4. Dazord (P.). Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4ème série, 13, 4, 1981,1-16.

5. Dazord (P.). Feuilletages en géométrie symplectique. C. R. Acad. Sc. Paris, 1982, à paraître.

6. Kirillov (A. E.). Eléments de la théorie des représentations. Editions Mir, Moscou 1974.

7. Libermann (P.). Problèmes d'équivalence en géométrie symplectique. Séminaire de géométrie du Schnepfenried, 1982, dans ce volume.

8. Lichnerowicz (A.). Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. J. Differential Geometry 12, 1977, 253-300.

9. Marle (C.-M.). Sous-variétés de rang constant et sous-variétés symplectiquement régulières d'une variété symplectique. C. R. Acad. Sc. Paris, 1982, à paraître.

10. Marle (C.-M.). A propos des systèmes hamiltoniens complètement intégrables et des variables actions-angles. Journées relativistes, Lyon, 23 au 25 avril 1982.

11. Marsden (J. E.), and Weinstein (A.). Reduction of symplectic manifolds with symmetry. Reports on Mathematical Physics 5, 1974, 121-130.

12. Sniatycki (J.). Dirac brackets in geometric dynamics. Ann. Inst. Henri Poincaré, A, XX, 4, 1974, 365-372.

13 Souriau (J.-M.). Structure des systèmes dynamiques. Dunod, Paris 1969.

14. Weinstein (A.). Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. Advances in Mathematics 6, 1971, 329-346.

15. Weinstein (A.). Lectures on symplectic manifolds. C.B.M.S. Regional conferences series n° 29, American Mathematical society, Providence 1977.

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie
Mathématiques
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05

Société Mathématique de France
Astérisque 107-108 (1983) p.87-161

ENTRELACEMENTS ET ÉQUATIONS DE PFAFF

Daniel Bennequin

L'année dernière au Schnepfenried, une fête mathématique en l'honneur de Georges Reeb a eu lieu. Je remercie les organisateurs de m'avoir permis d'y exposer mon travail. Car c'était une occasion privilégiée pour rendre hommage à Reeb.

En effet, c'est Reeb qui a initié l'étude globale des formes de contact dans son mémoire de 1952 à l'Académie des Sciences de Bruxelles, sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques.

Mais, en plus, je pouvais faire une bonne surprise à Georges Reeb. Car le décor où se joue la preuve de l'existence de plusieurs structures de contact sur $\mathbb{R}^3$ est une certaine structure feuilletée sur la sphère de dimension 3 qu'il connait bien.

I. INTRODUCTION. STRUCTURES DE CONTACT

1) Soit α une forme différentielle de degré 1 et de classe C^∞ sur une variété lisse M. En dehors du lieu singulier de α, *l'équation de Pfaff* $\alpha = 0$ définit un *champ d'hyperplans* F tangent à M.

Deux formes α et α' définissent des équations de Pfaff *équivalentes* et des champs d'hyperplans *isomorphes*, s'il existe un difféomorphisme φ de M et une fonction f partout non nulle sur M, tels que

$$\varphi^*\alpha' = f\alpha .$$

Un problème naturel est la recherche des invariants qui caractérisent localement ou globalement une classe d'équivalence d'équations de Pfaff.

Supposons que la forme α ne s'annule pas sur M.

Lorsque la condition de Frobenius $\alpha \wedge d\alpha = 0$ est vérifiée en tout point de M, l'équation $\alpha = 0$ est *complètement intégrable* et le champ F engendre un feuilletage de codimension 1. Dans ce cas, il n'y a pas de problème local et la structure globale est assez bien éclaircie ([Reeb 1], [Lawson], [Hector]).

Mais pour les équations plus générales les invariants globaux sont largement inconnus, et une étude locale complète semble encore hors de portée ([Martinet 1],

[Pelletier]).

Nous pouvons commencer par essayer de comprendre le *portrait global* des équations de Pfaff *génériques*.

DÉFINITION.— *Une équation de Pfaff* $\alpha = 0$ *est de* classe $2p+1$ *en un point* x *de* M *si la forme* α *y vérifie à la fois* $\alpha \wedge (d\alpha)^p \neq 0$ *et* $\alpha \wedge (d\alpha)^{p+1} = 0$.

THÉORÈME ([Martinet 1]).— *Si la dimension* m *de* M *est un nombre impair* $2n+1$, *une équation de Pfaff générique est de classe* $2n+1$ *en dehors d'une hypersurface lisse* S . *Et si* m *est un nombre pair égal à* $2n$, *l'équation générique est de classe* $2n-1$ *en dehors d'une sous-variété de codimension* 3 .

D'autre part le *Théorème de Darboux* donne la forme locale d'une équation de classe maximale : lorsque $m = 2n+1$, il existe un système de coordonnées locales $(z,x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ où l'équation s'écrit :

$$dz + \sum_1^n x_i dy_i = 0 ,$$

et lorsque $m = 2n$, il existe un système de coordonnées locales $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ où elle s'écrit

$$dy_1 + \sum_1^n x_i dy_i = 0 .$$

(cf. [Martinet 1]).

DÉFINITION.— *Un champ différentiable* F *d'hyperplans tangents sur une variété lisse* M *de dimension impaire* $2n+1$ *est une* structure de contact, *si il est défini par une équation de Pfaff* $\alpha = 0$, *de classe maximale* $2n+1$ *sur toute la variété* M .

Ainsi, c'est par l'examen des structures de contact que doit commencer l'étude des équations de Pfaff génériques.

2) Lorsque l'équation $\alpha = 0$ définit une structure de contact F sur M , la forme α s'appelle une *forme de contact*. Les variétés intégrales de l'équation $\alpha = 0$ sont de dimension n au plus. On les appelle les *variétés de Legendre* de la structure. La forme volume $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ détermine une orientation de M . Si M est préalablement orientée, on dit que α est *directe* si elle définit l'orientation de M, et *inverse* dans le cas contraire. Lorsque n est impair, les deux orientations possibles de F donnent la même orientation de M .

Sur une variété M orientable de dimension $2n+1$, avec n pair, un champ d'hyperplans tangents défini au voisinage de tout point m de M par une forme de contact α_m , peut être défini globalement par une forme de contact α sur M .

Il n'en est plus toujours de même lorsque n est impair. Exemple : le champ de plans défini par $xdy = dz$ sur la variété M^3 , quotient de $\mathbb{R}^3$ par le difféomorphisme :

$$(x,y,z) \longrightarrow (-x,y+1,-z) .$$

Une autre manière de voir les structures de contact sur M est de regarder les cônes symplectiques dans le fibré cotangent de M , car F est une structure de contact sur M si et seulement si le cône dans T^*M des 1-formes algébriques de noyau F est une sous-variété symplectique de T^*M (voir [Arnold 1, Appendice 4]). D'ailleurs, il est clair que l'étude des structures de contact doit être menée de front avec celle des structures symplectiques. Ces deux types de structures interviennent ensemble dans un grand nombre de problèmes d'analyse et de géométrie (cf. [Beals, Fefferman, Grossman], et [Boutet de Monvel - Guillemin]), une raison supplémentaire de chercher leurs propriétés topologiques.

Un premier problème : sur quelles variétés existe-t-il au moins une structure de contact ?

S.S. Chern pose ce problème dans [Chern 1] et [Chern 2]. Il y fait remarquer que le groupe structural du fibré tangent d'une variété de contact M^{2n+1} peut se réduire au groupe unitaire $U(n)$, ce qui entraîne l'annulation de toutes les classes caractéristiques impaires de M . En particulier, tous les *nombres* caractéristiques de M sont nuls, si bien que M est *cobordante à zéro* ([C.T.C. Wall]).

D'ailleurs [J. Milnor 1] a démontré que toute variété orientable fermée de dimension $2n+1$ possédant un champ d'hyperplans tangents presque complexe transversalement orienté, est le bord d'une variété compacte presque complexe de dimension $2n+2$.

Pour une variété *ouverte*, [M. Gromov 1] a démontré que l'existence d'une structure presque complexe sur un champ d'hyperplans transversalement orienté implique l'existence d'une structure de contact.

D'autre part R. Lutz et J. Martinet ([Martinet 2]) ont prouvé que toutes les variétés *fermées* orientables de dimension 3 possèdent une structure de contact. Une démonstration différente est offerte par [Thurston et Winkelnkemper]. En dimension 5 , on dispose d'un résultat partiel ; en effet [C. Meckert] munit toutes les variétés simplement connexes de dimension 5 à troisième classe de Stiefel-Whitney nulle, d'une structure de contact.

On peut se demander si une variété de dimension $2n+1$ dont le groupe structural se réduit à $U(n)$ peut toujours être muni d'une structure de contact.

Signalons que [Boothby] et [Boothby et Wang] ont mené à bien la classification des espaces compacts homogènes G/K munis d'une forme de contact G-invariante.

3) Les exemples les plus classiques de variétés de contact sont les espaces d'éléments de contact orientés des variétés (cf. [Arnold 1, Appendice 4]).

Soit U une variété C^∞ , et p un point de son fibré en sphères cotangent ST^*U , le noyau de p est un hyperplan H tangent à U en x , un vecteur tangent à ST^*U en p est dans l'hyperplan de contact F s'il se projette sur un vecteur tangent à U en x contenu dans H .

Par exemple $\mathbb{RP}^3 \approx ST^*S^2$ hérite ainsi d'une structure de contact, qu'il transmet aussitôt à son revêtement S^3 .

Soit V^2 une surface orientée munie d'une métrique riemannienne. L'application qui associe à un élément de contact orienté sa normale unitaire, identifie ST^*V^2 à l'espace STV^2 des vecteurs tangents à V de longueur 1 . La structure de contact de ST^*V^2 se transporte ainsi sur le champ des plans orhtogonaux au flot géodésique sur STV .

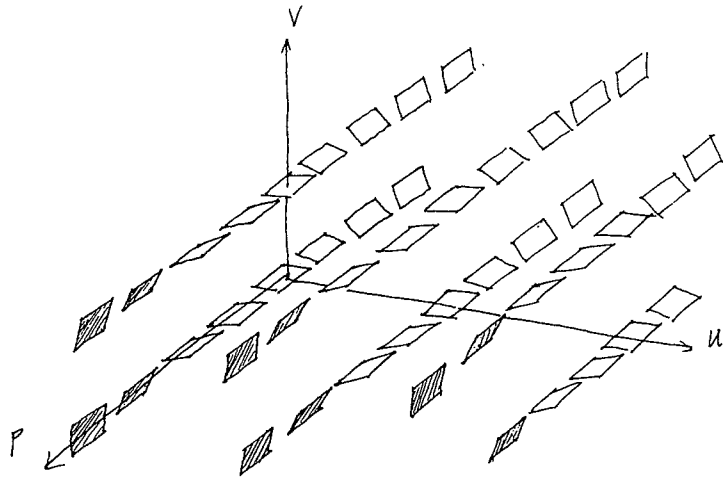
Une autre structure de contact célèbre est celle de l'espace des jets d'ordre 1 des fonctions à valeurs réelles définies sur une variété U de dimension n , $J^1(U,\mathbb{R}) \approx T^*U \times \mathbb{R}$. La structure de contact canonique F_o' d'équation :

$$dv = p.du$$

est celle qui contient exactement tous les plans tangents aux *graphes* des différentielles des fonctions $f \in C^\infty(U)$, $\{(df(u),f(u)); u \in U\}$. Ces graphes sont les prototypes des variétés de Legendre. La géométrie de cette structure constitue une approche de l'intégration des équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre (cf. [Arnold 2], ou [Chaperon]).

Une référence qui concerne à la fois les équations aux dérivées partielles et la géométrie des éléments de contact est le livre merveilleux de [S. Lie].

Un cas fondamental est celui de $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{2n+1}$. La structure F_o' s'appelle *structure standard* de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Dessinons celle de $\mathbb{R}^3$.



En vertu du Théorème de Darboux, le champ F_o' est le modèle local de toutes les structures de contact.

Les sphères de dimensions impaires S^{2n+1} possèdent également des *structures de contact standard* $\hat{F}_o$. Considérons S^{2n+1} comme la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{C}^{n+1}$; en chaque point x de S^{2n+1} , l'espace tangent à S^{2n+1} contient un unique hyperplan complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$, ce sera lui l'hyperplan de contact $\hat{F}_o$ en x . En formule, si $(\rho_o,\vartheta_o,\ldots,\rho_n,\vartheta_n)$ sont des coordonnées polypolaires de $\mathbb{C}^{n+1}$, $\hat{F}_o$ est le noyau de

$$\hat{\alpha}_o = \sum_o^n \rho_i^2 d\vartheta_i \ .$$

Le champ $\hat{F}_o$ est le champ des hyperplans orthogonaux aux fibres de la fibration de Hopf de S^{2n+1} sur $\mathbb{CP}^n$.

Si W est une hypersurface complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$ transverse à S^{2n+1} , la structure $\hat{F}_o$ induit une structure de contact sur l'intersection Z de S^{2n+1} et de W .

Les 27 sphères exotiques de dimension 7 sont donc des variétés de contact, puisque [Brieskorn] a montré que chacune d'elles est isomorphe à une variété $\Sigma(2,2,2,3,6k-1)$, pour $k = 1,2,\ldots,27$, dont l'équation dans $\mathbb{C}^5$ s'écrit

$$\begin{cases} z_o^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^3 + z_4^{6k-1} = 0 \\ |z_o|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 1 \end{cases}$$

De même, les variétés de Pham et Brieskorn $\Sigma(p,q,r)$ intersections des surfaces algébriques complexes

$$z_o^p + z_1^q + z_2^r = 0$$

avec la sphère unité de $\mathbb{C}^3$, constituent une mine de belles structures de contact en dimension 3 . Ces variétés sont étudiées en détail dans [Milnor 3].

Beaucoup d'autres exemples de structures de contact apparaîssent en analyse complexe (cf. par exemple [Beals et al.]), en géométrie différentielle (cf. par exemple [Blair]), et bien sûr, en mécanique.

En mécanique classique les structures de contact interviennent tout naturellement comme structures invariantes des équations canoniques de la dynamique (cf. [Reeb 1], [Cartan 1]). D'autre part, le point de vue géométrique sur la quantification de Kostant et Souriau fait jouer un rôle primordial aux structures de contact sur les fibrés en cercles au dessus des variétés symplectiques (voir [Souriau]).

4) Pour comprendre la géométrie globale des structures de contact, il faut aussi se demander si des structures de contact non isomorphes peuvent exister sur une même variété (Chern a posé cette question vers 1965).

Remarque.— Le problème analogue pour les *formes* de contact est d'une toute autre nature. En effet, étant données deux formes de Pfaff α et α' , il est souvent aisé de décider qu'il n'existe pas de difféomorphisme f ramenant α' sur α , grâce à toutes les relations que l'on peut déduire de $f^*\alpha' = \alpha$ par différentiation.

Par exemple, la forme de contact sur $\mathbb{R}^3$

$$a_o = \rho^2 d\vartheta + dz$$

est isomorphe à la forme standard

$$\alpha_o = xdy + dz \ ,$$

puisque

$$\begin{aligned} a_o &= dz + xdy - ydx \\ &= d(z - xy) + (2x)dy \ , \end{aligned}$$

mais elle n'est pas isomorphe à la forme

$$b_o = (1 + z^2 + \rho^2)^{-2} a_o \ ,$$

qui définit la même *structure* de contact.

En effet, on a

$$db_o = (-4z\rho^2 dz d\vartheta - 4\rho d\rho dz + 2\rho d\rho d\vartheta(1 + z^2 - \rho^2))(1 + z^2 + \rho^2)^{-3} \ .$$

Donc le noyau de la 2-forme db_o est colinéaire au champ de vecteurs d'équations

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= 1 \\ \dot{z} &= (1 + z^2 - \rho^2)/2 \\ \dot{\rho} &= \rho z \end{aligned} \ .$$

Le cercle d'équation $\{z = 0 \ , \rho = 1\}$ en est une courbe intégrale.

Par ailleurs le noyau de da_o est toujours parallèle à l'axe des z . Il ne peut donc pas exister de difféomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f^* db_o = da_o \ .$$

(Une étude précise du champ $d\alpha$ en dimension 3 se trouve dans [Erlandsson].)

R. Lutz a fait le premier pas en prouvant qu'il existe une structure de contact dans chaque classe d'homotopie de champs de plans tangents à S^3 ([Lutz 1]).

Or le Théorème de [Cerf 1] nous dit que tous les difféomorphismes de S^3 préservant l'orientation sont isotopes à l'identité, donc le Théorème de Lutz entraîne l'existence d'une infinité de structures de contact non isomorphes sur S^3 .

Ensuite [Sato] a montré que la sphère de dimension $4m+3$, pour $m \geq 1$, possède une infinité de structures de contact. Là encore, la preuve consiste à montrer qu'il existe une infinité de classes d'homotopie de champs de plans contenant des structures de contact, pour conclure à l'aide de la finitude du nombre de classes d'isotopie de difféomorphismes des sphères [Cerf 2].

Un but de cet exposé est d'établir qu'il existe au moins une structure de contact $\hat{F}_1$ sur S^3 *homotope* en tant que simple champ de plans à la structure standard $\hat{F}_o$ et cependant *non isomorphe* à $\hat{F}_o$.

Cela entraînera que $\hat{F}_1$ n'est pas homotope à $\hat{F}_o$ parmi les structures de contact de S^3 en vertu du Théorème de Stabilité de Gray :

THÉORÈME ([Martinet 2]).— *Deux structures de contact homotopes à travers les structures de contact sur une variété* fermée *sont nécessairement isomorphes* (voir aussi [Chaperon]).

De même nous montrerons que l'espace $\mathbb{R}^3$ possède une autre structure de contact que sa structure standard. Cela entraînera que le Théorème de Gray ne s'étend pas aux variétés *ouvertes* à cause du résultat suivant de M. Gromov :

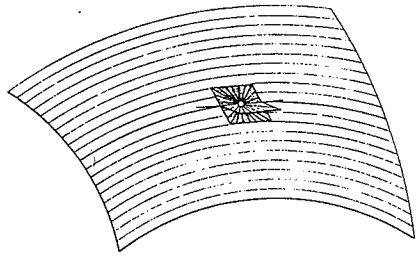
THÉORÈME ([Gromov 1]).— *Deux structures de contact homotopes à travers les champs presque complexes d'hyperplans tangents sur une variété* ouverte M *sont toujours homotopes à travers les structures de contact de* M .

Les résultats que je vais présenter ne concernent que la dimension trois, et la question de l'existence de plusieurs structures de contact sur $\mathbb{R}^{2n+1}$, $n > 1$, reste ouverte, à ma connaissance.

5) La structure de contact standard directe F_o sur l'espace $\mathbb{R}^3$, orienté par un repère $Oxyz$, est celle que définit l'équation $xdy + dz = 0$.

Soit F une structure de contact directe sur $\mathbb{R}^3$. Autour de tout point x de $\mathbb{R}^3$, il existe un voisinage où F est isomorphe à F_o . Nous allons chercher à distinguer globalement F de F_o grâce aux figures qu'elles tracent sur des surfaces.

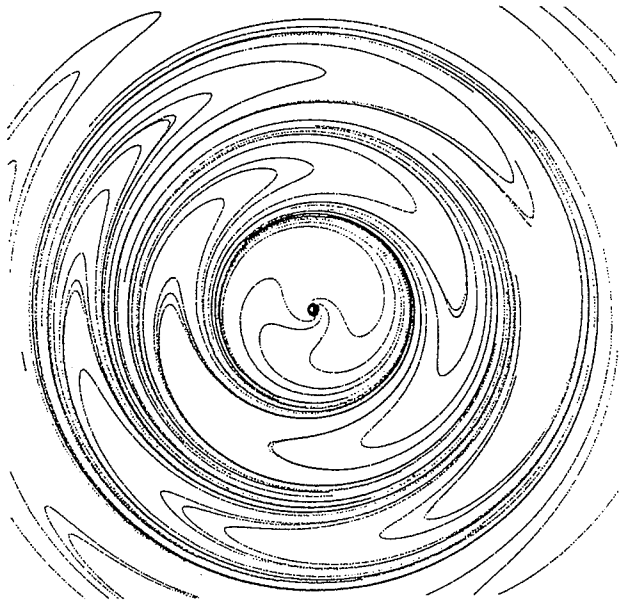
Soit V une surface orientée plongée dans $\mathbb{R}^3$, le champ de plans F induit un champ de *directions caractéristiques* $\eta_{V,F}$ tangent à V . Les courbes intégrales de η sont des courbes de Legendre de F .



(fig. 42 de [Lie])

On peut construire sur $\mathbb{R}^3$ une structure de contact F et un *disque* plongé V tel que $\eta_{V,F}$ ait une courbe intégrale *fermée*, non réduite à un point. Donnons tout de suite un exemple, celui de [Erlandsson].

La forme e_1 , qui s'écrit $\rho \sin \rho d\vartheta + \cos \rho dz$ en coordonnées cylindropolaires, est une forme de contact. Soit E_1 la structure qu'elle définit. Le feuilletage induit par E_1 sur le paraboloïde $z = \rho^2$ a l'allure suivante :



(fig. 1 de [Douady])

Mais, précisément, le résultat principal que nous allons démontrer, affirme qu'une telle figure ne peut jamais être dessinée par la structure standard F_o .

THÉORÈME 1.– *Soit* V *un disque plongé dans* $\mathbb{R}^3$, *le champ caractéristique* η_{F_o} *n'a pas de courbe intégrale fermée en dehors de ses points critiques sur* V .

Par conséquent, il n'existe pas de plongement de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ transportant la structure de contact E_1 sur la structure F_o .

COROLLAIRE 1.– *La structure* E_1 *n'est pas isomorphe à la structure standard.*

L'interdiction faite par le Théorème 1 aux courbes de Legendre de F_o est donc la première indication de ce que peut être une propriété globale d'une structure de contact.

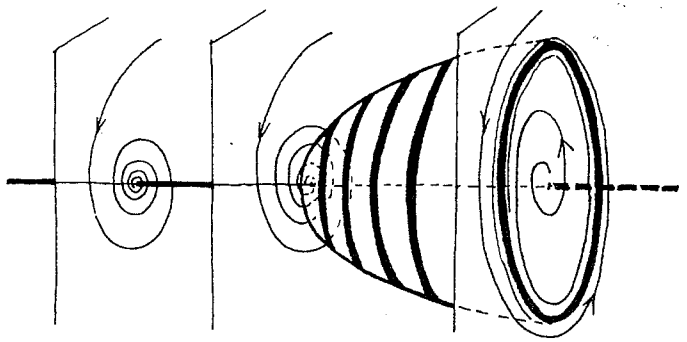
On peut se poser une question réciproque : pour toute structure de contact F sur $\mathbb{R}^3$ non isomorphe à F_o , existe-t-il un disque plongé V tel que $\eta_{V,F}$ ait une trajectoire fermée ?

6) Montrons comment les structures de contact exotiques interviennent naturellement dans l'étude *locale* des équations de Pfaff.

Soit β une 1-forme non singulière sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Génériquement

l'ensemble des points où $\beta \wedge d\beta$ s'annule est une surface S_o , qui sépare U en une région U^+ où $\beta \wedge d\beta > 0$ et une région U^- où $\beta \wedge d\beta < 0$. Soit j_o l'inclusion de S_o dans U . En général la forme $\eta_o = j_o^*\beta$, restriction de β à S_o , a des points singuliers. Ce sont les points où β s'annule sur le plan tangent à S_o . La partie linéaire de η_o en ces points est conservative car $d\eta_o = j_o^*d\beta$ et $d\beta$ s'annule sur le noyau de β le long de S_o . Choisissons une fonction μ de U dans $\mathbb{R}$ qui s'annule transversalement sur S_o au voisinage de x_o et qui est positive dans U^+ et négative dans U^- . Chaque niveau de μ est un morceau de surface lisse S_μ près de x_o . Notons j_μ l'injection de S_μ dans U . Le champ caractéristique $\eta_\mu = j_\mu^*\beta$ possède un point critique x_μ voisin de x , mais sa partie linéaire en x_μ est hyperbolique pour $\mu \neq 0$, voisin de 0 , car $d\eta_\mu = j_\mu^*d\beta$ et $d\beta$ ne s'annule pas sur le noyau de β le long de S_μ , pour $\mu \neq 0$.

Orientons tous les S_μ au voisinage de x_μ , par l'orientation transverse de β . Lorsque $\mu > 0$, $d\beta$ est positive sur le noyau de β donc $d\eta_\mu$ est positive sur S_μ près de x_μ ; lorsque $\mu < 0$, c'est le contraire, $d\eta_\mu$ est négative sur S_μ près de x_μ . Soit x_o un point singulier de η_o , elliptique au premier ordre. Génériquement, le point x_o n'est pas un centre de η_o mais un *foyer faible*. Les trajectoires de η_o spiralent vers x_o alors que x_μ est un foyer stable pour $\mu < 0$ et un foyer instable pour $\mu > 0$. Donc la famille des champs η_μ présente une *bifurcation de Hopf* lorsque μ passe par la valeur 0 (cf. [Alexander et Yorke]).



