R) .$$

6.2.3 Relation entre $\mathcal{L}_{i+1}$ et $\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_i$ pour $i \equiv 1 \pmod{2}$

Notre traitement de ces relations nécessite quelques rappels préalables :

RAPPELS SUR LES HOMOMORPHISMES HYPERBOLIQUES ET LES GROUPES DE WITT

Soit i un entier modulo 4. On note $i \mapsto 2 \cdot i$ l'homomorphisme de $\mathbb{Z}/4$ dans $\mathbb{Z}/8$ induit par la multiplication par 2 de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

On dispose pour tout anneau R de huit homomorphismes naturels "hyperboliques"

$$h_{2 \cdot i} : K_0(R) \rightarrow A_{2 \cdot i}(R) , \quad h_{2 \cdot i+1} : K_0(R) \rightarrow A_{2 \cdot i+1}(R)$$

définis ci-après.

- L'homomorphisme $h_0 : K_0(R) \rightarrow GW^+(R)$ associe à la classe dans $K_0(R)$ d'un R -module projectif de rang fini P , la classe dans $GW^+(R)$ de $H^+(P)$ (cette notation désigne le R -module projectif de rang fini $P \oplus P^*$ muni de sa forme bilinéaire symétrique hyperbolique).
- On passe maintenant à la définition de h_6 . On adopte la "définition projective" du groupe $U^-(R)$ (Proposition 6.2.1.3). L'homomorphisme h_6 est cette fois l'application $[P] \mapsto [H^-(P); P, P^*]$.

- Les homomorphismes $h_4 : K_0(R) \rightarrow GW^-(R)$ et $h_2 : K_0(R) \rightarrow U^+(R)$ sont définis “par changement de symétrie”.
- L’homomorphisme $h_5 : K_1(R) \rightarrow KSp_1(R)$ est l’abélianisé de l’homomorphisme hyperbolique $H : GL(R) \rightarrow Sp(R)$.
- L’homomorphisme $h_7 : K_1(R) \rightarrow V^+(R)$ est l’homomorphisme noté ν en 4.5.1.3.
- Les homomorphismes $h_1 : K_1(R) \rightarrow KO_1(R)$ et $h_3 : K_1(R) \rightarrow V^-(R)$ sont à nouveau définis “par changement de symétrie”.

Les groupes de Witt sont les conoyaux des homomorphismes hyperboliques :

- On note $W_i^{\text{proj}}(R)$ le conoyau de l’homomorphisme $h_{2 \cdot i}$. On a donc quatre suites exactes tautologiques :

$$\begin{aligned}
 K_0(R) &\xrightarrow{h_0} GW^+(R) \longrightarrow W_0^{\text{proj}}(R) \longrightarrow 0, \\
 K_0(R) &\xrightarrow{h_2} U^+(R) \longrightarrow W_1^{\text{proj}}(R) \longrightarrow 0, \\
 K_0(R) &\xrightarrow{h_4} GW^-(R) \longrightarrow W_2^{\text{proj}}(R) \longrightarrow 0, \\
 K_0(R) &\xrightarrow{h_6} U^-(R) \longrightarrow W_3^{\text{proj}}(R) \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

- On note $W_i^{\text{lib}}(R)$ le conoyau de l’homomorphisme $h_{2 \cdot i - 1}$. On a donc quatre suites exactes tautologiques :

$$\begin{aligned}
 K_1(R) &\xrightarrow{h_0} KO_1(R) \longrightarrow W_1^{\text{lib}}(R) \longrightarrow 0, \\
 K_1(R) &\xrightarrow{h_2} V^-(R) \longrightarrow W_2^{\text{lib}}(R) \longrightarrow 0, \\
 K_1(R) &\xrightarrow{h_4} KSp_1(R) \longrightarrow W_3^{\text{lib}}(R) \longrightarrow 0, \\
 K_1(R) &\xrightarrow{h_6} V^+(R) \longrightarrow W_0^{\text{lib}}(R) \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Le lecteur observera que $W_3^{\text{lib}}(R)$ est le groupe qui est noté ${}_2W_1(R)$ aux chapitres 1 et 3 et dans l’appendice D, et que le groupe $W_0^{\text{lib}}(R)$ est le groupe $I(R)$ qui apparaît en 4.5.1.1 (le groupe $W^{\text{lib}}(R)$ qui apparaît de façon *ad hoc* après 4.5.1.6 est juste une extension de $\mathbb{Z}/2$ par $I(R)$). Le groupe $W_0^{\text{proj}}(R)$ est quant à lui le groupe de Witt habituel, habituellement noté $W(R)$.

Théorème 6.2.3.1. *Tout anneau contenant $\frac{1}{2}$ est W_i^{proj} -rigide et W_i^{lib} -rigide, pour $i = 0, 1, 2, 3$.*

Démonstration. Ces rigidités sont classiques et dues à Karoubi et Ranicki :

- Pour la W_i^{proj} -rigidité, nous conseillons les références postérieures [OJ1] et [BA].

- La W_0^{lib} -rigidité (I-rigidité) est, par exemple, conséquence du théorème 1 de [OJ1].
- La W_3^{lib} -rigidité (${}_W1$ -rigidité) est l’objet de l’appendice D.
- Les W_i^{lib} -rigidité, $i = 1, 2$, sont obtenues “par changement de symétrie”.

RELATION ENTRE $\mathcal{L}_0$ ET $\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_7$

On commence par exhiber un $\mathbb{G}_m$ -lacet typique.

Soient L un R -module libre de dimension finie et p un projecteur auto-adjoint (relativement à $\hbar_L^+ \oplus \hbar_L^+$) de $H^+(L) \oplus H^+(L)$ (c’est-à-dire un élément de $\mathcal{L}_{0,L}$) ; pour alléger la notation, on pose ci-dessous $M = H^+(L) \oplus H^+(L)$ et on note N le $R[T, T^{-1}]$ -module $R[T, T^{-1}] \otimes_R (L \oplus L)$. L’homomorphisme composé

$$R[T, T^{-1}] \otimes_R M \xrightarrow{Tp + (1-p)} R[T, T^{-1}] \otimes_R M \xrightarrow{\hbar_L^+ \oplus \hbar_L^+} R[T, T^{-1}] \otimes_R M^*$$

s’identifie à une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, disons $\lambda(p)$, sur $N \oplus N^*$; $\lambda(p)$ est donc un élément de $\mathcal{L}_{7,N}$. Soit p_0 le point base de $\mathcal{L}_{0,L}$ (en clair, le projecteur sur $H^+(L) \oplus 0$ parallèlement à $0 \oplus H^+(L)$), on constate que l’on a $\lambda(p_0) = \mu^* \circ \hbar_N^+ \circ \mu$, μ désignant l’automorphisme de $N \oplus N^*$ dont la matrice dans la décomposition

$$\begin{aligned} N \oplus N^* &= (R[T, T^{-1}] \otimes_R L) \oplus (R[T, T^{-1}] \otimes_R L) \\ &\quad \oplus (R[T, T^{-1}] \otimes_R L)^* \oplus (R[T, T^{-1}] \otimes_R L)^* \end{aligned}$$

est la matrice diagonale $\text{diag}(T, 1, 1, 1)$. On pose :

$$\ell_L(p) = \mu^{*-1} \circ \lambda(p) \circ \mu^{-1} ;$$

on obtient ainsi une application pointée

$$\ell_L : \mathcal{L}_{0,L} \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_{7, L \oplus L}$$

$\mathcal{C}$ -naturelle en L . Par passage à la limite directe sur $\mathbb{N}(R)$, on obtient finalement la transformation naturelle promise :

$$\ell : \mathcal{L}_0 \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_7 .$$

Théorème 6.2.3.2. *Pour tout anneau R contenant $\frac{1}{2}$, la transformation naturelle ℓ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_0)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_7)(R) .$$

Démonstration. On commence par exhiber un homomorphisme

$$\bar{\ell} : \text{GW}^+(R) \rightarrow (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathbb{V})(R)$$

tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L}_0(R) & \xrightarrow{\text{gw}^+} & \text{GW}^+(R) \\
 \downarrow \ell & & \downarrow \bar{\ell} \\
 (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_7)(R) & \xrightarrow{\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{v}^+} & (\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{V})(R)
 \end{array}$$

est commutatif.

On adopte la “définition projective” du foncteur V (Proposition 6.2.1.3). Soit P un R -module projectif de rang fini muni d’une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, disons q . L’homomorphisme $\bar{\ell}$ associe à la classe dans $\text{GW}^+(R)$ de $(P; q)$ la classe dans $\text{V}(R[T, T^{-1}])$ du triplet $(P; q, Tq)$ (classe qui appartient bien au noyau de l’évaluation en 1, $\text{V}(R[T, T^{-1}]) \rightarrow \text{V}(R)$).

Le seul point un peu subtil dans la vérification de la commutativité du diagramme est le suivant :

On a dans $(\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{V})(R) \subset \text{V}(R[T, T^{-1}])$ l’égalité $\bar{\ell}([H^+(L)]) = h_7([\mu])$, $[\mu]$ désignant la classe dans $\text{K}_1(R[T, T^{-1}])$ de l’automorphisme μ du $R[T, T^{-1}]$ -module $R[T, T^{-1}] \otimes_R (L \oplus L \oplus L^* \oplus L^*)$, de matrice $\text{diag}(T, 1, 1, 1)$, qui intervient “comme terme correctif” dans la définition de ℓ .

Armé du diagramme commutatif ci-dessus, on reprend maintenant le cours de la démonstration du théorème 6.2.3.2.

Comme les applications $\pi_0(\text{gw}^+)$ et $\pi_0(\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{v}^+)$ sont des bijections (Proposition 6.2.1.5), il suffit de montrer que $\pi_0 \bar{\ell}$ est un isomorphisme.

Pour s’en convaincre, on considère le diagramme commutatif de groupes abéliens suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{K}_0(R) & \xrightarrow{h_0} & \text{GW}^+(R) & \longrightarrow & \text{W}_0^{\text{proj}}(R) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \bar{\ell} & & \downarrow \bar{\ell} & & \downarrow \bar{\ell} & & \\
 (\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{K}_1)(R) & \xrightarrow{\Omega^{\mathbb{G}_m} h_7} & (\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{V})(R) & \longrightarrow & (\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{W}_0^{\text{lib}})(R) & \longrightarrow & 0 ;
 \end{array}$$

l’homomorphisme $\bar{\ell} : \text{K}_0(R) \rightarrow (\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{K}_1)(R)$ qui apparaît ci-dessus a été défini lors de la démonstration du théorème 6.1.3, l’homomorphisme $\bar{\ell}$ est l’homomorphisme induit entre les conoyaux respectifs de h_0 et $\Omega^{\mathbb{G}_m} h_7$.

“En passant au π_0 ”, on obtient le diagramme du même type suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\pi_0 \text{K}_0)(R) & \xrightarrow{\pi_0 h_0} & (\pi_0 \text{GW}^+)(R) & \longrightarrow & \text{W}_0^{\text{proj}}(R) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \pi_0 \bar{\ell} & & \downarrow \pi_0 \bar{\ell} & & \downarrow \bar{\ell} & & \\
 (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \text{K}_1)(R) & \xrightarrow{\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} h_7} & (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \text{V})(R) & \longrightarrow & (\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{W}_0^{\text{lib}})(R) & \longrightarrow & 0 .
 \end{array}$$

Il faut signaler que l'on utilise ici la W_0^{proj} -rigidité et la W_0^{lib} -rigidité des anneaux contenant $\frac{1}{2}$ (Théorème 6.2.3.1).

Dans ce diagramme, les deux flèches verticales de gauche et de droite sont des isomorphismes. Pour la première, il s'agit d'un avatar du théorème 6.1.3. Pour la seconde, on peut invoquer [KA3, Théorème 3.9] ; il s'agit aussi d'un avatar du théorème 4.1 de [RA3] ou du théorème 5.1 de [OP]. Ceci montre que l'homomorphisme $\pi_0 \bar{\ell} : (\pi_0 \text{GW}^+)(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega^{\text{Gm}} V)(R)$ est surjectif.

On montre qu'il est injectif en exhibant une rétraction. Cette rétraction est induite par un "homomorphisme résidu", $r : V(R[T, T^{-1}]) \rightarrow \text{GW}^+(R)$, dont la définition, détaillée ci-après, suit de très près [OP] (et [Sw]).

DÉFINITION DU RÉSIDU $r : V(R[T, T^{-1}]) \rightarrow \text{GW}^+(R)$

Soit L un R -module libre de type fini. On pose :

$$L[T, T^{-1}] = R[T, T^{-1}] \otimes_R L, \quad L[T] = R[T] \otimes_R L.$$

Soit α une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur le $R[T, T^{-1}]$ -module $L[T, T^{-1}]$; on observera que cette forme peut être identifiée à un isomorphisme de $R[T, T^{-1}]$ -modules $\alpha : L[T, T^{-1}] \rightarrow L^*[T, T^{-1}]$.

On suppose tout d'abord que l'on a $\alpha(L[T]) \subset L^*[T]$. On note dans ce cas $C(\alpha)$ le conoyau de l'homomorphisme de $R[T]$ -modules, de $L[T]$ dans $L^*[T]$, induit par α :

$$C(\alpha) := \text{coker} (L[T] \xrightarrow{\alpha} L^*[T]) ;$$

d'après [Sw, Lemma 16.7], le $R[T]$ -module $C(\alpha)$ est un R -module projectif de rang fini. Cet R -module est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, induite par l'application composée suivante :

$$L^*[T] \times L^*[T] \subset L^*[T, T^{-1}] \times L^*[T, T^{-1}] \xrightarrow{\alpha^{-1}} R[T, T^{-1}] \xrightarrow{\rho} R,$$

ρ désignant l'homomorphisme qui associe à tout polynôme de Laurent le coefficient de T^{-1} (ci-dessus α^{-1} est considérée comme une forme bilinéaire symétrique sur $L^*[T, T^{-1}]$).

On revient au cas général. Il est clair qu'il existe toujours un entier d tel que l'on a $(T^{2d}\alpha)(L[T]) \subset L^*[T]$; on constate, en prenant $\phi = T^{2d}\alpha$ et $\psi = T \text{id}$ dans le lemme 6.2.3.3 ci-après, que l'élément $[C(T^{2d}\alpha)] - d[H^+(L)]$ de $\text{GW}^+(R)$ ne dépend pas de l'entier d , mais seulement de la forme α (on rappelle que la notation $H^+(L)$ désigne le module $L \oplus L^*$ muni de sa forme bilinéaire symétrique hyperbolique canonique). Cette différence est le *résidu* d'Ojanguren-Panin [OP].

Soient maintenant α_0 et α_1 deux formes bilinéaires symétriques non-dégénérées sur le $R[T, T^{-1}]$ -module $L[T, T^{-1}]$ et d un entier tel que l'on a

$(T^{2d}\alpha_i)(L[T]) \subset L^*[T]$, pour $i = 0, 1$. D’après ce qui précède, l’élément $[C(T^{2d}\alpha_1)] - [C(T^{2d}\alpha_0)]$ de $\text{GW}^+(R)$ ne dépend pas de l’entier d , mais seulement des formes α_0 et α_1 ; on constate en fait qu’il ne dépend que de la classe $[\alpha_0, \alpha_1]$ dans le groupe $V(R[T, T^{-1}])$. On définit l’homomorphisme r par la formule :

$$r([\alpha_0, \alpha_1]) = [C(T^{2d}\alpha_1)] - [C(T^{2d}\alpha_0)] .$$

On en vient enfin au lemme promis ci-dessus. Soient L et L' deux R -modules libres de même dimension finie ; soit ψ un isomorphisme de $R[T, T^{-1}]$ -modules de $L[T, T^{-1}]$ sur $L'[T, T^{-1}]$, avec $\psi(L[T]) \subset L'[T]$. On note encore $C(\psi)$ le conoyau de l’homomorphisme de $R[T]$ -modules de $L[T]$ dans $L'[T]$ induit par ψ ; toujours d’après [Sw, Lemma 16.7], le $R[T]$ -module $C(\psi)$ est un R -module projectif de rang fini.

Lemme 6.2.3.3. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur le $R[T, T^{-1}]$ -module $L[T, T^{-1}]$, avec $\phi(L[T]) \subset L^*[T]$, et ψ un automorphisme de cet $R[T, T^{-1}]$ -module, avec $\psi(L[T]) \subset L[T]$. Alors on a un isomorphisme de R -modules munis de formes bilinéaires symétriques :*

$$C(\psi^*\phi\psi) \approx C(\phi) \oplus H^+(C(\psi)) .$$

Démonstration. La factorisation $\psi^*\phi\psi = (\psi^*\phi) \circ \psi$ fournit une suite exacte canonique de $R[T]$ -modules et *a fortiori* de R -modules :

$$0 \longrightarrow C(\psi) \xrightarrow{\psi^*\phi} C(\psi^*\phi\psi) \longrightarrow C(\psi^*\phi) \longrightarrow 0 ;$$

on identifie $C(\psi)$ à un sous-module de $C(\psi^*\phi\psi)$ *via* $\psi^*\phi$. On fait alors les constatations suivantes :

- La restriction à $C(\psi)$ de la forme bilinéaire symétrique dont est muni $C(\psi^*\phi\psi)$ est nulle. En d’autres termes, $C(\psi)$ est contenu dans son orthogonal : $C(\psi) \subset C(\psi)^\perp$.
- Le quotient $C(\psi)^\perp / C(\psi)$, muni de la forme bilinéaire induite par celle de $C(\psi^*\phi\psi)$, est isométrique à $C(\phi)$.
- Le R -module $C(\psi)$ est facteur direct dans $C(\psi)^\perp$.
- Le R -module $C(\psi)^\perp$ est facteur direct dans $C(\psi^*\phi\psi)$ (observer que la suite exacte de R -modules ci-dessus est scindable, si bien que l’homomorphisme de R -modules $C(\psi^*\phi\psi) \rightarrow (C(\psi))^*$, dont $C(\psi)^\perp$ est le noyau, est surjectif).

