Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs

MAJA BOLLINGER

Vorgelegt von B. L. VAN DER WAERDEN

Inhaltsverzeichnis

Seite

§ 1. Einige Verallgemeinerungen zur EULERschen Polyederformel 94

§ 2. Die Zusammenhangszahlen der RIEMANNschen Flächen 100

§ 3. Die Zusammenhangszahlen der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten bei RIEMANN und BETTI 105

§ 4. Die DYCKsche Charakteristik 111
a) Der Mannigfaltigkeitsbegriff 111
b) Die Charakteristik 112

§ 5. HENRI POINCARÉ 116
a) Der Mannigfaltigkeitsbegriff 116
b) Der Homologiebegriff und die BETTIschen Zahlen bei POINCARÉ und PICARD/SIMART 120
c) Das Dualitätsgesetz 124
d) Die Fundamentalgruppe 127
e) Die Polyederformel 129
f) Die Polyeder als Grundlage einer neuen Theorie 133
g) Die Torsionszahlen 141

§ 6. Der Anfang einer rein kombinatorischen Topologie bei DEHN/HEEGAARD 144

§ 7. Der Beitrag TIETZES zur Topologie der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten 147
a) Der Mannigfaltigkeitsbegriff 147
b) Die BETTIschen Zahlen 150
c) Einseitige Mannigfaltigkeiten 156
d) Die Fundamentalgruppe 160

§ 8. Die BETTIschen Zahlen mod 2 bei VEBLEN/ALEXANDER 162

§ 9. Der ALEXANDERsche Invarianzbeweis für die BETTIschen Zahlen 166

Literatur 169

§ 1. Einige Verallgemeinerungen zur Eulerschen Polyederformel

„Von der *Geometria Situs*, die LEIBNITZ ahnte und in die nur einem Paar Geometern (EULER und VANDERMONDE) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts." Mit diesen Worten leitet GAUSS seinen vom 22. Januar 1833 datierten Satz vom Verschlingungsintegral zweier Kurven ein und umschreibt damit in

prägnanter Weise die Situation, in der die junge, sich langsam von der Geometria magnitudinis loslösende Disziplin der Mathematik sich damals befand.

Mit den „Vorstudien zur Topologie" veröffentlicht JOHANN BENEDICT LISTING — „durch den größten Geometer der Gegenwart auf die Wichtigkeit des Gegenstandes aufmerksam gemacht" — 1847 in den Göttinger Studien die erste Arbeit, die ausschließlich Fragen aus der Geometria situs gewidmet ist. Nach des Verfassers Worten bezweckt er damit, „in propädeutischen Rudimenten, Beispielen und Materialien auf die Möglichkeit und Bedeutung dieser Wissenschaft aufmerksam zu machen".

Für diese „modale" Seite der Geometrie, in der nach LISTING statt Größen- und Maßverhältnissen die Eigenschaften des Zusammenhangs und der gegenseitigen Lage und Aufeinanderfolge von Punkten, Linien, Flächen und Körpern studiert und „calculatorisch" behandelt werden sollen, schlägt LISTING den Namen „*Topologie*" vor, da er fürchtet, die LEIBNIZsche Bezeichnung Geometria situs könnte zu Verwechslungen führen mit dem inzwischen gebräuchlich gewordenen Begriff „Géométrie de position" von CARNOT, dessen Untersuchungen aber mehr an die „Géométrie descriptive" von MONGE anschließen.

Den EULERschen Rösselsprung und die Bemerkungen VANDERMONDES „über den Weg, den ein Faden geführt werden muß, um z. B. eine Tresse oder die Maschen eines Strumpfgewebes darzustellen", nennt LISTING als schon bekannte Beispiele zu dieser neuen Theorie. Er vermehrt sie auch selbst durch einige Untersuchungen über Knoten im Raum — er nennt sie „Linearcomplexionen" — indem er versucht, diese nach der Projektion auf eine Ebene oder eine Kugeloberfläche durch ein Schema zu beschreiben. Er beweist ferner (S. 867), daß die Minimalzahl von Zügen, die benötigt werden, um alle Linien des Komplexes genau einmal zu durchlaufen, gleich der Hälfte der immer in gerader Anzahl auftretenden Knotenpunkte ungerader Multiplizität ist. Er hat damit einen von EULER entdeckten Satz wiedergefunden oder wiedergegeben.