Si bien que η_μ possède une trajectoire fermée sur un disque plongé, d'un côté ou de l'autre de S_o (selon que la bifurcation de Hopf est sous-critique ou super-critique). Donc β induit une structure de contact non standard sur l'une des deux demi-boules ouvertes que S_o sépare dans une petite boule ouverte de centre x_o .

Un exemple explicite, celui de A. Bahri :

$$\beta_1 = \left(\frac{x^3}{3} + x(y^2 - z)\right)dy + dz \ .$$

On a $\beta_1 \wedge d\beta_1 = (x^2 + y^2 - z)dx \wedge dy \wedge dz$. L'extérieur du paraboloïde de révolution S_o d'équation $z = x^2 + y^2$, est une région B^+ définie par $z < x^2 + y^2$, différo-

morphe à $\mathbb{R}^3$. Sur B^+ , la forme β_1 est une forme de contact directe. Mais la trace de β_1 sur un paraboloïde voisin de S_o contenu dans B^+ , contient un cycle limite (cf. [Douady p. 4]), donc la structure G_1 définie par β_1 ne peut être isomorphe à F_o .

De plus, on voit distinctement une homotopie F_t , $t \in [-1,+1]$, de la structure standard à la structure G_1 à travers les structures de contact de $\mathbb{R}^3$ telle que F_t soit isomorphe à F_o pour tous les $t \leq 0$ et à G_1 pour tous les $t > 0$. Il suffit de regarder la structure induite par β_1 sur la région ouverte de B^+ située en dessous du plan $z = t$.

7) Le Théorème 1 traduit une propriété géométrique des courbes de Legendre de la structure de contact standard F_o sur $\mathbb{R}^3$.

THÉORÈME 2.– *Une courbe de Legendre fermée de* F_o , *plongée,* non nouée *dans* $\mathbb{R}^3$, *a toujours un nombre d'enlacement strictement négatif avec la courbe qu'on obtient en la translatant suivant sa normale dans* F_o .

Le chemin que je vais prendre pour démontrer ce Théorème est assez détourné. Il ramène notre problème à un énoncé de pure théorie des noeuds :

THÉORÈME 3.– *Soit* Γ *une tresse fermée à* n *brins autour d'un axe* Oz *dans* $\mathbb{R}^3$. *Notons* c *la* longueur algébrique *de* Γ (*c'est-à-dire la somme algébrique des croisements de* Γ *en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe* Oz). *Soit* χ *la caractéristique maximale d'une surface compacte orientée sans composante fermée plongée dans* $\mathbb{R}^3$ *de bord* Γ , *on a*

$$|c| \leq n - \chi .$$

Nous en déduisons un critère suffisant de nouage des courbes facile à utiliser :

COROLLAIRE 1.– *Si* Γ *est connexe* non nouée, *on a*

$$|c| < n .$$

Cependant pour démontrer ces résultats nous allons retourner aux équations de Pfaff, mais, cette fois, dans le cadre des *feuilletages*.

Nous considérons le *feuilletage de Reeb direct* R de S^3 et Γ une collection de courbes plongées dans S^3 dont la tangente orientée pointe toujours du même côté de R que la normale directe aux feuilles. Soit V^2 une surface orientée plongée de bord Γ . Il y a quatre sortes de points de tangence de V avec R , génériquement, selon que le point de contact est un col ou un sommet et selon que les orientations de V et de R y coïncident ou non. Le Théorème 3 se ramène facilement à l'énoncé suivant :

THÉORÈME 6.– *Le nombre de cols renversés est supérieur ou égal au nombre des sommets renversés.*

Ce Théorème résulte d'un examen détaillé de certaines surfaces tendues dans la direction normale à R , appelées *surfaces de Markov*, qui semblent bien utiles pour étudier les tresses.

Le § II contient une étude des tresses fermées et des surfaces de Markov. On y trouve la démonstration complète du Théorème 3. J'ai profité de ce paragraphe pour montrer comment l'existence des surfaces de Markov entraîne facilement quelques résultats fondamentaux sur les tresses (le Théorème de Markov sur l'équivalence des tresses fermées, et le Théorème de Magnus et Peluso sur les tresses fermées non nouées à moins de 3 brins). Finalement j'étudie le lien entre le nombre $\ell = c - n$ d'une tresse et le nombre de Milnor d'une courbe analytique complexe dans $\mathbb{C}^2$.

Au § III je décris les propriétés d'enlacement des courbes et des champs de plans en dimension 3 (nombre d'enlacement d'un entrelacs avec un champ de plans transverse, autoenlacement et enroulement d'un entrelacs dans un champs de plans tangent. Relation entre ces nombres dans le cas où le champ de plans est une structure de contact). Puis je reviens à l'étude du nombre de Milnor (caractéristique d'Euler tordue, indice de Maslov).

Au § IV nous retournerons aux courbes de Legendre et aux structures de contact. Nous commençerons par prouver que les courbes transverses à la structure standard F_o sur $\mathbb{R}^3$ sont toutes isotopes, transversalement à F_o , à des tresses fermées autour de l'axe Oz . Ainsi nous pourrons utiliser le Théorème 3 pour démontrer que l'enlacement d'un entrelacs Γ avec F_o est majoré par l'opposé de la caractéristique d'Euler d'une quelconque surface de Seifert de Γ . Ce qui nous permettra d'établir le Théorème 2 et le Théorème 1. Ensuite nous verrons quelques corollaires du Théorème 2 (géométrie elliptique, rigidité topologique des structures de contact). Puis nous proposerons une description de toutes les structures de contact sur S^3 .

A la fin de l'article, une table des matières indique rapidement le contenu de chaque numéro.

M. Gromov m'a signalé que W. Thurston avait également conjecturé le Théorème 2, il y a quelques années, afin de prouver le Théorème 1 et son corollaire 1. Ensuite T. Erlandsson a proposé une preuve incomplète du Théorème 2 dans [Erlandsson].

De façon indépendante, J. Eliashberg a récemment annoncé une preuve de l'existence de plusieurs structures de contact non isomorphes sur $\mathbb{R}^3$ (cf. [Eliashberg]).

Je tiens à dire que ce travail n'aurait pas abouti sans le soutien de Abbas Bahri, Alain Chenciner et Adrien Douady. Je dois aussi beaucoup aux conversations que j'ai eues avec Nicole Desolneux-Moulis, Marc Chaperon, Albert Fathi, Michael Gromov et John Milnor.

Cet exposé contient l'essentiel de la Thèse de Doctorat d'Etat que j'ai présentée à l'Université de Paris VII en novembre 1982. J'en profite pour remercier encore les membres de mon jury : Louis Boutet de Monvel, Alain Chenciner, Adrien

Douady, André Gramain, Michel Herman, Bernard Souillard et René Thom.

L'exposé de A. Douady au Séminaire Bourbaki (cf.[Douady]) rend très bien compte des principaux résultats dont je veux parler. Je vais donc tenter de faire un exposé qui ne répète pas trop celui de A. Douady.

Le texte qui suit a beaucoup bénéficié des remarques de Christiane Meckert, Michel Boileau, Francis Bonahon, François Laudenbach, Hugh Morton, Jean-Pierre Otal et Takashi Tsuboi.



Entrelacs transverse à un feuillage, d'après Léonard de Vinci

II. TRESSES FERMÉES, FEUILLETAGE DE REEB ET SURFACES DE MARKOV

8) L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé $0xyz$. Les coordonnées polaires associées sont $\vartheta = \text{arctg } y/x$ et $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$.

Un *entrelacs* de $\mathbb{R}^3$ est une collection finie de cercles orientés plongés et disjoints dans $\mathbb{R}^3$. Un entrelacs connexe s'appelle un *noeud*.

Une *tresse fermée* autour de l'axe des z est un entrelacs de $\mathbb{R}^3$ évitant la droite $0z$ et sur lequel la fonction ϑ est sans cesse croissante. Le *nombre de brins* d'une tresse fermée X est le nombre $n(X)$ des points de X qui possèdent la même coordonnée ϑ .

Les tresses fermées à n brins particulières dont la section par le plan

$\vartheta = 0$ est l'ensemble des n points $(z=0,\rho=1),\ldots,(z=0,\rho=n)$, porteront simplement le nom de *tresses*. Ce sont les tresses définies par E. Artin [Artin 1 et 2].

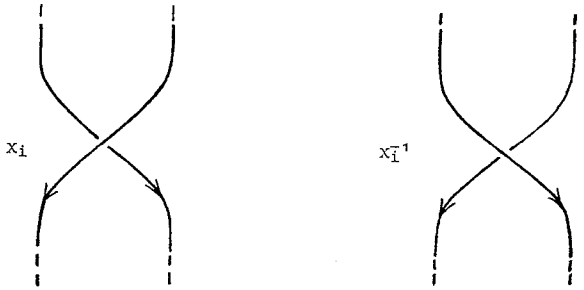
Le groupe des tresses à n brins, B_n , est celui qui est défini par les générateurs $x_1,\ldots,x_{n-1}$ et les relations :

$$x_i x_j = x_j x_i \qquad \text{si } |i-j| \geq 2 \ , \ 1 \leq i,j \leq n-1$$

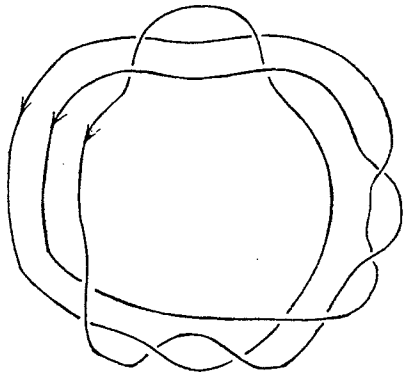
et

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \qquad \text{si } 1 \leq i \leq n-2 \ .$$

Un mot en les x_i et x_i^{-1} représente une tresse. Le générateur x_i correspond à un croisement *positif* du i-ième brin avec le $(i+1)$-ième, en projection sur le plan $0xy$, et x_i^{-1} correspond à l'autre croisement, qu'on appelle *négatif*.



Deux tresses sont *équivalentes* si elles sont isotopes à travers les tresses. Dans ce cas elles correspondent au même élément de B_n ([Artin]). De même deux tresses fermées sont *équivalentes* si elles sont isotopes parmi les tresses fermées. Et une classe d'équivalence de tresses fermées s'identifie avec une classe de conjugaison dans le groupe B_n .



En 1923 [J.W. Alexander] démontrait que tous les entrelacs de $\mathbb{R}^3$ sont isotopes à des tresses fermées. Et deux ans plus tard, [E. Artin 1] introduisait les groupes B_n dans l'intention de transformer les problèmes de la théorie des noeuds en questions d'algèbre. Plusieurs résultats importants ont confirmé cet espoir. D'abord [A.A. Markov] a décrit en termes des groupes B_n comment deux tresses fermées qui représentent le même entrelacs se déduisent l'une de l'autre (cf. [Birman]).

THÉORÈME .— *Si* $X \in B_n$ *et* $Y \in B_p$ *correspondent à des entrelacs isotopes de* $\mathbb{R}^3$, *l'élément* Y *se déduit de l'élément* X *à l'aide des opérations simples suivantes :*

(i) *apparition standard d'un nouveau brin, algébriquement :* $z \in B_q$ *se transforme en* $zx_q^{\pm 1} \in B_{q+1}$,

(ii) *conjugaison dans un groupe* B_q, z *donne* bzb^{-1},

(iii) *disparition standard d'un brin, algébriquement :* $zx_q^{\pm 1} \in B_{q+1}$ *donne* $z \in B_q$.

C'est l'opération exactement inverse de (i).

(J'indiquerai une démonstration nouvelle de ce Théorème au numéro 11.)

Ensuite [Artin 2] a démontré l'existence d'un algorithme fini décidant si deux mots en les $x_i^{\pm 1}$, $1 \leq i \leq n-1$, représentent le même élément de B_n, et [Garside] a démontré l'existence d'un autre algorithme fini disant quand est ce que deux éléments donnés de B_n sont conjugués dans B_n.

Cependant on ne sait toujours pas reconnaître algébriquement si deux tresses dans des groupes B_n différents représentent le même entrelacs de $\mathbb{R}^3$. L'algorithme de [Haken] permet théoriquement de savoir si un entrelacs donné est noué ou non, mais il nous fait largement sortir du calcul dans les groupes de tresses.

Une première question est d'essayer d'évaluer simplement sur les tresses les invariants numériques classiques des noeuds.

L'un des invariants les plus simples d'un noeud est son *genre*.

G. Seifert a montré que tout entrelacs Γ de $\mathbb{R}^3$ est le bord *orienté* d'une surface compacte orientée plongée dans $\mathbb{R}^3$ (cf. [Rolfsen]). La *caractéristique* de Γ, $\chi(\Gamma)$, est la plus grande caractéristique d'Euler d'une surface de Seifert de Γ sans composante fermée (une surface de Seifert n'est pas nécessairement connexe). Lorsque l'entrelacs est connexe, $\chi = 1 - 2g$, et g est le *genre* du noeud.

D'autre part, pour une tresse fermée X, en plus du nombre de brins $n(X)$, il existe un autre nombre entier naturellement attaché à X :

DÉFINITION.— *La* longueur algébrique *de la tresse*

$$X = x_{i_1}^{\varepsilon_1}, \ldots, x_{i_k}^{\varepsilon_k} \in B_n$$

est la somme des exposants ε_j. *On la note* $c(X)$. *Le nombre* c *définit l'unique homomorphisme non trivial (avec* $-c$ *évidemment) de* B_n *sur* $\mathbb{Z}$.

Le nombre $c(X)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de X dans B_n. Il mesure la somme algébrique des croisements de X en projection sur le plan des (x,y).

Le principal résultat sur les tresses que j'obtiens est le suivant :

THÉORÈME 3.— *Soit* X *une tresse fermée,* χ *sa caractéristique,* n *son nombre de brins et* c *sa longueur algébrique, on a*

$$c - n \leq -\chi .$$

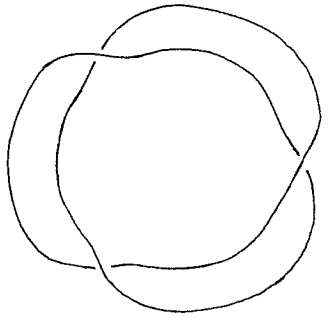
Un renversement de l'orientation de $\mathbb{R}^3$ nous dit qu'on a aussi

$$-c - n \leq -\chi .$$

COROLLAIRE 1.— *Si* X *est une tresse fermée connexe* non nouée, *on a*

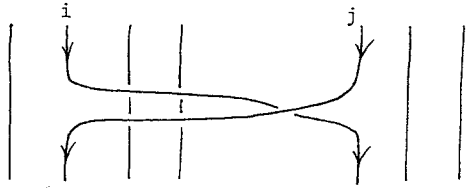
$$|c| \leq n .$$

Ce corollaire est un critère de nouage des tresses fermées. Par exemple le noeud de trèfle est noué en vertu de ce critère.



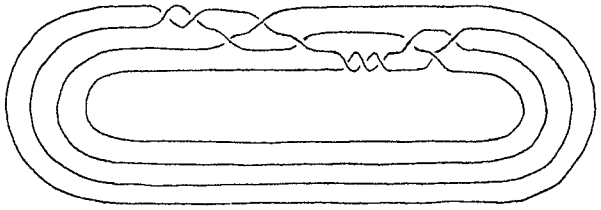
Remarque 1.— Lorsque X est une tresse positive, c'est-à-dire de la forme $x_{i_1} \ldots x_{i_c} \in B_n$, il est très facile de construire une surface de Seifert de X dont la caractéristique d'Euler soit exactement $n-c$. Le Théorème 3 fournit alors une *égalité* $\chi = n - c$. Cette égalité a été démontrée également par [Birman et Williams] en utilisant le Théorème de [Stallings 1].

Remarque 2.— [Stallings 2] avait conjecturé que toute tresse fermée connexe non nouée, à n brins pouvait être conjuguée à un produit de $n-1$ des éléments $x_{ij}^{\pm 1}$ de B_n, où x_{ij} représente le croisement du i-ième brin et du j-ième brin par dessus tous les autres.



Cela aurait entraîné immédiatement l'inégalité $|c| < n$ du corollaire 1. Mais H.R. Morton a donné dans [Morton 1] des contre-exemples à cette conjecture dès que n est supérieur ou égal à 4. En fait Morton montre qu'il existe une infinité de classes d'équivalences de tresses fermées à 4 brins qui représentent le cercle non noué (cela n'arrive pas avec moins de 4 brins, nous le verrons au numéro 12).

Les tresses décrites dans [Morton 1] sont *simplifiables*, c'est-à-dire qu'elles s'obtiennent à partir du cercle trivial de B_1 en ajoutant des brins et en n'en retranchant jamais. Si toutes les tresses fermées connexes non nouées étaient simplifiables, l'inégalité $|c| < n$ serait tout de suite établie. Mais H.R. Morton nous montre que c'est encore beaucoup trop optimiste d'espérer cela avec l'exemple suivant dans B_4 ([Morton 2]).



Pour démontrer le Théorème 3 nous allons considérer des surfaces de Seifert particulièrement bien adaptées à la situation en tresse de l'entrelacs.

9) Les tresses fermées peuvent être vues comme des entrelacs transverses à un feuilletage de Reeb sur S^3.

Soit $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ la sphère standard d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, et T le tore standard d'équations $x_1^2 + x_2^2 = 1/2$ et $x_3^2 + x_4^2 = 1/2$; Γ_o désigne le grand cercle de S^3 d'équation $x_3^2 + x_4^2 = 0$, et Γ_1 celui dont l'équation est $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

On note ϑ et φ les deux coordonnées circulaires sur T, $\vartheta = \operatorname{arctg} x_2/x_1$ et $\varphi = \operatorname{arctg} x_4/x_3$.

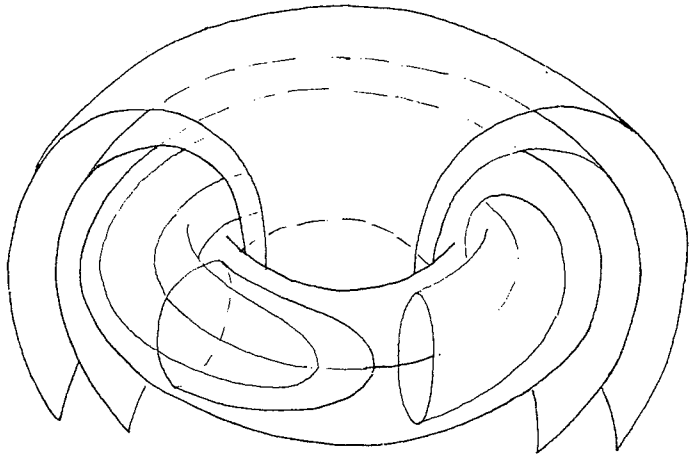
Les courbes de T d'équation $\vartheta =$ constante sont des *méridiens* m_ϑ et celles d'équation $\varphi =$ constante, des *parallèles* p_φ.

M désigne le tore plein $x_1^2 + x_2^2 \geq 1/2$ et P est l'autre tore plein $x_3^2 + x_4^2 \geq 1/2$.

Soit R le feuilletage de Reeb (cf. [Reeb 1]) défini par l'équation de Pfaff $\omega_o = 0$, où

$$\omega_o = \begin{cases} d(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2})(x_2 dx_1 - x_1 dx_2) & \text{dans } M, \\ d(x_3^2 + x_4^2) + (x_3^2 + x_4^2 - \frac{1}{2})(x_4 dx_3 - x_3 dx_4) & \text{dans } P. \end{cases}$$

T est l'unique feuille compacte de R.



Les feuilles de R sont transversalement orientées par ω_o. Orientons le cercle Γ_o dans le sens des ϑ croissants, et Γ_1 dans le sens des φ croissants, ce sont ainsi des courbes *ascendantes* par rapport à R.

La sphère S^3 est orientée comme bord de la boule de dimension 4 dans $\mathbb{R}^4$. Les cercles Γ_o et Γ_1 ont alors un nombre d'enlacement $+1$. C'est ce qui distingue le feuilletage de Reeb *direct* R donné par ω_o, du feuilletage de Reeb *inverse* R, défini par l'équation de Pfaff $\omega_o' = 0$, où ω_o' s'obtient à partir de ω_o en échangeant x_3 et x_4.

Enfin, les feuilles de R sont orientées pour que ω_o soit positif sur leurs normales directes.

R_ϑ désigne l'unique feuille de R passant par le point de coordonnée ϑ sur Γ_o.

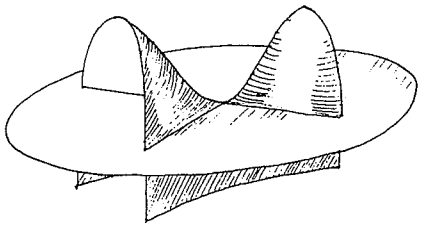
À partir de maintenant, nous n'appellerons plus *tresses fermées* que les sous-variétés de dimension 1 de M transverses à tous les R_ϑ, *orientés dans le sens des ϑ croissants*.

DÉFINITION.— *On appelle* surface de Markov V *une sous-variété compacte orientée de dimension 2 de S^3 vérifiant :*

(i) *le bord orienté de* V *est une tresse fermée* Γ *, et* V *n'a pas de composante sans bord,*

(ii) *l'intersection du tore* T *avec* V *se réduit à un nombre fini de parallèles* $p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k}$ *et la partie de* V *contenue dans* P *est la réunion des demi grandes sphères* $P_{\varphi_1},\dots,P_{\varphi_k}$ *, bordées par les* p_{φ_i} *,*

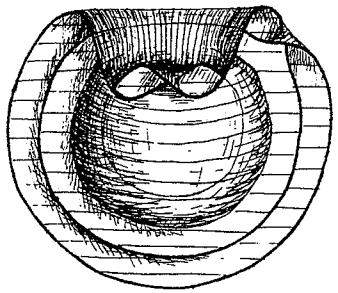
(iii) *les contacts tangents de* V *avec les feuilles* R_ϑ *sont tous des cols.*



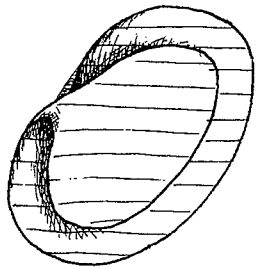
Remarque.— La condition (iii) peut s'interpréter comme une minimalité au sens de Plateau, transversalement aux feuilles de R .

Exemples.—

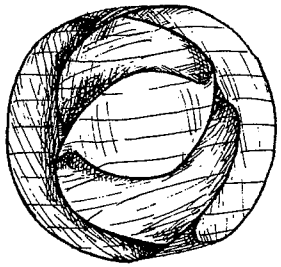
(1) $V \cong D^2$



(2) $V \cong D^2$



(3) $V \cong T^2 \setminus D^2$



THÉORÈME 4.— *Toute tresse fermée* Γ *borde une surface de Markov de caractéristique maximale* $\chi(\Gamma)$.

Démonstration (cf. [Bennequin p. 93] ou [Douady p. 8]) :

Premièrement.— Soit Γ une tresse fermée, V_0 une surface compacte orientée plongée, sans composante fermée, de bord Γ , qui coupe le tore T transversalement. L'entrelacs $\gamma = V_0 \cap T$ est homologue à zéro dans $H_1(P)$ et homologue à Γ dans $H_1(M)$. Or $H_1(T) = H_1(P) \oplus H_1(M)$ donc la classe de γ dans $H_1(T)$ est multiple de celle d'un parallèle. Puisque γ est plongé dans T , il est *isotope* à une réunion de parallèles et de courbes nulisotopes sur T . Éliminons tous les cercles nulisotopes par des chirurgies le long de disques de T . L'opération consiste à retirer de V_0 une étroite bande autour d'une courbe, et à coller aussitôt un disque sur chacun des deux bords de la plaie. En ne conservant que les composantes à bord de la surface obtenue, nous avons une surface V_1 de caractéristique supérieure ou égale à celle de V_0 .

En isotopant $V_1 \cap T$ à une collection de parallèles $p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_s}$, on ramène V_1 à une surface V_2 ne rencontrant T que le long des p_{φ_1} . Enfin, en remplaçant $V_2 \cap P$ par les demi grandes sphères $P_{\varphi_1},\dots,P_{\varphi_s}$, et en oubliant les compodantes fermées qui peuvent apparaître, on aboutit à une surface V_3 qui satisfait le (i) et le (ii) de la définition des surfaces de Markov, avec $\chi(V_3) \geq \chi(V_0)$.

Deuxièmement.— Soit V une surface compacte orientée de bord Γ . On note η la trace de R sur V . C'est un champ de directions transversalement orienté avec singularités. Il supporte un champ de vecteurs qu'on appelle encore η . Ce champ est transverse au bord de V . Par convention il sera *rentrant* sur Γ .

Le champ η présente deux types de singularités, des points selles et des centres, correspondant à des cols ou à des extrema dans les contacts de V et de R .

Nous allons construire, à partir d'une surface V_3 , satisfaisant (i) et (ii), une surface V_4 , satisfaisant les mêmes propriétés, avec $\chi(V_4) \geq \chi(V_3)$, et sur laquelle η ne présente aucune connexion entre selles.

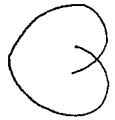
Une petite perturbation de V_3 place tous les points critiques de η sur des feuilles différentes de R .

