Math. Annalen, Bd. 124, S. 1—16 (1951).

Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete.

Von

HEINRICH BEHNKE und KARL STEIN in Münster (Westf.).

1. Einleitung. — In der klassischen Funktionentheorie kennt man als Abschließung der komplexen Ebene nur die durch einen Punkt. In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen treten dagegen schon früh in der Literatur verschiedene Abschließungen auf. Am verbreitetsten ist die Abschließung des Raumes R^{2n} der komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ durch eine $(2n-2)$-dimensionale analytische Ebene zum komplex-projektiven Raum. Außerdem wird häufig, z. B. im Lehrbuch von OSGOOD[1]), die zur Gruppe der Transformationen

$$z_i' = \frac{a_i z_i + b_i}{c_i z_i + d_i}, \quad \begin{vmatrix} a_i b_i \\ c_i d_i \end{vmatrix} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

gehörige Abschließung des R^{2n} benutzt. Bei dieser Abschließung werden die Ebenen der Veränderlichen z_i einzeln durch je einen Punkt geschlossen, was auf Hinzunahme von n unendlichfernen analytischen Ebenen der Dimension $2n-2$ zum R^{2n} hinausläuft.

Es gibt dagegen keine Abschließung des R^{2n} $(n > 1)$ zu einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit durch Einführung eines einzigen unendlichfernen Punktes. Zwar hat R. FUETER in seiner Theorie der einseitig-regulären Quaternionenfunktionen[2]) den vierdimensionalen Raum einer Quaternionenvariablen durch einen Punkt abgeschlossen. Aber diese Abschließung, die topologisch die 4-Sphäre liefert, ist in der Funktionentheorie zweier komplexer Veränderlichen nicht brauchbar. Wäre nämlich eine in diesem einzigen unendlichfernen Punkte P_∞ reguläre Funktion $f(z_1, z_2)$ gegeben, so müßte f auch noch auf dem Rande einer genügend großen Hyperkugel $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq r^2$ regulär sein. Dann aber ließe sich f nach einem bekannten Satze von HARTOGS-OSGOOD[3]) auch in das Innere dieser Hyperkugel regulär fortsetzen, folglich wäre f eine Konstante. Insbesondere würde also zu P_∞ kein Paar ortsuniformisierender Funktionen existieren $\left(\text{wie in der Ebene } f(z) \equiv \frac{1}{z}\right)$. — Darüber hinaus ist es auf keine Weise möglich, wie H. HOPF gezeigt hat, die 4-Sphäre durch Einführung irgendwelcher lokaler komplexer Koordinaten zu einer komplexen Mannigfaltigkeit zu machen[4]).

---

[1]) OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. II/1, 2. Auflage, Leipzig und Berlin 1929 (im folgenden zitiert als OSGOOD Lb.); vgl. insbesondere Kap. 1, § 17 (S. 53ff.).

[2]) FUETER, R.: Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Veränderlichen, Comment. Mat. helvet. 7, 307—330 (1935), und: Die Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, C. r. Congr. int. Oslo 1936.

[3]) Vgl. OSGOOD Lb. Kap. 3, § 11 (S. 206ff.).

[4]) HOPF, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays presented to R. COURANT, S. 167—185, New York 1948.

Andererseits gibt es neben den oben angeführten beiden Abschließungen des komplexen R^{2n} noch weitere, sogar solche mit „überunendlichfernen" Punkten. Zu einer derartigen Abschließung des R^4 kommt man, wenn man von dem BIEBERBACHschen Beispiel einer Abbildung

$$z_1' = f_1(z_1, z_2)$$
$$z_2' = f_2(z_1, z_2)$$

des R^4 auf einen echten schlichten Teil $\mathfrak{T}$ von sich[5]) ausgeht und jedem Punkte P als neue komplexe Koordinaten die Koordinaten des durch die BIEBERBACHschen Funktionen erzeugten Bildes von P zuordnet. Die Randpunkte von $\mathfrak{T}$ im etwa projektiv abgeschlossenen (z_1', z_2')-Raume repräsentieren dann unendlichferne Punkte, die äußeren Punkte von $\mathfrak{T}$ aber überunendlichferne Punkte des (z_1, z_2)-Raumes.

Offenbar liefert jede umkehrbar eindeutige analytische Abbildung des offenen R^{2n} auf ein echtes Teilgebiet einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{2n}$ die Einführung unendlichferner und gegebenenfalls überunendlichferner Punkte, also eine komplexe Fortsetzung des offenen R^{2n}. Ist $\mathfrak{M}^{2n}$ kompakt, so kommt man durch die Hinzunahme aller Punkte von $\mathfrak{M}^{2n}$ zu einer Abschließung des R^{2n}.

Durch diese Betrachtungen wird die Frage nahegelegt, ob tatsächlich für die komplexe Ebene die Hinzunahme *eines* unendlichfernen Punktes die einzig mögliche Ergänzung zu einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit ist. Die bestätigende Antwort wird gelegentlich von Autoren hervorgehoben[6]). Geht man von der durch einen unendlichfernen Punkt zur kompakten komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^2$ abgeschlossenen Ebene aus, so stellt sich die eben angeschnittene Frage folgendermaßen dar: *Wie kann $\mathfrak{M}^2$ durch Herausnahme eines Punktes P und Fortsetzung von $\mathfrak{M}^2 - P$ zu einer umfassenden komplexen Mannigfaltigkeit $^*\mathfrak{M}^2$ erweitert werden?* Mit diesem Thema und seiner Verallgemeinerung auf beliebige komplexe Dimensionen wollen wir uns hier beschäftigen. Wir betrachten neben komplexen Mannigfaltigkeiten allgemeiner *Riemannsche Gebiete*, in denen auch Punkte ohne im strengen Sinne uniformisierbare Umgebungen — ein solcher Punkt tritt schon im Existenzgebiet von $f(z_1, z_2) \equiv \sqrt[2]{z_1 \cdot z_2}$ auf — als innere Punkte zugelassen sind. (Näheres siehe in 2.).

Der Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist ein vorgegebenes Riemannsches Gebiet $\mathfrak{G}^{2n}$. Aus ihm wird ein kompaktes Stück $\mathfrak{N}$ eines analytischen Gebildes herausgenommen. Wir fragen nach den Riemannschen Gebieten $^*\mathfrak{G}^{2n}$, die $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$ in der Nachbarschaft von $\mathfrak{N}$ und nur dort fortsetzen. Einen derartigen Übergang von $\mathfrak{G}^{2n}$ zu $^*\mathfrak{G}^{2n}$ nennen wir eine *Modifikation* von $\mathfrak{G}^{2n}$ in $\mathfrak{N}$. (Präzisierung in 3.). Es wird bewiesen:

Falls in einer Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ eine dort eindeutige reguläre Funktion $F \not\equiv 0$ existiert, die auf $\mathfrak{N}$ verschwindet, so unterscheidet sich jede solche Modifikation $^*\mathfrak{G}^{2n}$ nur durch Stücke analytischer Gebilde von $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$.

In dem besonderen Falle, daß $\mathfrak{N}$ ein isolierter Punkt P ist — wie bei der oben aufgeworfenen Frage nach den Modifikationen der abgeschlossenen

---

[5]) BIEBERBACH, L.: Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumentreue Abbildung des R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln, Sitzgsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl. 1933.

[6]) Vgl. z. B. L. SARIO, Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rande, Ann. Acad. Sci. fenn. A I, No. 50 (1948), insbesondere § 12.

komplexen Ebene in $z = \infty$ — ist die Voraussetzung über $\mathfrak{R}$ immer erfüllt. Ist dagegen $\mathfrak{R}$ ein geschlossenes analytisches Gebilde höherer Dimension, so braucht die Voraussetzung über $\mathfrak{R}$ nicht erfüllt zu sein. Ein Beispiel dafür bietet die unendlichferne Ebene des komplex-projektiv abgeschlossenen R^4. Dort ist auch, wie oben am BIEBERBACHschen Beispiel auseinandergesetzt wurde, die Aussage unseres Satzes falsch. Andererseits bleibt die Voraussetzung über $\mathfrak{R}$ erfüllt, wenn man aus dem durch die Transformationen (1) abgeschlossenen R^{2n} eine geschlossene Ebene $z_i = \text{const.}$ herausnimmt.

Unsere Aussage bedeutet für $n = 1$, daß $\mathfrak{G}^2 - P$ in P nur durch Hinzunahme von P geschlossen werden kann. Im Falle $n > 1$ läßt sich dagegen $\mathfrak{G}^{2n} - P$, wie aus der algebraischen Geometrie bekannt, in P auch durch Hinzunahme von $(2n-2)$-dimensionalen analytischen Flächen zu einem Riemannschen Gebiete fortsetzen. Zum Beispiel wird eine Modifikation einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^4$ im Punkte P durch den von H. HOPF als Einsetzen einer Trägersphäre bezeichneten Prozeß gewonnen, bei welchem P durch die Gesamtheit der in P angreifenden komplexen Linienelemente ersetzt wird. Einen wesentlichen Anstoß zur Abfassung der vorliegenden Arbeit gab ein Vortrag von H. HOPF in Oberwolfach, in dem die Bedeutung dieses Prozesses für die Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten aufgewiesen wurde.

2. Komplexe Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete. — Wir stellen in diesem Abschnitt einige später benötigte Begriffe und Aussagen zusammen.

Unter einer $2n$-dimensionalen *komplexen Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}^{2n}$ wird eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Topologie — d. h. ein zusammenhängender, im Kleinen 2n-dimensional-euklidischer HAUSDORFFscher Raum mit abzählbarer Basis[7]) — mit der folgenden Eigenschaft verstanden: $\mathfrak{M}^{2n}$ ist mit lokalen Systemen komplexer Koordinaten $(z_1', \ldots, z_n')$, $(z_1'', \ldots z_n'')$, ... überdeckt, derart, daß die Transformationen beim Übereinandergreifen zweier solcher Systeme durch n reguläre Funktionen mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante vermittelt werden[8]). Eine in einer Punktmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{M}^{2n}$ gegebene komplexwertige Funktion f heißt in $\mathfrak{E}$ *regulär*, wenn sie es in einer Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{E}$ in bezug auf ein dort gegebenes lokales komplexes Koordinatensystem ist.