Ein weites Feld für topologische Untersuchungen liefert die EULERsche Polyederformel: Besteht die Begrenzung eines 3-dimensionalen Polyeders aus α_0 Ecken, α_1 Kanten und α_2 Seitenflächen, so ist

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2.$$

Nach dem Enzyklopädieartikel III AB 3 „Analysis situs" von DEHN & HEEGAARD (im folgenden kurz mit „DEHN & HEEGARD" zitiert) wurde 1860 im Nachlaß von DESCARTES ein Satz gefunden, der — ohne Beweis — Aussagen über die Winkelsumme der Seitenflächen eines Polyeders macht und der zum EULERschen Satz äquivalent sein soll.

Der Satz von EULER ist richtig für geschlossene, orientierbare Flächen vom Geschlecht null, also insbesondere für die Oberflächen konvexer 3-dimensionaler Polyeder. Zweierlei Verallgemeinerungen drängten sich in der Folge auf:

1. Einbeziehung der Ausnahmefälle im 3-dimensionalen Raum, für die der Satz in obiger Form nicht gültig ist.
2. Mit dem Beginn der n-dimensionalen Geometrie stellt sich die Frage nach dem Wert der in analoger Weise gebildeten Wechselsumme $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots \pm \alpha_n$.

Über die zahlreichen Arbeiten, die der ersten Richtung angehören, findet man eine ausführliche Literaturangabe bei DEHN & HEEGAARD (S. 199). Hier seien davon nur jene genannt, die in direkter Beziehung zum zweiten Problemkreis stehen.

Der erste Beitrag zur Verallgemeinerung des EULERschen Satzes auf Polyeder beliebiger Dimension findet sich in LUDWIG SCHLÄFLIS „Theorie der vielfachen Kontinuität" (1852). Im 10. Abschnitt „Über Polyscheme" (*Werke*, Bd. 1, S. 189) steht: „Wenn das n-fache Integral $\int^n dx\,dy\,dz\ldots$ durch lauter Gleichungen ersten Grades vollständig begrenzt wird, so daß keine der Gleichungen bei der Begrenzung als überflüssig erscheint, so nennen wir die geschlossene Totalität, deren Maß jenes Integral ist, ein *Polyschem* P_n." Betrachtet man in einem der begrenzenden $(n-1)$-dimensionalen linearen Räume nur jenen Teil, der zur Integralgrenze gehört, so stellt das nach SCHLÄFLI „ein geschlossenes lineares Kontinuum" dar. Ein solcher Teil kann nach orthogonaler Transformation in gleicher Weise durch ein Integral in $n-1$ Variablen ausgedrückt werden, stellt also ein Polyschem P_{n-1} dar.

Ein Polyschem heißt *konvex*, „wenn keine innerhalb des gegebenen Polyschems befindliche Lösung dem verlängerten Kontinuum eines seiner Grenz-P_{n-1} angehört, d.h. wenn für sämtliche innerhalb des Polyschems fallende Lösungen das Polynom einer jeden Grenzgleichung immer dasselbe Vorzeichen behält".

Weiter definiert SCHLÄFLI: „Wird der Umschluß eines Polyschems P_n, ohne eines der P_{n-1} zu zerbrechen, so in zwei Teile geteilt, daß jeder ein einziges gebrochenes $(n-1)$-faches Kontinuum bildet, so soll jeder dieser Teile eine *offene polyschematische Figur* heißen."

Über diese Polyscheme stellt er dann den folgenden Satz auf: „Wenn unter der Voraussetzung einer n-fachen Totalität in einem Polyschem oder einer offenen polyschematischen Figur die Zahl der Grenzlösungen mit a_0, die der Grenzstrahlen mit a_1, überhaupt die Zahl der i-fachen polyschematisch geschlossenen linearen Grenzkontinuen P_i mit a_i bezeichnet wird, und ist endlich $a_n=1$, wenn ein geschlossenes Polyschem, $a_n=0$, wenn eine offene polyschematische Figur vorliegt, so ist

$$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}+(-1)^n a_n=1."$$

Der Beweis zum Satz ist ungenügend. Nach Induktionsvoraussetzung wird der Satz für ein P_{n-1} als richtig erachtet. Dann wird zwar gezeigt, daß durch das Hinzufügen oder Weglassen eines P_{n-1} die obige Wechselsumme für eine offene polyschematische Figur der n-fachen Totalität sich nicht ändert; es müßte aber noch bewiesen werden, daß es immer möglich ist, ein P_{n-1} nach dem andern so wegzunehmen, daß jedesmal wieder eine offene polyschematische Figur übrig bleibt. Ferner macht SCHLÄFLI im Satz keine Voraussetzung über die Konvexität und schließt auch nichtkonvexe Polyscheme nirgends aus. Er scheint nicht bemerkt zu haben, daß der Satz für nichtkonvexe Polyscheme nicht immer gültig ist.