Considérons un point homocline Q de η . Il existe une séparatrice fermée α de η passant par Q . Regardons-la, au but sur la feuille R_ϑ , elle peut être

soit une boucle du premier type

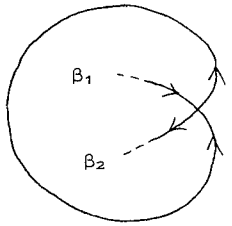


soit une boucle du deuxième type



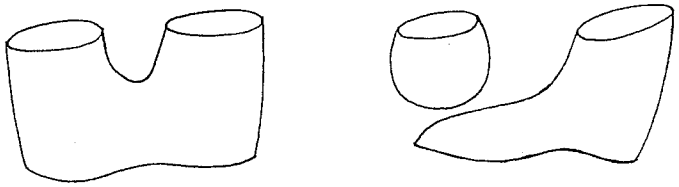
J'affirme que si α est du second type, les autres séparatrices de Q forment une connexion homocline du premier type.

En effet ν est orienté, et l'un des brins intérieurs à α des séparatrices de Q, soit β_2, s'écarte de Q.



Où peut-il aller ? Puisque les brins issus de Γ sont orientés à partir de Γ il n'a pas le choix, il doit revenir par l'autre brin β_1.

On peut donc supposer que α est du premier type. Son intérieur ne contient pas de points de Γ, mais il peut contenir des courbes fermées. On les supprime par des chirurgies le long de disques dans R_ϑ. On se ramène ainsi au cas où α borde un disque dans R_ϑ ne rencontrant pas V_3. Une chirurgie sur ce disque, suivie d'une petite isotopie, fait sauter le point selle Q.



Finalement.— Partant d'une surface compacte V_o plongée orientée de bord Γ, les opérations précédentes donnent une surface analogue V_4, satisfaisant les parties (i) et (ii) de la définition des surfaces de Markov, ayant une caractéristique au moins égale à celle de V_o, et sur laquelle le champ η, induit par R, ne possède pas de connexions entre selles.

Cette surface V_4 satisfait automatiquement la condition (iii). En effet, soit C un point centre de η sur V_4, il existe un disque ouvert maximal dans V_4 sur lequel η n'a que des orbites périodiques. Son bord γ ne peut pas contenir de connexions entre selles, c'est donc un cycle limite pour l'extérieur de D. Par conséquent γ ne peut être que l'un des p_φ, et C est le centre d'une des demi sphères P_φ incluses dans V_4, C.Q.F.D..

Toutes les chirurgies utilisées dans la preuve du Théorème 4 consistent à remplacer un collier par deux disques. Ce type d'opération augmente la caractéristique d'Euler de deux unités, mais, à chaque fois, nous n'avons conservé que les composantes à bord de la nouvelle surface. Par suite, la caractéristique d'Euler de la surface de Markov finale est la même que celle de la surface de Seifert initiale si et seulement si chaque chirurgie a fait apparaître une sphère S^2. En faisant appel à l'exactitude de la conjecture de Schöenflies différentiable pour S^2 dans $\mathbb{R}^3$, démontrée par Alexander et Morse (cf. [Cerf 1]), on obtient donc le résultat suivant :

THÉORÈME 5.— *Soit Γ une tresse fermée et V_o une surface de Seifert de Γ, de caractéristique d'Euler maximale $\chi(\Gamma)$, il existe une surface de Markov de Γ qui se déduit de V_o par une isotopie de S^3 laissant fixe la tresse Γ.*

Par ailleurs, nous remarquons que toutes les chirurgies qui construisent une surface de Markov V à partir d'une surface de Seifert V_o, peuvent se faire à l'aide de disques plongés dans les feuilles de R. Soit Γ' une tresse fermée plongée dans V_o ; ces chirurgies ne vont jamais toucher à Γ'. Le seul risque couru par Γ' est de disparaître dans une composante sans bord oubliée. Ces considérations débouchent sur la proposition suivante :

PROPOSITION 1.— *Soit Γ une tresse fermée, dont aucune composante connexe ne peut border un disque avec un intérieur disjoint de Γ. Soit V_o une surface de Seifert de Γ, contenant une autre tresse fermée Γ', isotope à Γ dans V_o. Il existe une surface de Markov V bordée par Γ, contenant Γ', et sur laquelle Γ' est isotope à Γ.*

Énonçons encore un renseignement supplémentaire tiré de la preuve du Théorème 4 :

PROPOSITION 2.— *Soit V_o une surface de Seifert d'une tresse Γ, dont l'intersection avec le tore T ne contient pas plus de k courbes isotopes sur T à des parallèles, il existe une surface de Markov V de Γ, avec $\chi(V) \geq \chi(V_o)$, qui ne contient pas plus de k parallèles de T.*

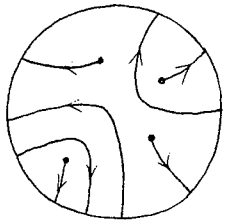
10) Soit Γ une tresse fermée à n brins et V une surface de Markov de Γ avec la plus grande caractéristique d'Euler possible.

Les sections de V par les feuilles R_ϑ ne contiennent pas de courbes fermées car des chirurgies les feraient disparaître en augmentant strictement la caractéristique de V.

Soit η la trace de R sur V, c'est un champ de directions orientables car R est transversalement orienté et V est orientée. Nous convenons de l'orienter de manière à ce qu'il soit *rentrant* au bord Γ de V.

Sur le dessin d'une section de V dans R_ϑ les points libres correspondent aux n brins de la tresse et les points à l'infini sont les traces des p_φ de $V \cap T$.

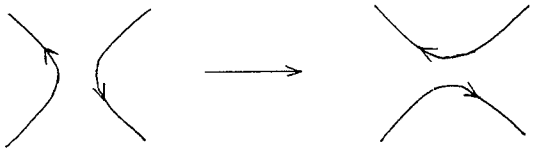
Nous dirons qu'un arc de $V \cap R_\vartheta$ est *libre* s'il va d'un point libre à l'un des p_φ, et qu'il est *lié* s'il relie deux p_φ.



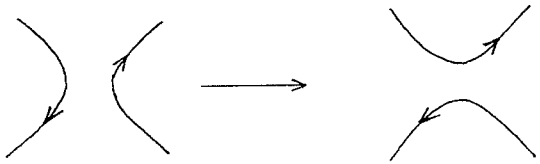
Pour un nombre fini de sections, les arcs échangent leurs extrémités. C'est l'effet des contacts en forme de selles de V avec un R_ϑ.

Il existe deux types de points selles, ceux dits *positifs* où l'orientation de V et celle de R_ϑ coïncident, en nombre A^+, et les autres, *négatifs*, en nombre A^-.

En un point négatif, l'accident rencontré par les brins de R_ϑ est le suivant



Et c'est l'inverse qui survient en un point positif



Le portrait de phase de η sur V se décrit simplement. Les disques P_φ de $V \cap P$ sont entièrement constitués de cercles centrés sur les points de tangence de V avec R le long de l'axe Γ_1.

Lorsque l'orientation de V y coïncide avec celle de R, le disque P_φ est bordé par un cycle p_φ *attractant* pour le champ η à l'extérieur de P_φ. L'orientation de p_φ sur V comme bord de P_φ est celle des ϑ *croissants*.

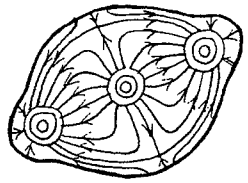
Dans le cas contraire, p_φ est un cycle *répulsif* vers l'extérieur de P_φ, et son orientation est celle des ϑ *décroissants*. On note S^+ le nombre de p_φ attractants et S^- le nombre de p_φ répulsifs.

Les variétés instables des points selles vont nécessairement vers l'un des cycles attractants, leurs variétés stables peuvent provenir du bord ou bien d'un cycle répulsif.

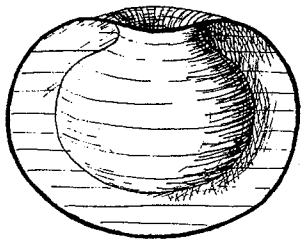
En dehors des séparatrices des selles, toutes les orbites partent du bord ou d'un cycle répulsif pour aller vers un cycle limite. Les domaines de répulsion des disques P_φ instables s'appellent des *poches*, à cause de leur image au but dans S^3.

DÉFINITION.– *Une* poche élémentaire *est une poche dont l'adhérence ne contient que deux cycles attractants.*

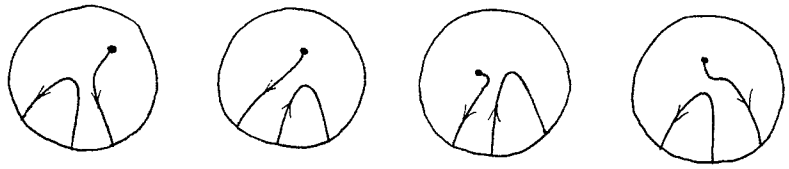
dessin à la source



dessin au but



film complet des $V \cap R_\vartheta$ $(0 \le \vartheta \le 2\pi)$

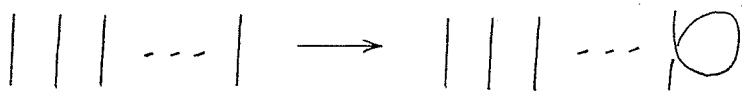


11) Avant de passer à la démonstration de l'inégalité du Théorème 3, nous allons indiquer comment l'usage des surfaces de Markov permet d'établir simplement quelques résultats classiques sur les tresses.

Tout d'abord, le Théorème 4 entraîne immédiatement un cas particulier du Théorème de Markov sur l'équivalence des tresses fermées, énoncé au numéro 8. Le cas où les tresses X et Y représentent le noeud trivial.

Lemme 1.– *Toute tresse fermée* X *connexe non nouée est obtenue à partir de la tresse non nouée standard* Γ_o *à l'aide des opérations suivantes, dites* mouvements de Markov :

(i) *apparition d'un brin par naissance d'une boucle simple,*

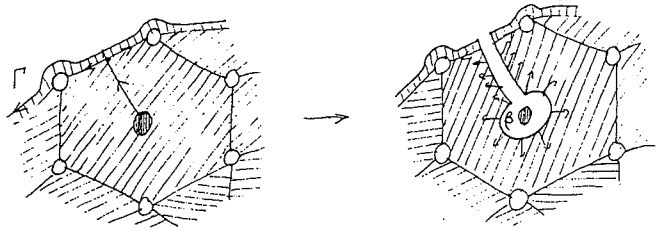


(ii) *isotopies à travers les tresses fermées,*

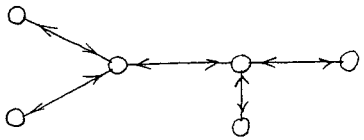
(iii) *disparition d'un brin par mort d'une boucle simple.*

En effet, soit X une tresse fermée connexe non nouée, et D un disque de Markov de bord X.

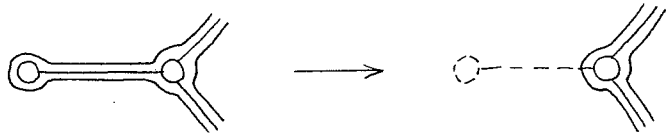
On fait disparaître une poche adjacente au bord dans le disque D en ajoutant un brin β à la tresse selon le schéma suivant :



On se ramène ainsi à un disque de Markov sans poche. La figure constituée par les disques attractants et les séparatrices instables des points selles est un arbre



On supprime les sommets de cet arbre un à un en faisant disparaître un brin de la tresse à chaque fois.



Au point où nous en sommes il n'est plus très difficile de prouver le Théorème de Markov dans toute sa généralité :

THÉORÈME.– *Deux tresses fermées* X_1 *et* X_2 *qui représentent le même entrelacs de* $\mathbb{R}^3$ *se déduisent l'une de l'autre par des mouvements de Markov.*

Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.– Soient X_0 *et* X_1 *deux entrelacs de* $\mathbb{R}^3$. *Il existe une famille de disques plongés dans* $\mathbb{R}^3$ *disjoints deux à deux* $\Delta_1,\dots,\Delta_k$, *qui vérifient les propriétés suivantes :*

a) *L'intérieur d'aucun* Δ_i *ne rencontre* X_0.

b) *Pour tout* i, $\Delta_i \cap X_0$ *est un intervalle non vide* α_i *dans le bord* δ_i *de* Δ_i.

c) *Soit* X_0' *l'entrelacs obtenu à partir de* X_0 *en remplaçant les* α_i *par leurs complémentaires* β_i *dans les* δ_i. *Il existe une boule de dimension 3 plongée dans* $\mathbb{R}^3$ *qui contient* X_0' *et ne rencontre pas* X_1.

Démonstration.– Soit L une direction de $\mathbb{R}^3$ et H un plan perpendiculaire à L qui ne rencontre ni X_0 ni X_1. On peut supposer que X_0 et X_1 se projettent en position générale sur H parallèlement à L. Soient $x_1,\dots,x_k$ les points de X_0 qui se projettent sur l'image de la projection de X_1, et $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ des petits intervalles disjoints contenus dans X_0 et contenant les points $x_1,\dots,x_k$.

Pour i variant de 1 à k, soit Δ_i le triangle dans $\mathbb{R}^3$ dont un côté est α_i et dont le sommet opposé à α_i est le point de H situé sur la droite parallèle à L passant par x_i. Les triangles $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ vérifient toutes les propriétés requises.

Fin de la démonstration du Théorème de Markov :

Soient X_1 et X_2 deux tresses fermées qui représentent le même entrelacs de $\mathbb{R}^3$. Nous supposons que X_2 est dans une boule B^3 qui évite X_1.

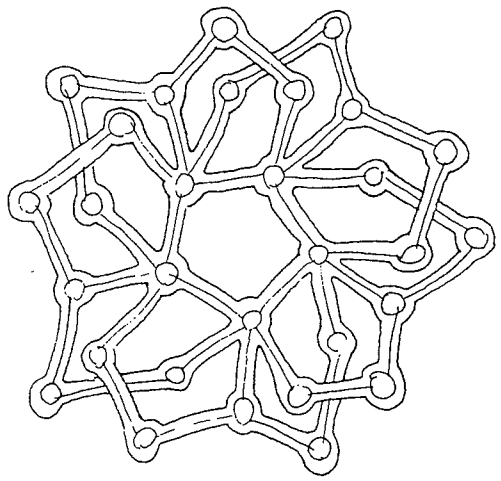
Notons X_0 une tresse parallèle à X_1, proche de X_1, et non enlacée homologiquement avec X_1. Appliquons le lemme 2 aux deux entrelacs X_0 et X_1, et isotopons l'entrelacs X_0' donné par le lemme 2 à la tresse X_2 dans le complémentaire de X_1. On obtient ainsi des disques Δ_i', dont l'intérieur évite X_2 et dont le bord δ_i' est formé d'un petit segment β_i' de X_2 et d'un arc α_i', tels que l'entrelacs $(X_2 \smallsetminus \bigcup_i \beta_i') \cup_i \alpha_i'$ soit isotope à X_0 dans le complémentaire de X_1. Mettons les α_i' sous forme de tresses γ_i' sans toucher à X_1 ni à X_2.

Soit X_2' la tresse obtenue à partir de X_2 en remplaçant les β_i' par les γ_i'. En appliquant le lemme 1 aux tresses γ_i', nous savons que X_2' se déduit de X_2 par des mouvements de Markov.

D'autre part, en faisant appel au Théorème de prolongement des isotopies, on obtient une surface W plongée dans $\mathbb{R}^3$ de bord X_2' contenant X_1, sur laquelle les entrelacs X_2' et X_1 sont isotopes. La proposition 1 du numéro 9 nous permet de supposer que W est une surface de Markov.

Soit U un voisinage dans W du squelette constitué par les disques attractants et par les séparatrices instables des points selles. La surface U contient une surface de Markov M sur laquelle la surface W se rétracte par déformation. Soit X_3 la tresse qui borde M. Le lemme 1 nous dit que X_2' et X_1 se déduisent

toutes les deux de X_3 à l'aide de mouvements de Markov. Ceci achève la démonstration du Théorème de Markov.



12) Une autre application directe des surfaces de Markov est le Théorème suivant, démontré par voie algébrique dans [Magnus et Peluso] et dans [Murasugi 1].

THÉORÈME.— *Une tresse fermée à 3 brins est un noeud trivial si et seulement si elle est équivalente à* $x_1^{-1}x_2$, x_1x_2 *ou* $x_1^{-1}x_2^{-1}$, *et elle est un enlacement trivial à plusieurs composantes si et seulement si elle est équivalente à* x_1 *ou* x_1^{-1} *ou* 1 .

Le Théorème découle immédiatement de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.— *Soit* X *une tresse à* 1 , 2 *ou* 3 *brins, il existe une surface de Markov de* X *de caractéristique maximale* $\chi(X)$, *ne contenant aucune poche.*

DÉFINITION.— *On dit qu'une poche* π *d'une surface de Markov* V *est* vide à l'instant ϑ *si toute la section de* V *par* R_ϑ *est située d'un seul côté de l'arc* $\pi(\vartheta) = \pi \cap R_\vartheta$.

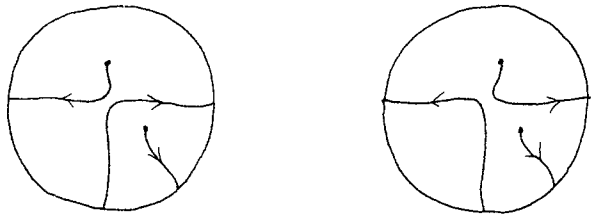
Lemme.— Si une surface de Markov V *d'une tresse* X *contient une poche* π *vide à un instant donné, il existe une surface de Markov* V' *de* X , *avec* $\chi(V') \geq \chi(V)$, *possédant une poche de moins que* V .

Démonstration.— Soit $\pi(\vartheta)$ la section incriminée de π , et soit M_ϑ le disque

niveau de ϑ dans le tore plein M . Une isotopie de S^3 pousse l'arc $\pi \cap M_\vartheta$ hors de M sans bouger V en dehors d'un voisinage de $\pi \cap M_\vartheta$. Il ne reste plus qu'à utiliser la proposition 2 du numéro 9 pour obtenir le lemme.

Le lemme entraîne tout de suite la proposition 3 lorsque X a au plus 2 brins.

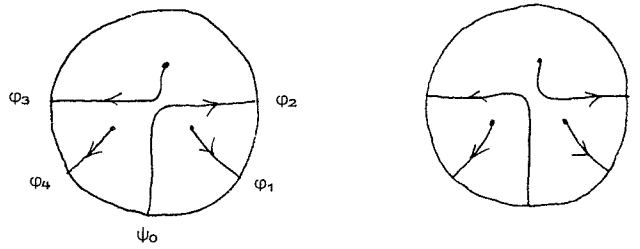
En effet, si π est une poche d'une surface de Markov V de X , elle se vide nécessairement pour une valeur de ϑ voisine d'une valeur critique de la section de V par les R_ϑ .



Passons à la démonstration du cas où X a 3 brins.

Soit V une surface de Markov de X . Décrivons-la par ses sections dans les différentes feuilles R_ϑ , en faisant varier l'angle ϑ de 0 à 2π , et enlevons toutes les poches qui se vident, à l'aide du lemme. Recommençons l'opération autant de fois qu'il le faut pour avoir une surface de Markov V' , dont aucune poche ne se vide.

Si V' possède encore une poche, il doit survenir l'accident suivant, pour une valeur ϑ_0 de l'angle ϑ :



C'est-à-dire qu'il existe cinq valeurs de φ , $\psi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \psi_0$. et un arc lié π_0 issu de p_{ψ_0} , qui échange son extrémité finale en p_{φ_2} avec un arc libre d'extrémité p_{φ_3} , lorsque $\vartheta = \vartheta_0$, pendant que les deux autres arcs libres restent attachés en p_{φ_1} et en p_{φ_4} .

Notons J_1 la bande fermée de T qui va de p_{φ_4} à p_{φ_1} en contenant p_{ψ_0} . De même notons J_i , $2 \leq i \leq 4$, la bande qui va de $p_{\varphi_{i-1}}$ à p_{φ_i} .

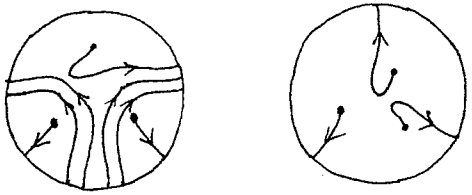
Je dis que tout arc lié de toute section $V \cap R_\vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, doit partir

dans J_1 pour arriver dans J_2 ou J_4 .

En effet, il ne peut partir dans J_3 , ni y aboutir, sans être vide en ϑ_o .

Soit π_1 un arc lié qui démarrerait dans J_2 . En ϑ_o il aboutit nécessairement entre p_{ψ_o} et p_{φ_1} . Choisissons l'arc π_1 dont l'extrémité finale p_{φ_5} est le plus près possible de p_{ψ_o} . Pour que cet arc bouge, il faudrait qu'un arc libre vienne en p_{φ_5} , car les accidents entre deux arcs liés créent toujours un vide (puisqu'ils découpent quatre quadrants à l'instant du choc, et qu'il n'y a que trois arcs libres). L'arc libre qui va se déranger n'est sûrement pas celui qui se tient en p_{φ_1} , et il n'y a pas d'arc allant de p_{ψ_o} à p_{φ_5} . D'autre part l'arc π_o doit contenir sur sa gauche un brin libre à la droite de π_1 . Donc π_1 se viderait dès son premier voyage. Par conséquent, il ne bouge pas. Mais, dans ce cas, il n'a rien à faire dans une surface de Markov. On montre de même qu'aucun brin ne part dans J_4 . Donc toutes les poches partent de J_1 et aucune n'aboutit dans J_1.

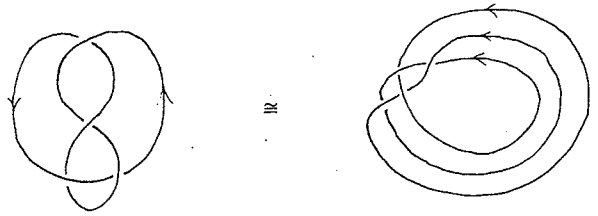
A présent nous pouvons affirmer qu'il existe une surface de Markov pour notre tresse qui ne contient aucune poche. En effet, même si V' a des poches, celles-ci sont parfaitement inutiles, car tout ce qu'on peut faire avec elles, on peut aussi bien le faire avec trois brins libres.



COROLLAIRE.— *Le noeud de trèfle, et le noeud de huit sont noués.*

Démonstration.— Le noeud de trèfle se représente par la tresse à 2 brins, x_1^3 . Sa longueur algébrique n'est pas celle de x_1 , ni celle de x_1^{-1} .

Le noeud de huit se représente par la tresse à 3 brins $x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_1$. Sa longueur algébrique n'est pas celle de x_1x_2 ni celle de $x_1^{-1}x_2^{-1}$, mais elle est la même que celle de $x_2^{-1}x_1$. Démontrons que $x_2^{-1}x_1$ ne peut pas être conjugué à $x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_1$, dans B_3 et nous aurons terminé.



Un morphisme de B_3 sur le groupe A_4 est donné par $\vartheta(x_1) = (234)$ et $\vartheta(x_2) = (134)^2$, puisque $\vartheta(x_1x_2x_1) = \vartheta(x_2x_1x_2) = (12)(34)$. Or on a $\vartheta(x_2^{-1}x_1) = (1234)^2$, donc $\vartheta(x_2^{-1}x_1x_2^{-1}x_1) = 1$.

13) Donnons maintenant la preuve du Théorème 3.

Soit Γ une tresse fermée à n brins, de longueur algébrique c , et de caractéristique χ . Nous voulons démontrer l'inégalité

$$c - n \leq -\chi \ .$$

Choisissons une surface de Markov V de Γ dont la caractéristique d'Euler est le nombre χ .

Rappelons-nous que S^+ (resp. S^-) est le nombre de disques P_φ contenus dans V dont le bord orienté sur V tourne dans le sens des ϑ croissants (resp. décroissants). Le morceau de surface $V \cap M$ réalise une homologie dans le tore plein M entre la courbe Γ et la réunion des p_φ de $V \cap T$, donc le nombre n est égal à la différence $S^+ - S^-$.

Rappelons-nous aussi que nous avons attribué un signe aux points de contact tangents de V avec les feuilles R_ϑ de R dans M . A^+ (resp. A^-) est le nombre de contacts où les orientations de V et de R coïncident (resp. diffèrent).

Lemme.— Le nombre c *est égal à la différence* $A^+ - A^-$.

Démonstration.— Décrivons V par ses sections dans les plans R_ϑ . L'angle ϑ varie de 0 à 2π et nous l'assimilons à la variable du temps. Notons $a_1,\ldots,a_n$ les *arcs libres* de $V \cap R_\vartheta$, ils vont de Γ à T , et $a_{n+1},\ldots,a_{n+k}$ les *arcs liés*, qui joignent un parallèle de T à un autre. On a $k = S^-$ et $n = S^+ - S^-$.