Der Begriff der $2n$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit stellt für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen noch nicht das vollständige Analogon zum Begriff der Riemannschen Fläche der klassischen Funktionentheorie dar. Zur Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ einer Funktion $f(z)$ gelangt man, indem man in der Menge der algebroiden Funktionselemente von f in der bekannten Weise einen Umgebungsbegriff einführt. Entsprechend läßt sich einer analytischen Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ ein topologischer Raum $\mathfrak{G}^{2n}$ zuordnen, der als *Riemannsches Gebiet* von $f(z_1, \ldots, z_n)$ bezeichnet werde[9]). Verzweigungs-

[7]) Zu den hier und im folgenden benutzten Begriffen und Sätzen der Topologie vgl.: P. ALEXANDROFF - H. HOPF, Topologie I, Berlin 1935, und: H. SEIFERT und W. THRELFALL, Lehrbuch der Topologie, Leipzig und Berlin 1934 (abgekürzt: SEIFERT-THRELFALL Lb.).

[8]) Zur Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten vgl. [4]) sowie S. BOCHNER, On compact complex manifolds, J. Indian math. Soc. **11**, 1—21 (1947).

[9]) Vgl. hierzu: OSGOOD Lb. Kap. 2, insbesondere § 11; B. O. KOOPMAN und A. B. BROWN, The Riemann multiple-space and algebroid functions, Trans. Amer. math. Soc. **36**, 618—626 (1934); — H. HERMES, Analytische Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Bereichen, Math. Ann. **120**, 539—562 (1949); F. HIRZEBRUCH, Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Dissertation Münster 1950.

punkte (endlicher Ordnung) werden dabei genau durch die lokal nichteindeutigen Funktionselemente gegeben. Während nun aber die Verzweigungspunkte endlicher Ordnung von $\mathfrak{R}$ sämtlich Umgebungen besitzen, die im strengen Sinne uniformisierbar, d. h. umkehrbar eindeutig und analytisch auf schlichte Gebiete der z-Ebene abbildbar sind — hierin liegt, daß $\mathfrak{R}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist —, braucht entsprechendes für die Verzweigungspunkte des Riemannschen Gebietes einer analytischen Funktion mehrerer komplexer Veränderlichen nicht zuzutreffen. Ein Beispiel liefert $f(z_1, z_2) = \sqrt[2]{z_1 \cdot z_2}$. Das Riemannsche Gebiet $\mathfrak{G}^4$ von $f(z_1, z_2)$ ist dem R^4 zweiblättrig mit Verzweigungspunkten über den Ebenen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ überlagert. Der Verzweigungspunkt P_0 über (0,0) besitzt keine im strengen Sinne uniformisierbare Umgebung; dies ist wie folgt einzusehen. Setzen wir

$$z_1 = t_1^2, \quad z_2 = t_2^2,$$

so wird der komplexe (t_1, t_2)-Raum umkehrbar eindeutig auf eine vierblättrige Überlagerung $\hat{\mathfrak{G}}^4$ des (z_1, z_2)-Raumes abgebildet. Die Verzweigungspunkte von $\hat{\mathfrak{G}}^4$ liegen wiederum sämtlich über den Ebenen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$: Über (0,0) liegt genau ein Punkt $\hat{P}_0$, in ihm hängen alle vier Blätter von $\hat{\mathfrak{G}}^4$ zusammen; über einem Punkte $(0, z_2)$ mit $z_2 \neq 0$ bzw. $(z_1, 0)$ mit $z_1 \neq 0$ liegen jeweils zwei Verzweigungspunkte, in denen je zwei Blätter von $\hat{\mathfrak{G}}^4$ zusammenhängen. $\hat{\mathfrak{G}}^4$ ist zugleich eine zweifache Überlagerung von $\mathfrak{G}^4$, und zwar ist $\hat{\mathfrak{G}}^4$ außerhalb $\hat{P}_0$ relativ zu $\mathfrak{G}^4$ unverzweigt. Der einzige Verzweigungspunkt von $\hat{\mathfrak{G}}^4$ in bezug auf $\mathfrak{G}^4$ ist $\hat{P}_0$, hier hängen die beiden Blätter von $\hat{\mathfrak{G}}^4$ in bezug auf $\mathfrak{G}^4$ miteinander zusammen. Sei nun $\mathfrak{U}(P_0)$ irgendeine Umgebung von P_0 in $\mathfrak{G}^4$; dann gibt es in $\hat{\mathfrak{G}}^4$ als zweifache Überlagerung von $\mathfrak{U}(P_0)$ eine zugehörige Umgebung $\hat{\mathfrak{U}}(\hat{P}_0)$. Insbesondere ist $\hat{\mathfrak{U}}(\hat{P}_0) - \hat{P}_0$ eine sogar relativ unverzweigte zweifache Überlagerung von $\mathfrak{U}(P_0) - P_0$. Dieser Sachverhalt wäre aber ausgeschlossen, wenn $\mathfrak{U}(P_0)$ einem Gebiete des R^4 topologisch äquivalent wäre (im R^4 können Verzweigungspunkte nicht isoliert liegen).

Wir wollen im folgenden den Begriff des (abstrakten) Riemannschen Gebietes präzisieren. Hierzu sind zunächst einige weitere Begriffe zu erläutern.

Sei $\mathfrak{D}_1$ ein beschränktes Gebiet im R^{2n} und $\mathfrak{D}$ ein in bezug auf $\mathfrak{D}_1$ kompaktes Teilgebiet von $\mathfrak{D}_1$. Sei ferner $f(z_1, \ldots, z_n) \not\equiv 0$ eine in $\mathfrak{D}_1$ eindeutige reguläre Funktion, die in $\mathfrak{D}$ Nullstellen besitze; das Nullstellengebilde von f in $\mathfrak{D}_1$ heiße $\mathfrak{F}$. Nach B. O. KOOPMAN und A. B. BROWN[10]) läßt sich $\mathfrak{D}$ in einen endlichen zusammenhängenden 2n-dimensionalen simplizialen Komplex K, der noch ganz in $\mathfrak{D}_1$ liegt, so einbetten, daß der in K gelegene Teil von $\mathfrak{F}$ einen (2 n − 2)-dimensionalen Teilkomplex F von K ausmacht. K darf als rein angenommen werden, d. h. jedes k-Simplex ($k < 2$n) in K ist Seitensimplex wenigstens eines 2n-Simplexes. Unter einer *m-fachen Überlagerung $\hat{K}$ von K mit Verzweigungspunkten höchstens über F wird* nun eine endliche 2n-dimensionale berandete Pseudomannigfaltigkeit[11]) mit einer bestimmten simplizialen Zerlegung verstanden, die durch eine stetige Abbildung T auf K bezogen ist, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

---

[10]) KOOPMAN, B. O., a. A. B. BROWN: On the covering of analytic loci by complexes, Trans. Amer. math. Soc. 34, 231—251 (1932).

[11]) Vgl. SEIFERT-THRELFALL Lb., § 24 (S. 88ff.).

1. T ist eine simpliziale Abbildung, und zwar entspricht jedem Simplex aus $\hat{K}$ ein Simplex gleicher Dimension in K.

2. Jedes Simplex aus K ist Bild wenigstens eines Simplexes von $\hat{K}$; jedes Simplex aus K, das nicht zu F gehört, ist Bild von genau m verschiedenen Simplexen aus $\hat{K}$; jedes Simplex aus F ist Bild von höchstens m verschiedenen Simplexen aus $\hat{K}$.

3. Sei $\hat{F}$ der Teilkomplex derjenigen Simplexe in $\hat{K}$, die durch T auf Simplexe von F abgebildet werden. Dann ist T in $\hat{K}-\hat{F}$ im Kleinen topologisch, d. h.: zu jedem Punkte $\hat{Q}$ aus $\hat{K}-\hat{F}$ gibt es eine Umgebung, die durch T topologisch auf eine Umgebung des Bildpunktes Q von $\hat{Q}$ abgebildet wird.

4. Sei $\hat{S}$ ein Simplex von $\hat{F}$ und $M(\hat{S})$ der Teilkomplex derjenigen Simplexe in $\hat{K}$, die mit $\hat{S}$ inzident sind. Dann ist $M(\hat{S})$ eine zusammenhängende berandete (2n-dimensionale) Pseudomannigfaltigkeit.

Wir betrachten nun den Teilraum $\hat{\mathfrak{D}}^*$ derjenigen Punkte von $\hat{K}$, die durch T in Punkte von $\mathfrak{D}$ abgebildet werden. $\hat{\mathfrak{D}}^*$ braucht nicht zusammenhängend zu sein, zerfällt aber in höchstens endlich viele zusammenhängende Komponenten. Zu jeder solchen Komponente $\hat{\mathfrak{D}}$ gehört eine ganze Zahl $s > 0$, derart, daß jeder Punkt von $\mathfrak{D}-\mathfrak{F}$ vermöge T Bildpunkt von genau s Punkten aus $\hat{\mathfrak{D}}$ ist. $\hat{\mathfrak{D}}$ heißt dann eine *s-fache Überlagerung von $\mathfrak{D}$ mit Verzweigungspunkten höchstens über $\mathfrak{F}$* oder kürzer eine *s-fache analytische Überlagerung von $\mathfrak{D}$*. Das Verzweigungsgebilde $\tilde{\mathfrak{F}}$ von $\hat{\mathfrak{D}}$ besteht genau aus denjenigen Punkten von $\hat{\mathfrak{D}}$, in denen die Abbildung T nicht im Kleinen topologisch ist. Falls $s = 1$ ist, liefert T einen Homöomorphismus von $\hat{\mathfrak{D}}$ auf $\mathfrak{D}$. Wird ein Punkt $\hat{P}$ von $\hat{\mathfrak{D}}$ durch T auf den Punkt $P = (z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{D}$ abgebildet, so sagen wir, $\hat{P}$ liege über dem Grundpunkt P, und $z_1, \ldots, z_n$ heißen die Koordinaten von $\hat{P}$.