Soit P un supplémentaire de $C(\psi)$ dans $C(\psi)^\perp$. Par construction, P muni de la forme bilinéaire restriction de celle de $C(\psi^*\phi\psi)$ est isométrique à $C(\phi)$; on

a donc une décomposition en somme orthogonale $C(\psi^*\phi\psi) = P \oplus P^\perp$. Par construction encore, $C(\psi)$ est un lagrangien de $P^\perp$; puisque 2 est inversible, $P^\perp$ est isométrique à $H^+(C(\psi))$. $\square$

Il nous reste enfin à vérifier que le résidu r que nous venons de définir induit bien une rétraction $(\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} V)(R) \rightarrow (\pi_0 \text{GW}^+)(R)$ de l'application $\pi_0 \bar{\ell} : (\pi_0 \text{GW}^+)(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} V)(R)$. Ceci résulte de la constatation ci-après. Soient $(P; p)$ et (Q, q) deux R -modules projectifs de rang fini munis de formes bilinéaires symétriques non-dégénérées, avec $P \oplus Q$ libre. On pose $L = P \oplus Q$ et $\alpha = Tp + q$. On peut voir α comme une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $L[T, T^{-1}]$; on a $\alpha(L[T]) \subset L[T]$, si bien que $C(\alpha)$ est défini. On constate que l'on a un isomorphisme canonique $C(\alpha) \cong (P; p)$. $\square\square$

RELATION ENTRE $\mathcal{L}_6$ ET $\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_5$

Pour définir un $\mathbb{G}_m$ -lacet typique, il convient dans ce paragraphe d'introduire un foncteur $\tilde{\mathcal{L}}_6$ qui est à $\mathcal{L}_6$ ce qu'est $\tilde{\mathcal{K}}_0$ à $\mathcal{K}_0$ (voir 6.1).

Soit L un R -module libre de dimension finie. On note $\tilde{\mathcal{L}}_{6,L}$ l'ensemble des couples (Λ, Θ) de lagrangiens de $H^-(L)$ transverses l'un à l'autre (c'est-à-dire tels que l'on a $H^-(L) = \Lambda \oplus \Theta$); on choisit comme point base de cet ensemble le couple (L, L^*) . On peut voir également $\tilde{\mathcal{L}}_{6,L}$ comme l'ensemble des projecteurs p du R -module $H^-(L)$ qui satisfont l'équation $p^\sharp = 1 - p$, $p^\sharp$ désignant l'adjoint de p par rapport à la forme h_L^- (en clair $p^\sharp = (h_L^-)^{-1} \circ p^* \circ h_L^-$, h_L^- étant considérée comme un homomorphisme de $H^-(L)$ dans son dual) pointé par le projecteur sur L parallèlement à L^* , disons p_0 .

Il est clair que la correspondance $L \mapsto \tilde{\mathcal{L}}_{6,L}$ est un foncteur défini sur la catégorie $\mathcal{C}$ et à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés. On pose comme d'habitude $\tilde{\mathcal{L}}_6(R) = \text{colim}_{\mathbb{N}(R)} \tilde{\mathcal{L}}_{6,R^n}$. On observera que la transformation naturelle de $\tilde{\mathcal{L}}_6$ dans $\mathcal{L}_6$, qui associe à un projecteur son image, induit un isomorphisme fonctoriel $\pi_0 \tilde{\mathcal{L}}_6 \cong \pi_0 \mathcal{L}_6$.

On définit la transformation naturelle "lacet typique"

$$\ell : \tilde{\mathcal{L}}_6 \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_5$$

en associant à un projecteur p de $H^-(L)$ vérifiant $p^\sharp = 1 - p$ l'automorphisme

$$(Tp + 1 - p) \circ (Tp_0 + 1 - p_0)^{-1}$$

de la forme $h_{R[T, T^{-1}] \otimes_R L}^-$ et en passant à limite directe sur $\mathbb{N}(R)$ (comparer avec 6.1).

Théorème 6.2.3.4. *Pour tout anneau R contenant $\frac{1}{2}$, la transformation naturelle ℓ induit une bijection*

$$(\pi_0 \tilde{\mathcal{L}}_6)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_5)(R)$$

ou encore une bijection

$$(\pi_0 \mathcal{L}_6)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_5)(R) .$$

Démonstration. La structure de cette démonstration est la même que celle du théorème 6.2.3.2.

On commence par exhiber un homomorphisme

$$\bar{\ell} : U^-(R) \rightarrow (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{KSp}_1)(R)$$

tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{L}}_6(R) & \xrightarrow{\tilde{u}^-} & U^-(R) \\ \downarrow \ell & & \downarrow \bar{\ell} \\ (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_5)(R) & \xrightarrow{\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{ksp}_1} & (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{KSp}_1)(R) , \end{array}$$

dans lequel $\tilde{u}^-$ désigne la composée de u^- et de la transformation naturelle $\tilde{\mathcal{L}}_6(R) \rightarrow \mathcal{L}_6(R)$, est commutatif.

Soit E un R -module libre de dimension finie muni d’une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée; soient Λ_0 et Λ_1 deux lagrangiens de E . On choisit tout d’abord deux lagrangiens Θ_0 et Θ_1 respectivement transverses à Λ_0 et Λ_1 , ou, ce qui revient au même, deux projecteurs p_0 et p_1 , vérifiant $p_0^\sharp = 1 - p_0$ et $p_1^\sharp = 1 - p_1$, d’images respectives Λ_0 et Λ_1 (la notation $(\)^\sharp$ désigne l’adjoint par rapport à la forme dont E est muni). On considère ensuite l’isométrie suivante de $R[T, T^{-1}] \otimes_R E$

$$\Phi := (Tp_1 + 1 - p_1) \circ (Tp_0 + 1 - p_0)^{-1} .$$

On considère enfin le Déterminant $\mathrm{Dét} \Phi$ de l’isométrie Φ dans le groupe $\mathrm{KSp}_1(R[T, T^{-1}])$ (la définition de ce Déterminant est rappelée avant l’énoncé 6.2.1.6); comme $\Phi(1)$ est l’identité, $\mathrm{Dét} \Phi$ appartient au sous-groupe $(\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{KSp}_1)(R)$.

Le lemme 6.2.1.6 (en fait, la dernière phrase de son énoncé) implique que $\mathrm{Dét} \Phi$ est indépendant du choix de p_0 et p_1 .

Il n’est pas difficile non plus de se convaincre de ce que $\mathrm{Dét} \Phi$ ne dépend que de la classe $[E; \Lambda_0, \Lambda_1]$ de $(E; \Lambda_0, \Lambda_1)$ dans $U^-(R)$. L’homomorphisme promis $\bar{\ell} : U^-(R) \rightarrow (\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{KSp}_1)(R)$ est l’application $[E; \Lambda_0, \Lambda_1] \mapsto \mathrm{Dét} \Phi$.

Armé du diagramme commutatif ci-dessus, on reprend maintenant le cours de la démonstration du théorème 6.2.3.4.

Comme les applications $\pi_0(\tilde{u}^-)$ et $\pi_0(\Omega^{\mathbb{G}_m} \mathrm{ksp}_1)$ sont des bijections (Proposition 6.2.1.5), il suffit de montrer que $\pi_0 \bar{\ell}$ est un isomorphisme.

Pour s'en convaincre on considère le diagramme commutatif de groupes abéliens suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_0(R) & \xrightarrow{h_6} & U^-(R) & \longrightarrow & W_3^{\text{proj}}(R) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \bar{\ell} & & \downarrow \bar{\ell} & & \downarrow \bar{\ell} & & \\
 (\Omega^{\mathbb{G}_m} K_1)(R) & \xrightarrow{\Omega^{\mathbb{G}_m} h_5} & (\Omega^{\mathbb{G}_m} \text{KSp}_1)(R) & \longrightarrow & (\Omega^{\mathbb{G}_m} W_3^{\text{lib}})(R) & \longrightarrow & 0 ;
 \end{array}$$

l'homomorphisme $\bar{\ell} : K_0(R) \rightarrow (\Omega^{\mathbb{G}_m} K_1)(R)$ qui apparaît ci-dessus a été défini lors de la démonstration du théorème 6.1.3, l'homomorphisme $\bar{\ell}$ est l'homomorphisme induit entre les conoyaux respectifs de h_6 et $\Omega^{\mathbb{G}_m} h_5$.

“En passant au π_0 ”, on obtient le diagramme du même type suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\pi_0 K_0)(R) & \xrightarrow{\pi_0 h_6} & (\pi_0 U^-)(R) & \longrightarrow & W_3^{\text{proj}}(R) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \pi_0 \bar{\ell} & & \downarrow \pi_0 \bar{\ell} & & \downarrow \bar{\ell} & & \\
 (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} K_1)(R) & \xrightarrow{\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} h_5} & (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \text{KSp}_1)(R) & \longrightarrow & (\Omega^{\mathbb{G}_m} W_3^{\text{lib}})(R) & \longrightarrow & 0 .
 \end{array}$$

On utilise ici la W_3^{proj} -rigidité et la W_3^{lib} -rigidité des anneaux contenant $\frac{1}{2}$ (Théorème 6.2.3.1).

Comme nous l'avons déjà dit, la flèche verticale de droite du diagramme ci-dessus est un isomorphisme. La flèche $\bar{\ell}$ en est un aussi d'après [KA2, Théorème 3.11] ; ce résultat est encore un avatar du théorème 4.1 de [RA3]. Ceci montre que l'homomorphisme $\pi_0 \bar{\ell} : (\pi_0 U^-)(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \text{KSp}_1)(R)$ est surjectif.

Comme précédemment, on montre qu'il est injectif en exhibant une rétraction, induite par un “homomorphisme résidu”, $r : \text{KSp}_1(R[T, T^{-1}]) \rightarrow U^-(R)$, dont nous expliquons la définition ci-dessous.

DÉFINITION DU RÉSIDU $r : \text{KSp}_1(R[T, T^{-1}]) \rightarrow U^-(R)$

Soient L un R -module libre de dimension finie et α une isométrie de $H^-(L)[T, T^{-1}]$ (on reprend les notations introduites dans la démonstration du théorème 6.2.3.2 lors de la définition du résidu $r : V(R[T, T^{-1}]) \rightarrow \text{GW}^+(R)$) ; pour alléger la notation, on pose ci après $M = H^-(L)$ et $b = h_L^-$.

On écrit $\alpha = \psi_1 \circ \psi_0^{-1}$, avec ψ_0 et ψ_1 deux automorphismes du $R[T, T^{-1}]$ -module $M[T, T^{-1}]$ satisfaisant la condition $\psi_i(M[T]) \subset M[T]$. On observera qu'il existe toujours une telle écriture : prendre par exemple $\psi_0 = T^d \text{id}$ avec d un entier suffisamment grand.

On pose $\phi_i = \psi_i^* \circ (R[T, T^{-1}] \otimes_R b) \circ \psi_i$, $i = 0, 1$; ϕ_i est donc une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur $M[T, T^{-1}]$. Puisque α est une isométrie, ϕ_0 et ϕ_1 coïncident ; on pose $\phi = \phi_0 = \phi_1 = \Phi(\alpha; \psi_0, \psi_1)$.

On constate que ϕ satisfait la condition $\phi(M[T]) \subset M^*[T]$ (on considère ici ϕ comme un isomorphisme de $R[T, T^{-1}]$ -modules $\phi : M[T, T^{-1}] \rightarrow M^*[T, T^{-1}]$). On peut donc procéder comme lors de la définition du résidu d'Ojanguren-Panin. On considère le conoyau, que l'on note $C(\phi)$, de l'homomorphisme de $R[T]$ -modules, de $M[T]$ dans $M^*[T]$, induit par ϕ ; ce conoyau, vu comme un R -module, est projectif de rang fini et muni d'une forme bilinéaire non-dégénérée, qui ici est antisymétrique.

Comme dans la démonstration du lemme 6.2.3.3, on note $C(\psi_i)$ le conoyau de l'endomorphisme de $M[T]$ induit par ψ_i , $i = 0, 1$. En lisant la démonstration en question avec des lunettes antisymétriques, on voit que $C(\psi_i)$ s'identifie à un lagrangien de $C(\phi)$.

On constate donc au bout du compte que l'écriture $\alpha = \psi_1 \circ \psi_0^{-1}$ fournit un triplet $(C(\phi); C(\psi_0), C(\psi_1))$ du type de ceux considérés dans la définition du groupe $U^-(R)$ (version “projective”, voir 6.2.1.3); la classe de ce triplet dans $U^-(R)$ est notée $r_L(\alpha; \psi_0, \psi_1)$:

$$r_L(\alpha; \psi_0, \psi_1) = [C(\phi); C(\psi_0), C(\psi_1)] .$$

Proposition-Définition 6.2.3.6.

- (a) *L'élément $r_L(\alpha; \psi_0, \psi_1)$ du groupe $U^-(R)$ ne dépend que de l'isométrie α ; on le note $r_L(\alpha)$.*
- (b) *L'application $r_L : \mathrm{Sp}_L(R[T, T^{-1}]) \rightarrow U^-(R)$ est un homomorphisme de groupes.*
- (c) *Il existe un unique homomorphisme de groupes, noté*

$$r : \mathrm{KSp}_1(R[T, T^{-1}]) \rightarrow U^-(R) ,$$

tel que l'homomorphisme r_L est le composé $r \circ \mathrm{Dét}$.

- (d) *L'homomorphisme composé*

$$U^-(R) \xrightarrow{\bar{\ell}} (\Omega^{\mathrm{Gm}} \mathrm{KSp}_1)(R) \subset \mathrm{KSp}_1(R[T, T^{-1}]) \xrightarrow{r} U^-(R)$$

est l'identité.

Démonstration. Nous vérifions les points (a), (b) et (d) et laissons la vérification (facile) du point (c) au lecteur. La vérification du point (d) achève la démonstration du théorème 6.2.3.4.

Point (a). Il s'agit de montrer que l'on a l'égalité $r_L(\alpha; \psi_0 \circ u, \psi_1 \circ u) = r_L(\alpha; \psi_0, \psi_1)$ pour tout automorphisme u du $R[T, T^{-1}]$ -module $M[T, T^{-1}]$ satisfaisant $(\psi_i \circ u)(M[T]) \subset M[T]$, $i = 0, 1$. On a $\Phi(\alpha; \psi_0 \circ u, \psi_1 \circ u) = u^* \circ \Phi(\alpha; \psi_0, \psi_1) \circ u$; on doit donc comparer les classes dans $U^-(R)$ des triplets $(C(\phi); C(\psi_0), C(\psi_1))$ et $(C(u^* \circ \phi \circ u); C(\psi_0 \circ u), C(\psi_1 \circ u))$.

Première étape : on suppose $u(M[T]) \subset M[T]$. On reprend la lecture antisymétrique de la démonstration du lemme 6.2.3.3 (en remplaçant ψ par u). Celle-ci nous apprend que le R -module $C(u)$ s'identifie à un facteur direct de $C(u^* \circ \phi \circ u)$ (identification que l'on s'empresse de faire), que l'on a les inclusions $C(u) \subset C(u)^\perp$, $C(u) \subset C(\psi_0 \circ u)$ et $C(u) \subset C(\psi_1 \circ u)$, et enfin que l'on a un isomorphisme (en un sens évident) de triplets :

$$(C(u^* \circ \phi \circ u); C(\psi_0 \circ u), C(\psi_1 \circ u)) \approx (C(\phi); C(\psi_0), C(\psi_1)) \oplus (H^-(C(u)); C(u), C(u))$$

(comparer avec [KA2], Appendice 3, Lemme 2). On a donc l'égalité voulue $[C(u^* \circ \phi \circ u); C(\psi_0 \circ u), C(\psi_1 \circ u)] = [C(\phi); C(\psi_0), C(\psi_1)]$.

Deuxième étape : on traite le cas général. On introduit un automorphisme v de $M[T, T^{-1}]$ tel que l'on a $(u \circ v)(M[T]) \subset M[T]$ et $v(M[T]) \subset M[T]$ (prendre par exemple $v = T^d \text{id}$ avec d un entier assez grand). D'après la première étape, on a à la fois $r_L(\alpha; \psi_0 \circ (u \circ v), \psi_1 \circ (u \circ v)) = r_L(\alpha; \psi_0, \psi_1)$ et $r_L(\alpha; \psi_0 \circ (u \circ v), \psi_1 \circ (u \circ v)) = r_L(\alpha; \psi_0 \circ u, \psi_1 \circ u)$. $\square$

Point (b). Le point (a) acquis, la vérification du point (b) devient aisée. Soient α et β deux isométries de $M[T, T^{-1}]$. On observe qu'il existe trois automorphismes ψ_i , $i = 0, 1, 2$, du $R[T, T^{-1}]$ -module $M[T, T^{-1}]$ tels que l'on a $\alpha = \psi_1 \circ \psi_0^{-1}$, $\beta = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ et $\psi_i(M[T]) \subset M[T]$ (là encore prendre par exemple $\psi_1 = T^d \text{id}$ avec d un entier assez grand). On constate que l'on a $\Phi(\alpha; \psi_0, \psi_1) = \Phi(\beta; \psi_1, \psi_2) = \Phi(\beta \circ \alpha; \psi_0, \psi_2)$; on note ϕ cette valeur commune. On a $r_L(\alpha) = [C(\phi); C(\psi_0), C(\psi_1)]$, $r_L(\beta) = [C(\phi); C(\psi_1), C(\psi_2)]$ et $r_L(\beta \circ \alpha) = [C(\phi); C(\psi_0), C(\psi_2)]$, ce qui implique $r_L(\beta \circ \alpha) = r_L(\alpha) + r_L(\beta)$ (relation de Chasles). $\square$

Point (d). La proposition 6.2.1.8 dit en particulier que tout élément de $U^-(R)$, disons x , est représentable par un triplet de la forme $(H^-(L); \Lambda_0, \Lambda_1)$ (on peut même imposer $\Lambda_0 = L$, mais nous n'en avons pas besoin ici). On rappelle la définition de $\bar{\ell}(x)$: soit p_i , $i = 0, 1$, un projecteur de $H^-(L)$ d'image Λ_i avec $p_i^\sharp = 1 - p_i$, alors $\bar{\ell}(x)$ est le Déterminant dans $\text{KSp}_1(R[T, T^{-1}])$ de l'isométrie $(Tp_1 + 1 - p_1) \circ (Tp_0 + 1 - p_0)^{-1}$ de $H^-(L)[T, T^{-1}]$. Soit α cette isométrie; on a donc $\alpha = \psi_1 \circ \psi_0^{-1}$ avec $\psi_i = Tp_i + 1 - p_i$, $i = 0, 1$. On constate que l'on a l'égalité $\Phi(\alpha; \psi_0, \psi_1) = T\bar{h}_L$ et l'isomorphisme de triplets $(C(\Phi(\alpha; \psi_0, \psi_1)); C(\psi_0), C(\psi_1)) \cong (H^-(L); \Lambda_0, \Lambda_1)$. Ceci implique bien l'égalité $r(\bar{\ell}(x)) = x$. $\square\square$

Récapitulation

Les points (a-7) et (a-5) de l'énoncé ci-dessous sont respectivement la reprise des énoncés 6.2.3.2 et 6.2.3.4. Les points (a-3) et (a-1) sont obtenus "par changement de symétrie" (démonstrations comprises).