À chaque instant critique ϑ_c , l'exprémité *finale* de deux des arcs a passe d'un parallèle à un autre. Si l'arc a qui aboutissait sur p_{φ_1} avant ϑ_c , s'enfuit sur p_{φ_2} après ϑ_c , nous dirons que la *variation d'angle de* a *en* ϑ_c est la détermination de l'angle $\varphi_2 - \varphi_1$, contenue dans $]0,2\pi[$ si le point selle est positif, et dans $]-2\pi,0[$ sinon. Ainsi, à chaque accident positif la somme des variations d'angle des arcs est de 2π , et elle est de -2π à chaque accident négatif. Si bien que la somme de toutes les variations d'angle quand ϑ varie de 0 à 2π est égale à $2\pi(A^+ - A^-)$.

À présent repérons chaque R_ϑ par les coordonnées cartésiennes (x_3,x_4) centrées sur Γ_o . Le nombre $c(\Gamma)$ compte l'enlacement de Γ avec une courbe Γ' parallèle à Γ , qu'on obtient en déplaçant Γ selon une direction constante dans le repère $0x_3x_4$. Or le nombre d'enlacements de Γ' avec Γ est le nombre algébrique des intersections de Γ' avec V , donc le nombre $2\pi c$ est la somme des variations d'angle des arcs libres a_i , $1 \leq i \leq n$.

Mais la variation d'angle totale de chaque arc lié a_j , $n+1 \leq j \leq n+k$ est nulle, donc $c = A^+ - A^-$, C.Q.F.D..

Autrement.– Soit $\vec{v}$ une direction constante dans le repère Ox_3x_4 de R_ϑ centré sur Γ_o . Notons α l'angle que $\vec{v}$ fait avec $\vec{n}$, dans le plan R_ϑ , le long de la surface $W = V \cap M$. Cet angle est défini sur W en dehors des points de tangence de W avec R . Traçons un petit cercle sur W autour de chaque point critique, et orientons le par le sens trigonométrique sur W . La variation totale de α sur l'un de ces cercles est $+2\pi$ ou -2π selon que le point critique concerné est positif ou négatif. D'autre part la variation de α le long de Γ est $2\pi c$ et elle est nulle le long de chaque parallèle de $V \cap T$. Donc $c = A^+ - A^-$. C.Q.F.D.

En soustrayant les valeurs de c et de n , on trouve

$$c - n = A^+ - A^- - S^+ + S^- .$$

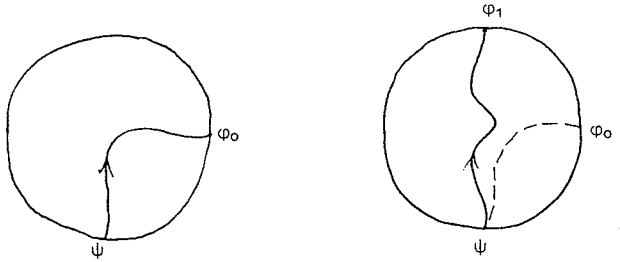
D'autre part la formule de Poincaré s'écrit

$$-\chi = A^+ + A^- - S^+ - S^- .$$

Par conséquent l'inégalité à démontrer est équivalente à l'inégalité suivante :

THÉORÈME 6.– $A^- \geq S^-$.

Cette inégalité est évidente si $S^- = 0$. Elle est très facile si $S^- = 1$. Pour le voir regardons les déplacements du brin issu du parallèle répulsif p_ψ dans les sections successives par les R_ϑ .



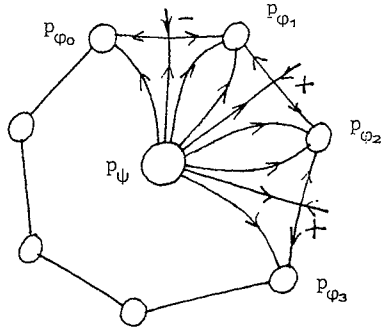
Si tous les points selles au bord de la poche centrée sur P_ψ sont positifs, le brin tourne constamment dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Or, au bout d'un tour complet de ϑ sur Γ_o , il devrait revenir à sa position initiale.

Lorsque $S^- = 2$ un argument tout simple prouve encore l'inégalité du Théorème 6, mais les choses se compliquent rapidement, et la démonstration du cas général demande un peu d'attention.

Premièrement.– Remarquons que si S^- est strictement supérieur à A^- il doit exister une poche de V n'ayant dans son bord qu'un seul point selle négatif.

Deuxièmement.– Lorsqu'une surface de Markov V possède une poche π dont le bord ne contient qu'un point selle négatif, il est facile de trouver une isotopie à support dans M qui déforme V en une surface de Markov V' possédant une *poche élémentaire* (celle qui est définie au numéro 10).

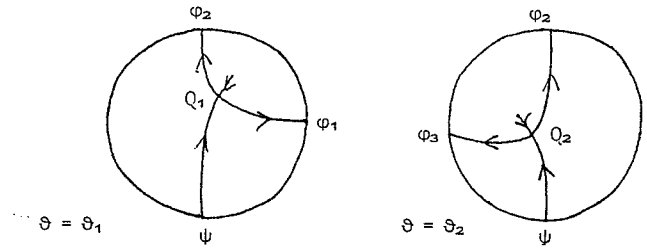
En effet, supposons que deux accidents positifs se suivent sur π après l'accident négatif



Décrivons V dynamiquement par ses sections dans les plans R_ϑ . L'angle ϑ est considéré comme une variable de temps.

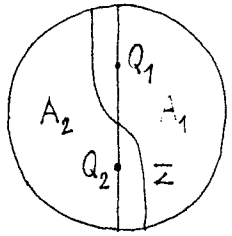
Soit ϑ_1 l'instant où l'arc π issu de p_ψ quitte p_{φ_1} pour aller en p_{φ_2} en passant par un point critique positif. Le parallèle p_{φ_3} connecté à p_ψ par π à la suite de p_{φ_2} se trouvera entre p_{φ_2} et p_ψ . Notons ϑ_2 l'instant ultérieur à ϑ_1 où l'arc π quitte p_{φ_2} pour aller en p_{φ_3} .

Quitte à déformer V nous pouvons supposer que l'arc π est une droite verticale qui va de p_ψ à p_{φ_2} dans R_ϑ , pour $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$, et que, de plus, le point selle Q_1 de l'instant ϑ_1 se trouve au dessus du point selle Q_2 de l'instant ϑ_2 .



Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que rien ne se passe sur V dans les intervalles de temps $[\vartheta_1 - \varepsilon, \vartheta_1[$, $]\vartheta_1, \vartheta_1 + \varepsilon]$, $[\vartheta_2 - \varepsilon, \vartheta_2[$ et $]\vartheta_2, \vartheta_2 + \varepsilon]$. Notons N le cylindre formé par les points de M dont la coordonnée ϑ varie entre $\vartheta_1 - \varepsilon$ et

$\vartheta_2 + \varepsilon$. Soit Σ une membrane presque verticale qui partage N en deux régions, l'une A_1 contenant Q_1 , l'autre A_2 contenant Q_2 .



Soit U un voisinage assez étroit de Σ pour que $A_1' = A_1 \setminus U$ renferme encore Q_1 et $A_2' = A_2 \setminus U$ renferme encore Q_2 .

Considérons une isotopie à support dans N qui pousse tous les points de A_1' (resp. A_2') dans la région $\vartheta_2 < \vartheta < \vartheta_2 + \varepsilon$ (resp. $\vartheta_1 - \varepsilon < \vartheta < \vartheta_1$), sans changer les coordonnées sur le disque méridien. Cette isotopie transforme U en une surface de Markov V_1 . Sur V_1 , l'arc π passe directement de p_{φ_1} à p_{φ_3} , si bien que V_1 possède une poche avec un seul accident négatif et un accident positif de moins que la poche π de V .

Une application répétée de ce procédé donne la surface V' souhaitée.

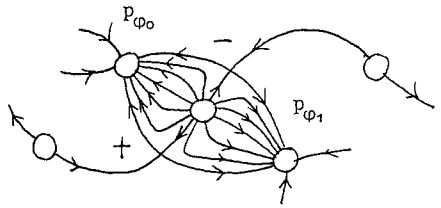
Troisièmement.— La manipulation essentielle. Mettons-la sous la forme d'un lemme.

Lemme.— Lorsqu'une surface de Markov V d'une tresse Γ possède une poche élémentaire, il existe une autre tresse Γ' , avec $c(\Gamma') = c(\Gamma)$ et $n(\Gamma') = n(\Gamma)$, et une surface de Markov V' de Γ' , avec $\chi(V') = \chi(V)$, qui a une poche de moins que V .

Remarque.— Cela ne signifie pas qu'on sache faire disparaître les poches élémentaires par isotopie, et Γ' peut être différente de Γ en tant que tresse. Cependant la tresse Γ' que nous allons construire représentera effectivement le même entrelacs que Γ dans $\mathbb{R}^3$.

Notons bien qu'une fois le lemme établi, le Théorème 6 s'ensuit par récurrence sur S^- .

Démonstration du lemme.— Soit π la poche élémentaire de V contenant le parallèle retourné p_ψ . Notons p_{φ_0} et p_{φ_1} les parallèles directs au bord de π .



Décrivons V au but par ses sections aux différentes valeurs de ϑ , en assimilant l'angle ϑ à la variable du temps. Le temps s'écoule à mesure que l'angle croît.

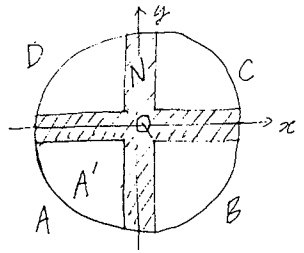
À l'instant ϑ_0 le brin π_ψ issu de p_ψ quitte p_{φ_0} pour aller en p_{φ_1} en passant par un point critique négatif, et à l'instant ϑ_1 il revient en p_{φ_0} à la suite d'un accident positif.

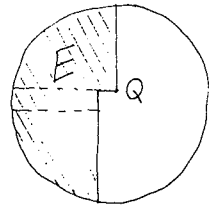
Le tore plein M dans S^3 est feuilleté par les disques M_ϑ qui sont les niveaux de ϑ .

Soient x et y , $x^2 + y^2 \leq 1$, les coordonnées cartésiennes sur M_0 , 0 le point $\{x = y = 0\}$.

Le repère $0xy$ se transporte à tous les M_ϑ , de sorte que la trace d'un parallèle p_φ de T possède des coordonnées indépendantes de ϑ .

A , B , C , D désignent les quatre quadrants de M_0 . $A = \{(x,y) \mid x \leq 0 \text{ et } y \leq 0\}$, $B = \{x \geq 0 \text{ et } y \leq 0\}$, $C = \{x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$, $D = \{x \leq 0 \text{ et } y \geq 0\}$. N est le voisinage des axes définis par $\{|x| < \frac{1}{10} \text{ ou } |y| < \frac{1}{10}\}$, A' la région $\{x < -\frac{1}{10} \text{ et } y < -\frac{1}{10}\}$, et enfin E la région $\{(x,y) \mid x < 0 \text{ si } y > 0 \text{ , } x < -\frac{1}{10} \text{ si } y \leq 0\}$.





Quitte à déformer V par une isotopie à travers les surfaces de Markov nous pouvons supposer que les propriétés suivantes sont réalisées :

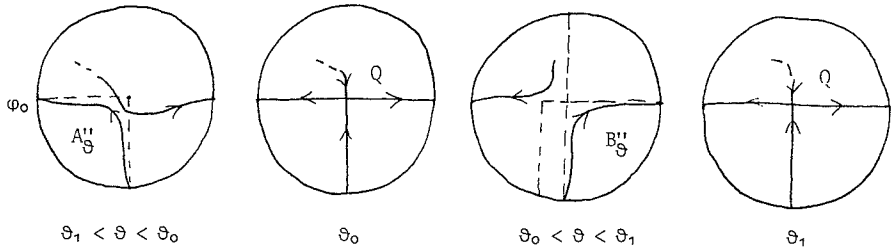
(1) V ne rencontre jamais l'intérieur de C .

(2) Les seuls parallèles de V rencontrant N sont p_ψ de coordonnées $x = 0$, $y = -1$, p_{φ_0} défini pour $x = -1$, $y = 0$ et p_{φ_1} défini par $x = 1$, $y = 0$.

(3) De ϑ_0 à ϑ_1 , π_ψ est inclus dans $B \cap N$ et tout brin de V rencontrant E est contenu dans E .

(4) De ϑ_1 à ϑ_0 , π_ψ est inclus dans $A \cap N$ et tout brin de V rencontrant A' est contenu dans A'' .

On note A''_ϑ la région de A entourée par π_ψ de ϑ_1 à ϑ_0 et B''_ϑ la région de B entourée par π_ψ de ϑ_0 à ϑ_1 .

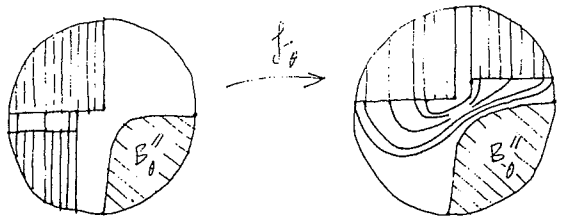


Il existe une application lisse f de M dans lui-même, préservant globalement chaque disque M_ϑ et vérifiant les hypothèses suivantes :

(5) Sur A', f coïncide avec la rotation d'angle π de centre 0, pour toutes les valeurs de ϑ.

(6) De $\vartheta_1 - \varepsilon$ à $\vartheta_o + \varepsilon$, f fixe point par point la région $M_\vartheta \setminus A''_\vartheta$.

(7) De $\vartheta_o + \varepsilon$ à $\vartheta_1 - \varepsilon$, f fixe point par point les trois quadrants B, D et C, et sa restriction à la région E est un plongement dans $M_\vartheta \setminus B''_\vartheta$.



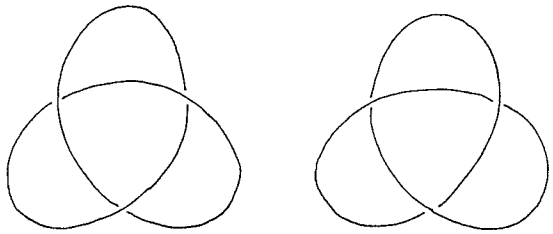
Ces hypothèses assurent que f induit un difféomorphiqme de $V \cap M$ sur son image. De plus f se prolonge naturellement à un difféomorphisme de V sur une surface de Markov W.

La trace de R sur W est isomorphe à la trace de R sur V, et les signes des points critiques sont les mêmes sur W et sur V. En outre, de ϑ_1 à ϑ_o, le brin π_ψ entoure la région de A''_ϑ qui ne contient aucun point de W. La transformation effectuée a permis de vider la poche élémentaire.

Pour obtenir la surface V' de même bord que W et contenant une poche de moins que W, prenons nos ciseaux. Découpons W suivant les courbes π_ψ en ϑ_1 et en ϑ_o, et aussi suivant les parallèles p_{φ_o} et p_ψ entre ϑ_o et ϑ_1. Un peu de colle pour attacher sur les bords les disques A''_{ϑ_1} et A''_{ϑ_o} ainsi qu'une bande de T entre ϑ_o et ϑ_1. Il ne reste plus qu'à polir le tout avec un peu de papier de verre.

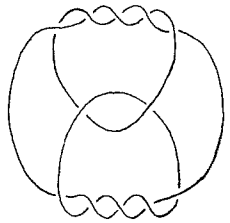
14) Le Théorème de [Alexander] nous dit qu'on peut toujours réaliser le type d'isotopie d'un entrelacs Γ de $\mathbb{R}^3$ sous forme de tresse fermée. Soit $L(\Gamma)$ le plus grand possible des nombres $c(X) - n(X)$ pour toutes les représentations en tresse X de Γ.

D'après le Théorème 3, pour le cercle standard $L = -1$ et pour le noeud de trèfle droit $L = +1$. Il semble que pour le trèfle gauche on ait $L = -5$, comment le démontrer ?

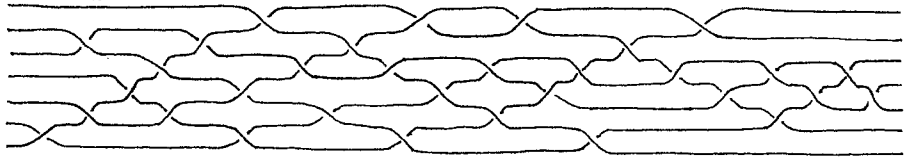


gauche *droit*

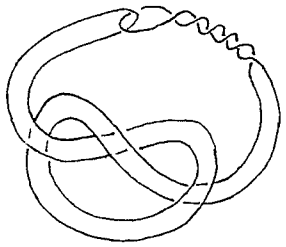
Le premier nombre qu'on peut essayer pour majorer l'invariant L d'un noeud de manière à atteindre des nombres négatifs est la *signature* du noeud (cf. [Murasugi 2]). Mais L peut être plus grand que la signature σ, comme le montre le noeud suivant où $L = 9$ et $\sigma = 8$.



D'autre part, le genre ne peut pas être remplacé par le degré β du polynôme d'Alexander dans l'inégalité $L \leq 2g - 1$ pour les noeuds. Un exemple où $\beta = 0$ et $L = +1$ est donné par la tresse suivante, que j'ai tirée de la belle courbe de Legendre de [Erlandsson, fig. 55]).



Elle représente le noeud de [Rolfsen], p. 167 :



Il reste au moins un invariant tout simple des noeuds pour lequel je ne connais pas la réponse.

Question.— Est-ce-que l'invariant L d'un noeud peut être supérieur au double du *nombre gordien* u du noeud ?

Si Γ est un entrelacs à r composantes connexes, son *nombre gordien* $u(\Gamma)$ est le plus petit nombre de fois que Γ doit se croiser elle-même avant de se transformer en une collection de r cercles non noués et non entrelacés. [Murasugi 2] a prouvé que $\sigma - r + 1$ minore $2u$.

Question.— $$L(\Gamma) \leq 2u(\Gamma) - r \ ?$$

Cela confirmerait une formule conjecturée par J. Milnor, pour calculer le nombre gordien d'un noeud torique de type (p,q) :

$$u(p,q) = (p-1)(q-1)/2 \ .$$

Plus généralement, J. Milnor propose dans son livre [Milnor 2] une évaluation algébrique du nombre gordien de l'entrelacs d'une singularité algébrique isolée.

Soit V_o une courbe algébrique complexe dans $\mathbb{C}^2$, d'équation $f(z_o,z_1) = 0$, avec un polynôme f sans facteur carré. Supposons que V_o possède une singularité à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Son *nombre de Milnor* est le premier nombre de Betti de la surface d'intersection V d'une petite boule B^4 de centre 0 avec une courbe complexe non singulière d'équation $f(z_o,z_1) = t$, pour t suffisamment petit. Ce nombre est égal à la multiplicité μ de V_o en 0 .

Soit r le nombre de branches de V_o passant par 0 , le nombre $\delta = (\mu + r - 1)/2$ compte la quantité de points doubles ordinaires concentrés en 0 sur V_o (cf. [Milnor 2, p. 85]).

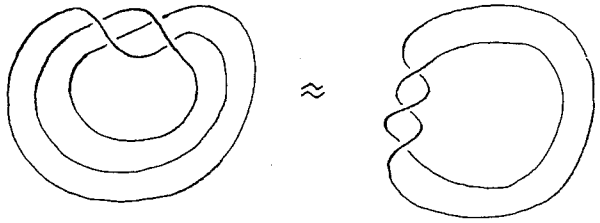
L'entrelacs Γ de la singularité est celui qu'on obtient par intersection de V_o avec la sphère S^3 au bord de la petite boule B^4 . Il a exactement r composantes connexes. Il borde dans S^3 une surface W isotope dans B^4 à la surface V . Cette surface est connexe et elle a la plus grande caractéristique d'Euler

possible parmi les surfaces de Seifert de Γ , donc $\chi(\Gamma) = 1 - \mu$.

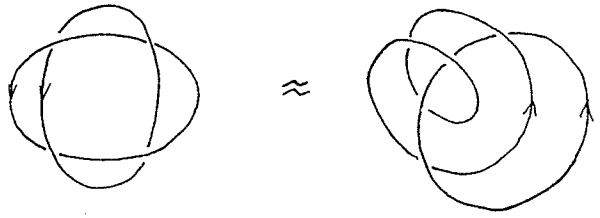
En fait [Milnor 2] montre que $S^3 \setminus \Gamma$ fibre sur le cercle S^1 avec des fibres $\overset{\circ}{W}_\vartheta$ qui sont toutes isomorphes à V . Chaque fibre est une surface connexe dont la fermeture est une surface W_ϑ compacte de bord Γ . Le Théorème de [Stallings 1] nous permet d'affirmer que W_ϑ est une surface de Seifert de caractéristique maximale.

D'après les résultats de [K. Brauner], l'entrelacs Γ est isotope dans S^3 à une tresse *positive* X , c'est-à-dire une tresse X qui s'exprime dans B_n comme un produit des générateurs x_i , $1 \leq i \leq n$, de Artin (cf. numéro 8), sans faire intervenir de x_i^{-1} .

Exemple 1.— Si p et q sont deux entiers ≥ 2 , premiers entre eux, la courbe d'équation $z_o^p + z_1^q = 0$ donne le noeud torique $\ell(p,q)$. Dessin de $\ell(2,3)$ et de $\ell(3,2)$:



Exemple 2.— Avec $f(z_o,z_1) = z_o^2 + z_1^4$, on obtient



[Birman et Williams] prouvent qu'une tresse positive X vérifie l'*égalité*

$$n - c = \chi \ .$$

(Voir aussi la remarque 1 qui suit le Théorème 3.)

Par conséquent si X est une tresse positive représentant un entrelacs Γ d'une singularité, on a

$$-L = \chi = n - c = 1 - \mu$$

et

$$\delta = (c - n + r)/2 .$$

J. Milnor émet la très séduisante hypothèse que le nombre gordien $u(\Gamma)$ pourrait bien être toujours égal au nombre δ .

L'inégalité $u \leq \delta$ est due à [Pinkham]. On peut également la déduire d'une inégalité plus générale démontrée dans [Boileau et Weber], qui dit que pour une tresse X à n brins, qui peut s'écrire avec b croisements, c'est-à-dire une tresse X qui s'exprime dans B_n par un mot de longueur b , on a

$$u \leq (b - n + r)/2 .$$

Par contre l'inégalité dans l'autre sens, $u \geq \delta$ constitue encore un problème ouvert. Elle serait établie si l'on savait prouver l'inégalité $L \leq 2u - r$, puisque $L = c - n$ pour X positive.

La question $u \geq (c - n + r)/2$ est également posée dans [Rudolph 1].

Remarquez le bel encadrement du nombre gordien qu'on aurait pour une tresse *quelconque* :

$$(c - n + r)/2 \leq u \leq (b - n + r)/2 .$$

15) Soit V une courbe algébrique complexe dans $\mathbb{C}^2$ possédant une singularité isolée *analytiquement irréductible* en 0 .

D'après le *Théorème de Puiseux* il est possible de trouver des coordonnées (z_0, z_1) sur $\mathbb{C}^2$, telles que l'équation de V s'écrive

$$f(z_0, z_1) = \prod_{\xi^n = 1} (z_1 - \zeta_1(\xi . z_0))$$

avec

$$\zeta_1(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_0^{k/n}$$

où n est un entier strictement supérieur à 1 (cf. [Pham]).

Le cône tangent à V en 0 se réduit à l'axe des z_0 . Si l'on coupe V avec une sphère S^3 de centre 0 et de rayon ε très petit, on obtient une courbe X dans un voisinage très étroit du cercle Γ_0 . X est une tresse fermée positive connexe.

Le Théorème de [Brauner] affirme que X est un *noeud torique itéré* $\ell((n_1,k_1),\ldots,(n_p,k_p))$. Le noeud torique itéré $\ell((n_1,k_1),\ldots,(n_p,k_p))$ étant celui qu'on obtient en *câblant* le noeud torique $\ell(n_p,k_p)$ sur la surface d'un tore voisin du noeud torique itéré $\ell((n_1,k_1),\ldots,(n_{p-1},k_{p-1}))$.
(*Câbler* une *tresse* X_2 dans le voisinage tubulaire U d'un *noeud* X_1 consiste à envoyer le tore plein standard M contenant X_2 sur U par un difféomorphisme qui envoie un parallèle au bord de M , non enlacé avec l'âme de U sur un noeud X_1' parallèle à X_1 non enlacé avec X_1 dans S^3 .)

Le nombre n qui rentre dans l'équation de V est le nombre des brins de X , c'est le produit des n_i , i variant de 1 à p . Les couples (n_i,k_i) sont les *paires de Puiseux* de V en 0 , elles vérifient $(n_i,k_i) = 1$, $n_i k_{i-1} < k_i$, $1 < n_i < k_i$. Ce sont les invariants *topologiques* de V en 0 (cf. [Pham]). La tresse X est équivalente à celle qu'on obtient en coupant S^3 par la courbe complexe d'équation

$$z_1 = z_0^{k_1/n_1} + z_0^{k_2/n_1 n_2} + \ldots + z_0^{k_p/n_1 \ldots n_p} .$$

Notons ν_i le produit $n_{i+1} \ldots n_p$, pour $i = 1,\ldots,p-1$, et posons $\nu_p = 1$, la multiplicité μ de V en 0 est donnée par

$$\mu = \sum_{i \geq 1} \nu_i (k_i - 1)(n_i - 1)$$

(cf. [Milnor 2] p. 93).