Ist $\hat{\mathfrak{B}}$ ein Bereich, d. h. eine offene Punktmenge, in $\hat{\mathfrak{D}}$, so heißt eine in $\hat{\mathfrak{B}}$ definierte eindeutige komplexwertige Funktion $g(\hat{P})$ in $\hat{\mathfrak{B}}$ *regulär*, wenn sie in einer Nachbarschaft jedes Punktes von $\hat{\mathfrak{B}}$ ganz-algebroid ist, d. h.: Ist $\hat{P}_0$ irgendein Punkt von $\hat{\mathfrak{B}}$ und P_0 sein Grundpunkt, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ in $\mathfrak{D}$ und dazu eine Umgebung $\hat{\mathfrak{U}}(\hat{P}_0)$ in $\hat{\mathfrak{B}}$, die ihrerseits eine endlichfache analytische Überlagerung von $\mathfrak{U}(P_0)$ mit Verzweigungspunkten höchstens über $\mathfrak{F}$ ist, derart, daß g in $\hat{\mathfrak{U}}(\hat{P}_0)$ einer Gleichung

$$g^k + c_1(z_1, \ldots, z_n) \cdot g^{k-1} + \ldots + c_k(z_1, \ldots, z_n) = 0$$

genügt, wo die $c_\varkappa$ als Funktionen der Koordinaten der Punkte aus $\hat{\mathfrak{U}}(\hat{P}_0)$ sogar in $\mathfrak{U}(P_0)$ eindeutig und dort regulär sind. Liegt $\hat{P}_0$ nicht auf dem Verzweigungsgebilde von $\hat{\mathfrak{D}}$, existiert also eine „schlichte" Umgebung $\hat{\mathfrak{V}}(\hat{P}_0)$ in $\hat{\mathfrak{B}}$, die durch T topologisch auf eine Umgebung $\mathfrak{V}(P_0)$ abgebildet wird, so ergibt sich aus bekannten Sätzen über Pseudopolynome[12]), daß g als Funktion der Punktkoordinaten in $\hat{\mathfrak{B}}$ im üblichen Sinne regulär ist. Falls $\hat{\mathfrak{B}}$ nicht zusammenhängend ist, so sprechen wir von einer in $\hat{\mathfrak{B}}$ regulären Funktion auch dann, wenn die in den einzelnen zusammenhängenden Komponenten gegebenen regulären Funktionen nicht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.

[12]) Vgl. OSGOOD Lb., Kap. 2, §§ 5—7 (S. 95 ff.)

Es folgt: *Ist eine Funktion h in $\hat{\mathfrak{D}}$ außerhalb der über $\mathfrak{F}$ gelegenen Punktmenge $\hat{\mathfrak{F}}$ von $\hat{\mathfrak{D}}$ eindeutig regulär und bleibt h dort in jeweils einer Nachbarschaft jedes Punktes von $\hat{\mathfrak{F}}$ beschränkt, so ist h in ganz $\hat{\mathfrak{D}}$ eindeutig regulär fortsetzbar und genügt dort einer Gleichung*

$$(2) \qquad h^s + a_1(z_1, \ldots, z_n) \cdot h^{s-1} + \cdots + a_s(z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

wo die $a_\sigma(z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{D}$ eindeutige und reguläre Funktionen der Koordinaten der Punkte aus $\hat{\mathfrak{D}}$ sind. — Zum Beweise bilden wir in $\hat{\mathfrak{D}} - \hat{\mathfrak{F}}$ die s elementarsymmetrischen Funktionen $a_1, \ldots, a_s$ der s dort über jedem Grundpunkt erklärten Zweige von h. Die a_σ sind dann, als Funktionen der Grundpunkte aufgefaßt, in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}$ eindeutig regulär und bleiben in einer Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{F}$ innerhalb $\mathfrak{D}$ beschränkt. Nach einem Satz über hebbare Unstetigkeiten[13]) sind die a_σ dann in alle Punkte von $\mathfrak{F}$ innerhalb $\mathfrak{D}$ eindeutig regulär fortsetzbar. Die Funktion h genügt nun in $\hat{\mathfrak{D}} - \hat{\mathfrak{F}}$ der Gleichung (2). Damit ist aber zugleich eine reguläre Fortsetzung von h in die Punkte von $\hat{\mathfrak{F}}$ gegeben, und diese ist wegen der Stetigkeit regulärer Funktionen eindeutig bestimmt. — Das Pseudopolynom auf der linken Seite von (2) kann reduzibel sein. Dies tritt dann ein, wenn die s Zweige von h nicht sämtlich verschieden sind. Wann zu vorgegebenem $\hat{\mathfrak{D}}$ eine dort eindeutige reguläre Funktion mit lauter verschiedenen Zweigen über $\mathfrak{D}$ existiert, bleibt ein offenes Problem.

Seien $\hat{\mathfrak{B}}_1, \hat{\mathfrak{B}}_2$ Bereiche in endlichfachen analytischen Überlagerungen $\hat{\mathfrak{D}}_1$ bzw. $\hat{\mathfrak{D}}_2$ beschränkter Gebiete $\mathfrak{D}_1$ bzw. $\mathfrak{D}_2$ im R^{2n}; die zu $\hat{\mathfrak{D}}_1$, $\hat{\mathfrak{D}}_2$ gehörigen stetigen Abbildungen in ihre Grundgebiete $\mathfrak{D}_1$ bzw. $\mathfrak{D}_2$ seien T_1 und T_2. Es sei eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ von $\hat{\mathfrak{B}}_1$ auf $\hat{\mathfrak{B}}_2$ gegeben. Wir sagen, φ sei eine *analytische Abbildung* von $\hat{\mathfrak{B}}_1$ auf $\hat{\mathfrak{B}}_2$, und $\hat{\mathfrak{B}}_2$ heißt *analytisches Bild* von $\hat{\mathfrak{B}}_1$, wenn die Abbildungen $T_2 \cdot \varphi$ und $T_1 \cdot \varphi^{-1}$ jeweils durch n reguläre Funktionen in $\hat{\mathfrak{B}}_1$ bzw. in $\hat{\mathfrak{B}}_2$ gegeben werden.

Wir betrachten nun einen HAUSDORFFschen Raum $\mathfrak{H}^{2n}$ mit abzählbarer Basis, in dem es ein Umgebungssystem $\{\mathfrak{U}(P)\}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

a) Jedes der $\mathfrak{U}$ ist durch eine zugehörige topologische Abbildung $A_{\mathfrak{U}}$ auf eine endlichfache analytische Überlagerung $\hat{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{U}}$ einer offenen Hyperkugel $\mathfrak{K}_{\mathfrak{U}}$ im R^{2n} bezogen. — $\hat{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{U}}$ heißt Repräsentant von $\mathfrak{U}$ über dem R^{2n}; die $\mathfrak{U}$ heißen ausgezeichnete Umgebungen.

b) Haben zwei ausgezeichnete Umgebungen $\mathfrak{U}_1(P)$, $\mathfrak{U}_2(Q)$ in $\mathfrak{H}^{2n}$ einen nichtleeren Durchschnitt, so wird auf Grund von a) eine umkehrbar eindeutige Beziehung φ von Teilbereichen $\hat{\mathfrak{B}}_1, \hat{\mathfrak{B}}_2$ der Repräsentanten $\hat{\mathfrak{K}}_1, \hat{\mathfrak{K}}_2$ von $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ aufeinander hervorgerufen. Es wird gefordert, daß φ eine analytische Abbildung von $\hat{\mathfrak{B}}_1$ auf $\hat{\mathfrak{B}}_2$ ist.

Zwei Systeme ausgezeichneter Umgebungen $\{\mathfrak{U}\}$ bzw. $\{'\mathfrak{U}\}$ in $\mathfrak{H}^{2n}$ mit zugeordneten Abbildungen $\{A_{\mathfrak{U}}\}$ bzw. $\{'A_{'\mathfrak{U}}\}$ heißen *äquivalent*, wenn die Vereinigung der beiden Systeme $\{\mathfrak{U}, A_{\mathfrak{U}}\}$ und $\{'\mathfrak{U}, 'A_{'\mathfrak{U}}\}$ zu einem einzigen System $\{{}^*\mathfrak{U}, {}^*A_{^*\mathfrak{U}}\}$ ebenfalls die Forderung b) erfüllt.

Unter einem *Riemannschen Gebiete* $\mathfrak{G}^{2n}$ wird nunmehr ein HAUSDORFFscher Raum der betrachteten Art mit einer Klasse äquivalenter Systeme ausgezeichneter Umgebungen verstanden.

---

[13]) Vgl. OSGOOD Lb., Kap. 3, § 5, 1. Satz (S. 191).

Es ist klar, daß jede komplexe Mannigfaltigkeit insbesondere ein Riemannsches Gebiet ist. Ferner ist ein Teilgebiet eines Riemannschen Gebietes $\mathfrak{G}^{2n}$, d. h. eine offene zusammenhängende Punktmenge in $\mathfrak{G}^{2n}$, wieder ein Riemannsches Gebiet.