Théorème-Définition 6.2.3.7. *Pour tout anneau R contenant $\frac{1}{2}$:*

(a-7) *La transformation naturelle $\ell : \mathcal{L}_0 \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_7$ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_0)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_7)(R) .$$

(a-3) *La transformation naturelle “analogue” $\ell : \mathcal{L}_4 \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_3$ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_4)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_3)(R) .$$

(a-5) *La transformation naturelle $\ell : \tilde{\mathcal{L}}_6 \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_5$ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_6)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_5)(R) .$$

(a-1) *La transformation naturelle “analogue” $\ell : \tilde{\mathcal{L}}_3 \rightarrow \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_2$ induit une bijection*

$$(\pi_0 \mathcal{L}_2)(R) \cong (\pi_0 \Omega^{\mathbb{G}_m} \mathcal{L}_1)(R) .$$

EPILOGUE

Les cas $i = 0$ et $i = 3$ de l'énoncé ci-après jouent un rôle crucial dans nos démonstrations des théorèmes 6.2.3.2 et 6.2.3.4 :

Théorème 6.2.3.8. *Soit R un anneau contenant $\frac{1}{2}$. Les applications*

$$W_i^{\text{lib}}(R) \oplus W_i^{\text{proj}}(R) \xrightarrow{c \oplus \bar{\ell}} W_i^{\text{lib}}(R[T, T^{-1}]) , \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

c désignant l'inclusion canonique, sont des isomorphismes.

Les cas $i = 0, 2$ et $i = 1, 3$ de cet énoncé sont respectivement l'objet de [KA3, Théorème 3.9] et [KA2, Théorème 3.11]. Compte tenu de “l'invariance homotopique des groupes de Witt”, le théorème 6.2.3.8 est aussi un corollaire du théorème 4.1 de [RA3] (qui est plus général). Les cas $i = 0, 2$ sont aussi implicitement traités dans [OP]. Dans les cas $i = 0, 2$, Karoubi procède par localisation et Ranicki “par linéarisation” ; Ojanguren et Panin combinent élégamment les deux méthodes. Ranicki déduit le cas $i = 1, 3$ du précédent en invoquant [RA3] ; Karoubi invoque quant à lui [KA1] et [KA5].

Il nous semblerait souhaitable, pour une question d'esthétique, de disposer d'un traitement par linéarisation dans tous les cas.

Appendice A

Technologie des formes de Sturm

On rassemble (un peu en vrac) dans cet appendice quelques énoncés techniques dont la plupart font intervenir les formes de Sturm.

A.1 Version matricielle de la proposition 2.2.2

Soit L un R -module libre de dimension finie.

Soit Φ un élément de $H(L)$. On note

$$\begin{bmatrix} \text{cf}_{L,L}(\Phi) & \text{cf}_{L,L^*}(\Phi) \\ \text{cf}_{L^*,L}(\Phi) & \text{cf}_{L^*,L^*}(\Phi) \end{bmatrix}$$

sa matrice dans la décomposition $H(L) = L \oplus L^*$ (observer que suivant la convention habituelle l'indice de la ligne est en première position et celui de la colonne en seconde).

Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . On pose

$$e(\underline{q}) = (-1)^{\frac{(n-m+1)(m+n-2)}{2}} \text{cf}_{L_{m-1}, L_n}(E(\underline{q})) ;$$

$e(\underline{q})$ est donc un homomorphisme de L_n dans L_{m-1} .

On pose $l = n - m + 1$ (on rappelle que nous appelons cet entier la longueur de $\underline{q}$ et que nous le notons parfois $|\underline{q}|$). On observera que l'on a les congruences suivantes :

$$\frac{(n-m+1)(m+n-2)}{2} \equiv \frac{l(l+1)}{2} + lm \equiv \frac{l(l+1)}{2} + ln \pmod{2} .$$

On a tout fait pour que l'énoncé suivant soit vérifié :

Proposition A.1.1. *Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $E(\underline{q}) \cdot L_n = L_m ;$
- (ii) $e(\underline{q}) = 0 .$

La théorie classique des suites de Sturm (que nous avons rappelée dans l'introduction) fait intervenir deux suites finies de polynômes : “la suite des quotients” $(\dots, q_k, \dots)$ et “la suite des restes” $(\dots, p_k, \dots)$. Les suites de Sturm que nous avons définies en 2.2.1 sont les analogues, dans notre contexte, de la suite des quotients. Nous considérons ci-après les analogues de la suite des restes.

Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . Soient x un élément de L_n et $(x_{m-1}, x_m, \dots, x_k, \dots, x_n, x_{n+1})$ la suite d'éléments de $L \amalg L^*$, avec $x_k \in L_k$ pour $m-1 \leq k \leq n+1$, uniquement déterminée par les “conditions finales” $x_{n+1} = 0$ et $x_n = x$ et par les relations de récurrence linéaire

$$x_{k-1} + (-1)^k q_k x_k + x_{k+1} = 0$$

pour $m \leq k \leq n$ (x_{k-1} et x_{k+1} sont considérés ici comme des éléments de L_k^*). La proposition 2.2.2 nous dit que l'on a $x_{m-1} = e(\underline{q})x$ et, plus généralement, $x_k = e(q_{k+1}, \dots, q_n)x$ pour $m-1 \leq k \leq n$ (avec la convention $e(q_{k+1}, \dots, q_n) = 1_{L_n}$ pour $k = n$). Posons $p_k = e(q_{k+1}, \dots, q_n)$, p_k est donc un homomorphisme de L_n dans L_k ; convenons que p_{n+1} est l'homomorphisme nul de L_{n+1} dans L_n . Il est clair que $(p_{m-1}, p_m, \dots, p_k, \dots, p_n, p_{n+1})$ est la suite d'éléments de $\text{Hom}(L_n, L) \amalg \text{Hom}(L_n, L^*)$, avec $p_k \in \text{Hom}(L_n, L_k)$ pour $m-1 \leq k \leq n+1$, uniquement déterminée par les “conditions finales” $p_{n+1} = 0$ et $p_n = 1$ et par les relations de récurrence linéaire

$$p_{k-1} + (-1)^k q_k p_k + p_{k+1} = 0$$

pour $m \leq k \leq n$ (p_{k-1} et p_{k+1} sont considérés ici comme des éléments de $\text{Hom}(L_n, L_k^*)$). La suite $(p_{m-1}, p_m, \dots, p_n)$ est l'analogue dans notre contexte de la suite des restes de la théorie classique des suites de Sturm.

La discussion précédente conduit à l'énoncé suivant :

Proposition A.1.2. *Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . Alors on a :*

$$S(\underline{q}) \begin{bmatrix} e(q_{m+1}, \dots, q_n) \\ e(q_{m+2}, \dots, q_n) \\ \vdots \\ e(q_n) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e(\underline{q}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(la forme de Sturm $S(\underline{q})$ est considérée ci-dessus comme une matrice de type $(L_m, L_{m+1}, \dots, L_n) \times (L_{m-1}, L_m, \dots, L_{n-1})$, la première matrice colonne est une matrice de type $(L_n) \times (L_m, L_{m+1}, \dots, L_n)$, la seconde une matrice de type $(L_n) \times (L_{m-1}, L_m, \dots, L_{n-1})$).

Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . On pose

$$\check{\underline{q}} = (-q_n, -q_{n-1}, \dots, -q_m) ;$$

$\check{\underline{q}}$ est donc aussi une suite de Sturm sur L , disons de type $(-n, -m)$.

L'égalité

$$E(\underline{q})^{-1} = E(\check{\underline{q}})$$

implique la suivante :

$$e(\check{\underline{q}}) = (-1)^{\frac{|q|}{2}} e(\underline{q})^* .$$

On en déduit une proposition A.1.2-bis :

Proposition A.1.3. *Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . Alors on a :*

$$S(\underline{q}) \begin{bmatrix} 1 \\ e(q_m)^* \\ \vdots \\ e(q_m, \dots, q_{n-2})^* \\ e(q_m, \dots, q_{n-1})^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -e(\underline{q})^* \end{bmatrix}$$

(la forme de Sturm $S(\underline{q})$ est considérée ci-dessus comme une matrice de type $(L_m, L_{m+1}, \dots, L_n) \times (L_{m+1}, L_{m+2}, \dots, L_{n+1})$, la première matrice colonne comme une matrice de type $(L_n) \times (L_m, L_{m+1}, \dots, L_n)$, la seconde comme une matrice de type $(L_n) \times (L_{m+1}, L_{m+2}, \dots, L_{n+1})$).

A.2 Sur les formes de Sturm non-dégénérées

L'équivalence (i) $\iff$ (ii) du point (a) de la proposition ci-dessous apparaît de façon récurrente dans notre mémoire.

Proposition-Définition A.2.1. *Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L .*

(a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la forme de Sturm $S(\underline{q})$ est non-dégénérée ;*
- (ii) *les deux lagrangiens $E(\underline{q}) \cdot L_n$ et L_m de $H(L)$ sont transverses :*

$$E(\underline{q}) \cdot L_n \pitchfork L_m ;$$

- (iii) *il existe un élément q_{n+1} de $\mathcal{S}_{L_{n+1}}$ tel que l'on a $E(\underline{q}, q_{n+1}) \cdot L_{n+1} = L_m$;*
- (iv) *il existe un élément q_{m-1} de $\mathcal{S}_{L_{m-1}}$ tel que l'on a $E(q_{m-1}, \underline{q}) \cdot L_n = L_{m-1}$;*
- (v) *l'homomorphisme $e(\underline{q})$ est inversible.*

- (b) Si les conditions équivalentes du point (a) sont vérifiées alors les formes bilinéaires symétriques q_{n+1} et q_{m-1} qui apparaissent dans les conditions (iii) et (iv) sont uniquement déterminées en fonction de $\underline{q}$; on les note respectivement $\partial_d(\underline{q})$ et $\partial_g(\underline{q})$. Ces formes sont respectivement, au signe près, les coefficients diagonaux en bas à droite et en haut à gauche de la matrice $S(\underline{q})^{-1}$:

- $(-1)^{n+1} \partial_d(\underline{q})$ s'identifie à l'homomorphisme composé

$$L_{n+1} = L_n^* \longrightarrow L_{m,n}^* \xrightarrow{S(\underline{q})^{-1}} L_{m,n} \longrightarrow L_n = L_{n+1}^*,$$

- $(-1)^{m-1} \partial_g(\underline{q})$ s'identifie à l'homomorphisme composé

$$L_{m-1} = L_m^* \longrightarrow L_{m,n}^* \xrightarrow{S(\underline{q})^{-1}} L_{m,n} \longrightarrow L_m = L_{m-1}^*,$$

l'homomorphisme $L_{m,n} \rightarrow L_n$ (resp. $L_{m,n} \rightarrow L_m$) étant la projection canonique et l'homomorphisme $L_n^* \rightarrow L_{m,n}^*$ (resp. $L_n^* \rightarrow L_{m,n}^*$) son dual.

Démonstration. Nous démontrons l'équivalence des deux premières conditions du point (a); le lecteur vérifiera qu'elles sont encore équivalentes aux trois dernières. On reprend l'argument de la démonstration du point (c) de 2.2.3: soient X un sous-module de $H(L_{m,n})$ transverse à $L_{m+1,n}^\perp$, Y l'image de $X \cap L_{m+1,n}^\perp$ dans $H(L_m)$ et Θ un sous-module de $H(L_m)$, alors on a l'équivalence $X \pitchfork (\Theta \oplus L_{m+1,n}) \iff Y \pitchfork \Theta$. On prend pour X le graphe $X(\underline{q})$ de $S(\underline{q})$ et pour Θ le sous-module L_m de $H(L_m)$, on obtient alors, d'après le point (b) de 2.2.3:

$$- X(\underline{q}) \pitchfork L_{m,n} \text{ dans } H(L_{m,n}) \iff \sigma_m(E(\underline{q}) \cdot L_n) \pitchfork L_m \text{ dans } H(L_m),$$

ou encore :

$$- X(\underline{q}) \pitchfork L_{m,n} \text{ dans } H(L_{m,n}) \iff E(\underline{q}) \cdot L_n \pitchfork L_m \text{ dans } H(L).$$

Or la première condition de transversalité ci-dessus est équivalente à la condition (i).

Passons au point (b). La première partie est évidente. Le calcul de $\partial_d(\underline{q})$ et $\partial_g(\underline{q})$ est conséquence des propositions A.1.1, A.1.2 et A.1.3. Détaillons par exemple le calcul de $\partial_d(\underline{q})$. On pose :

$$P = \begin{bmatrix} e(q_{m+1}, \dots, q_n, q_{n+1}) \\ e(q_{m+2}, \dots, q_n, q_{n+1}) \\ \vdots \\ e(q_n, q_{n+1}) \\ e(q_{n+1}) \end{bmatrix}$$

(cette matrice colonne est considérée ci-après comme une matrice de type $(L_n^*) \times (L_m, L_{m+1}, \dots, L_n)$). On a d'après A.1.1 et A.1.2 :

$$\begin{bmatrix} & & & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & S(\underline{q}) & & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} & & (-1)^{n+1} q_{n+1} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = 0 ;$$

on en déduit :

$$P = -S(\underline{q})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (-1)^{n+1} q_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} S(\underline{q})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Scholie A.2.2. Soient m et n deux entiers avec $m + n \equiv 1 \pmod{2}$ et $n - m \geq 3$.

- (a) Soit $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n; a)$ une relation symplectique sur L . Alors les formes de Sturm $S(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$, $S(q_m, q_{m+1}, \dots, q_{n-2})$, $S(q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_{n-1})$ et $S(q_{m+2}, q_{m+3}, \dots, q_n)$ sont non-dégénérées.
- (b) Soit $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_{n-2})$ une suite de Sturm sur L telle que la forme de Sturm $S(q_m, q_{m+1}, \dots, q_{n-2})$ est non-dégénérée. Alors il existe deux formes bilinéaires symétriques q_{n-1} et q_n , respectivement définies sur L_{n-1} et L_n , et un automorphisme a de L , uniquement déterminés, tels que la suite de Sturm augmentée $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n; a)$ est une relation symplectique sur L .

A.3 Calcul de Déterminants

(La définition du Déterminant, à valeur dans $K_1(R)$, d'un automorphisme d'un R -module libre de dimension finie, est rappelée dans la discussion précédant l'énoncé 4.5.1.2.)

Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie ; soient f et g deux homomorphismes de L dans L' . Nous écrirons $f \sim g$ s'il existe un automorphisme a de L et un automorphisme a' de L' , tous deux de Déterminant 1, tels que l'on a $g = a' \circ f \circ a$.

Proposition A.3.1. Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . Alors on a :

$$S(\underline{q}) \sim \begin{bmatrix} 0 & -e(\underline{q}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$S(\underline{q})$ étant considéré comme un homomorphisme de $L_{m,n}$ dans $L_{m,n}^*$ et la décomposition en blocs de la matrice de droite correspondant aux décompositions en sommes directes $L_{m,n} = L_{m,n-1} \oplus L_n$ et $L_{m,n}^* = L_{m-1} \oplus L_{m,n-1}$.

Démonstration. La proposition A.1.2 montre que l'on a

$$S(\underline{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e(q_{m+1}, \dots, q_n) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e(q_{m+2}, \dots, q_n) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & e(q_{n-1}, q_n) \\ & & & & \dots & 0 & 0 & 1 & e(q_n) \\ & & & & & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)^m q_m & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -e(\underline{q}) \\ 1 & (-1)^{m+1} q_{m+1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (-1)^{m+2} q_{m+2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On conclut en observant que la matrice au second membre admet une décomposition en blocs, correspondant aux décompositions en sommes directes

$$L_{m,n} = L_{m,n-1} \oplus L_n \quad \text{et} \quad L_{m,n}^* = L_{m-1} \oplus L_{m,n-1},$$

de la forme

$$\begin{bmatrix} \cdot & -e(\underline{q}) \\ U & 0 \end{bmatrix},$$

U désignant une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

Scholie A.3.2. Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L de longueur paire; soit $\underline{0}$ la suite de Sturm nulle de même type. Alors :

- (a) $S(\underline{0})$ est inversible ;
 (b) on a

$$S(\underline{0})^{-1} \circ S(\underline{q}) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{|q|}{2}} e(\underline{q}) \end{bmatrix},$$

la décomposition en blocs de la matrice de droite correspondant à la décomposition en somme directe $L_{m,n} = L_{m,n-1} \oplus L_n$ et $e(\underline{q})$ étant considéré comme un endomorphisme de L_n ;

- (c) si $S(\underline{q})$ est inversible, on a

$$\text{Dét}(S(\underline{0})^{-1} \circ S(\underline{q})) = \begin{cases} \text{Dét}(\text{cf}_{L^*,L^*}(E(\underline{q}))) & \text{pour } m \text{ pair (et } n \text{ impair)}, \\ \text{Dét}(\text{cf}_{L,L}(E(\underline{q}))) & \text{pour } m \text{ impair (et } n \text{ pair)}. \end{cases}$$

A.4 Identité du trinôme et formes de Sturm

Le titre de ce paragraphe fait référence aux énoncés A.4.2 et A.4.3 ci-après. Mais avant d'en arriver là, il nous faut d'abord réviser... la théorie de l'équation du second degré.