Par exemple, pour $z_0^k = z_1^n$, la multiplicité est égale à $(k - 1)(n - 1)$.

D'autre part, si X_1 est une tresse à n_1 brins de longueur algébrique c_1 , et X_2 une tresse à n_2 brins de longueur algébrique c_2 , la tresse X , construite en câblant X_2 dans un voisinage tubulaire de X_1 , possède $n = n_1 n_2$ brins et sa longueur algébrique c vaut $c_2 + n_2 . c_1$.

Pour la tresse $\ell(n,k)$ le nombre de brins est n et la longueur algébrique est $k(n - 1)$. La formule

$$\mu - 1 = c - n$$

pour un noeud torique itéré, s'ensuit par récurrence sur le nombre de paires de Puiseux.

Lorsque la singularité algébrique de V en 0 n'est plus irréductible, l'entrelacs X n'est plus connexe. Il a r composantes connexes X_i , si r est le nombre de branches V_i de V en 0 . Soient $H_1,\ldots,H_r$ les tangentes de V en 0 . L'intersection de H_i avec S^3 est un *cercle de Hopf* C_i . La composante X_i se tient auprès de C_i . Pour $i \neq j$, les cercles C_i et C_j ont un nombre d'enlacement égal à $+1$. Donc X_i enlace positivement X_j .

Les cercles de Hopf sont les fibres de la fibration de Hopf de S^3 sur S^2 . Il est donc possible de déformer la réunion des C_i , à travers les familles disjointes de cercles de Hopf jusque dans un voisinage arbitraire de Γ_0 . Nous ramenons ainsi X à une tresse fermée dans un voisinage de Γ_0 . C'est une tresse positive puisque les X_i le sont et qu'ils s'enlacent positivement les uns les autres.

Soit n_i le nombre de brins de X_i , et c_i sa longueur algébrique. Notons μ_i la multiplicité de V_i en 0 et δ_{ij} la multiplicité d'intersection de V_i avec V_j en 0 . On a, $\delta_{ij} = n_i n_j$. Calculons les nombres n , c et μ de X . On a

$$\mu - 1 = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i - 1) + \sum_{i \neq j} \delta_{ij}$$

et

$$c = \sum_{i=1}^{r} c_i + \sum_{i \neq j} n_i n_j$$

et

$$n = \sum_{i=1}^{r} n_i ,$$

donc

$$c - n = \mu - 1 .$$

16) Nous allons décrire une autre manière de voir l'égalité $c - n = \mu - 1$ qui jette un peu de lumière sur la quantité $c - n$ et l'invariant L. Cela va nous ramener aux structures de contact en dimension 3.

La sphère à trois dimensions possède une structure de contact standard $\hat{F}_o$, celle qui est formée des plans orthogonaux à la fibration de Hopf. Si on regarde S^3 comme la sphère de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathbb{C}^2$, le plan de $\hat{F}_o$ au point $z = (z_o, z_1) \in S^3$ est la droite complexe perpendiculaire à celle qui joint z à l'origine de $\mathbb{C}^2$. C'est aussi la seule droite complexe tangente à S^3 qui passe par z. En coordonnées polaires sur $\mathbb{C}^2$, $\hat{F}_o$ est décrit par l'équation de Pfaff

$$\rho_o^2 d\vartheta_o + \rho_1^2 d\vartheta_1 = 0 .$$

La normale orientée de $\hat{F}_o$ en z, sera le vecteur iz.

L'entrelacs Γ d'une singularité algébrique complexe isolée en $0 \in \mathbb{C}^2$, nous est donné comme section transverse d'une sphère standard de centre 0 dans $\mathbb{C}^2$ et d'une courbe complexe, donc la tangente à Γ dans S^3 est toujours *transverse* aux plans de $\hat{F}_o$. De plus Γ est une courbe *ascendante* dans $\hat{F}_o$ si on l'oriente comme bord de la surface V_o munie de son orientation complexe.

Si $z = (z_o, z_1)$; $z_o = x_1 + ix_2$, et $z_1 = x_3 + ix_4$, on a

$$iz = (-x_2, x_1, -x_4, x_3) .$$

Posons

$$jz = (-x_3, x_4, x_1, -x_2) .$$

Le vecteur jz est orthogonal à z et à iz, il est donc dans le plan de $\hat{F}_o$ en z.

Par *définition*, le nombre $\ell(\Gamma)$ d'un entrelacs *transverse* à $\hat{F}_o$ sera l'*enlacement* de Γ avec la courbe Γ' qu'on obtient en déplaçant légèrement Γ dans S^3 suivant le champ de vecteurs qui vaut jz au point z.

Le cercle Γ_o est transverse à $\hat{F}_o$, et son enlacement $\ell(\Gamma_o)$ avec $\hat{F}_o$ est égal à -1. Il en va de même pour toutes les fibres de la fibration de Hopf.

Tout entrelacs Γ qui longe le cercle Γ_o d'assez près est une courbe transverse à $\hat{F}_o$. Si Γ est *ascendante* dans $\hat{F}_o$, elle est en même temps une tresse fermée.

La longueur algébrique $c(\Gamma)$ compte l'enlacement dans S^3 de Γ avec sa translatée dans S^3 suivant une direction constante dans le repère (x_3, x_4). D'où l'égalité

$$\ell(\Gamma) = c(\Gamma) - n(\Gamma) .$$

Soit Γ l'entrelacs d'une singularité algébrique complexe V isolée en $0 \in \mathbb{C}^2$. Si la sphère S^3 est choisie suffisamment petite, Γ est contenu dans un voisinage étroit d'une famille finie de cercles orthogonaux à $\hat{F}_o$, la trace sur S^3 de la famille des tangentes à V en 0 dans $\mathbb{C}^2$. Donc Γ est isotope à une tresse fermée X, parmi les entrelacs transverses à $\hat{F}_o$. Par conséquent l'égalité $c - n = \mu - 1$ entraîne l'égalité $\ell(\Gamma) = \mu - 1$.

Mais nous allons voir tout de suite que cette égalité provient d'un résultat *global* dans $\mathbb{C}^2$ (voir aussi [Rudolph 2] et [Laufer]).

PROPOSITION 4.— *Soit V une courbe analytique complexe non singulière dans $\mathbb{C}^2$, et S^3 une sphère euclidienne centrée en $0 \in \mathbb{C}^2$, transverse à V. Notons Γ l'entrelacs transverse ascendant à $\hat{F}_o$ sur S^3, obtenu en coupant V par S^3, et notons $\overline{V}$ la partie de V contenue dans la boule B^4 bordée par S^3 dans $\mathbb{C}^2$. On a*

$$\ell(\Gamma) = -\chi(\overline{V}) .$$

Démonstration.— Notons V' la surface de $\mathbb{C}^2$ qu'on obtient en poussant V avec le vecteur qui vaut jz au point z. Soit $\Gamma' \subset S^3$ le bord orienté de $\overline{V}' = V' \cap B^4$. L'enlacement de Γ avec Γ' dans S^3 est l'opposé du nombre algébrique d'intersections de $\overline{V}$ avec $\overline{V}'$ (cf. [Rolfsen]).

Un point d'intersection de $\overline{V}$ avec $\overline{V}'$ est voisin d'un point critique de la fonction ρ qui mesure la distance à 0 sur $\overline{V}$, car jz est tangent à la sphère S^3 qui passe par z, centrée en 0.

Pour démontrer notre égalité, on peut toujours supposer que V ne passe pas par 0 et que tous les points critiques de ρ sont *non dégénérés*.

Plaçons-nous auprès d'un point critique ζ. Il existe des coordonnées holomorphes $z_o = x_o + iy_o$ et $z_1 = x_1 + iy_1$ telles que ζ soit le point $\{z_o = 1 , z_1 = 0\}$, et telles que l'équation de V s'écrive

$$z_o = 1 + cz_1^2 + 0(|z_1|^3)$$

avec c réel > 0.

ζ est un point col *de ρ si $c > \frac{1}{2}$ et un* minimum *de ρ si $c < \frac{1}{2}$.*

En effet sur V on a

$$\rho^2 = z_o\overline{z}_o + z_1\overline{z}_1 = 1 + z_1\overline{z}_1 + c(z_1^2 + \overline{z}_1^2) + 0(|z_1|^3)$$
$$= 1 + x_1^2 + y_1^2 + 2c(x_1^2 - y_1^2) + 0(|z_1|^3)$$

donc

$$\rho^2 - 1 = (1 + 2c)x_1^2 + (1 - 2c)y_1^2 + 0(|z_1|^3) .$$

D'autre part, au voisinage de ζ, il existe un unique point ζ' de $V' \cap V$.

Le nombre d'intersections de V avec V' en ζ' est positif *si $c < \frac{1}{2}$ et* négatif *si $c > \frac{1}{2}$.*

En effet, au voisinage de ζ , V s'écrit, à l'ordre 3 en $|z_1|$:

$$\begin{cases} x_o = 1 + c(x_1^2 - y_1^2) \\ y_o = 2cx_1y_1 \end{cases}$$

et jz est à l'ordre 1 le vecteur $(-x_1, y_1, 1, 0)$. La surface V' est la translatée de V suivant εjz , ε réel > 0 et petit, donc V' s'écrit, à l'ordre 3 en $|z_1|$,

$$\begin{cases} x_o + \varepsilon x_1 = 1 + c(x_1^2 - y_1^2) + c(\varepsilon^2 - 2\varepsilon x_1) \\ y_o - \varepsilon y_1 = 2cx_1y_1 - 2c\varepsilon y_1 \end{cases}$$

et ζ' est le point d'abscisses $\{x_1 = \varepsilon c(1+2c)^{-1}, y_1 = 0\}$. Posons $a = 2\varepsilon c^2(1+2c)^{-1}$. Le plan tangent à V en ζ' est

$$\begin{cases} dx_o = a dx_1 \\ dy_o = a dy_1 \end{cases},$$

celui de V' est

$$\begin{cases} dx_o = (a - \varepsilon(1+2c))dx_1 \\ dy_o = (a - \varepsilon(1-2c))dy_1 \end{cases}.$$

Donc le déterminant 4×4 qui compte l'orientation de l'intersection de V et V' en ζ' est égal à $\varepsilon^2(1+2c)(1-2c)$.

Par conséquent le nombre $\ell(\Gamma)$ est la somme des points cols de ρ sur $\overline{V}$ diminuée de la somme des minima de ρ sur $\overline{V}$. C.Q.F.D.

Remarque 1.— L'absence de maxima pour ρ est montrée dans [Andreotti-Frankel] ; l'absence de cols comptant pour -1 dans le calcul de ℓ est une information géométrique supplémentaire.

Remarque 2.— Nous venons d'indiquer trois démonstrations différentes de l'égalité $\mu = \ell - 1$. Nous en donnerons encore deux autres à la fin du § III.

Nous allons voir au § III que le nombre ℓ est un cas particulier d'une notion plus générale qui est utile dans l'étude des équations de Pfaff en dimension 3 .

III. ENLACEMENTS DES COURBES ET DES CHAMPS DE PLANS

17) Soit M une variété orientée de dimension 3 , F un sous-fibré trivial de rang 2 du fibré tangent de M , et Γ un entrelacs dans M , c'est-à-dire une sous-variété fermée orientée de dimension 1 de M . Nous supposons Γ homologue à zéro dans M et transverse au champ de plans F .

Rappelons que l'enlacement de Γ avec un autre entrelacs Γ' homologue à zéro dans M et disjoint de Γ , est le nombre d'intersections homologique de Γ' avec une 2-chaîne orientée de bord Γ (cf. [Rolfsen]).

Soit $\vec{v}$ une section de F définie sur M toute entière, qui ne s'annule jamais. Considérons l'entrelacs Γ' qu'on obtient en poussant légèrement Γ dans la direction de $\vec{v}$.

PROPOSITION 5.— *L'entier relatif $\ell(\Gamma,\Gamma')$ qui mesure l'enlacement de Γ avec Γ' est indépendant du choix de $\vec{v}$, et il ne change pas lorsqu'on remplace l'orientation de Γ par son opposée. Par contre il change de signe si on renverse l'orientation de M .*

Démonstration.— Si $\vec{w}$ est une autre section de F qui ne s'annule pas, soit Γ'' l'entrelacs obtenu en poussant Γ avec $\vec{w}$. La différence entre $\ell(\Gamma,\Gamma')$ et $\ell(\Gamma,\Gamma'')$ est le degré de l'application φ qui associe à tout point de Γ l'angle de $\vec{v}$ avec $\vec{w}$ dans le plan F . Mais φ s'étend en une application de M dans le cercle et $H_1(\Gamma)$ va sur zéro dans $H_1(M)$, donc le degré de φ est nul.

DÉFINITION.— *On note $\ell(\Gamma,F)$ l'entier $\ell(\Gamma,\Gamma')$ et on l'appelle* enlacement de Γ avec F .

Ce nombre ne change pas si on bouge Γ par isotopie transverse à F ou si on bouge F par homotopie transverse à Γ .

Remarque.— Si les deux premiers groupes d'homologie entière de M sont nuls, l'enlacement d'un champ de plans non singulier et d'un entrelacs transverse est toujours défini. Car toutes les courbes sont homologues à zéro et tous les sous-fibrés du fibré tangent sont triviaux.

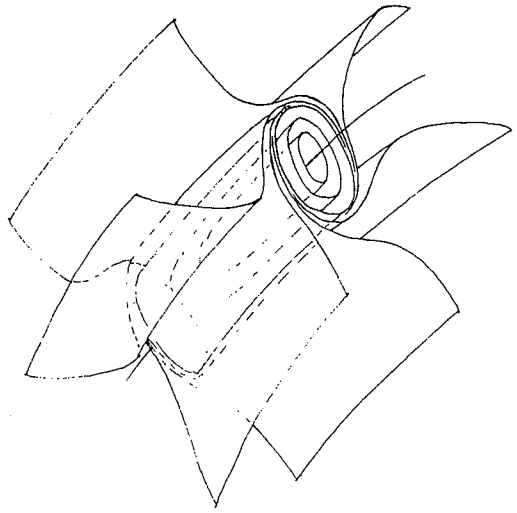
En effet M^3 est parallèlisable, car on a $H^1(M,\pi_o(0(3))) = 0$, $H^1(M,\pi_1(0(3))) = 0$ et $\pi_2(0(3)) = 0$. Fixons une parallélisation de M . Un champ de plans non singulier correspond alors à une application de M dans S^2 , et nous devons voir qu'elle se relève à $SO(3)$. Mais $H^2(M,\mathbb{Z})$ contient la seule obstruction au relèvement, or ce groupe est isomorphe à $\mathrm{Hom}(H_2(M),\mathbb{Z})$ puisque $H_1(M) = 0$.

Exemples.— Si $\hat{F}_o$ est la structure de contact standard sur S^3 et Γ_o une fibre de la fibration de Hopf, $\ell(\Gamma_o,\hat{F}_o)$ vaut -1 .

De même si R est le feuilletage de Reeb direct sur S^3 et Γ_o l'âme de la feuille compacte, $\ell(\Gamma_o,R) = -1$.

Remarquons que si Γ est une tresse fermée dont la tangente reste voisine de celle de Γ_o , l'enlacement de Γ avec F_o et R est le même, car R est homotope à F_o en restant fixe le long de Γ_o . Nous avons vu au numéro 16 que $\ell(\Gamma)$ est égal à la différence $c - n$, où c est la longueur algébrique de Γ et n son nombre de brins.

Pour le feuilletage F de S^3 associé à un noeud fibré K de genre g , comme le feuilletage de Reeb est associé au noeud trivial, on trouve $\ell(K,F) = 2g - 1$.



18) Soit F un champ de plan orienté sur une variété orientée de dimension 3. Et soit γ un entrelacs plongé dans M, homologue à zéro, *tangent* à F en chacun de ses points. On obtient un nouvel entrelacs γ' en poussant légèrement γ dans M suivant sa normale directe dans F.

DÉFINITION.— *L'enlacement de* γ *avec* γ' *s'appelle l'*autoenlacement de γ dans F. *On le note* $\tau(\gamma,F)$.

Remarquons que $\tau(\gamma,F)$ ne dépend que des plans de F le long de γ, il est donc bien défini, même si F n'est pas trivialisable. Par ailleurs $\tau(\gamma,F)$ ne change pas si l'on renverse l'orientation de γ ou celle de F.

Supposons maintenant que F soit parallélisable et orienté. Et considérons une collection γ de courbes immergées orientées tangentes à F en chacun de leurs points.

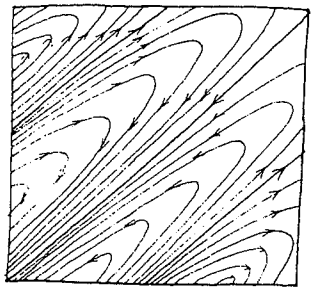
Nous supposerons également que γ est homologue à zéro dans M.

DÉFINITION.— *L'*enroulement de γ dans F, $\mu(\gamma,F)$, *est la variation totale de l'angle de la tangente à* γ *dans un repère direct* $(\vec{v},\vec{w})$ *trivialisant* F.

Le nombre $\mu(\gamma,F)$ change de signe si l'on renverse l'orientation de γ ou celle de F. Mais on vérifie que $\mu(\gamma,F)$ ne dépend pas du choix d'un champ de repères directs dans F exactement comme nous avons justifié la définition de ℓ par la proposition 5.

Exemples.— Dans le feuilletage de Reeb, τ est nul pour les courbes tracées sur les feuilles planes, mais $\tau = p.q$ pour un noeud torique de type (p,q) sur la

feuille compacte. Quant à μ c'est l'enroulement ordinaire dans les feuilles planes, mais c'est un enroulement tordu dans la feuille compacte T, car il faut compter la variation de la tangente par rapport au champ de vecteurs $\vec{v}$ suivant sur le tore :



DÉFINITION.— *Lorsque* F *est une structure de contact, les courbes lisses immergées tangentes à* F *s'appellent* courbes de Legendre de F.

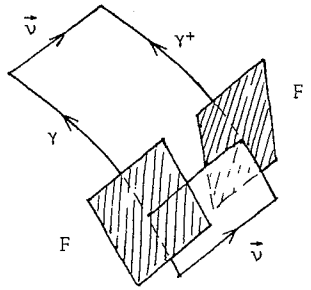
Un Théorème de [Gromov 2] et [Duchamp] nous apprend que deux courbes de Legendre homotopes à zéro, sont régulièrement homotopes parmi les courbes de Legendre si et seulement si elles ont même enroulement.

De façon générale [Gromov 2] et [Duchamp] montrent que l'espace des immersions de Legendre d'une variété V de dimension n dans une variété de contact M^{2n+1} a le type d'homotopie de l'espace des applications fibrées injectives lagrangiennes de $T(V)$ dans le fibré de contact F sur M.

19) Soit F une structure de contact *parallélisable* sur une variété M^3. Le champ F est transversalement orienté par une forme de contact α qui le définit. Supposons M orientée par la forme volume $\alpha \wedge d\alpha$, et F orienté par la forme $d\alpha$.

Soit γ un entrelacs tangent à F, et $\vec{\nu}$ la normale directe à γ dans F. *L'entrelacs* γ^+, *obtenu en poussant légèrement* γ *suivant* $\vec{\nu}$ *dans* M *est transverse à* F.

C'est justement ce que nous dit la *formule de Stokes* quand on l'applique à un rectangle infiniment petit ayant un côté sur γ, un côté sur γ^+ et les deux autres côtés suivant $\vec{\nu}$.



Au premier ordre en ε , la valeur de α sur la tangente à $\gamma + \varepsilon\vec{\nu}$ est égale à la valeur de $d\alpha$ sur le couple de vecteurs $(\varepsilon\vec{\nu},\vec{t})$, où $\vec{t}$ est la tangente à γ .

La restriction de α à γ^+ est toujours strictement négative. On dit alors que l'entrelacs γ^+ est *descendant* dans F .

De même l'entrelacs $\gamma^- = \gamma - \varepsilon\vec{\nu}$ est transverse à F , mais il est *ascendant* dans F .

PROPOSITION 6.— *Lorsque* γ *est homologue à zéro dans* M ,

$$\ell(\gamma^+) = \tau(\gamma) + \mu(\gamma)$$

et

$$\ell(\gamma^-) = \tau(\gamma) - \mu(\gamma) .$$

Démonstration.— Soit $\vec{\nu}$ une section non singulière de F sur M , et soit ε et ε' deux infiniment petits non nuls. Le nombre $\ell(\gamma + \varepsilon\vec{\nu})$ compte l'enlacement de $\gamma + \varepsilon\vec{\nu}$ avec $\gamma + \varepsilon\vec{\nu} + \varepsilon'\vec{\nu}$, et le nombre $\tau(\gamma)$ compte l'enlacement de γ avec $\gamma + \varepsilon'\vec{\nu}$ donc celui de $\gamma + \varepsilon\vec{\nu}$ avec $\gamma + \varepsilon\vec{\nu} + \varepsilon'\vec{\nu}$. Par suite la différence $\ell(\gamma^+) - \tau(\gamma)$ est égale à la variation totale de l'angle de $\vec{\nu}$ avec $\vec{\nu}$ dans F le long de γ^+ . Cette variation est la même le long de γ , elle vaut donc $\mu(\gamma)$. Donc $\ell(\gamma^+) = \tau(\gamma) + \mu(\gamma)$. L'autre égalité s'en déduit, car si l'on change α en $-\alpha$, $\alpha \wedge d\alpha$ ne change pas, mais l'orientation de F se renverse. La normale $\vec{\nu}$ devient $-\vec{\nu}$, γ^+ devient γ^- , ni ℓ ni τ ne changent, mais μ devient $-\mu$.

20) Soit F un champ de plans parallélisable, orienté, sur une variété orientée M^3 , et V une surface orientée immergée dans M . Le champ F induit un champ de directions orienté η sur V .

Par deux fois déjà nous avons rencontré ce champ. D'abord au numéro 5 pour annoncer une différence entre les propriétés globales et les propriétés locales des structures de contact. Puis au numéro 10, F était alors le feuilletage de Reeb sur S^3 et V était une surface de Markov.

Le champ de directions η porte un champ de vecteurs tangents à V que nous

désignerons également par la lettre η et que nous appellerons le *champ caractéristique* de V dans F (cf. [Lie]).

DÉFINITION.— *Soit* x_o *un point singulier isolé de* η , *c'est-à-dire un point de contact de* F *et de* V , *l'*indice tordu de η par rapport à F en x_o , *noté* $i_F(x_o)$, *est le degré de* η *considéré comme application d'un petit cercle trigonométrique entourant* x_o *dans* V *à valeurs dans le cercle des vecteurs unitaires de* F *repérés dans une trivialisation directe* $(\vec{v},\vec{w})$ *de* F .

Si les orientations de F et du plan tangent à V coïncident en x_o , l'indice tordu $i_F(x_o)$ est l'indice ordinaire du champ de vecteurs η en x_o , sinon c'est l'opposé.

PROPOSITION 7.— *Sur une surface* V *fermée immergée orientée la somme des indices tordus est nulle.*

Démonstration.— Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs non singulier sur M tangent à F en tout point. Soient $D_1,\ldots,D_k$ des petits disques de V centrés sur les points critiques de η , et $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ leurs bords orientés. Notons φ l'application du complémentaire des D_j dans V à valeurs dans le cercle que définit l'angle de η avec $\vec{v}$. La somme des indices tordus de η sur V est l'opposé du degré de la restriction de φ à la réunion des γ_j , elle est donc nulle.

DÉFINITION.— *Soit* V *une surface compacte orientée immergée dans* M *dont le bord* Γ *est plongé dans une variété orientée* M . *L'*enlacement au bord *de* V , *noté* $\rho(V)$, *est l'enlacement de* Γ *avec un entrelacs* $\tilde{\Gamma}$ *obtenu en poussant* Γ *suivant la normale à* V *dans* M .

THÉORÈME 7.— *Soit* Γ *un entrelacs homologue à zéro transverse à* F *de façon ascendante,* V *une surface compacte immergée dans* M *de bord* Γ , *orientée de telle manière que* Γ *soit son bord orienté. On a la formule suivante :*

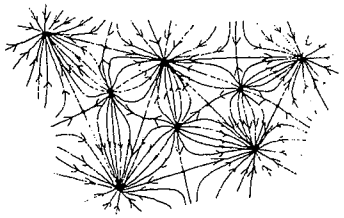
$$\ell(\Gamma,F) = \rho(V) - \sum_{x_j} i_F(x_j)$$

où la somme porte sur tous les points singuliers de η .

Démonstration.— Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs non singulier sur M tangent à F en tout point. La différence des enlacements $\ell(\Gamma,\Gamma+\varepsilon\vec{v}) = \ell(\Gamma,F)$ et $\ell(\Gamma,\Gamma+\varepsilon\vec{n}) = \rho(V)$ mesure la variation totale de l'angle φ que $\vec{v}$ fait avec $\vec{n}$ dans F le long de Γ . De même pour chaque x_j , $i_F(x_j)$ est la variation de φ le long du bord orienté d'un petit disque D_j de V centré en x_j . Puisque φ est défini sur toute la surface V , en dehors des disques D_j , on obtient la formule annoncée.