Eine im Riemannschen Gebiete $\mathfrak{G}^{2n}$ eindeutig definierte komplexwertige Funktion f heißt in $\mathfrak{G}^{2n}$ *regulär*, wenn sie jeweils als Funktion in den Repräsentanten $\hat{\mathfrak{K}}$ der ausgezeichneten Umgebungen $\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{G}^{2n}$ regulär ist. Von einer in einem Teilbereich $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}^{2n}$ regulären Funktion f wird gesprochen, wenn in jeder zusammenhängenden Komponente $\mathfrak{B}_j$ von $\mathfrak{B}$ eine reguläre Funktion f_j gegeben ist; es wird nicht verlangt, daß die f_j durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen. f heißt eine nirgends identisch verschwindende Funktion, wenn keines der f_j identisch verschwindet.

Wir sagen, die Punktmenge $\mathfrak{A}$ im Riemannschen Gebiete $\mathfrak{G}^{2n}$ sei ein *analytisches Gebilde*, wenn zu jedem Punkte P von $\mathfrak{A}$ eine Umgebung $\mathfrak{B}(P)$ in $\mathfrak{G}^{2n}$ existiert, derart, daß $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}(P)$ genau charakterisiert wird durch endlich viele Gleichungen $f_\mu = 0$ mit in $\mathfrak{B}(P)$ regulären, nirgends identisch verschwindenden f_μ. Es werde ausdrücklich bemerkt, daß wir nicht die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}^{2n}$ fordern. Reduzibilität von $\mathfrak{A}$, evtl. in Bestandteile verschiedener Dimensionen, ist zugelassen. – Wir benutzen hier die Bezeichnung „analytisches Gebilde" an Stelle der häufig üblichen „analytische Mannigfaltigkeit". Denn $\mathfrak{A}$ kann Punkte mit nichtuniformisierbaren Umgebungen besitzen, und in diesen Punkten hat $\mathfrak{A}$ nicht Mannigfaltigkeitscharakter im Sinne der Topologie. (Beispiel im R^6: $z_3^2 - z_1 z_2 = 0$; vgl. die obigen Ausführungen zum Riemannschen Gebiete von $\sqrt[2]{z_1 z_2}$.)

Wird ein Riemannsches Gebiet $\mathfrak{G}_1^{2n}$ auf ein Riemannsches Gebiet $\mathfrak{G}_2^{2n}$ durch eine umkehrbar eindeutige Abbildung Φ bezogen, so ist Φ eine *analytische Abbildung* von $\mathfrak{G}_1^{2n}$ auf $\mathfrak{G}_2^{2n}$, wenn zu jedem Punkt P_2 von $\mathfrak{G}_2^{2n}$ und jeder ausgezeichneten Umgebung $\mathfrak{U}_2(P_2)$ eine ausgezeichnete Umgebung $\mathfrak{U}_1(P_1)$ des Punktes $P_1 = \Phi^{-1}(P_2)$ existiert, so daß durch Φ eine analytische Abbildung des Repräsentanten $\hat{\mathfrak{K}}_1$ von $\mathfrak{U}_1(P_1)$ auf ein Teilgebiet des Repräsentanten $\hat{\mathfrak{K}}_2$ von $\mathfrak{U}_2(P_2)$ hervorgerufen wird. Mit Φ ist dann auch Φ^{-1} eine analytische Abbildung. Es ist leicht nachzuweisen, was hier nicht ausgeführt werden soll, daß eine in $\mathfrak{G}_1^{2n}$ reguläre Funktion stets auch als Funktion der Bildpunkte in $\mathfrak{G}_2^{2n}$ regulär ist.

Analog zu den Riemannschen Flächen über der z-Ebene sind die *konkreten Riemannschen Gebiete über dem* R^{2n} zu definieren. Das Riemannsche Gebiet $\mathfrak{G}^{2n}$ heißt über dem R^{2n} gelegen, wenn mit $\mathfrak{G}^{2n}$ n in $\mathfrak{G}^{2n}$ eindeutige reguläre Funktionen $z_1 = \psi_1(P), \ldots, z_n = \psi_n(P)$ fest gegeben sind, so daß die durch sie festgelegte Abbildung S von $\mathfrak{G}^{2n}$ in den R^{2n} die folgende Bedingung erfüllt: Jeder Punkt P von $\mathfrak{G}^{2n}$ besitzt eine ausgezeichnete Umgebung $\mathfrak{U}(P)$, in der $S = T \cdot A_{\mathfrak{U}}$ gilt; hierbei bedeutet $A_{\mathfrak{U}}$ die Abbildung, die $\mathfrak{U}(P)$ auf ihren Repräsentanten $\hat{\mathfrak{K}}$ bezieht, und T sei die zu $\hat{\mathfrak{K}}$ gehörende Abbildung in das Grundgebiet $\mathfrak{K}$. Wir sagen, P liege über dem Grundpunkt $(z_1, \ldots, z_n) = (\psi_1(P), \ldots, \psi_n(P))$ des R^{2n}, und $z_1, \ldots, z_n$ heißen die Koordinaten von P.

Ein Punkt P eines Riemannschen Gebietes $\mathfrak{G}^{2n}$ heiße *uniformisierbar*, wenn eine Umgebung von P analytisch auf ein schlichtes Gebiet im R^{2n} abbildbar ist. Hiernach bilden die uniformisierbaren Punkte in $\mathfrak{G}^{2n}$ eine offene Menge. Andererseits folgt aus der Struktur der Repräsentanten $\hat{\mathfrak{K}}$ ausgezeichneter Umgebungen in $\mathfrak{G}^{2n}$, daß jeder nichtuniformisierbare Punkt Häufungspunkt von uniformisierbaren Punkten ist und daß keine Umgebung eines nichtuniformisierbaren Punktes durch die Gesamtheit der nichtuniformisierbaren Punkte zerlegt wird. Denn nichtuniformisierbare Punkte eines $\hat{\mathfrak{K}}$ können höchstens auf dem Verzweigungsgebilde von $\hat{\mathfrak{K}}$ liegen. Nimmt man aus $\mathfrak{G}^{2n}$ die nichtuniformisierbaren Punkte heraus, so erhält man eine komplexe Mannigfaltigkeit, die als die *zu* $\mathfrak{G}^{2n}$ *gehörige komplexe Mannigfaltigkeit* $\dot{\mathfrak{G}}^{2n}$ bezeichnet werde.

Eine in $\mathfrak{G}^{2n}$ reguläre Funktion ist in $\dot{\mathfrak{G}}^{2n}$ in dem für komplexe Mannigfaltigkeiten definierten Sinne regulär. Umgekehrt gilt: *Ist f in $\dot{\mathfrak{G}}^{2n}$ eindeutig regulär und bleibt f dort in jeweils einer Nachbarschaft jedes nichtuniformisierbaren Punktes von $\mathfrak{G}^{2n}$ beschränkt, so läßt sich f in $\mathfrak{G}^{2n}$ eindeutig regulär fortsetzen.* — Hierzu betrachten wir f im Repräsentanten $\hat{\mathfrak{K}}$ einer ausgezeichneten Umgebung irgendeines nichtuniformisierbaren Punktes. f ist außerhalb des Verzweigungsgebildes $\tilde{\mathfrak{F}}$ von $\hat{\mathfrak{K}}$ regulär und in einer Nachbarschaft jedes Punktes von $\tilde{\mathfrak{F}}$ beschränkt. Dann läßt sich f aber, wie oben nachgewiesen, in ganz $\hat{\mathfrak{K}}$ hinein eindeutig regulär fortsetzen. — Es sei angemerkt, daß in der obigen Aussage die Voraussetzung der Beschränktheit von f sogar entbehrlich ist.

3. Modifikationen. — Wir kommen nun zu dem für unsere Überlegungen wesentlichen Begriffe der Modifikation eines Riemannschen Gebietes $\mathfrak{G}^{2n}$. Sei $\mathfrak{N}$ eine abgeschlossene Punktmenge in $\mathfrak{G}^{2n}$, so daß $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$ nichtleer und zusammenhängend ist. Wir nennen das Riemannsche Gebiet $^*\mathfrak{G}^{2n}$ eine *Modifikation von* $\mathfrak{G}^{2n}$ *in* $\mathfrak{N}$, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:

a) $^*\mathfrak{G}^{2n}$ enthält $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$ als echtes Teilgebiet.

b) Wird eine Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ in $\mathfrak{G}^{2n}$ beliebig vorgegeben, so gibt es zu jedem Punkt P^* aus $^*\mathfrak{G}^{2n} - (\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N})$ eine Umgebung $\mathfrak{U}^*(P^*)$ in $^*\mathfrak{G}^{2n}$, derart, daß $\mathfrak{U}^*(P^*) \cap (\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N})$ in $\mathfrak{U}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}$ enthalten ist.

Jede Modifikation von $\mathfrak{G}^{2n}$ in $\mathfrak{N}$ ist also insbesondere eine Fortsetzung[14]) von $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$. Wir betrachten im folgenden vor allem diejenigen Modifikationen, bei denen $\mathfrak{N}$ ein kompaktes Stück eines analytischen Gebildes in $\mathfrak{G}^{2n}$ ist. Speziell kann $\mathfrak{N}$ ein einzelner Punkt P sein. In diesem Falle läßt sich, wie unmittelbar aus der obigen Definition folgt, die Modifikation von $\mathfrak{G}^{2n}$ in P zum Riemannschen Gebiete $^*\mathfrak{G}^{2n}$ auch so charakterisieren: Die Abbildung von $^*\mathfrak{G}^{2n}$ auf $\mathfrak{G}^{2n}$, bei der

1. die Punkte von $^*\mathfrak{G}^{2n}$, die zu $\mathfrak{G}^{2n} - P$ gehören, auf sich selbst abgebildet werden,

2. die übrigen Punkte von $^*\mathfrak{G}^{2n}$ auf P abgebildet werden,

ist stetig.