Proposition-Définition A.4.1 (Identité du trinôme). *Soit M un R -module muni d'une forme bilinéaire symétrique F . On suppose que l'on a $M = N \oplus P$, avec N et P deux sous-modules de M , si bien que F s'identifie à une matrice de type $(N,P) \times (N^*,P^*)$:*

$$F = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix}.$$

Si A est inversible (en d'autres termes si la restriction de F à N est non-dégénérée) on a

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ B^* A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^* A^{-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & A^{-1} B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous appelons cette égalité l'identité du trinôme ; elle s'écrit encore

$$F = U(F; N, P)^* \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^* A^{-1} B \end{bmatrix} U(F; N, P),$$

en posant

$$U(F; N, P) = \begin{bmatrix} 1 & A^{-1} B \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$U(F; N, P)$ est un automorphisme élémentaire de M que nous appelons l'automorphisme de l'identité du trinôme.

Proposition A.4.2. *Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L ; soit r un entier avec $m < r < n$.*

- (a) On suppose $S(q_m, \dots, q_r)$ non-dégénérée. Alors l'identité du trinôme s'écrit

$$S(\underline{q}) = U^* \begin{bmatrix} S(q_m, \dots, q_r) & 0 \\ 0 & S(q_{r+1} - \partial_d(q_m, \dots, q_r), q_{r+2}, \dots, q_n) \end{bmatrix} U$$

(en posant $U = U(S(\underline{q}); L_{m,r}, L_{r+1,n})$).

- (b) On suppose $S(q_{r+1}, \dots, q_n)$ non-dégénérée. Alors l'identité du trinôme s'écrit

$$S(\underline{q}) = U^* \begin{bmatrix} S(q_m, \dots, q_{r-1}, q_r - \partial_g(q_{r+1}, \dots, q_n) & 0 \\ 0 & S(q_{r+1}, \dots, q_n) \end{bmatrix} U$$

(en posant $U = U(S(\underline{q}); L_{r+1,n}, L_{m,r})$).

Démonstration. Conséquence de la seconde partie du point (b) de la proposition A.2.1.

Proposition A.4.3. Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L ; soient r et s deux entiers avec $m < r \leq s < n$. On suppose $S(q_r, \dots, q_s)$ non-dégénérée. On pose :

- $U = U(S(\underline{q}); L_{r,s}, L_{m,r-1} \oplus L_{s+1,n})$;
- $S' = S(q_m, \dots, q_{r-2}, q_{r-1} - \partial_g(q_r, \dots, q_s))$;
- $S'' = S(q_{s+1} - \partial_d(q_r, \dots, q_s), q_{s+2}, \dots, q_n)$;
- $e = e(q_r, \dots, q_s)$ (considéré ici comme un homomorphisme de L_{s+1}^* dans L_{r-1}).

On introduit la matrice de type $(L_m, L_{m+1}, \dots, L_{r-1}) \times (L_{s+1}^*, L_{s+2}^*, \dots, L_n^*)$ suivante

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & e^{-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors l'identité du trinôme s'écrit

$$S(\underline{q}) = U^* \begin{bmatrix} S' & 0 & B^* \\ 0 & S(q_r, \dots, q_s) & 0 \\ B & 0 & S'' \end{bmatrix} U$$

(la matrice qui apparaît au second membre est de type $(L_{m,r-1}, L_{r,s}, L_{s+1,n}) \times (L_{m,r-1}^*, L_{r,s}^*, L_{s+1,n}^*)$).

Démonstration. On introduit les matrices suivantes, de types respectifs $(L_r^*) \times (L_r^*, L_{r+1}^*, \dots, L_s^*)$ et $(L_s^*) \times (L_r^*, L_{r+1}^*, \dots, L_s^*)$:

$$C_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On constate que vérifier la proposition revient à calculer les produits de matrices

$$C_r^* S(q_r, \dots, q_s)^{-1} C_r, \quad C_s^* S(q_r, \dots, q_s)^{-1} C_s, \quad C_s^* S(q_r, \dots, q_s)^{-1} C_r$$

(autrement dit à déterminer les coefficients situés dans les quatre coins de la matrice “symétrique” $S(q_r, \dots, q_s)^{-1}$). Les deux premiers calculs ont déjà été faits (point (b) de la proposition A.2.1). Passons au dernier.

Posons $C_s^* S(q_r, \dots, q_s)^{-1} C_r = [c_{s,r}]$ (il s’agit là d’une matrice de type $(L_r^*) \times (L_s)$); la proposition A.1.2 implique l’égalité $c_{s,r} e(q_r, \dots, q_s) = -1$. $\square$

Corollaire-Définition A.4.4. *On reprend les notations et hypothèses de la proposition précédente. On introduit en outre les notations suivantes :*

On pose $l = s - r + 1$, $\underline{q}^{\text{ct}} = (q_r, \dots, q_s)$ et on note $\underline{q}^{\text{bd}} = (q_m^{\text{bd}}, q_{m+1}^{\text{bd}}, \dots, q_{n-l}^{\text{bd}})$ la suite de Sturm sur L définie par

$$q_k^{\text{bd}} = \begin{cases} q_k & \text{pour } m \leq k \leq r-2, \\ q_{r-1} - \partial_g(\underline{q}^{\text{ct}}) & \text{pour } k = r-1, \\ (-1)^l e(q_{s+1} - \partial_r(\underline{q}^{\text{ct}})) e^* & \text{pour } k = r, \\ (-1)^l e^{-1*} q_{k+l} e^{-1} & \text{pour } r+1 \leq k \leq n-l \text{ et } k-r \text{ pair}, \\ (-1)^l e q_{k+l} e^* & \text{pour } r+1 \leq k \leq n-l \text{ et } k-r \text{ impair}. \end{cases}$$

On note $A(\underline{q}; r, s) : L_{m,n} \rightarrow L_{m,n-l} \oplus L_{r,s}$ l’isomorphisme composé des isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} L_{m,n} & \xrightarrow{U} & L_{m,n} \cong L_{m,r-1} \oplus L_{r,s} \oplus L_{s+1,n} \cong L_{m,r-1} \oplus L_{s+1,n} \oplus L_{r,s} \\ & \xrightarrow{1 \oplus D \oplus 1} & L_{m,r-1} \oplus L_{r,n-l} \oplus L_{r,s} \cong L_{m,n-l} \oplus L_{r,s}, \end{array}$$

$D : L_{s+1,n} \rightarrow L_{r,n-l}$ désignant l’isomorphisme dont la matrice, dans les décompositions canoniques de $L_{s+1,n}$ et $L_{r,n-l}$, est la matrice diagonale $\text{diag}(e^{*-1}, e, e^{*-1}, e, \dots)$.

Alors on a :

$$S(\underline{q}) = (A(\underline{q}; r, s))^* (S(\underline{q}^{\text{bd}}) \oplus S(\underline{q}^{\text{ct}})) A(\underline{q}; r, s).$$

Exemple. Voici une application des énoncés A.4.2 et A.4.4 (la définition du groupe abélien $V(R)$ et de l'homomorphisme $\nu : K_1(R) \rightarrow V(R)$ est donnée en 4.5.1) :

Proposition A.4.5. *Soit $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n; a)$ une relation symplectique sur L avec $m + n \equiv 1 \pmod 2$ et $n - m \geq 3$. Soient respectivement $\underline{q}$, $\underline{q}^{\mathfrak{s}}$, $\underline{q}^{\mathfrak{d}}$ et $\underline{q}^{\mathfrak{ct}}$ les suites de Sturm $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$, $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_{n-2})$, $(q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_{n-1})$ et $(q_{m+2}, q_{m+3}, \dots, q_n)$; soient respectivement $\underline{0}$, $\underline{0}^{\mathfrak{s}}$, $\underline{0}^{\mathfrak{d}}$ et $\underline{0}^{\mathfrak{ct}}$ les suites de Sturm nulles de même type.*

Alors on a dans $V(R)$ les égalités suivantes (les formes de Sturm qui apparaissent ci-dessous sont non-dégénérées d'après le point (a) de A.2.2) :

$$[S(\underline{0}), S(\underline{q})] = [S(\underline{0}^{\mathfrak{s}}), S(\underline{q}^{\mathfrak{s}})] = [S(\underline{0}^{\mathfrak{d}}), S(\underline{q}^{\mathfrak{d}})] = [S(\underline{0}^{\mathfrak{ct}}), S(\underline{q}^{\mathfrak{ct}})] + (-1)^m \nu(\text{Dét } a) .$$

En particulier, les classes de Witt des formes de Sturm $S(\underline{q})$, $S(\underline{q}^{\mathfrak{s}})$, $S(\underline{q}^{\mathfrak{d}})$ et $S(\underline{q}^{\mathfrak{ct}})$ coïncident.

Démonstration. Les égalités

$$[S(\underline{0}), S(\underline{q})] = [S(\underline{0}^{\mathfrak{s}}), S(\underline{q}^{\mathfrak{s}})] \quad \text{et} \quad [S(\underline{0}), S(\underline{q})] = [S(\underline{0}^{\mathfrak{s}}), S(\underline{q}^{\mathfrak{s}})]$$

résultent de la proposition A.4.2, du scholie 4.5.1.5 et du lemme 4.5.1.8.

Vérifions un peu plus en détails l'égalité

$$[S(\underline{0}), S(\underline{q})] = [S(\underline{0}^{\mathfrak{ct}}), S(\underline{q}^{\mathfrak{ct}})] + (-1)^m \nu(\text{Dét } a) .$$

Pour fixer les idées, nous supposons m pair (et donc n impair).

Par définition même des applications ∂_r et ∂_g , on a $\partial_g(\underline{q}^{\mathfrak{ct}}) = q_m$ et $\partial_r(\underline{q}^{\mathfrak{ct}}) = q_n$; on a donc $S(\underline{q}^{\mathfrak{bd}}) = \hbar_L$ (la notation $\underline{q}^{\mathfrak{bd}}$ est introduite dans l'énoncé A.4.4). D'autre part, l'égalité dans Sp_L :

$$E(\underline{q}^{\mathfrak{ct}}) = \begin{bmatrix} 1 & -q_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q_m & 1 \end{bmatrix}$$

montre que l'on a $e(\underline{q}^{\mathfrak{ct}}) = \pm a^{-1}$.

On met maintenant le corollaire A.4.4 en oeuvre ; pour alléger la notation, on pose $A(\underline{q}; m+1, n-1) = A(\underline{q})$. On a dans $V(R)$ la suite d'égalités suivantes :

$$\begin{aligned} [S(\underline{0}^{\mathfrak{ct}}), S(\underline{q}^{\mathfrak{ct}})] &= [\hbar_L \oplus S(\underline{0}^{\mathfrak{ct}}), \hbar_L \oplus S(\underline{q}^{\mathfrak{ct}})] \\ &= [S(\underline{0}) \cdot A(\underline{0})^{-1}, S(\underline{q}) \cdot A(\underline{q})^{-1}] \\ &= [S(\underline{0}), S(\underline{q}) \cdot (A(\underline{q})^{-1} A(\underline{0}))] \\ &= [S(\underline{0}), S(\underline{q})] + [S(\underline{q}), S(\underline{q}) \cdot (A(\underline{q})^{-1} A(\underline{0}))] \\ &= [S(\underline{0}), S(\underline{q})] + \nu(\text{Dét}(A(\underline{q})^{-1} A(\underline{0}))) . \end{aligned}$$

Le corollaire A.4.4 montre également que l'on a

$$\text{Dét}(\underline{A}(\underline{q})^{-1}\underline{A}(\underline{0})) = \text{Dét}(\pm a^{*-1}).$$

On conclut en observant que l'égalité $E(\underline{q})H(a) = 1$ (dans Sp_L) implique $\text{Dét } a^* = \text{Dét } a$ et que l'on a $\nu(-1) = 0$, -1 désignant ici l'élément de $K_1(R)$ image de -1 par l'homomorphisme $R^\times \rightarrow K_1(R)$. $\square$

A.5 Formes de Sturm et résidu de formes bilinéaires symétriques

Le titre ci-dessus fait référence au point (b) du corollaire A.5.2 ci-après.

Proposition A.5.1. *Soit $\underline{q} = (q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ une suite de Sturm sur L . Soit $f : L_n \rightarrow L_{m,n-1}$ l'homomorphisme dont la matrice est la suivante :*

$$\begin{bmatrix} e(q_{m+1}, \dots, q_n) \\ e(q_{m+2}, \dots, q_n) \\ \vdots \\ e(q_n) \end{bmatrix}$$

(il s'agit d'une matrice de type $(L_n) \times (L_m, L_{m+1}, \dots, L_{n-1})$). Soient $i_1 : L_n \rightarrow L_{m,n}$, $p_1 : L_{m,n} \rightarrow L_{m,n-1}$, $i_0 : L_m^* \rightarrow L_{m,n}^*$ et $p_0 : L_m^* \rightarrow L_{m+1,n}^*$ les homomorphismes dont les matrices sont respectivement $\begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -f \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ (de types respectifs $(L_n) \times (L_m, L_{m+1}, \dots, L_{n-1})$, $(L_m, L_{m+1}, \dots, L_{n-1}) \times (L_m, L_{m+1}, \dots, L_{n-1})$, $(L_m^*) \times (L_m^*, L_{m+1,n}^*)$ et $(L_m^*, L_{m+1,n}^*) \times (L_{m+1,n}^*)$). Soit $U : L_{m,n-1} \rightarrow L_{m+1,n}^*$ l'isomorphisme dont la matrice est obtenue à partir de la matrice de Sturm $S(\underline{q})$ en supprimant la dernière colonne et la première ligne (il s'agit d'une "matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale"). Alors :

(a) Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_n & \xrightarrow{i_1} & L_{m,n} & \xrightarrow{p_1} & L_{m,n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow -e(\underline{q}) & & \downarrow S(\underline{q}) & & \downarrow U \\ 0 & \longrightarrow & L_m^* & \xrightarrow{i_0} & L_{m,n}^* & \xrightarrow{p_0} & L_{m+1,n}^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

est commutatif et ses lignes sont exactes.

(b) Le couple (i_1, i_0) considéré comme un homomorphisme de complexes de chaînes, du complexe $L_n \xrightarrow{-e(\underline{q})} L_m^*$ dans le complexe $L_{m,n} \xrightarrow{S(\underline{q})} L_{m,n}^*$, est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. La commutativité du diagramme du point (a) est un avatar de la proposition A.1.2 (tout particulièrement la commutativité du carré de gauche); l'exactitude de ses lignes est évidente. On observera incidemment que ce point (a) est aussi intimement relié à la proposition A.3.1. Passons au point (b). L'homomorphisme de complexes (i_1, i_0) est injectif et son conoyau est le complexe $L_{m,n-1} \xrightarrow{U} L_{m+1,n}^*$ qui est manifestement acyclique; (i_1, i_0) est donc une équivalence d'homologie. C'est une équivalence d'homotopie parce que les R -modules L_n , L_m^* , $L_{m,n}$ et $L_{m,n}^*$ sont libres. $\square$

Corollaire A.5.2. Soit $r \geq 1$ un entier; soit $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_{2r})$ une suite de Sturm sur L de type $(1, 2r)$. On pose :

$$\Lambda = E(\underline{q}) \cdot L, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = E(\underline{q}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(dans la deuxième égalité $E(\underline{q})$ est considéré comme une matrice de type $(L, L^*) \times (L, L^*)$, et les deux matrices colonnes sont de type $(L) \times (L, L^*)$; $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ est un plongement lagrangien dont l'image est Λ).

- (a) La forme bilinéaire symétrique $-S(\underline{q})$ est une forme primitive (voir 3.3.1) pour le lagrangien Λ .
- (b) Si l'on suppose que R est intègre et que a est injectif alors $S(\underline{q})$ est non-singulière et l'on a un isomorphisme de R -modules d'enlacement

$$\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \cong -\text{rés } S(\underline{q})$$

(voir 3.3.2).

Démonstration. On reprend les notations de la proposition A.5.1 (avec $m = 1$ et $n = 2r$). On constate que l'on a $e(\underline{q}) = (-1)^r a$ et $i_0^* i_1 = (-1)^r b$; le point (a) en découle. Le point (b) est une "spécialisation" du point (a) (voir 3.3.2.3). $\square$

Appendice B

Démonstration de la proposition 2.4.4

On reprend les notations introduites pour énoncer cette proposition. On pose en outre :

- $\underline{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{2m+1})$ ($\underline{q}$ est donc une suite de Sturm sur L de type $(0, 2m+1)$);
- $E(q_0, q_1, \dots, q_{2m+1}) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ (matrice de type $(L, L^*) \times (L, L^*)$);
- $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matrice de type $(L, L_{1,2m-1}) \times (L, L_{1,2m-1})$);
- $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (matrice de type $(L, L_{1,2m-1}) \times (L^*, L_{1,2m-1}^*)$);
- $C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (matrice de type $(L^*, L_{1,2m-1}^*) \times (L, L_{1,2m-1})$);
- $D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matrice de type $(L^*, L_{1,2m-1}^*) \times (L^*, L_{1,2m-1}^*)$).

La proposition 2.4.4 dit en clair que l'on a

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{-1} & 0 \\ 0 & U_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -S_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^* & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & F^{*-1} \\ -F & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette égalité implique en particulier $B - S_0 A = -U_1^* U_2^{-1} F$; c'est cette égalité que l'on commence par vérifier.