Remarque 1.— Tout entrelacs Γ homologue à zéro dans M borde une surface compacte orientée V plongée dans M (cf. [Rolfsen]), donc le nombre $-\ell(\Gamma,F)$ peut toujours s'interpréter comme une *caractéristique d'Euler tordue* par le champ F .

Remarque 2.– La formule d'Euler-Poincaré (cf. [Poincaré]) se démontre de la même manière que le Théorème 7. En effet, soient V une surface orientable fermée, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux champs de vecteurs tangents à V dont tous les points singuliers sont isolés ; appelons $x_1^1,\dots,x_s^1$ les points singuliers de $\vec{v}_1$, $x_1^2,\dots,x_t^2$ ceux de $\vec{v}_2$, D_j^i des petits disques centrés en ces points, γ_j^i leurs bords. La différence entre la somme des indices des x_j^1 et celle des indices des x_k^2 est égale à la variation totale de l'angle φ que $\vec{v}_1$ fait avec $\vec{v}_2$ sur la réunion des γ_j^i. En écrivant que φ est définie sur le complémentaire des D_j^i dans V on obtient donc que la somme des indices des points critiques d'un champ de vecteurs sur V est un invariant de V. On montre la même chose pour une surface non orientable U en passant au revêtement des orientations de U. Pour identifier cette somme avec la caractéristique d'Euler, on considère une triangulation de la surface et un champ de vecteurs qui possède une source au centre de chaque face, un puits sur chaque sommet, et un point selle au milieu de chaque arête (cf. [Hopf]).



Remarque 3.– Soit V une surface fermée orientée immergée dans une variété orientée M de dimension 3, et F un champ de plans orienté parallélisable sur M. Notons $\vec{\eta}$ le champ caractéristique de V. En mettant ensemble la proposition 7 et la formule d'Euler-Poincaré, on s'aperçoit que la somme des indices ordinaires des points singuliers de $\vec{\eta}$, où F a la même orientation que V (resp. l'orientation opposée) est égale à la moitié de la caractéristique d'Euler de V.

Remarque 4.– Soit R le feuilletage de Reeb direct sur S^3, Γ une tresse fermée, et V une surface orientée compacte plongée dans S^3 dont le bord est Γ. Quitte à perturber V très légèrement, on peut supposer que les points critiques de son champ caractéristique η sont non dégénérés. Soit S^+ (resp. S^-) le nombre des sommets (resp. des fonds) parmi les contacts tangents de V avec R ; soit A^+ (resp. A^-) le nombre des points cols où les orientations de V et de R coïncident (resp. diffèrent). La formule de Poincaré s'écrit :

$$-\chi(V) = -S^+ - S^- + A^+ + A^-$$

et le Théorème 7 :

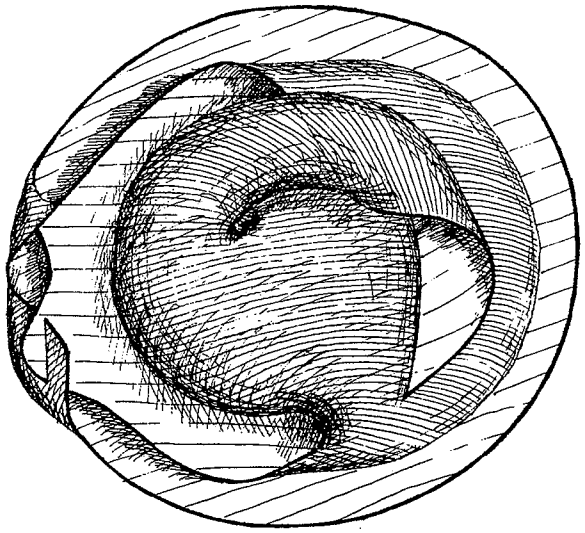
$$\ell = -S^+ + S^- + A^+ - A^- .$$

L'inégalité du Théorème 3 nous donne donc l'inégalité :

$$A^- \geq S^-$$

pour toute surface V de bord Γ, et pas seulement pour les surfaces de Markov (Théorème 6).

Remarque 5.– Soit Γ un cercle plongé dans S^3, quel que soit l'entier pair ρ, il existe un disque immergé dans S^3, de bord Γ et d'enlacement au bord ρ. Supposons que Γ soit une tresse fermée transverse à R, telle que $\ell(\Gamma,R) = 1$ (Γ sera donc nouée) et choisissons un disque D immergé de bord Γ avec $\rho(D) = 0$. Par exemple :



Le Théorème 7 nous dit :

$$1 = -S^+ + S^- + A^+ - A^-$$

et la formule de Poincaré

$$1 = S^+ + S^- - A^+ - A^-$$

on a donc

$$A^- = S^- - 1 .$$

Par conséquent l'inégalité $A^- \geq S^-$ est une propriété des surfaces *plongées*. (Notez que le disque dessiné a toutes les propriétés markoviennes sauf d'être plongé.)

21) Reprenons un instant la discussion des numéros 14, 15, 16. Soit V_o un germe de courbe algébrique complexe en 0 dans $\mathbb{C}^2$, d'équation $f(z_o,z_1) = 0$, où f est un polynôme sans facteur carré. Notons Γ l'entrelacs de la singularité de

V_o en 0 , obtenu en coupant V_o par une petite sphère S de centre 0 . La courbe Γ est transverse ascendante à la structure de contact standard $\hat{F}_o$ de S . Soit μ le nombre de Milnor de V_o en 0 et ℓ le nombre d'enlacement de Γ avec $\hat{F}_o$. Voyons comment le Théorème 7 entraîne l'égalité

$$\ell = \mu - 1 .$$

[J. Milnor 2] prouve que la restriction à $S \setminus \Gamma$ de la fonction

$$\vartheta(z) = \frac{1}{i}(\log(f(z)) - \log(|f|(z)))$$

est une fibration au dessus du cercle S^1 . Et il démontre que sa fibre est une surface ouverte connexe $\overset{\circ}{W}_\vartheta$ dont la fermeture dans S est une surface compacte connexe W_ϑ de bord Γ et de caractéristique d'Euler $1-\mu$. Orientons W_ϑ de manière que Γ soit son bord orienté. Le Théorème 7 nous dit que le nombre $\ell + 1 - \mu$ compte les indices des points de tangence de W_ϑ avec $\hat{F}_o$ où les orientations diffèrent. Par conséquent il nous suffit de montrer que tous les plans tangents de W_ϑ qui sont des droites complexes de $\mathbb{C}^2$ ont l'orientation complexe.

Notons $v(z)$ le champ des normales unitaires aux fibres W_ϑ dans $S \setminus \Gamma$; et notons $\langle a,b\rangle = a_0\overline{b}_0 + a_1\overline{b}_1$ la forme hermitienne de $\mathbb{C}^2$, et (a,b) le produit scalaire $\mathrm{Re}(\langle a,b\rangle)$. Enfin si g est une fonction holomorphe de $z = (z_0,z_1)$ nous posons $\mathrm{grad}.g = \left(\frac{\overline{\partial g}}{\partial z_1}, \frac{\overline{\partial g}}{\partial z_2}\right)$.

Soit $p(t)$ un chemin différentiable dans S , on a

$$\frac{d\vartheta(p(t))}{dt} = \left(\frac{dp}{dt}, v\right)$$

d'autre part

$$\frac{d\vartheta(p(t))}{dt} = \mathrm{Re}\left(i\,\frac{d\log(f(p(t)))}{dt}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\left\langle \frac{dp}{dt}, i\ \mathrm{grad}.\log(f)\right\rangle\right)$$

donc, en tout point z de S ,

$$v(z) = a(z)z + i\ \mathrm{grad}.\log(f(z))$$

où a est une fonction de z à valeurs réelles.

Si z est un point de tangence de W_ϑ et de $\hat{F}_o$, le vecteur $v(z)$ est proportionnel à iz sur $\mathbb{R}$, soit $v(z) = ibz$ avec b réel. Donc

$$\mathrm{grad}.\log(f(z)) = (b + ia)z , \qquad a,b \in \mathbb{R} .$$

Or une telle relation de dépendance ne peut avoir lieu que si b est un nombre strictement positif, en vertu du lemme 4.3, page 35 de [Milnor 2]. Donc $v(z)$ pointe dans la même direction que iz. C.Q.F.D.

Au numéro 16 nous avons montré que l'égalité $\ell = \mu - 1$ résulte d'une propriété globale des courbes analytiques complexes de $\mathbb{C}^2$. Nous allons revoir ce résultat grâce à une interprétation de ℓ en géométrie complexe inspirée par une note de [Eliashberg et Harlamov] .

22) Soit G la grassmannienne des plans orientés de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ qui passent par l'origine. Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Considérons un élément P de G et (v,w) une base orthonormée directe de P . En termes de bivecteurs, on a

$$v \wedge w = p_{12}e_1\wedge e_2 + p_{23}e_2\wedge e_3 + p_{31}e_3\wedge e_1 + p_{34}e_3\wedge e_4 + p_{14}e_1\wedge e_4 + p_{24}e_2\wedge e_4 .$$

Les p_{ij} sont les coordonnées de Plücker de P , elles ne dépendent pas du choix de la base (v,w) et satisfont les équations :

$$\begin{cases} p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0 \\ p_{12}^2 + p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{34}^2 + p_{14}^2 + p_{24}^2 = 1 \end{cases}$$

Inversement, six nombres réels satisfaisant ces équations définissent un élément P de G .

Posons

$$x_1 = p_{12} + p_{34} \qquad x_2 = p_{23} + p_{14} \qquad x_3 = p_{31} + p_{24}$$

$$y_1 = p_{12} - p_{34} \qquad y_2 = p_{23} - p_{14} \qquad y_3 = p_{31} - p_{24} .$$

La variété G est isomorphe au sous-espace de $\mathbb{R}^6$ défini par les deux équations suivantes :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad \text{et} \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$$

(cf. [Blaschke] et [Chern et Spanier]).

Si S_1 désigne la sphère des x et S_2 la sphère des y , on a $G = S_1 \times S_2$.

Munissons $\mathbb{R}^4$ de la structure complexe qui vérifie $e_2 = ie_1$ et $e_4 = ie_3$. Nous identifions ainsi $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{C}^2$.

Le sous-espace de G défini par

$$x_1 = 1 , \quad x_2 = 0 , \quad x_3 = 0$$

est l'ensemble S_2^+ des droites complexes de $\mathbb{C}^2$, munies de leur orientation complexe, alors que

$$x_1 = -1 , \quad x_2 = 0 , \quad x_3 = 0$$

est l'ensemble S_2^- des droites complexes avec l'orientation opposée (cf. [Bishop]).

A présent regardons une immersion f d'une surface orientée V dans $\mathbb{R}^4$.

L'application de Gauss g de f associe à chaque point m de V l'élément de G parallèle au plan tangent de $f(V)$ en $f(m)$. Elle se décompose en deux applications de V dans la sphère de dimension 2 : g_1 à valeurs dans S_1 et g_2 à valeurs dans S_2 .

Nous appellerons *points complexes* de f , les points de V que l'application de Gauss g envoie dans S_2^+ ou dans S_2^- . Génériquement les points complexes se répartissent en quatre espèces différentes, selon que l'orientation du plan tangent est complexe ou non et selon que l'application g_1 renverse ou non l'orientation. Un point complexe m est *positif* (resp. *négatif*) si $g(m)$ tombe dans S_2^+ (resp.

S_2^-) ; il est *elliptique* (resp. *hyperbolique*) si le degré de g_1 en m est positif (resp. négatif).

D'après [Bishop] un point complexe m est elliptique (resp. hyperbolique) si il existe des coordonnées (z,w) , holomorphes, ou antiholomorphes, sur un voisinage de $f(m)$ dans $\mathbb{C}^2$, qui s'annulent au point $f(m)$, et dans lesquelles l'équation locale de $f(V)$ en $f(m)$ s'écrit :

$$w = z\bar{z} + \beta(z^2 + \bar{z}^2) + O(|z|^3)$$

avec $\beta < \frac{1}{2}$ (resp. $\beta > \frac{1}{2}$).

Notons e^+ (resp. e^-) le nombre des points elliptiques positifs (resp. négatifs) sur V , et h^+ (resp. h^-) le nombre des points hyperboliques positifs (resp. négatifs) sur V .

Lorsque V est une surface *fermée* orientée *immergée* dans $\mathbb{C}^2$, on a

$$e^+ - h^+ - e^- + h^- = 0 .$$

En effet le degré de la première application de Gauss, g_1 , se compte aussi bien au dessus du pôle nord de S_1 qu'au dessus du pôle sud de S_1 , et, dans le premier cas, on trouve $e^+ - h^+$ alors que, dans le second cas, on trouve $e^- - h^-$.

Nous dirons qu'un point elliptique positif ou hyperbolique négatif est d'*indice tordu* $+1$. Les autres sont d'indice tordu -1 .

Si V est *plongée*, un résultat classique de Whitney nous dit qu'il existe un champ de vecteurs $\vec{v}$ non nuls normaux à V dans $\mathbb{C}^2$ (voir par exemple [Chern et Spanier]). Plaçons-nous dans le cas générique où les points complexes de V sont non dégénérés. Et considérons le champ F des droites complexes orthogonales à $\vec{v}$ le long de V ; soit $\vec{\eta}$ la trace de F sur V .

Lemme 1.— *Les points complexes elliptiques de* V *sont les points d'indice* 1 *de* $\vec{\eta}$ *et les points hyperboliques sont ceux d'indice* -1 .

Démonstration.— Les points complexes de V sont isolés et les divers choix possibles de $\vec{v}$ sont tous homotopes. Il suffit donc de vérifier l'assertion sur les formes normales

$$w = z\bar{z} + \beta(z^2 + \bar{z}^2) ,$$

avec $\vec{v}$ parallèle à l'axe imaginaire pur du plan des w . Dans ce cas les courbes intégrales de $\vec{\eta}$ sur V se projettent sur les courbes de niveaux de la fonction

$$x^2 + y^2 + 2\beta(x^2 - y^2)$$

dans le plan de la coordonnée complexe $z = x + iy$.

Une conséquence immédiate du lemme 1. :

PROPOSITION 8 ([Bishop]).— *Lorsque* V *est une surface fermée orientée plongée dans* $\mathbb{C}^2$, *on a*

$$e^+ - h^+ + e^- - h^- = \chi(V) .$$

et

$$\text{degré}(g_1) = e^+ - h^+ = e^- - h^- = \frac{1}{2}\chi(V) .$$

Montrons comment ces formules entraînent le résultat suivant de [Blaschke] et [Chern et Spanier] :

THÉORÈME.— *Soit* V *une surface fermée orientée plongée dans* $\mathbb{C}^2$, g_1 *et* g_2 *les deux composantes de son application de Gauss, on a*

$$\text{degré}(g_1) = \text{degré}(g_2) = \frac{1}{2}\chi(V) .$$

Démonstration.— Notons σ la symétrie de $\mathbb{R}^4$ par rapport à l'hyperplan (e_1,e_2,e_3) . Soient p_{ij} les coordonnées de Plücker d'un élément P de G , celles de $\sigma(p)$ s'obtiennent en changeant p_{i4} en $-p_{i4}$, pour $i = 1,2,3$, et en ne changeant pas les autres p_{ij} . Donc σ agit sur $G = S_1 \times S_2$ en permutant les deux facteurs. Soient g_1 et g_2 les deux indicatrices de V ; notons $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ les deux indicatrices de l'image $\bar{V}$ de V par σ . Les indicatrices g_2 et $\bar{g}_1$ définissent la même application de V dans la sphère S^2 , donc le degré de g_2 est égal à celui de $\bar{g}_1$, qui vaut $\frac{1}{2}\chi(V)$ d'après la proposition 8 appliquée à la surface $\bar{V}$. Et le degré de g_1 vaut également $\frac{1}{2}\chi(V)$, toujours en vertu de la proposition 8.

Remarque 1.— Soit S une sphère de dimension 2 plongée dans $\mathbb{C}^2$, la proposition 8 nous dit qu'il y a au moins deux points complexes elliptiques sur S . Nous apprenons aussi que les seules sous-variétés fermées orientées de dimension 2 sans point complexe de $\mathbb{C}^2$ sont des tores T^2 .

Remarque 2.— [Lai] a étendu les identités sur les points complexes à toutes les surfaces réelles plongées dans des surfaces analytiques complexes. Soit V fermée orientée plongée dans W , notons $c(V)$ la valeur de la première classe de Chern de W sur le cycle défini par V , et $\nu(V)$ le nombre d'Euler du fibré normal de V dans W , on a

$$e^+ - h^+ - e^- + h^- = c(V)$$

et

$$e^+ - h^+ + e^- - h^- = \chi(V) + \nu(V) .$$

[Eliashberg et Harlamov] conjecturent que pour $c(V) > 0$, on doit avoir $h^- > e^-$. Cela entraînerait la conjecture suivante, attribuée à Thom : si V est une surface fermée orientée connexe plongée dans $\mathbb{CP}^2$, de degré d dans $H_2(\mathbb{CP}^2;\mathbb{Z})$, alors le genre de V est supérieur ou égal à $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Cette conjecture de Thom entraînerait la conjecture de Milnor discutée au numéro 14 (voir [Boileau et Weber]).

Définitions.— Une sous-variété orientée Γ de dimension 1 dans $\mathbb{R}^4$, équipée avec un champ de vecteurs $\vec{v}$ unitaires perpendiculaires à Γ dans $\mathbb{R}^4$, s'appelle un *ruban*. Un ruban $(\Gamma,\vec{v})$ est *totalement réel* si en aucun point de Γ la tangente

$\vec{t}$ à Γ n'est dépendante linéairement de l'épine $\vec{v}$ sur $\mathbb{C}$.

Soit $(\Gamma,\vec{v})$ un ruban totalement réel. En tout point m de Γ , considérons le plan $H(m)$ qui contient la tangente $\vec{t}$ à Γ et l'épine $\vec{v}$, et orientons-le avec le repère $(\vec{t},\vec{v})$. La projection sur S_1 du point $H(m)$ de $G = S_1 \times S_2$, n'est jamais le pôle nord $(x_1 = 1 , x_2 = 0 , x_3 = 0)$ ni le pôle sud $(x_1 = -1 , x_2 = 0 , x_3 = 0)$. A $(\Gamma,\vec{v})$ on peut donc associer le nombre $\ell(\Gamma,\vec{v})$ qui compte les tours de H autour de l'axe Nord-Sud de S_1 . On appelle $\ell(\Gamma,\vec{v})$ l'*indice de Maslov du ruban totalement réel* $(\Gamma,\vec{v})$. Ce nombre se note également $\ell(\Gamma,H)$.

Soit V une surface orientée compacte à bord immergée dans $\mathbb{R}^4$. Et soit $\vec{v}$ le champ des vecteurs tangents à V et rentrant dans V , le long de Γ . Supposons que $(\Gamma,\vec{v})$ soit un ruban totalement réel. L'indice de Maslov de $(\Gamma,\vec{v})$ est l'opposé de la somme des indices tordus des points complexes de V , on a

$$\ell(\Gamma,\vec{v}) = - e^+ + h^+ + e^- - h^- .$$

En effet, la première composante g_1 de l'application de Gauss applique V dans S_1 ; les points complexes de V sont ceux que g_1 envoie sur les pôles, et leurs indices tordus comptent les signes de l'intersection avec l'axe Sud-Nord.

Soit ω la forme symplectique standard de $\mathbb{R}^4$. Si les p_i , $1 \le i \le 4$, sont les coordonnées du point courant de $\mathbb{R}^4$ sur les vecteurs de base e_i , $1 \le i \le 4$, on a

$$\omega = dp_1 \wedge dp_2 + dp_3 \wedge dp_4 .$$

Un petit calcul montre que sur un bivecteur $v \wedge w$ de norme 1 dont les coordonnées de Plücker sont les six nombres p_{ij} , la forme ω prend la valeur $x_1 = p_{12} + p_{34}$.

Soit Λ la sous-variété de G formée par les plans *lagrangiens* orientés de $(\mathbb{R}^4,\omega)$, c'est-à-dire les plans qui annulent ω . La variété Λ s'identifie avec le produit $S^1 \times S_2$ de l'équateur S^1 de S_1 par la sphère des droites complexes S_2 .

La variété G est la base d'une quadrique de $\mathbb{R}^6$ et Λ est une section hyperplane générique de G , elle porte le nom de *complexe linéaire*.

Soit S^3 la sphère de rayon 1 , et de centre 0 dans $\mathbb{R}^4$. Les traces sur S^3 des plans de $\mathbb{R}^4$ qui passent par 0 sont les grands cercles de S^3 , les traces des plans *lagrangiens* sont les grands cercles *legendriens* de la structure de contact $\hat{F}_o$. Et si m est un point de S^3 , la famille des cercles de Legendre issus de m engendre le plan de $\hat{F}_o$ en m (voir [Lie]).

Lorsque Γ est une courbe dans $\mathbb{R}^4$ armée par un champ de plans tangents lagrangiens H , le nombre $\ell(\Gamma,H)$ est l'indice de Maslov de [Arnold 3].

Soit Γ un entrelacs de S^3 transverse à $\hat{F}_o$ et *ascendant*. Considérons une surface de Seifert V de Γ dans S^3 , et notons η le champ caractéristique de

V dans la structure $\hat{F}_o$. Les points critiques de η sont les points complexes de V , et le lemme 1 nous dit que l'indice tordu complexe coïncide avec l'indice tordu par $\hat{F}_o$. Armons la courbe Γ avec le champ de vecteurs $\vec{v}$ tangents à V , rentrant dans V le long de Γ . Le ruban $(\Gamma,\vec{v})$ est totalement réel, et le Théorème 7 entraîne que son indice de Maslov est égal au nombre d'enlacement de Γ avec la structure $\hat{F}_o$.

A présent, considérons une courbe analytique complexe W dans $\mathbb{C}^2$, qui rencontre S^3 transversalement selon un entrelacs Γ . Appelons $\overline{W}$ la partie de W qui est contenue dans la boule B^4 de bord S^3 , et notons V une surface de Seifert de Γ dans S^3 . Soit $\vec{v}$ (resp. $\vec{w}$) le champ des normales rentrantes dans V (resp. $\overline{W}$) le long de Γ , et $\vec{t}$ la tangente à Γ . Considérons encore le champ $\vec{x} = \cos\varepsilon\vec{w} + \sin\varepsilon\vec{v}$, ε réel petit strictement positif. Le ruban $(\Gamma,\vec{x})$ est totalement réel et son indice de Maslov est le même que celui de $(\Gamma,\vec{v})$, puisqu'aucun des plans $\vec{t} \wedge (\cos\vartheta\vec{w} + \sin\vartheta\vec{v})$ ne devient complexe lorsque ϑ croît de ε à $\pi/2$.

Soit X une surface différentiablement voisine de $\overline{W}$, bordée par Γ , tangente à $\vec{x}$ le long de Γ . Le champ des normales aux plans $\vec{t} \wedge \vec{x}$ le long de Γ s'étend en un champ de vecteurs non nuls $\vec{y}$ le long de X , perpendiculaires à X , car le champ $\vec{v}$ se prolonge en un champ transverse à X , puisque Γ ne s'enlace pas avec $\vec{v}$ dans S^3 . Notons F le champ des droites complexes orthogonales à $\vec{y}$ et η la trace de F sur la surface X . Le champ η n'est jamais colinéaire à $\vec{t}$ le long de Γ car $\vec{y}$ ne peut pas être perpendiculaire à $\vec{w}$. Donc la caractéristique d'Euler de X est la somme des indices des points singuliers de η ; d'après le lemme 1, cette somme n'est pas autre chose que la différence entre le nombre e des points complexes elliptiques de X et le nombre h des points complexes hyperboliques de X . Mais les points complexes de X sont tous positifs puisque la surface X est voisine d'une courbe analytique complexe, donc $\ell(\Gamma,\vec{x})$ est aussi égal à $e - h$. Par conséquent

$$-\chi(\overline{W}) = -\chi(X) = \ell(\Gamma,\vec{x}) = \ell(\Gamma,\vec{v}) ,$$

ce qui fournit bien une autre démonstration de la proposition 4 du numéro 16 :

$$-\chi(\overline{W}) = \ell(\Gamma,\hat{F}_o) .$$

IV. UNE IMAGE DES STRUCTURES DE CONTACT EN DIMENSION 3

23) L'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté par le repère orthonormé $0xyz$. Les coordonnées polaires associées sont $\vartheta = \operatorname{arctg} y/x$ et $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$.