Auf Beispiele von Modifikationen Riemannscher Gebiete ist schon in der Einleitung hingewiesen worden. So ergeben die verschiedenen Abschließungen des offenen R^{2n} zu kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^{2n}$ wechselseitig Modifikationen der $\mathfrak{M}^{2n}$ in der jeweils festliegenden Menge der unendlichfernen Punkte des R^{2n}. Weitere Beispiele:

---

[14]) Zur Fortsetzung insbesondere Riemannscher Flächen vgl.: T. RADÓ: Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, Math. Z. **20**, 1—6 (1924); S. BOCHNER: Fortsetzung Riemannscher Flächen, Math. Ann. **98**, 406—421 (1927); M. H. HEINS: On the continuation of a Riemann surface, Ann. of Math. **43**, 280—297 (1942); sowie [6]).

(a) Sei $\mathfrak{G}^4$ der offene (z_1, z_2)-Raum R^4 und $\mathfrak{N}$ der Koordinatenanfang $P_0 = (0,0)$. Wir nehmen zwei weitere Exemplare $'R^4, ''R^4$ des vierdimensionalen Raumes mit den komplexen Koordinaten (z_1', z_2') bzw. (z_1'', z_2'') hinzu. Es werden nun Punkte aus $R^4 - P_0, 'R^4, ''R^4$ identifiziert, und zwar jeweils solche, die sich vermöge wenigstens einer der Transformationen

$$(\mathrm{I}): \left\{ \begin{array}{l} z_1 = z_1' \cdot z_2' \\ z_2 = z_2' \end{array} \quad , \; z_2 \neq 0 , \quad z_2' \neq 0 \right\},$$

$$(\mathrm{II}): \left\{ \begin{array}{l} z_1 = z_1'' \\ z_2 = z_1'' \cdot z_2'' \end{array} , \; z_1 \neq 0 , \quad z_1'' \neq 0 \right\},$$

$$(\mathrm{III}): \left\{ \begin{array}{l} z_1' = \dfrac{1}{z_2''} \\ z_2' = z_1'' \cdot z_2'' \end{array} , \; z_1' \neq 0 , \quad z_2'' \neq 0 \right\}$$

entsprechen. Wir kommen zu einer komplexen Mannigfaltigkeit $^*\mathfrak{M}^4$, die eine Modifikation des R^4 im Nullpunkt darstellt. $^*\mathfrak{M}^4$ unterscheidet sich von $R^4 - P_0$ nur durch die Punkte eines geschlossenen irreduziblen analytischen Gebildes, das durch $z_2' = 0$ bzw. $z_1'' = 0$ charakterisiert wird. — Es entsteht die gleiche Modifikation des R^4 in P_0 (genauer: eine zu $^*\mathfrak{M}^4$ analytisch äquivalente Modifikation), wenn P_0 durch die Gesamtheit der in P_0 angreifenden komplexen Linienelemente ersetzt wird. Von H. Hopf wurde dieser Übergang als Einsetzung einer Trägersphäre in P_0 bezeichnet.

(b) Sei $\mathfrak{G}^{2n}$ der Polyzylinder

$$\{|z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$$

und $\mathfrak{N}$ das in $\mathfrak{G}^{2n}$ gelegene Stück der analytischen Ebene

$$\{z_1 = 0, \ldots, z_k = 0, \quad 1 < k < n\}.$$

Im $(z_1', \ldots, z_n')$-Raum wird die Punktmenge

$$'\mathfrak{G}^{2n}: \{|z_1' \cdot z_k'| < 1, \ldots, |z_{k-1}' \cdot z_k'| < 1, |z_k'| < 1, \ldots, |z_n'| < 1\}$$

gebildet; es werden sodann solche Punkte aus $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$ und $'\mathfrak{G}^{2n}$ identifiziert, die sich vermöge der Beziehungen

$$\left\{ \begin{array}{llll} z_\varkappa = z_\varkappa' \cdot z_k', & \varkappa = 1, \ldots, k-1, & (z_1, \ldots, z_n) & \text{nicht auf } \mathfrak{N} \\ z_{k+\lambda} = z_{k+\lambda}', & \lambda = 0, \ldots, n-k, & z_k' \neq 0 & \end{array} \right\}$$

entsprechen. Wir gewinnen als Modifikation von $\mathfrak{G}^{2n}$ in $\mathfrak{N}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit $^*\mathfrak{M}^{2n}$; an die Stelle von $\mathfrak{N}$ tritt in $^*\mathfrak{M}^{2n}$ ein Stück des durch $z_k' = 0$ gegebenen $(2n-2)$-dimensionalen analytischen Gebildes.

4. Erweiterung eines Satzes von T. Radó. — Zum Beweise unseres Hauptsatzes im nächsten Abschnitt wird eine Aussage benutzt, die sich auf einen von T. Radó aufgestellten Satz[15]) stützt und diesen erweitert. Der Satz von Radó läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Sei $\mathfrak{G}$ ein schlichtes beschränktes einfachzusammenhängendes Gebiet in der z-Ebene, ferner $\mathfrak{G}'$ ein einfachzusammenhängendes echtes Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. In $\mathfrak{G}'$ sei eine reguläre Funktion $f(z)$ gegeben mit der Eigenschaft, daß stets $\lim_{j\to\infty} f(z_j) = 0$ gilt für jede Folge von Punkten z_j aus $\mathfrak{G}'$, die gegen einen im Innern von $\mathfrak{G}$ gelegenen Randpunkt von $\mathfrak{G}'$ konvergiert. Dann verschwindet $f(z)$ identisch.

[15]) Vgl. die in [14]) zitierte Arbeit von T. Radó.

Der naheliegende Gedanke, zum Beweise $\mathfrak{G}'$ konform auf den Einheitskreis abzubilden und sodann aus dem Verschwinden von f in einer Randpunktmenge auf das identische Verschwinden von f im E. K. zu schließen, führt jedenfalls nicht auf einfache Art zum Ziele, da die Bildpunkte der im Innern von $\mathfrak{G}$ gelegenen Randpunkte von $\mathfrak{G}'$ keinen Randbogen des E. K. vollständig zu bedecken brauchen. T. RADÓ hat hierauf unter Hinweis auf ein von P. KOEBE angegebenes Beispiel aufmerksam gemacht. — Der Vollständigkeit halber sei der RADÓsche Beweis des Satzes hier wiedergegeben[15a]):

Es darf angenommen werden, daß $\mathfrak{G}$ äußere Punkte in bezug auf $\mathfrak{G}'$ enthält. Ist dies noch nicht der Fall, so betrachten wir eine zweifache Überlagerung $\hat{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$, die in genau einem, über einem Randpunkt von $\mathfrak{G}'$ im Innern von $\mathfrak{G}$ gelegenen Punkte verzweigt ist. $\mathfrak{G}'$ drückt sich in zwei verschiedene Teilgebiete von $\hat{\mathfrak{G}}$ durch; eines von ihnen sei mit $\hat{\mathfrak{G}}'$ bezeichnet. Die Funktion f kann dann zugleich als Funktion in $\hat{\mathfrak{G}}'$ aufgefaßt werden. $\hat{\mathfrak{G}}$ wird nun konform auf ein schlichtes beschränktes Gebiet $\tilde{\mathfrak{G}}$ abgebildet, dabei geht $\hat{\mathfrak{G}}'$ in ein Teilgebiet $\tilde{\mathfrak{G}}'$ und f in eine Funktion $\tilde{f}$ über. Es genügt zu zeigen, daß $\tilde{f}$ identisch verschwindet. Auf $\tilde{\mathfrak{G}}$, $\tilde{\mathfrak{G}}'$, $\tilde{f}$ treffen aber wieder die Voraussetzungen des Satzes zu, und $\tilde{\mathfrak{G}}$ enthält äußere Punkte in bezug auf $\tilde{\mathfrak{G}}'$. — Wir kehren zu den alten Bezeichnungen zurück.

Sei P ein Randpunkt von $\mathfrak{G}'$ im Innern von $\mathfrak{G}$, der in jeder seiner Umgebungen äußere Punkte in bezug auf $\mathfrak{G}'$ aufweist. Es läßt sich eine ganz im Innern von $\mathfrak{G}$ gelegene offene Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkt P so wählen, daß ein Teilbogen des Randes von $\mathfrak{K}$ ganz aus äußeren Punkten in bezug auf $\mathfrak{G}'$ besteht. Der Durchschnitt $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}'$ ist nicht leer, und f bleibt in $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}'$ beschränkt. Wir bilden $\mathfrak{K}$ linear auf den Einheitskreis ab, derart, daß der Nullpunkt innerer Punkt des Bildes $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}'$ wird; die aus f in $\mathfrak{B}^*$ entstehende Funktion heiße f^*. Auf der Peripherie des E. K. gibt es sicher einen Bogen von der Länge $\frac{2\pi}{\nu}$ (ν geeignet positiv-ganzzahlig), der einschließlich seiner Endpunkte von Randpunkten von $\mathfrak{B}^*$ frei ist. Werden nun nacheinander die Drehungen

$$z' = e^{\frac{\lambda}{\nu} \cdot 2\pi i} \cdot z, \quad \lambda = 1, \ldots, \nu - 1,$$

ausgeführt und geht $\mathfrak{B}^*$ hierbei nacheinander in $\mathfrak{B}_1^*, \ldots, \mathfrak{B}_{\nu-1}^*$ über, so enthält der Durchschnitt $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}^* \cap \mathfrak{B}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{B}_{\nu-1}^*$ den Nullpunkt als inneren Punkt, und die Komponente $\mathfrak{D}_0$ von $\mathfrak{D}$, in der $z = 0$ enthalten ist, liegt einschließlich ihrer Randpunkte ganz im Innern des E. K. Wir bilden in $\mathfrak{D}_0$:

$$\psi(z) = f^*(z) \cdot \prod_{\lambda=1}^{\nu-1} f^*\left(e^{\frac{\lambda}{\nu} \cdot 2\pi i} \cdot z\right). \tag{3}$$

Bei Annäherung gegen einen beliebigen Randpunkt von $\mathfrak{D}_0$ geht immer wenigstens einer der Faktoren rechts in (3) gegen Null; da andererseits alle Faktoren in $\mathfrak{D}_0$ beschränkt sind, strebt auch $\psi(z)$ bei Annäherung gegen den Rand von $\mathfrak{D}_0$ stets gegen Null. Daher muß $\psi(z)$ identisch verschwinden. Gleiches gilt dann für wenigstens einen der Faktoren, also auch für f.