Proposition B.1. *Pour toute suite de Sturm $\underline{q}$ sur L de type $(0, 2m+1)$, on a :*

$$B - S_0 A = -U_1^* U_2^{-1} F.$$

Démonstration. Le second membre est par définition indépendant de q_0 et q_{2m+1} et il n'est pas difficile de se convaincre qu'il est en est de même du premier membre ; on peut donc supposer $q_0 = 0$.

On a les décompositions en blocs suivantes :

$$U_2 = \begin{bmatrix} U_3 & Q_{2m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad U_2^{-1} = \begin{bmatrix} U_3^{-1} & -U_3^{-1}Q_{2m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

la matrice Q_{2m} définie par la première décomposition est une matrice “colonne” de type $(L) \times (L^*, L, \dots, L)$. On pose $\epsilon = (-1)^{m-1}$ (en clair, $\epsilon = (-1)^{m-1}\text{id}_L$, id_L désignant l'identité de L) ; on constate que l'on a la décomposition en blocs suivante :

$$U_2^{-1}F = \begin{bmatrix} -U_3^{-1}Q_{2m}\epsilon & 1 \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix} .$$

On en déduit que les $2m - 1$ dernières colonnes de $U_1^*U_2^{-1}F$ sont celles de S_0 qui coïncident bien avec celles de $S_0A - B$. Il reste donc à expliciter la première colonne de $U_1^*U_2^{-1}F$, c'est-à-dire le produit

$$U_1^* \begin{bmatrix} -U_3^{-1}Q_{2m}\epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix} .$$

On utilise pour cela la proposition A.1.2 (appliquée à la suite de Sturm $(q_1, q_2, \dots, q_{2m})$), qui implique que l'on a

$$S_1 \begin{bmatrix} -U_3^{-1}Q_{2m} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\epsilon \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et que le coefficient sur la première ligne de $U_3^{-1}Q_{2m}$ est $b\epsilon$. On obtient :

$$U_1^* \begin{bmatrix} -U_3^{-1}Q_{2m}\epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Le second membre est bien la première colonne de $S_0A - B$ si l'on a $q_0 = 0$. Ce qui achève la démonstration de la proposition B.1. $\square$

On déduit maintenant de la proposition B.1 une proposition B.1-*bis* par une méthode analogue à celle qui nous a permis de passer de l'énoncé A.1.2 à l'énoncé A.1.3.

L'égalité de B.1 peut s'écrire

$$B(\underline{q}) - S_0(\underline{q})A(\underline{q}) = -U_1^*(\underline{q})U_2^{-1}(\underline{q})F(\underline{q}) ;$$

le saut conceptuel est le suivant : ci-dessus $B, S_0, A \dots$ sont considérés comme des transformations naturelles entre foncteurs (nous laissons au lecteur le soin de préciser les catégories source et but de ces foncteurs!).

Soit $\underline{q} = (q_0, q_1, \dots, q_{2m+1})$ une suite de Sturm sur L de type $(0, 2m+1)$; on note $\underline{q}'$ la suite de Sturm sur L^* de type $(0, 2m+1)$ suivante :

$$\underline{q}' = (q_{2m+1}, q_{2m}, \dots, q_0) .$$

La proposition B.1 donne l'égalité

$$(B.1(\underline{q}')) \quad B(\underline{q}') - S_0(\underline{q}')A(\underline{q}') = -U_1^*(\underline{q}')U_2^{-1}(\underline{q}')F(\underline{q}')$$

que l'on va réécrire en tenant compte des observations ci-après.

On a

$$E(\underline{q}') = \sigma E(\underline{q})^{-1} \sigma^{-1}$$

(l'isomorphisme symplectique $\sigma : H(L) \rightarrow H(L^*)$ est introduit en 2.1.1); on en déduit

$$E(\underline{q}') = \begin{bmatrix} a^*(\underline{q}) & b^*(\underline{q}) \\ c^*(\underline{q}) & d^*(\underline{q}) \end{bmatrix} ,$$

$E(\underline{q}')$ étant considéré comme une matrice de type $(L^*, L) \times (L^*, L)$.

Soit Σ l'isomorphisme de $L_{0,2m-1}$ sur $(L^*)_{0,2m-1}$ de matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(des ± 1 sur l'antidiagonale, des 0 partout ailleurs). On constate que l'on a :

$$- \quad \Sigma^* \circ B(\underline{q}') \circ \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^*(\underline{q}) \end{bmatrix} , \quad \Sigma^{-1} \circ A(\underline{q}') \circ \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^*(\underline{q}) \end{bmatrix} ;$$

- $\Sigma^* \circ S_0(\underline{q}') \circ \Sigma = -S_2(\underline{q}) ;$
- $\Sigma^{-1} \circ U_1(\underline{q}') \circ \Sigma = U_2^*(\underline{q}) , \quad \Sigma^{-1} \circ U_2^*(\underline{q}') \circ \Sigma = U_1(\underline{q}) ;$
- $\Sigma^* \circ F(\underline{q}') \circ \Sigma = -F^*(\underline{q}) .$

Compte tenu des observations précédentes, l'égalité (B.1($\underline{q}'$)) conduit à l'égalité qui apparaît ci-dessous :

Proposition B.2. *Pour toute suite de Sturm $\underline{q}$ sur L de type $(0, 2m+1)$, on a :*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^* \end{bmatrix} + S_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^* \end{bmatrix} = U_2 U_1^{*-1} F^* .$$

On revient à la démonstration de la proposition 2.4.4. La proposition B.1 implique qu'il existe deux formes bilinéaires symétriques, disons encore Y et Z , définies respectivement sur $L_{0,2m-1}^*$ et $L_{0,2m-1}$, uniquement déterminées en fonction de $\underline{q}$, telles que l'on a

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{-1} & 0 \\ 0 & U_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^* & 0 \\ 0 & U_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & F^{*-1} \\ -F & 0 \end{bmatrix} .$$

En prenant l'inverse des deux membres, on obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} D^* & -C^* \\ -B^* & A^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -F^{-1} \\ F^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^{*-1} & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_1^{*-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_0 & 1 \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & F^{*-1} \\ -F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^* & -C^* \\ -B^* & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F^{-1} \\ F^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^{*-1} & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_1^{*-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F^{-1} \\ F^* & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & F^{*-1} \\ -F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^* & -C^* \\ -B^* & A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F^{-1} \\ F^* & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F^{*-1} A^* F^* & F^{*-1} B^* F^{-1} \\ F C^* F^* & F D^* F^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^* \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^* \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^* \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^* \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^* \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^{*-1} & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_1^{*-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -F^{-1} \\ F^* & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité entraîne la suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^* \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^* \end{bmatrix} = U_2 U_1^{*-1} F^*.$$

En comparant avec celle de la proposition B.2, on obtient

$$(Z - S_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^* \end{bmatrix} = 0.$$

On en déduit $Z = S_2$, en invoquant le fait que a est “génériquement” inversible. Précisons un peu. Soit n la dimension du R -module libre L ; soit $\mathbb{U}$ le quotient de l’anneau de polynômes $\mathbb{Z}[T_{i,j,k}; 1 \leq i, j \leq n, 0 \leq k \leq 2m+1]$ par l’idéal engendré par les polynômes $T_{i,j,k} - T_{j,i,k}$ ($\mathbb{U}$ est donc encore isomorphe à un anneau de polynômes). Soit $\underline{Q}$ la suite de matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{U}$ suivante :

$$\underline{Q} = ([T_{i,j,0}], [T_{i,j,1}], \dots, [T_{i,j,2m+1}]);$$

on considère $\underline{Q}$ comme une suite de Sturm sur $\mathbb{U}^n$ de type $(0, 2m+1)$. On constate que l’endomorphisme $a(\underline{Q})$ de $\mathbb{U}^n$ est inversible sur le corps des fractions de $\mathbb{U}$; en effet, si l’on prend toutes les variables égales à 0, alors $\det a(\underline{Q})$ devient égal à 1. On en déduit $Z(\underline{Q}) = S_2(\underline{Q})$ et donc $Z(\underline{q}) = S_2(\underline{q})$, par spécialisation. $\square$

Remarque. L’égalité $(Z - S_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^* \end{bmatrix} = 0$ montre immédiatement que les $2m-1$ premières colonnes de $Z - S_2$ sont nulles; puisque $Z - S_2$ est symétrique, il en est de même pour les $2m-1$ premières lignes. Soit ω le coefficient dans le coin en bas à droite de $Z - S_2$, alors on a en outre $\omega a^* = 0$. Ce qui précède revient à montrer, en invoquant l’anneau “universel” $\mathbb{U}$, que cette dernière égalité implique $\omega = 0$. Cet argument utilise implicitement que l’anneau R est commutatif. Dans le cas où R est un anneau avec une anti-involution non nécessairement triviale, on peut remplacer $\mathbb{U}$ par la $\mathbb{Z}$ -algèbre librement engendrée par des indéterminées “non-commutatives”, $Q_0, Q_1, \dots, Q_{2m+1}$, munie

de l'anti-involution qui est l'identité sur ces indéterminées (voir le commentaire qui suit la démonstration du point (b) de la proposition 3.1.1).

On peut achever la démonstration de la proposition 2.4.4 à l'aide de la proposition 2.4.3, mais on peut plus directement s'appuyer sur la proposition suivante :

Proposition B.3. *Pour toute suite de Sturm q sur L de type $(0, 2m+1)$, on a :*

$$S_1 = U_1 A F^{-1} U_2 .$$

Démonstration. On a la décomposition en blocs suivante :

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & Q_1 \\ 0 & U_3 \end{bmatrix} ;$$

la matrice Q_1 définie par la décomposition ci-dessus est une matrice “ligne” de type $(L^*, L, \dots, L) \times (L)$. On constate que l'on a la décomposition en blocs suivante :

$$U_1 A F^{-1} U_2 = \begin{bmatrix} Q_1 & a\epsilon + Q_1 U_3^{-1} Q_{2m} \\ U_3 & Q_{2m} \end{bmatrix} .$$

Or on a la décomposition en blocs suivante :

$$S_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & \delta \\ U_3 & Q_{2m} \end{bmatrix} .$$

avec

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = 1 , \\ 0 & \text{pour } m \geq 2 . \end{cases}$$

L'égalité de B.3 est donc équivalente à la suivante :

$$a\epsilon + Q_1 U_3^{-1} Q_{2m} = \delta ,$$

qui elle résulte de l'égalité

$$S_1 \begin{bmatrix} -U_3^{-1} Q_{2m} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\epsilon \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

que nous avons déjà utilisée dans la démonstration de B.1. □□

Appendice C

Sur le graphe bipartite associé à la relation de transversalité des lagrangiens

On commence par observer que la notion de suite de Sturm est intimement reliée à celle de suite de lagrangiens consécutivement transverses. Précisément, on constate que l'on a l'énoncé suivant dont la vérification est laissée au lecteur :

Proposition C.1. *Soit L un R -module libre de dimension finie. Soient m et n deux entiers (relatifs) avec $m \leq n$. Soit $(\Lambda_{m-1}, \Lambda_m, \Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_n)$ une suite finie de lagrangiens de l'espace symplectique $H(L)$ avec $\Lambda_{m-1} = L_{m-1}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *On a $\Lambda_{k-1} \pitchfork \Lambda_k$ pour $m \leq k \leq n$.*
- (ii) *Il existe une suite de Sturm $(q_m, q_{m+1}, \dots, q_n)$ sur L de type (m, n) telle que l'on a*

$$\Lambda_k = E(q_m, q_{m+1}, \dots, q_k) \cdot L_k \quad \text{pour } m \leq k \leq n.$$

De plus, si la condition (i) est satisfaite alors la suite de Sturm qui apparaît dans la condition (ii) est uniquement déterminée.

On introduit ensuite le graphe bipartite associé à la relation de transversalité des lagrangiens (comparer avec [No]). Celui-ci est défini ci-dessous comme un complexe simplicial de dimension 1 (un graphe combinatoire dans la terminologie de [SE]) ; on identifie un tel complexe avec sa réalisation géométrique.

Soit L un R -module libre de dimension finie. On note $\mathcal{G}_L$ le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble $\mathcal{L}_L \times \{0, 1\}$ et dont l'ensemble des arêtes est constitué des parties à deux éléments $\{(\Lambda, i), (\Theta, j)\}$ de $\mathcal{L}_L \times \{0, 1\}$, avec $i \neq j$ et $\Lambda \pitchfork \Theta$. Le graphe $\mathcal{G}_L$ est muni d'une arête “distinguée”, que l'on note a_L , à savoir celle qui joint les sommets $(L, 0)$ et $(L^*, 1)$.

L'avantage du “dédoublément” de $\mathcal{L}_L$, qui apparaît dans la définition ci-dessus, est de permettre la “stabilisation”. Soit L' un R -module libre de dimension finie ; alors l'application de $\mathcal{L}_L \times \{0,1\}$ dans $\mathcal{L}_{L \oplus L'} \times \{0,1\}$, $(\Lambda, i) \mapsto (\Lambda \oplus L'_i, i)$, avec $L'_0 = L'$ et $L'_1 = L'^*$, induit un plongement du graphe $\mathcal{G}_L$ dans le graphe $\mathcal{G}_{L \oplus L'}$ et ce plongement préserve l'arête distinguée.

Comme d'habitude, on pose $\mathcal{G}_n(R) = \mathcal{G}_{R^n}$ et $\mathcal{G}(R) = \text{colim}_n \mathcal{G}_n(R)$; $\mathcal{G}(R)$ est un graphe bipartite muni d'une arête distinguée.

Par construction le graphe $\mathcal{G}_L$ est muni d'une action du groupe symplectique Sp_L . On note $\mathcal{G}_L^{\text{lib}}$ le sous-graphe “plein” de $\mathcal{G}_L$ dont les sommets sont les (Λ, i) , avec Λ libre ; la proposition 2.1.5 montre que l'action de Sp_L sur $\mathcal{G}_L^{\text{lib}}$ est transitive. On note $\mathcal{G}_L^c$ la composante connexe de a_L dans $\mathcal{G}_L$. La première partie de l'énoncé ci-après est impliquée par la proposition C.1, la deuxième est immédiate (on rappelle que l'on note Γ_L le sous-groupe de Sp_L engendré par ESp_L et $\text{H}(\text{GL}_L)$) :

Proposition C.2. *Le graphe $\mathcal{G}_L^c$ est le sous-graphe “plein” de $\mathcal{G}_L$ dont les sommets sont les (Λ, i) avec $\Lambda \in \text{ESp}_L \cdot L$; l'action de Sp_L sur $\mathcal{G}_L$ induit une action transitive de Γ_L sur $\mathcal{G}_L^c$.*

Nous expliquons maintenant la relation entre le groupe A_L , introduit en 6.1, et l'homologie des graphes $\mathcal{G}_L^c$ ou $\mathcal{G}_L^{\text{lib}}$. Rappelons brièvement la définition de ce groupe. L'homomorphisme canonique de $(\mathcal{S}_L * \mathcal{S}_L^*) \rtimes \text{GL}_L$ dans Sp_L est noté ρ_L ; A_L est le groupe qui “remplace” $\ker \rho_L$ lorsque l'on “centralise” la suite exacte

$$1 \longrightarrow \ker \rho_L \longrightarrow (\mathcal{S}_L * \mathcal{S}_L^*) \rtimes \text{GL}_L \xrightarrow{\rho_L} \text{im } \rho_L := \Gamma_L \longrightarrow 1 .$$

Proposition C.3. *On a des isomorphismes de groupes canoniques :*

$$A_L \cong H_0(\Gamma_L ; H_1(\mathcal{G}_L^c ; \mathbb{Z})) \cong H_0(\text{Sp}_L ; H_1(\mathcal{G}_L^{\text{lib}} ; \mathbb{Z})) .$$

Démonstration. On note G_1 et G_2 les deux sous-groupes de Sp_L constitués des éléments qui préservent respectivement les lagrangiens L^* et L , en clair des éléments $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ qui vérifient respectivement $c = 0$ et $b = 0$. On fait les observations suivantes :

- On a $G_1 \cap G_2 = \text{H}(\text{GL}_L)$ (cette intersection est le sous-groupe de Sp_L constitués des éléments qui préservent l'arête a_L de $\mathcal{G}_L$).
- Le produit semi-direct $(\mathcal{S}_L * \mathcal{S}_L^*) \rtimes \text{GL}_L$ s'identifie à la somme amalgamée $G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2$.

- Les graphes $\mathcal{G}_L^{\text{lib}}$ et $\mathcal{G}_L^c$ s'identifient respectivement aux graphes bipartites associés aux triades de groupes $(\text{Sp}_L; G_1, G_2)$ et $(\text{im } \rho_L; G_1, G_2)$ (une *triade* de groupes est un groupe muni de deux sous-groupes) :

$$\mathcal{G}_L^{\text{lib}} = \mathfrak{G}(\text{Sp}_L; G_1, G_2), \quad \mathcal{G}_L^c = \mathfrak{G}(\text{im } \rho_L; G_1, G_2).$$

La définition du graphe bipartite $\mathfrak{G}(-; -, -)$ est rappelée dans la discussion ci-après. Cette discussion est une simple compilation d'énoncés qui apparaissent dans [SE]. Compte tenu des observations précédentes, la proposition C.3 est conséquence de la proposition C.4. $\square$

SUR LE GRAPHE D'UNE TRIADE DE GROUPE

Soit G un groupe muni de deux sous-groupes G_1 et G_2 . On associe à cette donnée un graphe bipartite, que l'on note $\mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$, défini de la façon suivante :

- L'ensemble des sommets est la réunion disjointe $G/G_1 \amalg G/G_2$.
- L'ensemble des arêtes est le sous-ensemble du produit $G/G_1 \times G/G_2$ (produit qui s'identifie bien à un sous-ensemble des parties à deux éléments de $G/G_1 \amalg G/G_2$!) constitué des couples (γ_1, γ_2) , avec $p_1^{-1}(\gamma_1) \cap p_2^{-1}(\gamma_2) \neq \emptyset$, p_i désignant l'application de passage au quotient de G dans G/G_i ($i = 1, 2$). Le graphe $\mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$ est muni d'une arête distinguée, que l'on note a , à savoir celle qui joint les sommets $p_1(1)$ et $p_2(1)$, que l'on note s_1 et s_2 .