F_o désigne la structure de contact standard directe de $\mathbb{R}^3$. Son équation est :

$$xdy + dz = 0 .$$

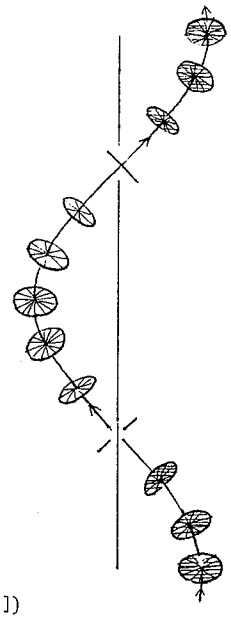
Elle est isomorphe à la structure $\tilde{F}_o$ définie par l'équation :

$$\rho^2 d\vartheta + dz = 0$$

en vertu de l'identité suivante :

$$(2x)dy + d(z - xy) = dz + xdy - ydx .$$

Orientons les plans de $\tilde{F}_o$, comme ceux de F_o, avec leurs normales dirigées du côté où pointe l'axe $0z$.



(D'après la figure 46 de [Lie])

Les plus simples des courbes transverses à $\tilde{F}_o$ sont les cercles horizontaux centrés sur l'axe $0z$.

THÉORÈME 8.— *Tout entrelacs Γ transverse à $\tilde{F}_o$, ascendant dans $\tilde{F}_o$, est isotope, parmi les entrelacs transverses, à une tresse fermée autour de l'axe des z.*

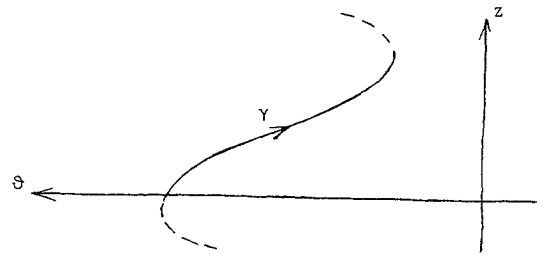
Démonstration.— Paramétrons Γ par l'abscisse curviligne t et notons $\dot{z}$, $\dot{\rho}$, $\dot{\vartheta}$ les composantes de la tangente à Γ.

Il est toujours possible de bouger Γ un tout petit peu pour éviter l'axe $0z$.

Il existe alors deux types de morceaux de courbes dans Γ, les *bons brins*, qui vérifient $\dot{\vartheta} > 0$ et les *mauvais* qui vérifient $\dot{\vartheta} < 0$. Aucune composante de Γ toute entière ne peut être mauvaise puisque Γ est ascendante dans $\tilde{F}_o$ et fermée.

Soit γ un mauvais brin, on est obligé d'avoir $\dot{z} > 0$ tout le long de γ.

Dessinons la situation sur le plan des (z,ϑ). Le brin γ est le graphe d'une fonction monotone.



Quitte à morceler les mauvais brins, on peut supposer qu'aucun d'entre eux ne fait plus d'un tour autour de $0z$. L'opération de morcellement est celle que décrit le dessin suivant :



Premièrement.— Montrons qu'une petite isotopie de Γ nous ramène au cas où aucun brin ne vient s'interposer entre l'axe $0z$ et le mauvais brin γ.

En projection radiale sur le plan (z,ϑ) il y a a priori quatre types de croisements de Γ qui nous gênent. Si γ' désigne un brin passant devant γ, et $\dot{\vartheta}$, $\dot{z}$ les dérivées sur γ au point de croisement, respectivement $\dot{\vartheta}'$, $\dot{z}'$ les dérivées sur γ', ce sont les cas suivants :

(1) $\dot{\vartheta}' > 0$ et $\dfrac{\dot{z}'}{\dot{\vartheta}'} > \dfrac{\dot{z}}{\dot{\vartheta}}$:

(2) $\dot{\vartheta}' < 0$ et $\dfrac{\dot{z}'}{\dot{\vartheta}'} < \dfrac{\dot{z}}{\dot{\vartheta}}$:

(3) $\dot{\vartheta}' < 0$ et $\dfrac{\dot{z}'}{\dot{\vartheta}'} > \dfrac{\dot{z}}{\dot{\vartheta}}$:

(4) $\dot{\vartheta}' > 0$ et $\dfrac{\dot{z}'}{\dot{\vartheta}'} < \dfrac{\dot{z}}{\dot{\vartheta}}$:

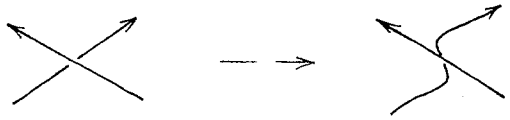
Une petite perturbation transverse de γ supprime tous les points (3),



une autre remplace tous les points (2) par des points (1),



et une autre fait disparaître tous les points (1)



Quant à (4) on n'arrive pas à le supprimer, mais, heureusement, il n'a jamais lieu.

En effet si un point de croisement de Γ sur (z,ϑ) vérifie $\dot\vartheta < 0$, $\dot\vartheta' > 0$ et $\rho' < \rho$, de $\rho^2\dot\vartheta + \dot z > 0$ et $\rho'^2\dot\vartheta' + \dot z' > 0$ on déduit $\rho^2 + \frac{\dot z}{\dot\vartheta} < 0$ et $\rho'^2 + \frac{\dot z'}{\dot\vartheta'} > 0$, donc $\rho'^2 < \rho^2$ entraîne $\frac{\dot z}{\dot\vartheta} < \frac{\dot z'}{\dot\vartheta'}$.

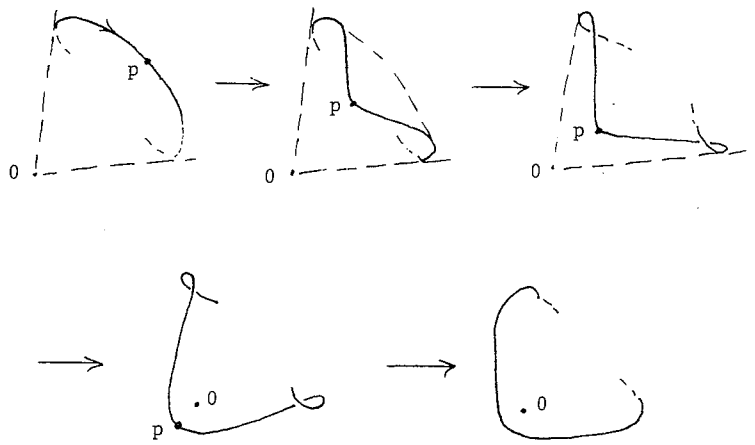
Deuxièmement.— Lorsqu'on a un mauvais brin γ de Γ tel qu'aucun autre morceau de Γ ne s'interpose entre lui et l'axe des z, on peut le transformer en un bon brin par une isotopie transverse.

Démonstration : Une première étape consiste à tirer le brin pour en amener un point p près de l'axe des z, sans bouger ses extrémités, en gardant constamment les mêmes valeurs des fonctions $z(t)$ et $\vartheta(t)$, et en diminuant toujours $\rho(t)$. Ces conditions garantissent l'inégalité $\dot z + \rho^2\dot\vartheta > 0$ à chaque instant car $\dot\vartheta < 0$.

Ensuite on fait passer le point p de l'autre côté de $0z$.

Remarque.— Les manipulations que nous sommes en train de faire pour démontrer le Théorème 8, sont essentiellement les mêmes que celles de [Alexander] pour démontrer que tous les noeuds se mettent sous forme de tresses.

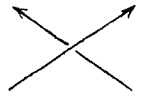
Exemple dessiné sur (ρ,ϑ) :



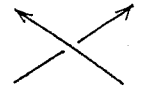
Sur la courbe finale, il y a un mauvais brin en moins.

Finalement.— La disparition d'un mauvais brin γ peut faire apparaître de nouveaux croisements gênants. Mais lorsqu'on tire un par un les morceaux de γ de l'autre côté de l'axe des z, ils ne vont pas venir se mettre devant d'autres morceaux de γ à cause de la croissance de z sur γ. De plus, la suppression des croisements ne demande pas de modification des bons brins. Par conséquent, on peut supprimer un à un les mauvais brins sans revenir sur ce qui a déjà été fait. Le théorème est démontré.

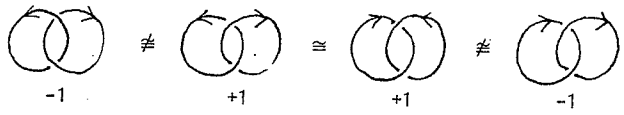
24) Appelons croisement *positif* de la projection sur $0xy$ d'un entrelacs de $\mathbb{R}^3$, un point double du type suivant :



Un point double de l'autre type est un croisement *négatif* :



L'enlacement de deux entrelacs disjoints Γ et Γ' est la somme algébrique des croisements où Γ passe au dessus de Γ'. Ce qui donne

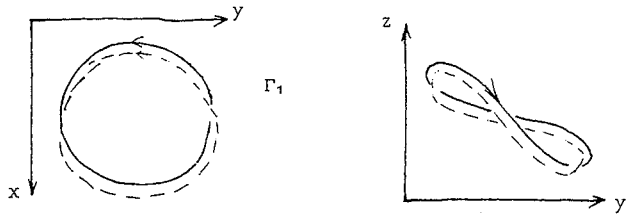


Soit Γ un entrelacs transverse à F_o , l'enlacement de Γ avec F_o est égal à l'enlacement de Γ avec un translaté infiniment proche dans la direction parallèle à l'axe des x .

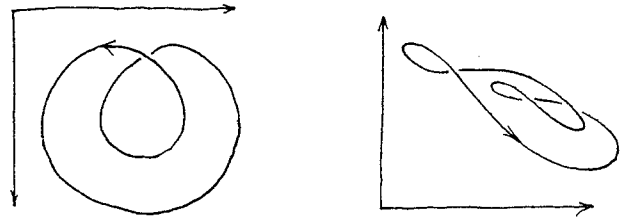
Donc $\ell(\Gamma,F_o)$ est simplement égal au nombre algébrique des croisements de la projection sur Oyz parallèlement à Ox .

Il existe aussi une formule simple pour calculer $\ell(\Gamma,F_o)$ à partir de la projection de Γ parallèlement à Oz sur le plan des (x,y) : le nombre $\ell(\Gamma,F_o)$ s'obtient en ajoutant à la somme algébrique des croisements, le nombre des maxima de y où x et z ont le même sens de variation, puis en retranchant le nombre des minima de y où x et z ont le même sens de variation.

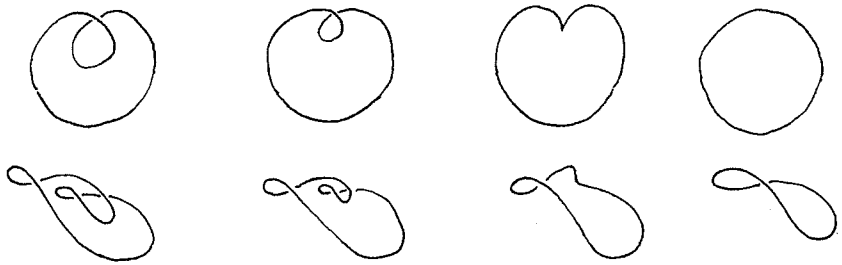
Exemples



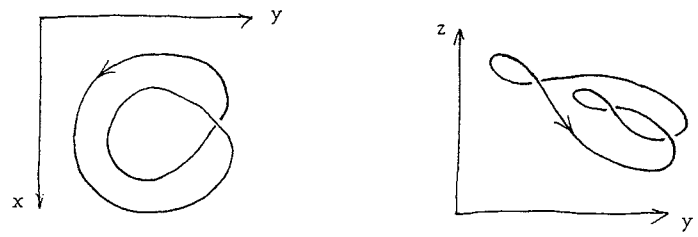
De même $\ell = -1$ pour la courbe suivante Γ_1'



En fait les courbes Γ_1 et Γ_1' sont isotopes transversalement à F_o

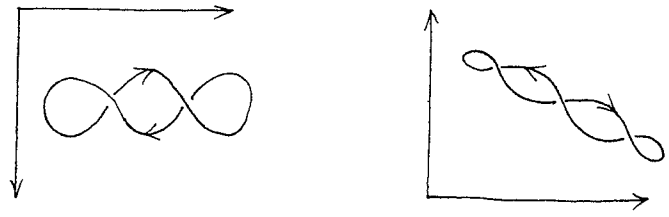


Par contre Γ_1 n'est pas transversalement isotope à Γ_2



car $\ell(\Gamma_2) = -3$.

Mais Γ_2 est transversalement isotope à Γ_2' :



La formule qui donne l'enlacement avec F_o à l'aide de la projection sur le plan des (x,y) , s'applique encore pour calculer l'enlacement d'un entrelacs transverse à $\tilde{F}_o$ avec $\tilde{F}_o$. Car le difféomorphisme $(x,y,z) \to (2x,y,z-xy)$ qui transforme F_o en $\tilde{F}_o$ est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui préservent la coordonnée y et qui envoient toute droite parallèle à Oz sur une droite parallèle à Oz .

En particulier, si Γ est une tresse fermée autour de l'axe des z , ascendante par rapport à $\tilde{F}_o$, notre formule s'écrit

$$\ell(\Gamma,\tilde{F}_o) = c - n$$

où c est la longueur algébrique de la tresse Γ et n son nombre de brins (voir numéro 8).

Donc le Théorème 3 et le Théorème 8 entraînent ensemble le résultat suivant :

THÉORÈME 9.– *Soit Γ une collection de courbes orientées plongées dans $\mathbb{R}^3$ qui sont toutes transverses ascendantes, ou toutes transverses descendantes, dans la structure de contact standard directe de $\mathbb{R}^3$. On a*

$$\ell(\Gamma) \leq -\chi(\Gamma) .$$

25) Considérons maintenant la structure de contact standard $\hat{F}_o$ de la sphère S^3 , formée des plans orthogonaux à la fibration de Hopf. En coordonnées polypolaires sur $\mathbb{C}^2$, la structure $\hat{F}_o$ est décrite par l'équation de Pfaff :

$$\rho_o^2 d\vartheta_o + \rho_1^2 d\vartheta_1 = 0 \ .$$

Nos coordonnées sur $\mathbb{C}^2$ sont $z_o = x_o + iy_o = \rho_o \exp(i\vartheta_o)$ et $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 \exp(i\vartheta_1)$. La sphère S^3 a pour équation $z_o\bar{z}_o + z_1\bar{z}_1 = 1$. Notons S_o^+ (resp. S_o^-) la demi-grande sphère contenue dans S^3 définie par $\vartheta_o = 0$ (resp. $\vartheta_o = \pi$), et S^2 la réunion de S_o^+ et de S_o^- . Sur le domaine $U = S^3 \setminus S_o^+$, difféomorphe à $\mathbb{R}^3$, la structure $\hat{F}_o$ s'écrit

$$d\vartheta_o + \frac{\rho_1^2}{\rho_o^2} d\vartheta_1 = 0 \ ,$$

elle est donc isomorphe à $\tilde{F}_o$.

Nous allons construire un groupe à un paramètre φ_t de difféomorphismes de S^3 , préservant la structure $\hat{F}_o$, et envoyant la sphère S^2 sur elle-même, en entraînant tous les points de S^2 sauf le pôle nord $(x_o = 1)$ vers le pôle sud $(x_o = -1)$.

Un groupe à un paramètre de difféomorphismes préservant une structure de contact F sur une variété M s'obtient en intégrant un *champ de contact* de F , c'est-à-dire un champ de vecteurs dont la dérivée de Lie laisse F invariante. Voyons à quoi ressemblent ces champs.

Soit α une 1-forme définissant F . Notons ξ le *champ de Reeb* de α , c'est-à-dire l'unique champ de vecteurs sur M vérifiant $\iota_\xi \alpha = 1$ et $\vartheta_\xi \alpha = 0$, où ι_ξ désigne le produit intérieur et ϑ_ξ la dérivée de Lie. Le champ ξ est tangent aux lignes caractéristiques de $d\alpha$. C'est un champ de contact particulier de F (voir [Reeb 2]).

Plus généralement, si H est une fonction différentiable sur M , il existe un champ de contact de F et un seul $\eta = \eta_H$, tel que $\iota_\eta \alpha = H$. Il est donné par la formule

$$\eta = H.\xi + v$$

où v est défini sans ambiguïté par

$$\iota_v \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \iota_v d\alpha = \vartheta_\xi H.\alpha - dH$$

en vertu de la non dégénérescence de $d\alpha$ sur F . Ce champ s'appelle le *gradient de contact* de H , et la fonction H est son *hamiltonien de contact*. La correspondance dépend du choix d'une forme α portée par F . Mais si $H = 0$ est l'équation d'une hypersurface lisse S de M , le champ η_H est tangent le long de S aux directions du *champ caractéristique* de S dans F , qui est l'orthogonal symplectique pour $d\alpha$ dans F de l'intersection de F avec l'hyperplan tangent à S . Les zéros de η_H dans M sont les points de S où S est tangente à F (voir [Libermann] et [Lie]).

Donc, pour la forme $\hat{\alpha} = \rho_o^2 d\vartheta_o + \rho_1^2 d\vartheta_1$ sur S^3 , le gradient de contact η de la fonction $H(z_o, z_1) = -y_o$, est tangent à la sphère S^2 d'équation $y_o = 0$, et il est colinéaire sur S^2 au champ caractéristique de S^2 dans $\hat{F}_o$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_o &= x_o^2 - 1 \\ \dot{y}_o &= 0 \\ \dot{z}_o &= x_o z_1 \ . \end{aligned}$$

Par conséquent le champ η engendre un flot de contact φ_t de $\hat{F}_o$ qui induit sur S^2 un flot dont toutes les orbites partent du pôle $(x_o = +1)$ pour aller au pôle $(x_o = -1)$.

Pour un temps T positif suffisamment grand, le difféomorphisme φ_T expédie le complémentaire W dans S^3 d'une petite boule B centrée au point $(x_o = 1)$, à l'intérieur de l'ouvert U .

Soit Γ une collection de courbes plongées dans S^3 ascendantes par rapport à $\hat{F}_o$. Après une perturbation minime Γ évite la petite boule B . La famille de difféomorphismes φ_t , $0 \le t \le T$, déforme Γ en un entrelacs $\hat{\Gamma}$ contenu dans U , à travers les entrelacs transverses à $\hat{F}_o$. Le Théorème 8 intervient pour dire que $\hat{\Gamma}$ est transversalement isotope à une tresse fermée autour du cercle des ϑ_o . Nous avons démontré l'analogue du Théorème 8 pour $\hat{F}_o$:

THÉORÈME 10.— *Tout entrelacs transverse à la structure de contact standard* $\hat{F}_o$ *de* S^3 *est transversalement isotope à un entrelacs dont la tangente est aussi proche que l'on veut de la direction d'une fibre de la fibration de Hopf.*

Grâce au calcul de $\ell(\Gamma, \hat{F}_o)$ au numéro 16, le Théorème 10 et le Théorème 3 entraînent l'analogue pour $\hat{F}_o$ du Théorème 9 :

THÉORÈME 11.— *Soit* Γ *un entrelacs de* S^3 *ascendant (resp. descendant) par rapport à la structure de contact standard directe de* S^3 *. On a*

$$\ell(\Gamma) \le -\chi(\Gamma) \ .$$

Ne nous étonnons pas que les propriétés des courbes transverses à F_o s'étendent aux courbes transverses à $\hat{F}_o$. En effet

THÉORÈME ([Erlandsson]).— *La structure induite par* $\hat{F}_o$ *sur le complémentaire d'un point dans* S^{2n+1} *est isomorphe à la structure* F_o *sur* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Remarque.— Une conséquence de ce Théorème est la possibilité de définir des sommes connexes de variétés de contact. En effet l'application antipodale de S^{2n+1} sur elle-même est un difféomorphisme laissant invariante la forme standard $\hat{\alpha}_o = \rho_o^2 d\vartheta_o + \ldots + \rho_n^2 d\vartheta_n$ et préservant globalement chaque grande sphère S^{2n} . On dispose donc d'un automorphisme de la structure de contact standard induite par F_o sur $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ préservant S^{2n} et échangeant les deux composantes du complémentaire de S^{2n} . Il ne reste plus qu'à faire appel au Théorème de Darboux pour voir qu'il existe une structure de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact.

26) Le Théorème 11 implique une restriction sur l'autoenlacement des courbes de Legendre de la structure standard.

THÉORÈME 12.— *Soit* γ *une sous-variété de Legendre fermée orientée de* S^3 *munie de sa structure standard* $\hat{F}_o$ *, on a*

$$\tau(\gamma) \leq -\chi(\gamma) - |\mu(\gamma)| .$$

Démonstration.— Notons $\vec{\nu}$ la normale directe à γ dans $\hat{F}_o$, et considérons l'entrelacs γ^+ (resp. γ^-) obtenu en poussant légèrement γ suivant $\vec{\nu}$ (resp. $-\vec{\nu}$), le numéro 19 nous a appris que γ^+ (resp. γ^-) est transverse descendant (resp. ascendant) dans $\hat{F}_o$, et que les invariants attachés à γ , γ^+ et γ^- sont liés par les relations

$$\ell(\gamma^+) = \tau(\gamma) + \mu(\gamma) ,$$
$$\ell(\gamma^-) = \tau(\gamma) - \mu(\gamma) .$$

Le Théorème 12 est donc l'expression du Théorème 11 pour les deux entrelacs γ^+ et γ^- .

COROLLAIRE 1.— *Soit* γ *une courbe de Legendre fermée de* $\hat{F}_o$ *, plongée,* non nouée *dans* S^3 *, on a*

$$\tau(\gamma) < 0 .$$

COROLLAIRE 2.— *La trace de* $\hat{F}_o$ *sur un disque plongé dans* S^3 *n'a pas de courbe intégrale fermée en dehors des points singuliers.*

En effet, soit V un disque plongé dans S^3 , η le champ caractéristique formé par les directions tangentes en même temps à V et à $\hat{F}_o$. Si γ est une orbite périodique non réduite à un point de η , γ est une courbe de Legendre non nouée de $\hat{F}_o$. De plus il existe un champ de vecteurs $\vec{v}$ le long de γ transverse à V et contenu dans $\hat{F}_o$. L'enlacement de γ avec la courbe γ' obtenue en poussant γ suivant $\vec{v}$ est nul puisque γ' ne rencontre pas la surface que γ borde dans V . Donc $\tau(\gamma) = 0$, ce qui contredit le corollaire 1.

Puisque F_o se plonge dans $\hat{F}_o$, le Théorème 12 et ses corollaires restent vrais si l'on remplace la structure $\hat{F}_o$ sur S^3 par la structure F_o sur $\mathbb{R}^3$. Nous avons donc établi le Théorème 1, énoncé au numéro 5, et le Théorème 2, énoncé au numéro 7. D'où l'existence de structures de contact non isomorphes à F_o sur l'espace $\mathbb{R}^3$.

27) Considérons une équation différentielle ordinaire

$$f(u,v,v') = 0 \tag{1}$$

sur la fonction v de la variable réelle u . Plaçons-nous dans le cas où l'équation

$$f(u,v,p) = 0 \tag{2}$$

définit une surface lisse V^2 dans l'espace des jets $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^3$. Le champ F'_o des plans de contact

$$dv = pdu \tag{3}$$

induit un champ de directions orientable η sur V dont les orbites sont les *courbes intégrales* de l'équation (1). Ce sont des courbes de Legendre de la structure F'_o . Elles se projettent orthogonalement dans le plan des (u,v) sur les graphes des solutions ordinaires de (1) (voir [Lie] et [Poincaré]).

Les points singuliers de l'équation (1) forment les lignes de pli de la projection π sur le plan des (u,v) . Un point *singulier régulier* est un point de V où η coupe transversalement la ligne de pli. Il existe un difféomorphisme du plan (u,v) ramenant l'équation (1) dans le voisinage d'un point singulier régulier au modèle $p^2 = u$ (cf. [Arnold 2]). Si $x \in V$ est un point singulier de (1) où η est la direction tangente au pli, généralement x est point fronce de π . En général les autres points singuliers irréguliers de (1) sont les points critiques de η sur V . Les équations de η sur V sont :

$$\dot{u} = -\frac{\partial f}{\partial p}$$
$$\dot{v} = -p.\frac{\partial f}{\partial p}$$
$$\dot{p} = \frac{\partial f}{\partial u} + p\,\frac{\partial f}{\partial v} .$$

Si $\mathbb{R}^3$ est orienté avec le repère orthonormé direct $Ouvp$, orientons V en décrétant que sa normale directe est le gradient de f , et orientons F'_o avec la normale dirigée du côté où pointe l'axe Oz . Alors les points critiques de η où l'orientation de V coïncide avec celle de F'_o , sont ceux où la divergence de η sur V est positive.

Lorsque V est compacte sans bord, la formule de Poincaré-Hopf identifie la somme des indices des points critiques de η avec la caractéristique d'Euler de V . D'après la proposition 7, la somme des indices tordus est nulle. En particulier, si V est difféomorphe à une sphère, il existe au moins deux points critiques d'indice 1 sur V , au moins une source et au moins un puits.

Le Théorème 1 affirme que, si V est simplement connexe, l'équation (1) n'a pas d'autre courbe intégrale fermée que les points critiques de η .

Par contre si V est de genre 1 , il peut y avoir une infinité de courbes intégrales fermées. En effet, partons du tore standard T^2 d'équations $x_o^2 + y_o^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{2}$ dans la sphère S^3 de $\mathbb{R}^4$ d'équations $x_o^2 + y_o^2 + x_1^2 + y_1^2 = 1$. Toutes les courbes caractéristiques de la structure $\hat{F}_o$ sur T^2 sont des cercles. Il suffit donc de rapatrier T^2 dans $\mathbb{R}^3$ par un difféomorphisme de S^3 privé d'un point sur $\mathbb{R}^3$, qui transporte les plans de $\hat{F}_o$ sur ceux de F'_o .