[15a]) Vgl. auch C. CARATHÉODORY, Conformal Representation, Cambridge Tracts 28 (1932), S. 82.

Die von uns benötigte Erweiterung des RADóschen Satzes lautet nun:

Satz 1: *Sei $\mathfrak{G}^{2n}$ ein Riemannsches Gebiet und $\mathfrak{G}'$ ein echtes Teilgebiet von $\mathfrak{G}^{2n}$, ferner f eine in $\mathfrak{G}'$ eindeutige, reguläre, nicht identisch verschwindende Funktion; es gelte stets $\lim_{j\to\infty} f(P_j) = 0$ für jede Folge von Punkten P_j aus $\mathfrak{G}'$, die gegen einen im Innern von $\mathfrak{G}^{2n}$ gelegenen Randpunkt von $\mathfrak{G}'$ konvergiert. Dann ist f in das gesamte Riemannsche Gebiet $\mathfrak{G}^{2n}$ eindeutig regulär fortsetzbar, und die im Innern von $\mathfrak{G}^{2n}$ liegenden Randpunkte von $\mathfrak{G}'$ gehören zu dem $(2n-2)$-dimensionalen analytischen Nullstellengebilde von f in $\mathfrak{G}^{2n}$.*

Wir führen den Beweis in drei Schritten.

(a) Zunächst sei $n = 1$, und $\mathfrak{G}^2$, $\mathfrak{G}'$ seien Gebiete in der Ebene einer komplexen Veränderlichen z. Wir wählen irgendeinen Randpunkt P von $\mathfrak{G}'$ im Innern von $\mathfrak{G}^2$ und dazu eine offene Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ mit P als Mittelpunkt, die noch ganz im Innern von $\mathfrak{G}^2$ liegt. Der Durchschnitt $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}'$ ist nicht leer, zerfällt jedoch eventuell in mehrere getrennte Gebiete. Eines der in $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}'$ enthaltenen maximalen Gebiete werde herausgegriffen und mit $\mathfrak{G}''$ bezeichnet; jedenfalls ist dann $\mathfrak{G}'' \neq \mathfrak{K}$. $\mathfrak{G}''$ kann nicht einfach zusammenhängend sein; anderenfalls müßte auf Grund des RADóschen Satzes die gegebene Funktion $f(z)$ identisch verschwinden. Daher gibt es in $\mathfrak{G}''$ einfach geschlossene Jordankurven, deren Inneres[16]) nicht ganz zu $\mathfrak{G}''$ gehört. Sei $\mathfrak{C}$ eine dieser Jordankurven. Es darf

$$m = \operatorname*{Min}_{z \in \mathfrak{C}} |f(z)| > 0$$

vorausgesetzt werden; nötigenfalls ist $\mathfrak{C}$ geeignet abzuändern. Das von $\mathfrak{C}$ begrenzte, zu $\mathfrak{K}$ gehörende abgeschlossene Gebiet werde mit $\overline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}$ bezeichnet, ferner sei $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}'' \cap \overline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}$. Durch $w = f(z)$ wird $\tilde{\mathfrak{G}}$ auf eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ über der w-Ebene abgebildet. Wir behaupten, daß $\mathfrak{R}$ über jedem Punkte des punktierten Kreises $0 < |w| < m$ die gleiche Anzahl N von Punkten besitzt.

Hierzu werde $\tilde{\mathfrak{G}}$ durch abgeschlossene Gebiete $\overline{\mathfrak{G}}_\nu$ ausgeschöpft, die so gewählt seien, daß $\mathfrak{C}$ zum Rande jedes $\mathfrak{G}_\nu$ gehört und daß die übrigen Randkomponenten $\mathfrak{C}_1^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{C}_{k_\nu}^{(\nu)}$ von $\overline{\mathfrak{G}}_\nu$ ebenfalls einfach geschlossene Jordankurven sind; es gelte ferner $\overline{\mathfrak{G}}_\nu \subset \overline{\mathfrak{G}}_{\nu+1}$ für alle ν. Sei nun w ein fester Punkt aus $0 < |w| < m$. Da $f(z)$ bei Annäherung gegen die im Innern von $\mathfrak{C}$ gelegenen Randpunkte von $\tilde{\mathfrak{G}}$ gegen Null strebt, läßt sich ein ν_0 so festlegen, daß für $\nu \geqq \nu_0$ stets $|f(z)| < |w|$ ist, wenn z auf einer der Randkurven $\mathfrak{C}_1^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{C}_{k_\nu}^{(\nu)}$ von $\overline{\mathfrak{G}}_\nu$ gewählt wird. Alle Stellen in $\tilde{\mathfrak{G}}$, in denen $f(z) = w$ ist, liegen also schon in $\overline{\mathfrak{G}}_{\nu_0}$; ihre Anzahl ist

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Rd\,\mathfrak{G}_{\nu_0}} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}} d \log [f(z) - w] + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{k_{\nu_0}} \int\limits_{\mathfrak{C}_\mu^{(\nu_0)}} d \log [f(z) - w].$$

---

[16]) Unter dem Inneren einer einfach geschlossenen Jordankurve in der Ebene wird das von dieser Kurve begrenzte Gebiet verstanden.

Wegen $|f(z)| < |w|$ auf allen $\mathfrak{C}_\mu^{(\nu_0)}$ sind aber die Integrale rechts über die $\mathfrak{C}_\mu^{(\nu_0)}$ sämtlich Null, folglich ist

$$N(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

$N(w)$ hängt analytisch von w ab und ist andererseits eine ganze Zahl; daher bleibt $N(w) = N$ konstant. Sicher ist auch $N > 0$, denn in $\tilde{\mathfrak{G}}$ nimmt $f(z)$ jedenfalls Werte aus $0 < |w| < m$ an. Die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ weist also über $0 < |w| < m$ keine Randpunkte auf und besteht dort aus genau N Blättern.

Es ist leicht zu sehen, daß sich $\mathfrak{R}$ durch Hinzufügen von gewissen Punkten über $w = 0$ zu einer über der gesamten Kreisscheibe $|w| < m$ algebroiden N-blättrigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}^*$ fortsetzen läßt: Wir bilden für den über $0 < |w| < m$ gelegenen Teil $\tilde{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ die N elementarsymmetrischen Funktionen $a_1(w), \ldots, a_N(w)$ der N Zweige von $f^{-1}(w)$; dann genügt $z = f^{-1}(w)$ der Gleichung

$$z^N + a_1(w) \cdot z^{N-1} + \cdots + a_N(w) = 0.$$

Die $a_\lambda(w)$, $\lambda = 1, \ldots, N$, sind in $0 < |w| < m$ eindeutig, regulär und beschränkt, sie lassen sich daher nach $w = 0$ regulär fortsetzen. Das aber bedeutet, daß $z = f^{-1}(w)$ auch in N (evtl. teilweise zusammenfallende) Punkte über $w = 0$ ganz-algebroid fortgesetzt werden kann und daß $\mathfrak{R}$ als Riemannsche Fläche von $z = f^{-1}(w)$ über $w = 0$ wie behauptet zu einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}^*$ ergänzbar ist.

Für das Gebiet $\tilde{\mathfrak{G}}$ in der z-Ebene folgt, daß seine im Innern der Jordankurve $\mathfrak{C}$ gelegenen Randpunkte isoliert sind: Sie ergeben sich als Bildpunkte der über $w = 0$ gelegenen Punkte vermöge $z = f^{-1}(w)$, ihre Anzahl ist also höchstens N. Wird $f(z)$ in diesen Punkten durch Zuordnung des Wertes 0 erklärt, so ist damit $f(z)$ in das ganze Innere von $\mathfrak{C}$ regulär fortgesetzt.

$\mathfrak{C}$ war irgendeine in $\mathfrak{G}''$ nicht berandende Jordankurve. Demnach ist $f(z)$ in das kleinste, $\mathfrak{G}''$ umfassende, einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}^*$ regulär fortsetzbar. Es ist notwendig $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{K}$, sonst müßte wiederum auf Grund des RADÓschen Satzes $f(z)$ identisch verschwinden, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\mathfrak{K}$ enthält daher in seinem Innern nur isolierte Randpunkte von $\mathfrak{G}'$, und $f(z)$ kann in diese Punkte regulär fortgesetzt werden. Da gleiches für jede im Innern von $\mathfrak{G}^2$ gelegene Kreisscheibe mit irgendeinem Randpunkt von $\mathfrak{G}'$ als Mittelpunkt gilt, so ist unser Satz für den betrachteten Sonderfall bewiesen.