La condition $p_1^{-1}(\gamma_1) \cap p_2^{-1}(\gamma_2) \neq \emptyset$ ci-dessus est équivalente à la condition $q_1^{-1}(\gamma_1) \cap q_2^{-1}(\gamma_2) \neq \emptyset$, q_i désignant l'application de passage au quotient de $G/(G_1 \cap G_2)$ dans G/G_i ($i = 1, 2$). L'intérêt de cette observation est le suivant. Pour tout couple (γ_1, γ_2) , le sous-ensemble $q_1^{-1}(\gamma_1) \cap q_2^{-1}(\gamma_2)$ de $G/(G_1 \cap G_2)$ a au plus un élément, si bien que l'ensemble des arêtes de $\mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$ s'identifie avec $G/(G_1 \cap G_2)$.

Par construction, $\mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$ est muni d'une action du groupe G (qui préserve la structure de graphe bipartite). Les sous-groupes d'isotropie des sommets s_1 et s_2 , et de l'arête a , sont respectivement G_1 , G_2 et $G_1 \cap G_2$; l'action de G sur l'ensemble des sommets de "type 1", sur l'ensemble des sommets de "type 2" et sur l'ensemble des arêtes est transitive.

Proposition C.4. *Soit G un groupe muni de deux sous-groupes G_1 et G_2 . L'homomorphisme canonique de $G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2$ dans G est noté ρ ; son image, en d'autres termes le sous-groupe de G engendré par G_1 et G_2 , est notée $\text{im } \rho$.*

(a.1) On a un isomorphisme canonique, G -équivariant, de graphes bipartites :

$$\mathfrak{G}(G; G_1, G_2) \cong G \times_{\text{im } \rho} \mathfrak{G}(\text{im } \rho; G_1, G_2) .$$

(a.2) On a un isomorphisme canonique (de G -ensembles et d'ensembles pointés) :

$$\pi_0(\mathfrak{G}(G; G_1, G_2); \mathfrak{a}) \cong G / \text{im } \rho .$$

(b.1) On a un isomorphisme de groupes canonique :

$$\pi_1(\mathfrak{G}(G; G_1, G_2); \mathfrak{a}) \cong \ker \rho .$$

(b.2) L'action du groupe $\ker \rho$ sur $\mathfrak{G}(G_{1 \cap G_2} * G_2; G_1, G_2)$ (induite par celle du groupe $G_{1 \cap G_2} * G_2$) est libre (et préserve la structure de graphe bipartite). Soit $\mathfrak{G}(\rho) : \mathfrak{G}(G_{1 \cap G_2} * G_2; G_1, G_2) \rightarrow \mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$ l'application de graphes bipartites induite par ρ ; $\mathfrak{G}(\rho)$ induit un isomorphisme de graphes bipartites :

$$\ker \rho \backslash \mathfrak{G}(G_{1 \cap G_2} * G_2; G_1, G_2) \cong \mathfrak{G}(\text{im } \rho; G_1, G_2) ;$$

$\mathfrak{G}(G_{1 \cap G_2} * G_2; G_1, G_2)$ est simplement connexe (en d'autres termes est un arbre) et $\mathfrak{G}(\rho)$ est "le" revêtement universel de $\mathfrak{G}(\text{im } \rho; G_1, G_2)$.

Démonstration de (a.2). Compte tenu de (a.1), il suffit de montrer que le graphe $\mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$ est connexe si G est engendré par G_1 et G_2 . Ceci résulte de l'observation suivante : soient g un élément de G et i un élément de $\{1, 2\}$, alors l'ensemble des sommets s , tels que $\{p_i(g), s\}$ est une arête, est égal à $p_{3-i}(gG_i)$. $\square$

Démonstration de (b.1). Il est clair que l'on peut supposer $\text{im } \rho = G$. On pose $X = \mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$, $X_1 = X - G/G_2$ et $X_2 = X - G/G_1$ (G/G_i , $i = 1, 2$, est un sous-ensemble de l'ensemble des sommets de X); X_i est un ouvert de X qui se rétracte par déformation G -équivariante sur G/G_i ; $X_1 \cap X_2$ s'identifie au produit $G/(G_1 \cap G_2) \times]0, 1[$. On considère la construction de Borel $EG \times_G X$. Le théorème de Van Kampen, appliqué au recouvrement ouvert $\{EG \times_G X_i\}_{i=1,2}$, montre que le groupe fondamental de $EG \times_G X$ est canoniquement isomorphe à la somme amalgamée $G_{1 \cap G_2} * G_2$. La suite exacte de groupes associée au revêtement galoisien $EG \times X \rightarrow EG \times_G X$ s'identifie à une suite exacte de la forme :

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{G}(G; G_1, G_2); \mathfrak{a}) \longrightarrow G_{1 \cap G_2} * G_2 \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 1 . \square$$

Remarques et compléments

Ces “remarques et compléments” sont au nombre de six :

I) Le point (b.1) montre que le groupe $\ker \rho$ est toujours un groupe libre. En particulier le groupe $\ker \rho_L$ qui apparaît au début du chapitre 5 et de cet appendice est un groupe libre.

II) Soit $(g_1, g_2, \dots, g_k, \dots, g_{2m+1})$ une suite finie d'éléments de G avec $g_k \in G_1$ pour k impair, $g_k \in G_2$ pour k pair et $g_1 g_2 \dots g_{2m+1} = 1$. Alors la suite d'arêtes orientées

$$(p_1(1), p_2(g_1)) , (p_2(g_1), p_1(g_1 g_2)) , (p_1(g_1 g_2), p_2(g_1 g_2 g_3)) , \dots , \\ (p_2(g_1 g_2 g_3 \dots g_{2m-1}), p_1(g_1 g_2 g_3 \dots g_{2m})) = p_1(g_{2m+1}^{-1}) = p_1(1))$$

fournit un lacet de $\mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$ en $p_1(1)$, disons α ; on observera incidemment que si l'on a $g_{2m+1} = 1$ alors la dernière arête orientée de la suite ci-dessus est $(p_2(1), p_1(1))$. L'image de la classe de α par l'isomorphisme $\pi_1(\mathfrak{G}(G; G_1, G_2); a) \cong \ker \rho$ du point (b.1) est l'élément de $G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2$ associé à la suite $(g_1, g_2, \dots, g_k, \dots, g_{2m+1})$. Pour s'en convaincre considérer le relèvement évident de α dans le graphe $\mathfrak{G}(G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2; G_1, G_2)$ qui d'après le point (b.2) est le revêtement universel du graphe $\mathfrak{G}(G; G_1, G_2)$.

III) On peut condenser les points (a.2) et (b.1) de la proposition C.4 en disant que l'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathfrak{G}(G; G_1, G_2); a) \rightarrow G_1 *_{G_1 \cap G_2} G_2 \xrightarrow{\rho} G \rightarrow \pi_0(\mathfrak{G}(G; G_1, G_2); a) \rightarrow *$$

de groupes et d'ensembles pointés.

IV) Soit X un espace topologique connexe (et localement connexe par arcs) pointé, admettant un revêtement universel, disons $\tilde{X}$; on suppose que X est muni d'une action d'un groupe G (sans condition de point base). Alors le groupe $\pi_1(EG \times_G X)$ s'identifie au sous-groupe des homéomorphismes de $\tilde{X}$, disons $\tilde{G}$, dont l'action sur $\tilde{X}$ “relève” celle de G sur X . En effet, on constate que l'action “diagonale” de $\tilde{G}$ sur $EG \times \tilde{X}$ est libre, que l'application $EG \times \tilde{X} \rightarrow EG \times_{\tilde{G}} \tilde{X}$ est un revêtement et que l'espace $EG \times_{\tilde{G}} \tilde{X}$ s'identifie à l'espace $EG \times_G X$.

V) On constate que le groupe ${}_L W_1(R)$ est isomorphe, au moins en tant qu'ensemble pointé, à $\pi_0(\mathcal{G}^{\text{lib}}(R); a)$ (le lecteur a dû déjà deviné la signification des notations $\mathcal{G}^{\text{lib}}(R)$ et a : $\mathcal{G}^{\text{lib}}(R)$ est le graphe limite directe des graphes $\mathcal{G}_{R^n}^{\text{lib}}$ et a est la limite directe de leurs arêtes distinguées); pour une explication de l'isomorphisme en question voir D.1. Plus généralement, l'ensemble pointé $\pi_0(\mathcal{G}(R); a)$ est naturellement en bijection avec l'ensemble quotient

$\mathrm{ESp}(R) \backslash \mathcal{L}(R)$ (on a montré en 6.2.1 que la somme orthogonale fait de cet ensemble un groupe abélien, isomorphe au groupe $U^-(R)$, voir 6.2.1.8). On précise et justifie cette affirmation ci-après.

On identifie $\mathcal{L}(R)$ avec l'ensemble des sommets de “type 0” du graphe bipartite $\mathcal{G}(R)$. L'affirmation précise est la suivante :

- (A) L'application composée $\mathcal{L}(R) \hookrightarrow \mathcal{G}(R) \rightarrow \pi_0(\mathcal{G}(R); a)$ induit une bijection d'ensembles pointés $\mathrm{ESp}(R) \backslash \mathcal{L}(R) \cong \pi_0(\mathcal{G}(R); a)$.

On passe maintenant à la justification de (A). Comme tout lagrangien d'un espace symplectique, $H(L)$ possède un lagrangien transverse (point (b) de 2.1.5); l'application en question dans (A) est surjective. Il reste à étudier la relation d'équivalence qu'elle induit sur $\mathcal{L}(R)$. Avant cela, on rappelle une notation introduite au chapitre 4 et on introduit une notation *ad hoc* :

– Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie; la somme orthogonale et l'isomorphisme $H(L) \oplus H(L') \cong H(L \oplus L')$ induisent une application $\mathcal{L}_L \times \mathcal{L}_{L'} \rightarrow \mathcal{L}_{L \oplus L'}$, notée $(\Lambda, \Lambda') \mapsto \Lambda \oplus \Lambda'$. On observera que cette “loi de composition” est, en un sens évident, associative.

– Soient L un R -module libre de dimension finie et Λ_0, Λ_1 deux lagrangiens de l'espace symplectique $H(L)$; on écrit ci-dessous $\Lambda_0 \sim \Lambda_1$ si les deux sommets $(\Lambda_0, 0)$ et $(\Lambda_1, 0)$ du graphe bipartite $\mathcal{G}_L$ sont dans la même composante connexe. On observera que l'on a $\Lambda_0 \sim \Lambda_1$ si et seulement il existe deux suites finies de lagrangiens de $H(L)$, $(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n)$ et $(\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n+1})$, avec $n \geq 1$, $\Sigma_0 = \Lambda_0$, $\Sigma_{n+1} = \Lambda_1$ et $\Theta_k \pitchfork \Sigma_{k \pm 1}$ pour $1 \leq k \leq n$ (Λ_0 et Λ_1 sont “joins par un chemin d'arêtes de longueur $2n$ ”).

La relation d'équivalence $\sim$ ci-dessus vérifie :

- (1) Soient Λ_0, Λ_1 deux lagrangiens de $H(L)$ et Λ' un lagrangien de $H(L')$, alors on a l'implication

$$\Lambda_0 \sim \Lambda_1 \Rightarrow \Lambda_0 \oplus \Lambda' \sim \Lambda_1 \oplus \Lambda' \text{ et } \Lambda' \oplus \Lambda_0 \sim \Lambda' \oplus \Lambda_1 .$$

- (2) Pour tout lagrangien Λ' de $H(L')$, il existe un R -module de dimension finie L'' et un lagrangien Λ'' de $H(L'')$ tels que l'on a $\Lambda' \oplus \Lambda'' \sim L' \oplus L''$.
 (3) Pour tous lagrangiens Λ_0, Λ_1 de $H(L)$ et tout lagrangien Λ' de $H(L')$ avec $\Lambda_0 \oplus \Lambda' \sim \Lambda_1 \oplus \Lambda'$, il existe un R -module de dimension finie L'' tel que l'on a $\Lambda_0 \oplus L' \oplus L'' \sim \Lambda_1 \oplus L' \oplus L''$.
 (4) Soit Λ un lagrangien de $H(L)$; alors on a l'implication

$$\Lambda \sim L \iff \Lambda \in \mathrm{ESp}_L \cdot L$$

(la notation $\mathrm{ESp}_L \cdot L$ désigne l'orbite de l'action du sous-groupe ESp_L de Sp_L sur l'ensemble $\mathcal{L}_L$).

On obtient le point (1) en changeant les suites de lagrangiens $(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n)$ et $(\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{n+1})$, évoquées plus haut, en $(\Theta_1 \oplus \Theta', \Theta_2 \oplus \Theta', \dots, \Theta_n \oplus \Theta')$ et $(\Sigma_0 \oplus \Lambda', \Sigma_1 \oplus \Lambda', \dots, \Sigma_{n+1} \oplus \Lambda')$, Θ' désignant un lagrangien de $H(L')$ transverse à Λ' (la variante avec Λ' à gauche est évidente). Le point (2) est un scholie de la démonstration du point (b) de 6.2.1.8. Le point (3) résulte des points (1) et (2). Le point (4) est un avatar de la proposition C.1.

Le lecteur se convaincra sans peine que ces quatre points impliquent que deux sommets $(\Lambda_0, 0)$ et $(\Lambda_1, 0)$ de $\mathcal{G}(R)$ sont dans la même composante connexe si et seulement si ils sont dans la même orbite sous l'action de $\text{ESp}(R)$.

VI) Si l'anneau commutatif R est un corps et si l'on a $L = R$ alors la structure du graphe bipartite $\mathcal{G}_L$ est particulièrement simple : l'ensemble de ses sommets est $\mathbf{P}^1(R) \times \{0, 1\}$ et l'ensemble de ses arêtes est constitué des parties à deux éléments $\{(x, 0), (y, 1)\}$ de $\mathbf{P}^1(R) \times \{0, 1\}$ avec $x \neq y$. Il n'est pas difficile d'expliciter dans ce cas une base du groupe libre $\pi_1(\mathcal{G}_L; a)$ et d'en déduire une "présentation" de $\text{SL}_2(R)$. Donnons quelques détails. La suite exacte

$$1 \longrightarrow \ker \rho_L \longrightarrow (\mathcal{S}_L * \mathcal{S}_{L^*}) \rtimes \text{GL}_L \xrightarrow{\rho_L} \text{im } \rho_L \longrightarrow 1$$

se spécialise ici en une suite exacte de la forme suivante :

$$1 \longrightarrow \ker \rho \longrightarrow (R^+ * R^+) \rtimes R^\times \xrightarrow{\rho} \text{SL}_2(R) \longrightarrow 1 .$$

Précisons. La notation R^+ désigne le groupe additif de R (R muni de l'addition !). Le groupe multiplicatif $R^\times$ agit (à gauche) sur le premier (resp. second) R^+ via l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda^{-2}x$ (resp. via l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda^2x$). L'homomorphisme ρ est induit par les trois homomorphismes, disons $v : R^+ \rightarrow \text{SL}_2(R)$, $u : R^+ \rightarrow \text{SL}_2(R)$ et $h : R^\times \rightarrow \text{SL}_2(R)$, définis respectivement par

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} , \quad u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad h(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} .$$

On constate que $\ker \rho$ est le sous-groupe distingué de $(R^+ * R^+) \rtimes R^\times$ engendré par les "mots" suivants :

$$m(x) := u(x)v(-x^{-1})u(x)v(1)u(-1)v(1)h(x^{-1}) , \quad x \in R^\times$$

$$c(x) := u(1)v(-1)u(x)v(1)u(-1)v(x) , \quad x \in R$$

(on observera que l'on a la relation $c(x) = wu(x)w^{-1}v(x)$, w désignant le mot $u(1)v(-1)u(1)$ dont l'image dans $\text{SL}_2(R)$ est la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$).

On retrouve ainsi la présentation de [BU, Lemma 4.1.2].

On constate que l'invariant de Maslov $\mu(m(x))$ (voir chapitre 5) est l'élément $[R; \langle 1, \langle x \rangle]$ du groupe $V(R)$ (pour s'en convaincre utiliser par exemple la proposition 5.2.11). On vérifie par contre que l'invariant de Maslov $\mu(c(x))$ est trivial. En fait les "relations" $c(x)$ sont superfétatoires si l'on suppose que R n'est pas un corps de caractéristique 2 non-parfait. Précisons encore. Soit Δ le sous-groupe distingué de $(R^+ * R^+) \rtimes R^\times$ engendré par les $m(x)$, x parcourant $R^\times$; soit $\Theta(R)$ le sous-ensemble de R constitué des x avec $c(x) \in \Delta$. On constate que $\Theta(R)$ possède les propriétés suivantes :

- $\Theta(R)$ est un sous-groupe de R^+ ;
- 1 appartient à Δ (observer que l'on a $c(1) = m(1)$) ;
- on a l'implication $x \in \Delta \Rightarrow \lambda^2 x \in \Delta$ pour tout λ dans $R^\times$ (vérifier que l'on a $c(\lambda^2 x) \equiv h(\lambda)^{-1} c(x) h(\lambda) \pmod{\Delta}$).

On en déduit $\Theta(R) = R$ si R n'est pas un corps de caractéristique 2 non-parfait.

Appendice D

Invariance homotopique du ${}_W_1$

Soit R un anneau (commutatif) ; on pose

$${}_W_1(R) = \text{coker} (H : K_1(R) \rightarrow KSp_1(R)) .$$

Reformulons un peu plus concrètement cette définition :

On sait que $ESp(R)$ est le sous-groupe dérivé de $Sp(R)$ (voir par exemple [Bs2]). Il en résulte que le sous-ensemble $ESp(R)H(GL(R))$ du groupe $Sp(R)$, constitué des produits $eH(g)$ avec e dans $ESp(R)$ et g dans $GL(R)$, est un sous-groupe, que ce sous-groupe est distingué et que le groupe quotient $ESp(R) / ESp(R)H(GL(R))$ est abélien ; il est clair que l'on a :

$${}_W_1(R) = Sp(R) / ESp(R)H(GL(R)) .$$

L'objet de cet appendice est d'expliciter une démonstration du théorème suivant :

Théorème D (Karoubi). *Soit R un anneau dans lequel 2 est inversible. Alors l'homomorphisme naturel*

$${}_W_1(R) \rightarrow {}_W_1(R[T])$$

est un isomorphisme.