28) Je voudrais mentionner maintenant une interprétation du Théorème 12 en géométrie elliptique.

Considérons donc la sphère S^3 dans $\mathbb{R}^4$ de centre 0 et de rayon 1 , avec la métrique standard.

Les géodésiques de S^3 sont les *droites de Clifford*.

Par définition, deux droites D et D' sont *parallèles* si tous les points de l'une sont à la même distance de l'autre.

Soit D une droite de Clifford, sa *polaire* est la droite des points situés à la distance $\pi/2$ de D . Par un point m de S^3 qui n'appartient ni à D ni à sa polaire, il passe deux parallèles à D . Elles font un angle égal au double de la distance qui sépare m de D . Aucune des deux parallèles de D n'est coplanaire à D . Soit p un point parcourant D , notons r et s les points les plus proches de p sur les parallèles issues de m . Les segments pr et ps tournent à la vitesse constante 1 mais en sens contraires, autour de D . Appelons D^+ (resp. D^-) la parallèle qu'on enlace ainsi positivement (resp. négativement) avec D .

Nous appellerons *translation gauche* (resp. *droite*) dans la direction de D une isométrie de S^3 qui préserve toutes les parallèles D^+ (resp. D^-) de D .

Soit $\hat{F}_o$ la structure de contact standard de S^3 . Les plans de $\hat{F}_o$ en deux points donnés se déduisent l'un de l'autre par des translations droites.

Soit p un point de S^3 et P un plan tangent quelconque en p à S^3 , notons $\hat{F}$ le champ de plans construit par les translations droites de P dans les directions issues de p . Il existe une isométrie de S^3 qui transforme $\hat{F}$ en $\hat{F}_o$. Nous dirons que $\hat{F}$ est le *complexe linéaire direct contenant* P (voir [Lie] et [Plücker]) (on définit de même les complexes inverses à partir des translations gauches).

Les courbes de Legendre d'un complexe linéaire jouissent de propriétés métriques très particulières (cf. [Appel], [Picard], ou [Lie]).

Lemme 1 (cf. [Appel]).— *Soit* γ *une courbe de Legendre du complexe linéaire* $\hat{F}$, *et* p *un point de* γ *où la courbure de* γ *ne s'annule pas. Le plan osculateur de* γ *en* p *se confond avec le plan de* $\hat{F}$.

Démonstration.— Il suffit de montrer le lemme pour $\hat{F}_o$. Or si γ est tangente à $\hat{F}_o$, les composantes $(\dot{x}_o,\dot{y}_o,\dot{x}_1,\dot{y}_1)$ de sa tangente en (x_o,y_o,x_1,y_1) , vérifient

$$x_o\dot{y}_o - y_o\dot{x}_o + x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = 0 .$$

Et en dérivant cette équation on trouve

$$x_o\ddot{y}_o - y_o\ddot{x}_o + x_1\ddot{y}_1 - y_1\ddot{x}_1 = 0 .$$

Lemme 2 (cf. [Lie]).— *Soit* γ *une courbe de Legendre du complexe linéaire* $\hat{F}$, *lorsque sa courbure est non nulle, sa torsion vaut* 1 .

Démonstration.— Là encore nous pouvons nous contenter de regarder $\hat{F}_o$. Notons

$t = \dot{z}$ la tangente unitaire à γ au point z , et b sa binormale. On a $b = iz$ d'après le lemme 1, donc $\dot{b} = it$ est de longueur 1 .

En fait la torsion d'une courbe mesure l'angle absolu des binormales en deux points voisins par rapport à la distance de ces points. Or la vitesse de rotation des plans de $\hat{F}$ le long d'une géodésique tangente à $\hat{F}$ est égale à 1 . Donc le lemme 1 entraîne le lemme 2. Et, réciproquement, si on se donne une courbe γ dans S^3 dont la torsion est constamment égale à 1 , le complexe linéaire contenant l'un de ses plans osculateurs doit contenir tous les autres :

Lemme 3 (cf. [Cartan 2]).— *Si une courbe* γ *dans* S^3 *est de torsion constante* 1 , *elle est courbe de Legendre d'un complexe linéaire.*

Ainsi le corollaire 1 du Théorème 12 signifie simplement qu'*une courbe fermée simple, non nouée, de torsion constante* 1 *dans l'espace elliptique* S^3 *de courbure* 1 *doit s'enlacer avec sa binormale.*

Nous en déduisons le résultat suivant :

THÉORÈME 13.— *Soit* V *une sous-variété simplement connexe de dimension* 2 *de la sphère* S^3 , *une géodésique fermée simple de la métrique induite sur* V *ne peut pas avoir une torsion dans* S^3 *égale à* 1 *en tous ses points.*

Démonstration.— Si γ est de torsion 1 , son plan osculateur est bien défini en tout point. Mais si γ est géodésique de V , son plan osculateur contient la normale à V , donc γ ne s'enlace pas avec sa binormale.

29) Les numéros 5 et 6 contiennent des exemples exotiques de structures de contact sur $\mathbb{R}^3$. A l'aide de ces exemples nous allons plaider pour l'existence d'une notion purement topologique de structure de contact.

THÉORÈME 14.— *Il existe un difféomorphisme à support compact de l'espace* $\mathbb{R}^3$ *qui ne peut pas être approché indéfiniment dans la topologie* C^0 *par des difféomorphismes à supports compacts, préservant la structure de contact standard* F_o .

Démonstration.— Soit S la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$, la construction de E_1 au numéro 5 ou celle de G_1 au numéro 6 montre qu'il existe une structure de contact F_1 sur $\mathbb{R}^3$ dont la trace sur S contient une orbite périodique non triviale. D'autre part le Théorème de Darboux dit qu'il existe une boule ouverte U_o centrée en 0 sur laquelle F_1 est isomorphe à la structure standard F_o . Soit r_o le rayon de cette boule et soit f l'homothétie de centre 0 et de rapport $r_o/2$. Toujours d'après le Théorème de Darboux, la boule fermée B_2 de centre 0 et de rayon 2 est recouverte par une famille d'ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$, $(U_a)_{a\in A}$ dans lesquels F_1 est isomorphe à F_o . Il est facile d'écrire la restriction de f à B_2 comme un produit fini de difféomorphismes de $\mathbb{R}^3$, $f_1,\ldots,f_n$, à supports strictement contenus dans ces ouverts. C'est-à-dire que pour tout i de

1 à n , il existe un ouvert de Darboux U_{a_i} tel que f_i laisse le complémentaire de U_{a_i} dans $\mathbb{R}^3$ fixe point par point. Soit $S_o = f(S)$ la sphère de centre 0 et de rayon $r_o/2$. Considérons une sphère plongée S'_o assez proche de S_o dans la topologie C^o pour être enfermée dans $U_o = \mathring{B}_{r_o}$. Le Théorème 1 interdit la présence d'orbite périodique dans la trâce de F_1 sur S'_o . Par conséquent f ne peut pas résider dans l'adhérence C^o des difféomorphismes de contact de F_1 . Donc l'un des f_i ne peut pas être approché indéfiniment dans la topologie C^o par les difféomorphismes de contact à support dans U_{a_i}, ce qui prouve le Théorème.

[Eliashberg] annonce que l'espace des difféomorphismes de contact d'une variété de contact M^{2n+1} est *fermé* dans l'espace de tous les difféomorphismes de M pour la topologie C^o , pour toute valeur de $n \geq 1$. De même, il annonce que l'espace des difféomorphismes symplectiques d'une variété symplectique W^{2n} est C^o-fermé dans l'espace des difféomorphismes de W qui préservent le volume.

30) Passons aux exemples exotiques de structures de contact sur S^3 .

D'abord une construction dans le tore plein.

Soit U un tore plein repéré par des coordonnées (ρ,ϑ,φ) , $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (ρ et ϑ sont les coordonnées du disque méridien). Il lui appartient une structure de contact bien standard F_o définie par la forme

$$\alpha_o = \rho^2 d\vartheta + d\varphi \ .$$

Plus généralement, si f et g sont deux fonctions C^∞ de la variable $\rho \in [0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la forme

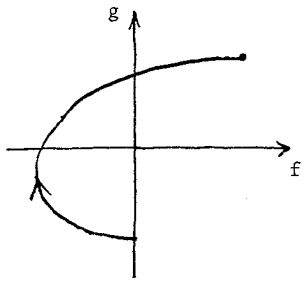
$$\alpha = f(\rho)d\vartheta + g(\rho)d\varphi$$

est une forme de contact sur U , horizontale le long de l'âme, si f s'annule au second ordre en zéro et si le déterminant

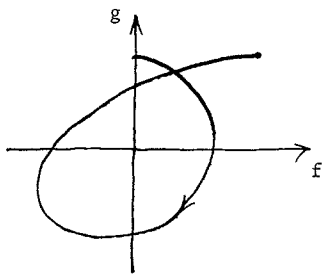
$$f\frac{dg}{d\rho} - g\frac{df}{d\rho}$$

ne s'annule jamais (cf. [Thurston et Winkelnkemper]), c'est-à-dire si la courbe paramétrée $(f(\rho),g(\rho))$ dans $\mathbb{R}^2$ tourne toujours dans le même sens autour de l'origine.

Soit n un nombre entier naturel pair (resp. impair), appelons α_n la forme de contact correspondant à une courbe qui part horizontalement du point $(0,1)$ (resp. $(0,-1)$) pour $\rho = 0$, et arrive horizontalement en $(1,1)$ pour $\rho = 1$ après avoir fait $n/2$ fois le tour de $(0,0)$ dans le sens des aiguilles d'une montre. Par exemple :



α_1



α_2

F_n désignera la structure définie par α_n . Toutes les structures F_n induisent la même structure que F_o au bord de U .

Lorsque n est pair, F_n est homotope à F_o parmi les champs de plans tangents à U coïncidant avec F_o au bord de U . En effet, si (f_t,g_t) , $t \in [0,1]$ est une déformation à extrémités fixées du chemin qui définit α_o à celui qui définit α_n , alors les formes

$$a_t = \rho(1-\rho)t(1-t)d\rho + f_t(\rho)d\vartheta + g_t(\rho)d\varphi$$

réalisent une homotopie de α_o à α_n à travers les formes non singulières.

Lorsque n est impair, le même argument montre que F_n est homotope à F_1 relativement au bord de U . Mais F_1 ne peut pas être homotope à F_o relativement au bord de U . En effet les normales orientées à α_o et α_1 le long du disque $(\varphi = 0)$ définissent des applications du disque dans la sphère S^2 qui ont le même bord, mais qui n'ont pas les mêmes degrés au-dessus du pôle sud.

Notons que dans toutes les structures F_n , sauf F_o , il existe des disques plongés avec une orbite périodique non triviale du champ caractéristique. Donc le Théorème 1 implique que F_n n'est pas isomorphe à F_o lorsque $n > 0$.

A présent soit F une structure de contact directe sur une variété de dimension 3 . Si Γ est une courbe fermée simple ascendante dans F , [Martinet 2] construit un voisinage tubulaire U de Γ et des coordonnées (ρ,ϑ,φ) sur U où l'équation de Γ est $\rho = 0$ et où F s'écrit $\rho^2 d\vartheta + d\varphi = 0$.

La *modification de Lutz* de degré n centrée sur Γ consiste à remplacer F_o sur U par la structure F_n (cf. [Lutz 2]).

Dans le cas de $\hat{F}_o$ sur S^3 , la modification de Lutz de degré n sur le cercle de Hopf Γ_o fait apparaître la n-ième structure de [Gonzalo et Varela] donnée par la forme

$$\omega_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi(x_3^2 + x_4^2)\right)(x_1dx_2 - x_2dx_1) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\pi(x_3^2 + x_4^2)\right)(x_3dx_4 - x_4dx_3) \ .$$

Il suffit de considérer ω_2 pour avoir le résultat suivant :

THÉORÈME 15.— *Il existe une structure de contact* $\hat{F}_1$ *sur* S^3 *non isomorphe à la structure standard* $\hat{F}_o$ *, mais homotope à* $\hat{F}_o$ *à travers les champs de plans tangents sur* S^3 .

Il faut se poser la question plus précise : les formes ω_n et ω_m peuvent-elles définir des structures isomorphes sur S^3 si n est différent de m ?

Lorsque n est pair et m impair, ω_n et ω_m ne sont pas homotopes parmi les formes sans zéro, donc elles définissent des structures de contact non isomorphes en vertu de [Cerf 1].

Les modifications de Lutz permettent de fabriquer facilement des structures de contact dans toutes les classes d'homotopie de champs de plans tangents à S^3 (cf. [Lutz 1]).

En effet, partons de $\hat{F}_o$ et appliquons-lui une modification de Lutz de degré 1 centrée sur un noeud qui enlace k fois le cercle Γ_o sans enlacer son cercle polaire Γ_1 . Nous obtenons une structure de contact $\hat{L}_k$, telle que l'invariant de Hopf $\ell(\hat{F}_o,\hat{L}_k)$ soit égal à k .

Problèmes.— Est-ce que toutes les structures de contact de S^3 s'obtiennent par une suite de modifications de Lutz à partir de la structure standard $\hat{F}_o$?

Quand est-ce que deux suites de modifications de Lutz donnent la même structure de contact ?

BIBLIOGRAPHIE

J.W. ALEXANDER - *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 9(1923), 93-95.

J.C. ALEXANDER et J.D. YORKE - *Global bifurcation of periodic orbits*, Amer. J. of Math. 100(1978), 263-293.

A. ANDREOTTI et T. FRANKEL - *The Lefschetz Theorem on hyperplane sections*, Annals of Math. 69(1959), 713-717.

P. APPEL - Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide, Thèse, Paris, 1876.

V.I. ARNOLD 1 - Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions M.I.R., Moscou, 1974.

V.I. ARNOLD 2 - Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Editions M.I.R., Moscou, 1978.

V.I. ARNOLD 3 - *On a characteristic class wich enters in quantization conditions*, Funkt. Anal. appl. 1(1967), 1-13.

E. ARTIN 1 - *Theorie der Zöpfe*, Hamburger Abhandlungen 4(1925), 47-72.

E. ARTIN 2 - *Theory of braids*, Ann. of Math. 48(1947), 101-126.

M. BEALS, C. FEFFERMAN and R. GROSSMAN - *Strictly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Bull. A.M.S. (New series) 8(1983), 125-322.

D. BENNEQUIN - Entrelacements et équations de Pfaff, Thèse, Paris, 1982.

J. BIRMAN - Braids, links and mapping class groups, Annals Study, n° 82, Princeton, 1963.

J. BIRMAN and R.F. WILLIAMS - *Knotted periodic orbits in dynamical systems -I : Lorenz equations*, Topology 22,1(1983).

E. BISHOP - *Differentiable manifolds in complex euclidean space*, Duke Math. J. 32 (1965), 1-21.

D.F. BLAIR - Contact manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Math. vol. 509, Springer-Verlag, 1976.

W. BLASCHKE - *Sulla geometria differenziale delle superficie* S_2 *nello spazio euclideo* S_4 , Ann. Mat. Pura Appl. 4(1949), 205-209.

M. BOILEAU et C. WEBER - *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des noeuds algébriques*, Séminaire des Plans sur Bex. Noeuds, tresses et singularités, mars 1982 (preprint Genève).

W.M. BOOTHBY - *On compact homogeneous contact manifolds*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 8 II(1980), 341-351.

W.M. BOOTHBY and H.C. WANG - *On contact manifolds*, Ann. of Math. 68(1958), 721-734.

L. BOUTET de MONVEL and V. GUILLEMIN - The spectral theory of Toeplitz operators, Ann. Study n° 99, Princeton, 1981.

K. BRAUNER - *Klassifikation der Singularitäten algebroider Kurven*, Abh. Math. Sem. Hamburg 6(1928), 8-54.

E. BRIESKORN - *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, Invent. Math. 2(1966), 1-14.

E. CARTAN 1 - Leçons sur les invariants intégraux, 1922, rééd. Hermann, Paris, 1971.

E. CARTAN 2 - *Sur l'équivalence absolue de certains systèmes d'équation différentielles et sur certaines familles de courbes*, Bull. Soc. Math. France t. 42(1914), 12-48.

J. CERF 1 - Sur les difféomorphismes de S^3 ($\Gamma_4 = 0$) , Lecture Notes in Math. vol. 53, Springer-Verlag, 1968.

J. CERF 2 - *La stratification naturelle de l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété et le problème de la pseudo-isotopie*, Publ. Math. I.H.E.S. 39(1970), 5-173.

M. CHAPERON - Singularités des systèmes dynamiques, à paraître chez Astérisque.

S.S. CHERN 1 - *Pseudogroupes continus infinis*, Coll. Internat. C.N.R.S. Géom. Diff., Strasbourg (1953), 119-135.

S.S. CHERN 2 - *The geometry of G-structures*, Bull. A.M.S. 72(1966), 167-219.

S.S. CHERN and E. SPANIER - *A theorem on orientable surfaces in four-dimensional space*, Comment. Math. Helv. 25(1951), 1-5.

A. DOUADY - *Noeuds et structures de contact en dimension 3 (d'après D. Bennequin)*, Séminaire Bourbaki n° 604, 1982/83, à paraître chez Astérisque.

T. DUCHAMP - *The classification of Legendre immersions*, preprint, 1982.

J. ELIASHBERG - *Rigidity of symplectic and contact structures*, preprint, 1981.

J. ELIASHBERG and V. HARLAMOV - *Some remarks on the number of complex points of a real surface in the complex one*, preprint, 1982.

T. ERLANDSSON - Geometry of contact transformations in dimension 3 , Doctoral Dissertation, Uppsala, 1981.

F.A. GARSIDE - *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford 20(1969), 235-254.

J. GONZALO et F. VARELA - *Modèles globaux des variétés de contact*, Actes du Schnepfenried, 1982.

J.W. GRAY - *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. 69(1959), 421-450.

M. GROMOV 1 - Stable maps of foliations in manifolds, Thesis, Leningrad, 1970, et Izv. Akad. Nauk C.C.C.P. 33(1969), 707-734.

M. GROMOV 2 - Differential relations, à paraître.

W. HAKEN - *Über das Homöomorphie problem der 3-Mannigfaltigkeiten* I , Math. Zeitschrift 80(1962), 89-120.

G. HECTOR - *Architecture des feuilletages*, Actes du Schnepfenried, 1982.

H. HOPF - Differential Geometry in the Large, Seminar Lectures New York University 1946, Lecture Notes in Math. vol. 1000, Springer-Verlag, 1983.

H.F. LAI - *Characteristic classes of real manifolds immersed in complex manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 172(1972), 1-33.

H. LAUFER - *On the number of singularities of an analytic curve*, Trans. Amer. Math. Soc. 186(1969), 527-535.

H.B. LAWSON - The quantitative theory of foliations, Regional conf. series of the A.M.S. n° 27, 1977.

P. LIBERMANN - *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact*, Colloque de Géométrie différentielle globale, Bruxelles, 1958.

S. LIE - Géométrie der Berührungstransformationen, erster Band, Teubner, Leipzig, 1896.

R. LUTZ 1 - Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension 3 , Thèse, Strasbourg, 1971.

R. LUTZ 2 - *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercles de dimension 3* , Ann. Inst. Fourier, Grenoble, XXVII, 3(1977), 1-15.

W. MAGNUS and A. PELUSO - *On knots groups*, Comm. Pure Appl. Math. 20(1967), 749-770.

A.A. MARKOV - *Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe*, Recueil de la Soc. Math. de Moscou 43(1936), 73-78.

J. MARTINET 1 - *Sur les singularités des formes différentielles*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 20,1(1970), 95-178.

J. MARTINET 2 - *Formes de contact sur les variétés de dimension 3* , Proc. Liverpool Singularities Symposium II, Lecture Notes in Math. n° 209, Springer-Verlag (1971), 142-163.

C. MECKERT - *Formes de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact*, Publication de l'I.R.M.A., Strasbourg, 1980.

J. MILNOR 1 - *On the cobordism ring Ω* and a complex analogue* I , Amer. J. Math. 82 (1960), 505-521.

J. MILNOR 2 - Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Study, n° 61, Princeton, 1968.

J. MILNOR 3 - *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds* M(p,q,r) , in Knots, Groups, and 3-manifolds, éd. Neuwirth, Ann. Study, n° 84, Princeton and Tokyo, (1975), 175-225.

H.R. MORTON 1 - *Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial*, Topology 17(1978), 101-104.

H.R. MORTON 2 - *An irreducible 4-string braid with unknotted closure*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 93(1983), 259-261.

K. MURAGUSI 1 - On closed 3-braids, Memoirs of the Amer. Math. Soc. n° 151, 1974.

K. MURAGUSI 2 - *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. 117(1965), 387-422.

F. PELLETIER - Singularités d'ordre supérieur de formes différentielles, Thèse, Dijon, 1980.

F. PHAM - Singularités des courbes planes : une introduction à la géométrie analytique complexe, preprint Ecole Polytechnique, 1970.

E. PICARD - Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches, Thèse, Paris, 1877.

H. PINKHAM - *On the überschneidungszahl of algebraic knots*, preprint 1974.

J. PLÜCKER - Geometrie des Raumes, erste Abtheilung, Teubner, Leipzig, 1868.

H. POINCARÉ - *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, Oeuvres, tome I(1885), 90-161.

G. REEB 1 - *Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques*, Mém. de l'Acad. Sci. Bruxelles 27(1952).

G. REEB 2 - Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Thèse, Strasbourg, 1948, et Act. Scient. et Ind. n° 1183, Hermann, Paris, 1952.

D. ROLFSEN - Knots and links, Publish or perish n° 7, 1976.

L. RUDOLPH 1 - *Algebraic functions and closed braids*, Topology 22,2(1983).

L. RUDOLPH 2 - *Seifert ribbons for closed braids*, preprint, 1981.

H. SATO - *Remarks concerning contact manifolds*, Tohoku Math. J. 29(1977), 577-584.

J.M. SOURIAU - Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 1970.

J. STALLINGS 1 - *On fibering certain 3-manifolds*, Topology of 3-manifolds and Related Topics (M.K. Fort Jr., ed.), Prentice Hall (1962), 95-100.

J. STALLINGS 2 - *Problem* 1.7, p. 277, in KIRBY : Problems in low-dimensional manifold theory, Proc. Symp. in Pure Math. XXXII part 2, A.M.S., 1978.

W. THURSTON and H.E. WINKELNKEMPER - *On the existence of contact forms*, Proc. A.M.S. 52(1975), 345-347.

C.T.C. WALL - *Determination of the cobordism ring*, Annals of Math. 72(1960), 292-311.

TABLE DES MATIÈRES

1) Equations de Pfaff génériques
2) Structures de contact
3) Exemples standard
4) Problème d'isomorphisme
5) Un exemple exotique
6) Bifurcation de Hopf
7) Plan des résultats
8) Quelques problèmes de théorie des noeuds. Enoncé d'un résultat sur les tresses fermées (minoration du genre)
9) Feuilletage de Reeb et surfaces de Markov. Existence de surfaces de Markov de caractéristique maximale
10) Description de surfaces de Markov
11) Démonstration du Théorème de Markov sur l'équivalence des tresses fermées
12) Démonstration du Théorème de Magnus et Peluso sur les tresses fermées non nouées à moins de trois brins
13) Démonstration de la minoration du genre
14) Question sur le nombre gordien. Première preuve de $\mu - 1 = c - n$ pour l'entrelacs d'une singularité algébrique
15) Preuve algébrique de $\mu - 1 = c - n$
16) Interprétation de $c - n$ en géométrie de contact. Formule globale pour une courbe analytique complexe dans $\mathbb{C}^2$
17) Nombre d'enlacement $\ell(\Gamma,F)$ d'un entrelacs Γ avec un champ de plans F, transverse à Γ
18) Autoenlacement $\tau(\gamma,F)$ et enroulement $\mu(\gamma,F)$ d'un entrelacs γ dans un champ de plans F, tangent à γ
19) Relation entre ℓ, τ et μ dans le cas où F est une structure de contact
20) Le nombre ℓ est une caractéristique d'Euler tordue
21) Une autre preuve de $\mu - 1 = c - n$
22) Points complexes d'une surface dans $\mathbb{C}^2$. Le nombre ℓ est un indice de Maslov. Nouvelle preuve de la formule du numéro 16

23) Courbes transverses à la structure de contact standard F_o de $\mathbb{R}^3$ et tresses fermées
24) $\ell(\Gamma,F_o) \leq -\chi(\Gamma)$
25) Courbes transverses à $\hat{F}_o$ sur S^3
26) Courbes de Legendre de $\hat{F}_o$: $\tau \leq -\chi - |\mu|$
27) Equations différentielles implicites
28) Géométrie dans l'espace elliptique
29) Non densité C^o des difféomorphismes de contact dans l'espace de tous les difféomorphismes.
30) Exemples exotiques de structures de contact sur la sphère de dimension 3

Daniel BENNEQUIN

E.R.A. 589
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05