(b) Seien jetzt $\mathfrak{G}^{2n}$ und $\mathfrak{G}'$ Gebiete im R^{2n} $(n > 1)$. Wir greifen irgendeinen Randpunkt P von $\mathfrak{G}'$ im Innern von $\mathfrak{G}^{2n}$ heraus und legen um P als Mittelpunkt eine Hyperkugel $\mathfrak{K}$, die noch ganz in $\mathfrak{G}^{2n}$ liegt. In $\mathfrak{K}$ liegen innere Punkte von $\mathfrak{G}'$; wir können einen dieser Punkte Q so wählen, daß die zweidimensionale analytische Verbindungsebene $\mathfrak{E}^2$ von P und Q aus $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{K}$ ein zweidimensionales Gebiet $\mathfrak{g}'$ mit Q als innerem Punkt herausschneidet, auf dem die gegebene Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ nicht konstant gleich Null ist. Es bedeutet keine Einschränkung, anzunehmen, daß P der Koordinatenanfang und $\mathfrak{E}^2$ die Ebene $z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0$ ist; nötigenfalls ist eine geeignete lineare Koordinatentransformation vorzunehmen. Die aus $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{E}^2$ ausgeschnittene Kreisscheibe $\mathfrak{g}$, das Gebiet $\mathfrak{g}'$ und die Funktion $f(0, \ldots, 0, z_n)$ erfüllen nun die Voraussetzungen des schon bewiesenen Teiles unseres Satzes. Folglich läßt sich $f(0, \ldots, 0, z_n)$ (als Funktion der einen Variablen z_n) in ganz $\mathfrak{g}$ hinein eindeutig regulär fortsetzen, und $\mathfrak{g}'$ besitzt im Innern von $\mathfrak{g}$ nur isolierte Randpunkte, unter ihnen sicher den Punkt P. Es gibt daher auf $\mathfrak{E}^2$ um P einen Kreisring $0 < \varepsilon_1 < |z_n| < \varepsilon_2$ und dazu ein $\delta > 0$, so daß der Polyzylinder

$$\mathfrak{Z}: \{|z_1| < \delta, \ldots, |z_{n-1}| < \delta, \quad \varepsilon_1 < |z_n| < \varepsilon_2\}$$

nur innere Punkte von $\mathfrak{G}'$ enthält. In $\mathfrak{Z}$ läßt sich f in eine Laurentreihe

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\mu = -\infty}^{+\infty}{}' a_\mu(z_1, \ldots, z_{n-1}) \cdot z_n^\mu$$

entwickeln, wo die $a_\mu(z_1, \ldots, z_{n-1})$ in $\{|z_1| < \delta, \ldots, |z_{n-1}| < \delta\}$ reguläre Funktionen darstellen. Andererseits ist $f(z_1, \ldots, z_n)$ auf jeder Ebene

$$\mathfrak{E}^2(z_1^{(0)}, \ldots, z_{n-1}^{(0)}): \{z_1 = z_1^{(0)}, \ldots, z_{n-1} = z_{n-1}^{(0)}\}$$

mit $|z_1^{(0)}| < \delta, \ldots, |z_{n-1}^{(0)}| < \delta$ als Funktion der einen Variablen z_n in den gesamten Kreis $|z_n| < \varepsilon_2$ regulär fortsetzbar, denn entweder ist f auf $\mathfrak{E}^2(z_1^{(0)}, \ldots, z_{n-1}^{(0)})$ in $\varepsilon_1 < |z_n| < \varepsilon_2$ konstant gleich Null, oder es läßt sich wieder, ähnlich wie oben für $\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{E}^2(0, \ldots, 0)$, der schon bewiesene Teil unseres Satzes anwenden. Daher muß die angegebene Laurententwicklung für feste $z_1^{(0)}, \ldots, z_{n-1}^{(0)}$ mit $|z_1^{(0)}| < \delta, \ldots, |z_{n-1}^{(0)}| < \delta$ in eine gewöhnliche Potenzreihenentwicklung übergehen. Es ist also stets $a_\mu(z_1^{(0)}, \ldots, z_{n-1}^{(0)}) = 0$, d. h. $a_\mu(z_1, \ldots, z_{n-1}) \equiv 0$, für $\mu < 0$. In $\mathfrak{Z}$ ist demnach

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\mu = 0}^{+\infty}{}' a_\mu(z_1, \ldots, z_{n-1}) \cdot z_n^\mu .$$

Diese Reihe konvergiert aber im gesamten Polyzylinder

$$\mathfrak{Z}_1: \{|z_1| < \delta, \ldots, |z_{n-1}| < \delta, \quad |z_n| < \varepsilon_2\},$$

mithin bleibt f dort regulär. Bei Annäherung gegen die in $\mathfrak{Z}_1$ gelegenen Randpunkte von $\mathfrak{G}'$ geht f gegen Null; das bedeutet, daß diese Randpunkte zu den $(2n-2)$-dimensionalen analytischen Nullstellengebilden von f in $\mathfrak{Z}_1$ gehören müssen.

Entsprechendes gilt nun in der Nachbarschaft jedes im Innern von $\mathfrak{G}^{2n}$ gelegenen Randpunktes von $\mathfrak{G}'$, denn der Punkt P war als solcher nicht speziell gewählt. $\mathfrak{G}'$ kann sich daher von $\mathfrak{G}^{2n}$ nur durch Stücke analytischer Flächen im Innern von $\mathfrak{G}^{2n}$ unterscheiden, und diese Flächen sind Nullstellenflächen der im gesamten Gebiete $\mathfrak{G}^{2n}$ regulär und eindeutig bleibenden Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$.

(c) Nunmehr sei $\mathfrak{G}^{2n}$ $(n \geqq 1)$ ein beliebiges Riemannsches Gebiet und $\mathfrak{G}'$ irgendein echtes Teilgebiet von $\mathfrak{G}^{2n}$. Es sei P ein in $\mathfrak{G}^{2n}$ gelegener uniformisierbarer Punkt, der zugleich Randpunkt von $\mathfrak{G}'$ ist. P besitzt „schlichtartige" Umgebungen in $\mathfrak{G}^{2n}$; wir wählen eine solche zusammenhängende Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ und bilden sie analytisch auf ein schlichtes Gebiet $\mathfrak{B}$ im R^{2n} ab. Der Durchschnitt $\mathfrak{U}(P) \cap \mathfrak{G}'$ ist nicht leer, ihm entspricht in $\mathfrak{B}$ ein Teilbereich $\mathfrak{B}^*$. Ist $\mathfrak{B}'$ ein in $\mathfrak{B}^*$ enthaltenes maximales Teilgebiet, so erfüllen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ und die aus der gegebenen Funktion f in $\mathfrak{B}'$ entstehende Funktion $'f$ die Voraussetzung unseres Satzes. Nach dem bereits Bewiesenen ist also $'f$ in ganz $\mathfrak{B}$ eindeutig regulär fortsetzbar, und $\mathfrak{B}'$ unterscheidet sich von $\mathfrak{B}$ nur durch Stücke des Nullstellengebildes von $'f$. Gehen wir wieder zum Riemannschen Gebiete $\mathfrak{G}^{2n}$ über, so folgt, daß sich f in die gesamte zu $\mathfrak{G}^{2n}$ gehörige komplexe Mannigfaltigkeit $\dot{\mathfrak{G}}^{2n}$ eindeutig regulär fortsetzen läßt und daß sich $\dot{\mathfrak{G}}^{2n}$ von der zu $\mathfrak{G}'$ gehörigen komplexen Mannigfaltigkeit $\dot{\mathfrak{G}}'$ nur durch Stücke des Nullstellengebildes von f unterscheidet. Gleiches gilt dann aber auch in bezug auf $\mathfrak{G}^{2n}$ und $\mathfrak{G}'$. Denn jeder nichtuniformisierbare Punkt Q in $\mathfrak{G}^{2n}$, der zugleich Randpunkt von $\mathfrak{G}'$ ist, besitzt sicher eine Umgebung $\mathfrak{U}(Q)$, derart, daß f in $\mathfrak{U}(Q) \cap \dot{\mathfrak{G}}^{2n}$ beschränkt bleibt: ferner hat f in Q den Grenzwert Null. Nach der am Schluß des Abschnitts 2 bewiesenen Aussage läßt sich f also in Q regulär fortsetzen und verschwindet in Q.

Damit ist der Satz bewiesen[17]).

Bemerkung: Aus Satz 1 ergibt sich unmittelbar die folgende Aussage:

Sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet im R^{2n}, $f(z_1, \ldots, z_n)$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion, ferner P ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft, daß in einer Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ die Randpunkte von $\mathfrak{G}$ nicht einen Teil eines analytischen Gebildes ausmachen. Strebt dann f bei jeder Annäherung aus dem Inneren von $\mathfrak{G}$ gegen einen in $\mathfrak{U}(P)$ gelegenen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ gegen Null, so verschwindet f identisch.

Die Aussage läßt sich noch erweitern. An Stelle der Gesamtheit aller in $\mathfrak{U}(P)$ gelegenen Randpunkte von $\mathfrak{G}$ können geeignete Teilmengen dieser Gesamtheit betrachtet werden, etwa die durch eine in $\mathfrak{G}$ eindringende Hyperebene (oder durch andere analytische Regelflächen mit bestimmten Eigenschaften) ausgeschnittenen Randpunkte. Wir wollen hierauf jedoch nicht näher eingehen.