L'évaluation en 0 fournit un homomorphisme naturel ${}_W_1(R[T]) \rightarrow {}_W_1(R)$ qui est une rétraction du précédent. Il suffit donc de montrer que l'homomorphisme naturel ${}_W_1(R) \rightarrow {}_W_1(R[T])$ est surjectif : c'est ce que nous ferons en D.4. Le résultat que nous avons utilisé en 3.1.3 est en fait l'injectivité de l'évaluation en 0.

Notre preuve du théorème D suit de très près la méthode de linéarisation (voir D.3) qu'emploie Balmer dans [BA], où il démontre, dans un cadre légèrement différent du notre, un résultat tout à fait analogue. Cependant, pour

rester dans notre cadre, nous sommes amenés en outre à utiliser de façon cruciale un lemme (voir D.2) dû à Pardon [PA].

D.1 Sur l'invariant de Witt d'un lagrangien libre

Cet invariant est défini dans l'énoncé suivant ; la vérification des affirmations qu'il contient est immédiate.

Proposition-Définition D.1.1.

- (a) Soient L un R -module libre de dimension finie n et b un isomorphisme de R^n sur L . Alors l'homomorphisme de Sp_L dans $-W_1(R)$, composé de l'isomorphisme de Sp_L sur $\mathrm{Sp}_n(R)$ induit par b , de l'inclusion de $\mathrm{Sp}_n(R)$ dans $\mathrm{Sp}(R)$ et de l'homomorphisme de passage au quotient $\mathrm{Sp}(R) \rightarrow -W_1(R)$, ne dépend pas du choix de b . Nous le notons w .
- (b) Soient, en outre, Λ un lagrangien libre de $H(L)$ et Φ un automorphisme symplectique de $H(L)$ tel que l'on a $\Lambda = \Phi \cdot L$ (l'existence d'un tel Φ est garantie par le point (c) de la proposition 2.1.5). Alors l'élément $w(\Phi)$ de $-W_1(R)$ ne dépend que de Λ (et pas du choix de Φ). Nous l'appelons l'invariant de Witt de Λ et nous le notons $w(\Lambda)$.

Voici les premières propriétés de cet invariant :

Proposition D.1.2.

- (a) Soit L un R -module libre de dimension finie. Alors on a $w(L) = 0$ et $w(L^*) = 0$.
- (b) Soient $\phi : L \rightarrow L'$ un isomorphisme de R -modules libres de dimension finie et Λ un lagrangien libre de $H(L)$. Alors on a $w(H(\phi) \cdot \Lambda) = w(\Lambda)$.
- (c) Soient L un R -module libre de dimension finie, Λ un lagrangien libre de $H(L)$ et Φ un élément de Sp_L . Alors on a $w(\Phi \cdot \Lambda) = w(\Lambda) + w(\Phi)$.
- (d) Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie ; soient Λ un lagrangien libre de $H(L)$ et Λ' un lagrangien libre de $H(L')$. Alors on a $w(\Lambda \oplus \Lambda') = w(\Lambda) + w(\Lambda')$. En particulier, on a $w(\Lambda \oplus L') = w(\Lambda)$.
- (e) Soit L un R -module libre de dimension finie ; soient Λ et Λ' deux lagrangiens libres de $H(L)$, transverses l'un à l'autre. Alors on a $w(\Lambda) = w(\Lambda')$.

Démonstration. Les seules propriétés à mériter, peut-être, une démonstration sont la seconde partie de (a) et (e).

Soit $q : L \rightarrow L^*$ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée ; on se convainc de l'égalité $w(L^*) = 0$ en contemplant la suivante :

$$L^* = \begin{bmatrix} 1 & -q^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \cdot L.$$

Pour se convaincre de (e), on peut observer qu'il existe un élément Φ de Sp_L tel que l'on a à la fois $\Lambda = \Phi \cdot L$ et $\Lambda' = \Phi \cdot L^*$ (on peut voir l'existence d'un tel Φ comme une conséquence du point (c) de la proposition 2.1.5 et de la proposition 2.1.2) et appliquer (c). $\square$

Remarque. Le point (e) de D.1.2 ne sera pas utilisé dans la suite de cet appendice; il est là en fait pour nous permettre d'honorer une promesse faite à la fin de l'appendice C :

Soit $\mathcal{L}_L^{\mathrm{lib}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}_L$ constitué des lagrangiens libres (on rappelle que la notation $\mathcal{L}_L$ désigne l'ensemble des lagrangiens de l'espace symplectique $H(L)$ et que ceux-ci sont *a priori* seulement projectifs). D'après le point (e) de D.1.2, l'application $w : \mathcal{L}_L^{\mathrm{lib}} \rightarrow {}_L W_1(R)$ que l'on vient de définir induit une application, disons encore $w : \pi_0(\mathcal{G}^{\mathrm{lib}}(R); a) \rightarrow {}_L W_1(R)$ (le graphe $\mathcal{G}^{\mathrm{lib}}(R)$ et son arête distinguée a sont introduits dans l'appendice C). Celle-ci réalise l'isomorphisme (d'ensembles pointés) évoqué dans la remarque finale de l'appendice C.

Venons-en maintenant à des considérations plus terre à terre. En pratique, un lagrangien libre de $H(L)$ est donné comme l'image d'un "plongement lagrangien" de L dans $H(L)$ (voir 2.1.5 et 2.1.6); soit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ (notation de 2.1.6) un tel plongement; on pose :

$$w \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = w \left(\mathrm{im} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right)$$

(et on appelle encore $w \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right)$ l'invariant de Witt de $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$).

Soient L, L' deux R -modules libres de dimension finie et $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$ deux plongements lagrangiens, respectivement de L dans $H(L)$ et de L' dans $H(L')$; nous abrègerons le plus souvent ci-après la relation

$$w \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = w \left(\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$$

(nous dirons alors que les deux plongements lagrangiens sont *équivalents*).

On constate que cette relation vérifie en particulier les propriétés suivantes :

Proposition D.1.3. *Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie; soit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ un plongement lagrangien de L dans $H(L)$. Alors on a :*

$$(1) \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} uav \\ u^{*-1}bv \end{bmatrix} \quad \text{pour tous isomorphismes } u : L \rightarrow L' \text{ et } v : L' \rightarrow L;$$

- (2) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a \\ b + qa \end{bmatrix}$ pour tout homomorphisme $q : L \rightarrow L^*$ avec $q = q^*$;
- (3) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -w^{*-1}b \\ wa \end{bmatrix}$ pour tout isomorphisme $w : L \rightarrow L^*$;
- (4) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, les matrices carrées dans la matrice colonne de droite étant de type respectif $(L, L') \times (L, L')$ et $(L, L') \times (L^*, L'^*)$.

Remarque. Notons Pl_L l'ensemble des plongements lagrangiens de L dans $H(L)$. L'invariant de Witt

$$w : \coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Pl}_{R^n} \rightarrow -W_1(R)$$

est par définition surjectif; il n'est pas difficile de se convaincre de ce que $-W_1(R)$ est, au moins comme ensemble pointé, quotient de $\coprod_{n \in \mathbb{N}} \text{Pl}_{R^n}$ par la relation d'équivalence engendrée les "équivalences élémentaires" du type (1), (2), (3) et (4) ci-dessus.

D.2 Le lemme de Pardon

L'énoncé suivant, dû à Pardon, est lui moins évident que les précédents.

Lemme D.2.1. Soient L et L' deux R -modules libres de dimension finie. Soient

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ un plongement lagrangien de L dans $H(L)$ et

$$\begin{array}{ccc} L' & \xrightarrow{a'} & L' \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ L & \xrightarrow{a} & L \end{array}$$

un diagramme commutatif de R -homomorphismes tel que le couple (f_1, f_0) , considéré comme un homomorphisme de complexes de chaînes du complexe $L' \xrightarrow{a'} L'$ dans le complexe $L \xrightarrow{a} L$, est une équivalence d'homotopie.

Alors $\begin{bmatrix} a' \\ f_0^* b f_1 \end{bmatrix}$ est un plongement lagrangien de L' dans $H(L')$ et l'on a

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a' \\ f_0^* b f_1 \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Pour se convaincre de ce que $\begin{bmatrix} a' \\ f_0^* b f_1 \end{bmatrix}$ est un plongement lagrangien de L' dans $H(L')$, on contemple le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L' & \xrightarrow{a'} & L' \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\
 L & \xrightarrow{a} & L \\
 \downarrow b & & \downarrow b^* \\
 L^* & \xrightarrow{a^*} & L^* \\
 \downarrow f_0^* & & \downarrow f_1^* \\
 L'^* & \xrightarrow{a'^*} & L'^*
 \end{array}$$

et la condition (iv) de 2.1.6.

La seconde partie du lemme se vérifie en trois étapes.

Première étape. On suppose que le couple (f_1, f_0) est un isomorphisme (de complexes de chaînes). On conclut dans ce cas en invoquant la propriété (1) de D.1.3 :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} f_0^{-1} a f_1 \\ f_0^* b f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ f_0^* b f_1 \end{bmatrix}.$$

Deuxième étape. On considère deux équivalences d'homotopie (f_1, f_0) et (g_1, g_0) du complexe $L \xrightarrow{a} L$ dans le complexe $L' \xrightarrow{a'} L'$, qui sont homotopes. On constate alors que l'on a

$$\begin{bmatrix} a' \\ f_0^* b f_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a' \\ g_0^* b g_1 \end{bmatrix}.$$

En effet, l'hypothèse “ (f_1, f_0) et (g_1, g_0) homotopes” se traduit par l'existence d'un homomorphisme $h : L' \rightarrow L$ avec $g_0 - f_0 = ah$ et $g_1 - f_1 = ha'$; on en déduit (en utilisant l'égalité $a^*b = b^*a$) que l'on a $g_0^*bg_1 = f_0^*bf_1 + qa'$, avec $q = f_0^*bh + h^*b^*f_0 + h^*a^*bh$. On conclut en observant que l'on a $q = q^*$ et en invoquant la propriété (2) de D.1.3.

Troisième étape. On traite le cas général. On pose

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F_0 = \begin{bmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

les types respectifs de ces matrices étant $(L, L') \times (L, L')$, $(L, L') \times (L^*, L'^*)$, $(L', L) \times (L', L)$, $(L', L) \times (L, L')$, $(L', L) \times (L, L')$, et on considère les deux

plongements lagrangiens, respectivement de $L \oplus L'$ dans $H(L \oplus L')$ et de $L' \oplus L$ dans $H(L' \oplus L)$, suivants :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A' & \\ f_0^* b f_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ F_0^* B F_1 \end{bmatrix}.$$

La propriété (4) de D.1.3 donne :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a' \\ f_0^* b f_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A' \\ F_0^* B F_1 \end{bmatrix}.$$

Or l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) du lemme ci-après (très vaguement apparenté au lemme de Schanuel) dit que l'homomorphisme (F_1, F_0) , du complexe $L' \oplus L \xrightarrow{A'} L' \oplus L$ dans le complexe $L \oplus L' \xrightarrow{A} L \oplus L'$, est homotope à un isomorphisme. On peut donc conclure à l'aide du résultat de chacune des deux premières étapes. $\square$

Lemme D.2.2. Soient $P_\bullet = (P_1 \xrightarrow{d} P_0)$ et $Q_\bullet = (Q_1 \xrightarrow{d} Q_0)$ deux complexes de longueur 1 de R -modules ; soit $f_\bullet : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$ un homomorphisme de tels complexes.

On pose $E_\bullet = (\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z})$; on considère $E_\bullet$ comme un complexe de longueur 1 (concentré en degrés 0 et 1) de $\mathbb{Z}$ -modules. On note respectivement $i : P_\bullet \rightarrow P_\bullet \oplus Q_0 \otimes E_\bullet$, $p : P_\bullet \oplus Q_0 \otimes E_\bullet \rightarrow P_\bullet$, $j : Q_\bullet \rightarrow Q_\bullet \oplus P_0 \otimes E_\bullet$ et $q : Q_\bullet \oplus P_0 \otimes E_\bullet \rightarrow Q_\bullet$, les inclusions et projections (de complexes de R -modules) canoniques.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f_\bullet$ est une équivalence d'homotopie ;
- (ii) il existe un isomorphisme $F_\bullet : P_\bullet \oplus Q_0 \otimes E_\bullet \rightarrow Q_\bullet \oplus P_0 \otimes E_\bullet$ (de complexes) tel que l'on a $f_\bullet = q \circ F_\bullet \circ i$ (en d'autres termes, $F_\bullet$ est de la forme $\begin{bmatrix} f_\bullet & \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$) ;
- (iii) l'homomorphisme $j \circ f_\bullet \circ p : P_\bullet \oplus Q_0 \otimes E_\bullet \rightarrow Q_\bullet \oplus P_0 \otimes E_\bullet$ (en d'autres termes, l'homomorphisme "stabilisé" $\begin{bmatrix} f_\bullet & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) est homotope à un isomorphisme.

Démonstration. La vérification des implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) est facile :

- L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte de l'égalité $j \circ f_\bullet \circ p = (j \circ q) \circ F_\bullet \circ (i \circ p)$ et du fait que les endomorphismes $i \circ p$ et $j \circ q$ (en d'autres termes, les endomorphismes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) sont homotopes à l'identité.

- L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte du fait que les homomorphismes p et j sont des équivalences d'homotopie (respectivement d'inverses i et q).

La vérification de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est plus technique :

La condition (i) se traduit par l'existence d'un homomorphisme de complexes $g_\bullet : Q_\bullet \rightarrow P_\bullet$ et de deux homomorphismes $h : P_0 \rightarrow P_1$ et $k : Q_0 \rightarrow Q_1$ tels que l'on a $g_0 f_0 - 1 = dh$, $g_1 f_1 - 1 = hd$, $f_0 g_0 - 1 = dk$ et $f_1 g_1 - 1 = kd$.

On constate que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_1 \oplus Q_0 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & P_0 \oplus Q_0 \\ \begin{bmatrix} f_1 & k \\ d & g_0 \end{bmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{bmatrix} f_0 & f_0 g_0 - 1 \\ 1 & g_0 \end{bmatrix} \\ Q_1 \oplus P_0 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & Q_0 \oplus P_0 \end{array}$$

est commutatif et on observe que les flèches verticales de ce diagramme sont des isomorphismes. En effet :

- les produits $\begin{bmatrix} f_1 & k \\ d & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 & -h \\ -d & f_0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} g_1 & -h \\ -d & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & k \\ d & g_0 \end{bmatrix}$ sont des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale (elles sont même l'identité si les homomorphismes d sont injectifs) ;
- on a l'égalité $\begin{bmatrix} f_0 & f_0 g_0 - 1 \\ 1 & g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de la contemplation du diagramme ci-dessus. $\square$

D.3 Linéarisation à la Balmer [BA]

Proposition D.3.1. *Soient L un R -module libre de dimension finie et ϕ un plongement lagrangien de $R[T] \otimes_R L$ dans $H(R[T] \otimes_R L)$. Alors il existe un R -module libre de dimension finie L' tel que ϕ est équivalent à un plongement lagrangien de $R[T] \otimes_R (L \oplus L')$ dans $H(R[T] \otimes_R (L \oplus L'))$ de la forme*

$$\begin{bmatrix} a \\ b_0 + T b_1 \end{bmatrix},$$

a , b_0 , b_1 , désignant respectivement un R -endomorphisme de $L \oplus L'$ et deux formes bilinéaires sur $L \oplus L'$.

Cette proposition résulte de la proposition D.1.3 et du lemme D.3.2 ci-après.

Pour énoncer celui-ci, il sera commode de disposer des notations introduites ci-dessous.

Soit $\begin{bmatrix} a(T) \\ b(T) \end{bmatrix}$ un élément de $\text{Pl}_{R[T] \otimes_R L}$.

Soit k un entier naturel, on note a_k (resp. b_k) le “coefficient” de T^k dans $a(T)$ (resp. $b(T)$) : en clair, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$) est la suite d’endomorphismes de L (resp. de formes bilinéaires sur L) définie par $a(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} T^k a_k$ (resp. $b(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} T^k b_k$).

Soient m, n deux entiers naturels ; on écrit

$$\deg \begin{bmatrix} a(T) \\ b(T) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix},$$

pour dire que l’on a $a_k = 0$ pour $k > m$ et $b_k = 0$ pour $k > n$.

Lemme D.3.2. Soit $\begin{bmatrix} a(T) \\ b(T) \end{bmatrix}$ un élément de $\text{Pl}_{R[T] \otimes_R L}$. On suppose

$$\deg \begin{bmatrix} a(T) \\ b(T) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix},$$

m et n désignant deux entiers naturels avec $1 \leq m \leq n$.

On note respectivement $A(T)$ et $\alpha(T)$ les endomorphismes de $R[T] \otimes_R (L \oplus L)$ de matrices

$$\begin{bmatrix} a(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T^m & 1 \end{bmatrix}, \quad B(T) \quad \text{et} \quad \beta(T)$$

les formes bilinéaires sur $R[T] \otimes_R (L \oplus L)$ de matrices

$$\begin{bmatrix} b(T) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & T^{n-m} b_n \\ T^{n-m} b_n^* & T^{n-m} a_m^* b_n \end{bmatrix}.$$

On pose enfin :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(T) \\ \tilde{B}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta(T) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(T) \alpha(T) \\ B(T) \alpha(T) \end{bmatrix}.$$

Alors :

(a) La matrice $\begin{bmatrix} \tilde{A}(T) \\ \tilde{B}(T) \end{bmatrix}$ appartient à $\text{Pl}_{R[T] \otimes_R (L \oplus L)}$.