5. Modifikation Riemannscher Gebiete in kompakten Teilen analytischer Gebilde.

Satz 2: *Sei $\mathfrak{G}^{2n}$ ein Riemannsches Gebiet und $\mathfrak{N}$ eine kompakte Punktmenge in $\mathfrak{G}^{2n}$ mit der Eigenschaft, daß in einer Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ eine eindeutige, reguläre, nirgends identisch verschwindende Funktion F existiert, die in allen Punkten von $\mathfrak{N}$ Null wird. Sei ferner ${}^*\mathfrak{G}^{2n}$ eine Modifikation von $\mathfrak{G}^{2n}$ in $\mathfrak{N}$. Dann unterscheidet sich ${}^*\mathfrak{G}^{2n}$ von $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$ nur durch Stücke eines analytischen Gebildes.*

Beweis: $\mathfrak{N}$ ist kompakt, also auch bikompakt. Wir ordnen jedem Punkte von $\mathfrak{N}$ eine Umgebung in $\mathfrak{G}^{2n}$ zu, deren abgeschlossene Hülle kompakt und in $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ enthalten ist; dann wird $\mathfrak{N}$ schon von endlich vielen dieser Umgebungen, etwa von $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$, überdeckt. Die Vereinigung $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{B}_r$ ist dann ebenfalls eine Umgebung von $\mathfrak{N}$, ihre abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{B}}$ ist kompakt und liegt ganz in $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$. Sei nun P^* ein Punkt in ${}^*\mathfrak{G}^{2n}$, der zugleich Randpunkt des Teilgebietes $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$ von ${}^*\mathfrak{G}^{2n}$ ist. Es gibt eine zusammenhängende Umgebung $\mathfrak{U}^*(P^*)$ in ${}^*\mathfrak{G}^{2n}$, so daß $\mathfrak{U}^*(P^*) \cap (\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N})$ in $\mathfrak{B} - \mathfrak{N}$ enthalten ist. Eines der in $\mathfrak{U}^*(P^*) \cap (\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N})$ enthaltenen maximalen Gebiete werde herausgegriffen und mit $\mathfrak{G}'$ bezeichnet. Wir behaupten, daß für $\mathfrak{U}^*(P^*)$, $\mathfrak{G}'$ und die insbesondere in $\mathfrak{G}'$ definierte Funktion F die Voraussetzungen von Satz 1 zutreffen. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es einen Randpunkt Q^* von $\mathfrak{G}'$ im Innern von $\mathfrak{U}^*(P^*)$ und eine gegen Q^* konvergierende Folge von Punkten Q_j aus $\mathfrak{G}'$, derart, daß stets $|F(Q_j)| > \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ ist. Die Punktfolge $\{Q_j\}$ liegt ganz in $\mathfrak{B} - \mathfrak{N}$; sie besitzt sicher eine Teilfolge $\{Q_{j_\nu}\}$, die, als

[17]) Es sei angemerkt, daß sich Satz 1 auch mit Hilfe eines Resultates von P. THULLEN über die wesentlichen Singularitäten analytischer Flächen gewinnen läßt. Vgl. P. THULLEN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann. **111**, 137—157 (1935). — P. THULLEN hat dort den RADÓschen Satz auf einfache Art aus seinem Hauptsatz abgeleitet.

Punktfolge in $\mathfrak{G}^{2n}$ aufgefaßt, gegen einen Punkt Q von $\mathfrak{B}$ konvergiert. Q muß notwendig ein Punkt von $\mathfrak{N}$ sein. Dann ist aber $\lim\limits_{\nu \to \infty} F(Q_{j_\nu}) = F(Q) = 0$, womit ein Widerspruch hergestellt ist.

Nach Satz 1 läßt sich F demnach in ganz $\mathfrak{U}^*(P^*)$ hinein eindeutig regulär fortsetzen, und $\mathfrak{U}^*(P^*)$ unterscheidet sich von $\mathfrak{G}'$ nur durch Stücke des Nullstellengebildes der so fortgesetzten Funktion F. Da Entsprechendes in bezug auf Umgebungen beliebiger Randpunkte von $\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}$ in $^*\mathfrak{G}^{2n}$ gilt, ist Satz 2 bewiesen.

Wir schließen noch einige Bemerkungen an. $\mathfrak{G}^{2n}$, $^*\mathfrak{G}^{2n}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ mögen im folgenden weiter Riemannsche Gebiete bzw. Punktmengen bezeichnen, die den Voraussetzungen des Satzes 2 genügen.

(a) Jede in $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ eindeutige reguläre Funktion g läßt sich von $\mathfrak{U}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}$ her eindeutig regulär in alle Punkte von $\mathfrak{N}^* = {}^*\mathfrak{G}^{2n} - (\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N})$ fortsetzen. — Denn g ist in $^*\mathfrak{G}^{2n} \cap (\mathfrak{U}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N})$ eindeutig regulär und bleibt dort jeweils in einer Nachbarschaft jedes Punktes von $\mathfrak{N}^*$ beschränkt. Nach dem schon im Abschnitt 2 benutzten Satze über hebbare Unstetigkeiten regulärer Funktionen in analytischen Gebilden schlichter Gebiete läßt sich g dann zunächst wie behauptet in die uniformisierbaren Punkte von $\mathfrak{N}^*$ fortsetzen und danach auf Grund der Aussage am Schluß von Abschnitt 2 auch in die nichtuniformisierbaren Punkte von $\mathfrak{N}^*$.

(b) Wird $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ genau charakterisiert durch endlich viele Gleichungen $F_j = 0$ mit in $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ eindeutigen regulären F_j — was insbesondere bedeutet, daß $\mathfrak{N}$ aus endlich vielen geschlossenen irreduziblen analytischen Gebilden besteht —, so ist $\mathfrak{N}^* = {}^*\mathfrak{G}^{2n} - (\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N})$ ein in $^*\mathfrak{G}^{2n}$ abgeschlossenes analytisches Gebilde. Denn die F_j sind eindeutig regulär aus $\mathfrak{U}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}^*$ hinein fortsetzbar, und $\mathfrak{N}^*$ fällt genau mit der Menge ihrer in $(\mathfrak{U}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N}) \cup \mathfrak{N}^*$ gemeinsamen Nullstellen zusammen; außerdem ist $\mathfrak{N}^*$ in $^*\mathfrak{G}^{2n}$ abgeschlossen. Die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{N}^*$ brauchen nicht notwendig geschlossen zu sein.

(c) Die Voraussetzung unter (b) wird insbesondere erfüllt, wenn $\mathfrak{N}$ ein isolierter Punkt P ist. Sind $\mathfrak{G}^{2n}$ und $^*\mathfrak{G}^{2n}$ überdies komplexe Mannigfaltigkeiten, so ist $\mathfrak{N}^* = {}^*\mathfrak{G}^{2n} - (\mathfrak{G}^{2n} - P)$ entweder ein isolierter Punkt P^* in $^*\mathfrak{G}^{2n}$, d. h. es ist $^*\mathfrak{G}^{2n} = \mathfrak{G}^{2n}$, falls P und P^* identifiziert werden (dieser Fall tritt stets für $n = 1$ ein); oder die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{N}^*$ sind sämtlich von der Dimension $2n - 2$. — Um dies zu zeigen, legen wir in $\mathfrak{G}^{2n}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ fest, in der ein lokales komplexes Koordinatensystem $(z_1, \ldots, z_n)$ erklärt ist; es darf angenommen werden, daß $P = (0, \ldots, 0)$ ist. Sei Q^* irgendein Punkt von $\mathfrak{N}^*$. Es gibt in $^*\mathfrak{G}^{2n}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}^*(Q^*)$, derart, daß $\mathfrak{U}^*(Q^*) \cap (\mathfrak{G}^{2n} - P)$ in $\mathfrak{U}(P) - P$ enthalten ist. Wir wählen $\mathfrak{U}^*(Q^*)$ so klein, daß auch in $\mathfrak{U}^*(Q^*)$ ein lokales komplexes Koordinatensystem $(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ definiert ist. In $\mathfrak{U}^*(Q^*) \cap (\mathfrak{G}^{2n} - P)$ hängen dann die $(z_1, \ldots, z_n)$ und $(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ durch eine umkehrbar eindeutige Transformation

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \varphi_1(z_1^*, \ldots, z_n^*) \\ \vdots \\ z_n = \varphi_n(z_1^*, \ldots, z_n^*) \end{array} \right.$$

miteinander zusammen. Die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sind in $\mathfrak{U}^*(Q^*) \cap ({}^*\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{N}^*)$ regulär und gehen bei Annäherung gegen die in $\mathfrak{U}^*(Q^*)$ gelegenen Punkte von $\mathfrak{N}^*$ gegen Null; daher sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in ganz $\mathfrak{U}^*(Q^*)$ eindeutig regulär fortsetzbar, und ihre gemeinsamen Nullstellen sind dort genau die Punkte von $\mathfrak{R}^*$. Entweder ist nun die Funktionaldeterminante Δ von (IV) in Q^* von Null verschieden. Dann wird eine volle Umgebung von Q^* in ${}^*\mathfrak{G}^{2n}$ durch (IV) auf eine volle Umgebung von P in $\mathfrak{G}^{2n}$ umkehrbar eindeutig bezogen, und $\mathfrak{R}^*$ kann nur aus dem einen Punkte Q^* bestehen. Oder Δ verschwindet in Q^*. In diesem Falle muß $\mathfrak{R}^*$ in $\mathfrak{U}^*(Q^*)$ mit dem durch die Gleichung $\Delta = 0$ gegebenen analytischen Gebilde $\mathfrak{F}$, dessen irreduzible Bestandteile sämtlich $(2n-2)$-dimensional sind, zusammenfallen. Denn Δ kann in keinem weiteren Punkte Q^{**} von $\mathfrak{R}^*$ innerhalb $\mathfrak{U}^*(Q^*)$ von Null verschieden sein, da sonst nach der eben angestellten Überlegung $\mathfrak{R}^*$ nur aus Q^{**} bestehen könnte. Andererseits kann auch kein Punkt von $\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{U}^*(Q^*) \cap ({}^*\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{R}^*)$ gehören, da eine analytische Transformation eines schlichten Gebietes auf ein schlichtes Gebiet nur dort eindeutig umkehrbar ist, wo ihre Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Für $n = 1$ muß notwendig $\Delta(Q^*) \neq 0$ sein; anderenfalls wäre Q^* isolierte Nullstelle von Δ und daher in einer geeigneten, in $\mathfrak{U}^*(Q^*)$ enthaltenen Umgebung $\mathfrak{V}^*(Q^*)$ der einzige Punkt von $\mathfrak{R}^*$; dann könnte (IV) aber für $(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ aus $\mathfrak{V}^*(Q^*) \cap ({}^*\mathfrak{G}^{2n} - \mathfrak{R}^*)$ nicht umkehrbar eindeutig sein.

(Eingegangen am 10. März 1951.)