(b) On a $\deg \begin{bmatrix} \tilde{A}(T) \\ \tilde{B}(T) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} m \\ n-1 \end{bmatrix}$.

Démonstration du point (a). Il suffit de se convaincre de ce que la forme bilinéaire $\beta(T)$ est symétrique. Pour cela, observer que l'égalité $a^*(T)b(T) = b^*(T)a(T)$ implique en particulier l'égalité $a_m^* b_n = b_n^* a_m$. $\square$

Démonstration du point (b). On calcule et on constate :

$$\tilde{A}(T) = \begin{bmatrix} a(T) & 0 \\ -T^m & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(T) = \begin{bmatrix} b(T) - T^n b_n & T^{n-m} b_n \\ T^{n-m} b_m^* a(T) - T^n a_m^* b_n & T^{n-m} a_m^* b_n \end{bmatrix}. \quad \square$$

D.4 Démonstration du théorème D

On montre que l'homomorphisme naturel ${}_L W_1(R) \rightarrow {}_L W_1(R[T])$ est surjectif sous l'hypothèse $\frac{1}{2} \in R$. Compte tenu de la proposition D.3.1 (et du fait que tout élément de ${}_L W_1(R[T])$ est un invariant de Witt), il suffit de vérifier l'énoncé suivant :

Proposition D.4.1. *On considère un élément de $\text{Pl}_{R[T] \otimes_R L}$ de la forme*

$$\begin{bmatrix} a \\ b_0 + T b_1 \end{bmatrix},$$

a, b_0, b_1 désignant respectivement un R -endomorphisme de L et deux formes bilinéaires sur L . Si l'on suppose 2 inversible dans R , alors on a :

$$\begin{bmatrix} a \\ b_0 + T b_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

La démonstration (toujours fortement inspirée par [Ba]), que nous donnons ci-après, de cette proposition est un tantinet absconse pour la raison suivante : nous avons tenu à repousser le plus possible l'intervention de l'hypothèse $\frac{1}{2} \in R$!

Proposition D.4.2. *Soit $\begin{bmatrix} a \\ b_0 + T b_1 \end{bmatrix}$ un élément de $\text{Pl}_{R[T] \otimes_R L}$, comme précédemment. Alors il existe :*

- une forme bilinéaire symétrique β sur L ,
- un couple (u, v) d'endomorphismes de L avec

$$a u = v a, \quad b_0 u = v^* b_0,$$

- un entier naturel n et une suite $(h_k)_{k \geq n}$ d'endomorphismes de L avec

$$u^k = h_k a, \quad v^k = a h_k, \quad b_0 h_k = (b_0 h_k)^*,$$

tels que l'on a

$$\begin{bmatrix} a \\ b_0 + T b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0 (1 + T u) \end{bmatrix}.$$

Démonstration. Soit

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} a & c(T) \\ b_0 + T b_1 & d(T) \end{bmatrix},$$

avec $c(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} T^k c_k$ et $d(T) = \sum_{k \in \mathbb{N}} T^k d_k$ un élément de $\mathrm{Sp}_{R[T] \otimes_R L}$ dont la première colonne est le plongement lagrangien de l'énoncé (les c_k et d_k , $k \in \mathbb{N}$, sont donc respectivement des formes bilinéaires sur L^* et des endomorphismes de L^* , nuls pour k assez grand).

On écrit

$$\Phi(T) \Phi(0)^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \pmod{T^2}.$$

On a donc, par définition, $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0^* & -c_0^* \\ -b_0^* & a^* \end{bmatrix}$ et, en particulier, $\alpha = -c_1 b_0^*$; on a, d'autre part, $\alpha + \delta^* = 0$, $\beta = \beta^*$ et $\gamma = \gamma^*$ (ce sont là les "équations" de l'algèbre de Lie du groupe symplectique). La congruence ci-dessus implique la suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T\beta & 1 \end{bmatrix} \Phi(T) \equiv \Phi(0) + T \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \Phi(0) \pmod{T^2};$$

on en déduit, compte tenu du fait que l'on a $\delta = b_0 c_1^*$, l'égalité

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b_0 + T b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b_0 (1 + T c_1^* b_0) \end{bmatrix}.$$

On pose $u = c_1^* b_0$ et $v = c_1 b_0^*$. On constate que l'on a bien $au = va$ et $b_0 u = v^* b_0$; pour se convaincre de la première égalité, on observe que l'égalité $ac^*(T) = c(T)a$ (c'est là une des "équations" du groupe symplectique, voir le début du paragraphe 2) implique en particulier $ac_1^* = c_1 a^*$.

On pose également

$$\Psi(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T\beta & 1 \end{bmatrix} \Phi(T);$$

on a donc

$$\Psi(T) = \begin{bmatrix} a & c(T) \\ b(T) & e(T) \end{bmatrix}$$

avec $b(T) = b_0 (1 + Tu) = (1 + Tv^*) b_0$.

On écrit l'égalité $e^*(T)a - (c^*(T)b(T)) = 1$ (à nouveau équation du groupe symplectique) sous la forme

$$e^*(T)a - (c^*(T)b_0)(1 + Tu) = 1.$$

Sous cette forme, elle peut être vue comme une égalité dans $\text{End}(L)[T]$; elle implique la suivante dans $\text{End}(L)[[T]]$:

$$e^*(T)a(1+Tu)^{-1} - c^*(T)b_0 = (1+Tu)^{-1}$$

que l'on transforme en

$$(e^*(T)(1+Tv)^{-1})a - c^*(T)b_0 = (1+Tv)^{-1}$$

en utilisant l'égalité $au = va$. On pose enfin :

$$e^*(T)(1+Tv)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T^k h_k .$$

Soit n un entier tel que l'on a $c_k = 0$ pour $k \geq n$; l'égalité ci-dessus montre que l'on a $u^k = h_k a$ pour $k \geq n$.

Pareillement, l'égalité $ae^*(T) - c(T)b^*(T) = 1$ implique

$$a(e^*(T)(1+Tv)^{-1}) - c(T)b_0^* = (1+Tv)^{-1}$$

et $v^k = ah_k$ pour $k \geq n$.

De plus, le fait que la forme bilinéaire $b(T)e^*(T)$ (sur $R[T] \otimes L$) est symétrique et l'égalité

$$b_0(e^*(T)(1+Tv)^{-1}) = (1+Tv^*)^{-1}(b(T)e^*(T))(1+Tv)^{-1}$$

montrent que les formes bilinéaires $b_0 h_k$ (sur L) sont symétriques. $\square$

Proposition D.4.3. Soit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ un plongement lagrangien de L dans $H(L)$. Soient (u, v) un couple d'endomorphismes de L avec

$$au = va, \quad bu = v^*b,$$

n un entier naturel et $(h_k)_{k \geq n}$ une suite d'endomorphismes de L avec

$$u^k = h_k a, \quad v^k = ah_k, \quad bh_k = (bh_k)^*.$$

- (a) Soit P un polynôme de $R[T]$ avec $P(0) = 1$. Alors $\begin{bmatrix} a \\ bP(u) \end{bmatrix}$ est un plongement lagrangien de L dans $H(L)$.
- (b) Soient P, Q deux polynômes de $R[T]$ avec $P(0) = 1, Q(0) = 1$ et $P \equiv Q \pmod{T^n}$. Alors on a :

$$\begin{bmatrix} a \\ bP(u) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a \\ bQ(u) \end{bmatrix}.$$

(c) Soient P, Q deux polynômes de $R[T]$ avec $P(0) = 1, Q(0) = 1$. Alors on a :

$$\begin{bmatrix} a \\ bP(u) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a \\ b(PQ^2)(u) \end{bmatrix}.$$

Démonstration du point (a). On considère (u, v) comme un endomorphisme du complexe de chaînes $L \xrightarrow{a} L$. Les égalités $u^n = h_n a$ et $v^n = a h_n$ montrent que la puissance n -ième de cet endomorphisme est homotope à zéro. Soit Q un polynôme de $R[T]$ avec $PQ \equiv 1 \pmod{T^n}$; d'après ce qui précède, l'endomorphisme $Q((u, v)) \circ P((u, v)) = P((u, v)) \circ Q((u, v)) = ((PQ)(u), (PQ)(v))$ est homotope à l'identité. L'endomorphisme $P((u, v)) = (P(u), P(v))$ est donc une équivalence d'homotopie. On conclut en contemplant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{a} & L \\ \downarrow P(u) & & \downarrow P(v) \\ L & \xrightarrow{a} & L \\ \downarrow b & & \downarrow b^* \\ L^* & \xrightarrow{a^*} & L^* \end{array}$$

et la condition (iv) de 2.1.6. $\square$

Démonstration du point (b). Soient P un polynôme de $R[T]$, λ un élément de R et $k \geq n$ un entier ; on a

$$\begin{bmatrix} a \\ b(P(u) + \lambda u^k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ bP(u) + (\lambda b h_k) a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a \\ bP(u) \end{bmatrix}$$

(on peut invoquer la propriété (2) de D.1.3 puisque, par hypothèse, la forme bilinéaire bh_k est symétrique). $\square$

Démonstration du point (c). On observe que l'on a

$$\begin{bmatrix} a \\ b(PQ^2)(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ Q(v)^*(bP(u))Q(u) \end{bmatrix};$$

puisque, comme on l'a vu ci-dessus, $(Q(u), Q(v))$ est une auto-équivalence d'homotopie du complexe de chaînes $L \xrightarrow{a} L$, on peut appliquer D.2.1. $\square$

On suppose enfin $\frac{1}{2} \in R$. On démontre la proposition D.4.1 en invoquant les propositions D.4.2 et D.4.3, et l'argument habituel : il existe une série formelle S dans $Z[\frac{1}{2}][[X]]$ avec $S(0) = 1$ et $S^2 = 1 + X$. $\square\square$

Références

- [BA] P. BALMER, Witt cohomology, Mayer-Vietoris, homotopy invariance and the Gersten conjecture, *K-Theory* **23** (2001), 15–30.
- [BE] S. BETLEY, Homology of $GL(R)$ with coefficients in a functor of finite degree, *J. Algebra* **150** (1992), 73–86.
- [BLLV] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ -sphères, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, **7** (1974), 463–505.
- [BS1] H. BASS, *Algebraic K-theory*, W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1968.
- [BS2] H. BASS, Unitary algebraic K-theory, Algebraic K-theory, III : Hermitian K-theory and geometric applications, Seattle 1972 (proceedings), pp. 57–265, *Springer L.N.M.*, **343** (1973).
- [BU] D. BUMP, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **55**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [CLM] S. CAPPELL, R. LEE ET E.Y. MILLER, On the Maslov index, *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), 121–186.
- [GMV] F. GRUNEWALD, J. MENNICKE et L. VASERSTEIN, On symplectic groups over polynomial rings. *Math. Z.* **206** (1991), 35–56.
- [HNK] F. HIRZEBRUCH, W.D. NEUMANN et S.S. KOH, *Differentiable manifolds and quadratic forms*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 4, Marcel Dekker Inc., New York, 1971.
- [KA1] M. KAROUBI, Périodicité de la K-théorie hermitienne, Algebraic K-theory, III : Hermitian K-theory and geometric applications, Seattle 1972 (proceedings), 301–411, *Springer L. N. M.*, **343** (1973).
- [KA2] M. KAROUBI, Localisation de formes quadratiques I, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, **7** (1974), 359–403.
- [KA3] M. KAROUBI, Localisation de formes quadratiques II, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, **8** (1975), 99–155.

- [KA4] M. KAROUBI, Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal, *Ann. of Math.*, **112** (1980), 207–257.
- [KA5] M. KAROUBI, Le théorème fondamental de la K -théorie hermitienne, *Ann. of Math.* **112** (1980), 259–282.
- [LG] S. LANG, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, **211**, Springer-Verlag, New York.
- [LT] F. LATOUR, Transversales lagrangiennes, périodicité de Bott et formes génératrices pour une immersion lagrangienne dans un cotangent, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, **24** (1993), 3–55.
- [MA] V.P. MASLOV, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod, Paris, 1972.
- [MH] J. MILNOR et D. HUSEMOLLER, *Symmetric bilinear forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band **73**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [MV] F. MOREL et V. VOEVODSKY, $\mathbf{A}^1$ -homotopy theory of schemes, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. **90**, (1999), 45–143.
- [NO] M.V. NORI, The universal property of the Maslov index, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **13** (1998), 111–124.
- [OJ1] M. OJANGUREN, On Karoubi's theorem : $W(A) = W(A[t])$, *Arch. Math.*, **43** (1984), 328–331.
- [OJ2] M. OJANGUREN, *The Witt group and the problem of Lüroth*, *Dottorato di Ricerca in Matematica*, ETS Editrice, Pisa, 1990.
- [OP] M. OJANGUREN et I. PANIN, The Witt group of Laurent polynomials, *Enseign. Math.* **46** (2000), 361–383.
- [PA] W. PARDON, The exact sequence of a localization for Witt groups, Algebraic K-theory, Evanston 1976 (proceedings), pp. 336–379, *Springer L. N. M.*, **551** (1976).
- [RA1] A. RANICKI, Algebraic L-theory, I, Foundations, *Proc. London Math. Soc.*, **27** (1973), 101–125.
- [RA2] A. RANICKI, Algebraic L-theory, II, Laurent extensions, *Proc. London Math. Soc.*, **27** (1973), 126–158.
- [RA3] A. RANICKI, Algebraic L-theory, IV, Polynomial extension rings, *Comment. Math. Helv.* **49** (1974), 137–167.
- [RA4] A. RANICKI, *Exact sequences in the algebraic theory of surgery*. Mathematical Notes, **26**, Princeton University Press, Princeton, 1981.
- [SE] J.-P. SERRE, Arbres, amalgames, SL_2 , *Astérisque*, **46** (1977).

- [SH] R.W. SHARPE, On the structure of the unitary Steinberg group, *Ann. of Math.*, **96** (1972), 444–479.
- [SW] R.G. SWAN, *Algebraic K-theory*. Springer Lecture Notes in Mathematics, **76** (1968).
- [WALL] C.T.C. WALL, Non-additivity of the signature, *Invent. Math.* **7** (1969) 269–274.

Progress in Mathematics (PM)

Edited by

Hyman Bass, University of Michigan, USA

Joseph Oesterlé, Institut Henri Poincaré, Université Paris VI, France

Alan Weinstein, University of California, Berkeley, USA

Progress in Mathematics is a series of books intended for professional mathematicians and scientists, encompassing all areas of pure mathematics. This distinguished series, which began in 1979, includes research level monographs, polished notes arising from seminars or lecture series, graduate level textbooks, and proceedings of focused and refereed conferences. It is designed as a vehicle for reporting ongoing research as well as expositions of particular subject areas.

PM 267: Barge, J. / Lannes, J.

Suites de Sturm, indice de Maslov et périodicité de Bott (2008). ISBN 978-3-7643-8709-9

PM 266: Pigola, S. / Rigoli, M. / Setti, A.G.

Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. In Memory of Alexander Reznikov (2008). ISBN 978-3-7643-8641-2

PM 265: Kapranov, M. / Kolyada, S. /

Manin, Yu.I. / Moree, P. / Potyagailo, L. (Eds.)
Geometry and Dynamics of Groups and Spaces (2007). ISBN 978-3-7643-8607-8

PM 264: Miró-Roig, R.M.

Determinantal Ideals (2007)
Winner of the Ferran Sunyer i Balaguer Prize
2007. ISBN 978-3-7643-8534-7

PM 263: Todorćević, S.

Walks on Ordinals and Their Characteristics (2007). ISBN 978-3-7643-8528-6

PM 262: Fargues, L. / Genestier, A. /

Lafforgue, V.
L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. ISBN 978-3-7643-8455-5

PM 261: Stout, E.L.

Polynomial Convexity (2007)
ISBN 978-0-8176-4537-3

PM 260: Holzapfel, R.-P. / Uludağ, A.M. /

Yoshida, M. (Eds.)
Arithmetic and Geometry Around
Hypergeometric Functions (2007)
ISBN 978-3-7643-8283-4

PM 259: Capogna, L. / Danielli, D. / Pauls, S.D.

/ Tyson, J.T.
An Introduction to the Heisenberg Group and the
Sub-Riemannian Isoperimetric Problem (2007)
ISBN 978-3-7643-8132-5

PM 258: Gan, W.T. / Kudla, S.S. / Tschinkel, Y.

(Eds.). Eisenstein Series and Applications
(2008). ISBN 978-0-8176-4496-3

PM 257: Lakshmibai, V. / Littellmann, P. /

Seshadri, C.S. (Eds.)
Schubert Varieties (due 2009)
ISBN 978-0-8176-4153-5

PM 256: Borthwick, D.

Spectral Theory of Infinite-Volume Hyperbolic
Surfaces (2007). ISBN 978-0-8176-4524-3

PM 255: Kobayashi, T. / Schmid, W. / Yang, J.-H. (Eds.)

Representation Theory and Automorphic Forms
(2007). ISBN 978-0-8176-4505-2

PM 254: Ma, X. / Marinescu, G.

Holomorphic Morse Inequalities and Bergman
Kernels (2007)
Winner of the Ferran Sunyer i Balaguer Prize
2006. ISBN 978-3-7643-8096-0

PM 253: Ginzburg, V. (Ed.)

Algebraic Geometry and Number Theory (2006).
ISBN 978-0-8176-4471-7

PM 252: Maeda, Y. / Michor, P. /

Ochiai, T. / Yoshioka, A. (Eds.)
From Geometry to Quantum Mechanics (2007).
ISBN 978-0-8176-4512-8

PM 251: Boutet de Monvel, A. / Buchholz, D. /

Iagolnitzer, D. / Moschella, U. (Eds.)
Rigorous Quantum Field Theory (2006)
ISBN 978-3-7643-7433-4

PM 250: Unterberger, A.

The Fourfold Way in Real Analysis (2006)
ISBN 978-3-7643-7544-7