Erst 1889 wird diese Wechselsumme von V. EBERHARD unter dem Titel „Ein Satz aus der Topologie" erneut einer Untersuchung unterzogen (Mathematische Annalen **36**, S. 121).

Nach dem Vorbild von STEINER und ROBERTS teilt EBERHARD die p-dimensionale Mannigfaltigkeit, das ist der Raum der p reellen, unbeschränkt Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_p$, durch n $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die durch lineare Gleichungen $f_i(x)=0$ dargestellt sind und deren jede den ganzen Raum durchquert, in Gebiete verschiedener Vorzeichensysteme ein. Bezeichnet φ_h die Anzahl derjenigen Gebiete des p-dimensionalen Raumes, „deren Elemente in genau je $p-h$ Mannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ liegen", so gilt: „Für jedes System von n den p-fach unendlichen Raum zerschneidenden Linearmannigfaltigkeiten

$$f_i(x)=a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,p}x_p+c_i=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

hat die Größe

$$\varphi_p-\varphi_{p-1}+\cdots\pm\varphi_0$$

einen sowohl von der Dimension p des Raumes, als von der Anzahl n der theilenden Mannigfaltigkeiten, als endlich auch von deren gegenseitiger Lage völlig unabhängigen, invarianten Zahlenwerth, nämlich den Werth $+1$."

EBERHARD nennt das „nur eine Ausdehnung der Cauchy-Listing'schen Verallgemeinerung des Euler'schen Polyedersatzes auf Mannigfaltigkeiten von 4 und mehr Dimensionen" und stellt sich das umfassendere Problem, den gleichen Ausdruck auch für den Fall zu berechnen, daß die linearen Gleichungen $f_i(x)=0$ durch solche höherer Ordnung ersetzt werden. Theorem 1 gibt darüber Auskunft: „Werden die n theilenden Mannigfaltigkeiten in eine bestimmte Reihenfolge gebracht:

$$f_1(x_1, \ldots, x_p)=0, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_p)=0,$$

wird alsdann in dem Systeme der $n-k$ Mannigfaltigkeiten

$$f_{k+1}(x_1, \ldots, x_p)=0, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_p)=0$$

die Anzahl $\chi_{h,n-k}$ derjenigen *mehrtheiligen* h-dimensionalen Theilgebiete bestimmt, von deren getrennten Bestandtheilen ein Theil ganz in den Innenraum, ein Theil ganz in den Außenraum der Fläche $f_k(x_1, \ldots, x_p)=0$ fallen und wird schließlich aus den so bestimmten $p+1$ Werthen

$$\chi_{p,n-k}, \chi_{p-1,n-k}, \cdots, \chi_{0,n-k}$$

die Größe gebildet

$$\chi_{p,n-k}-\chi_{p-1,n-k}+\cdots\pm\chi_{0,n-k}=X_{n-k},$$

so hat die Summe

$$X_{n-1}+X_{n-2}+\cdots+X_1$$

einen von der ursprünglichen Anordnung der n Mannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ völlig unabhängigen Betrag, nämlich den Werth:

$$\varphi_p-\varphi_{p-1}+\cdots\pm\varphi_0-1."$$

Der zuerst zitierte Satz ergibt sich daraus als Korollar, denn unter jenen spezielleren Voraussetzungen bestimmt jedes Vorzeichensystem ein einziges zusammenhängendes Teilgebiet, so daß sämtliche χ und X verschwinden.

Ein direkter Vergleich mit CAUCHY und LISTING, die sich beide noch ganz auf den 3-dimensionalen Raum beschränken, ist allerdings nicht möglich. Der diesbezügliche Satz von CAUCHY, in dem wie bei SCHLÄFLI die notwendige Voraussetzung der Konvexität fehlt, steht in „Recherches sur les polyèdres" (1813; Oeuvres Série 2, tome 1, p. 15/16) und lautet: „Théorème: Si l'on décompose un polyèdre en tant d'autres que l'on voudra, en prenant à volonté dans l'intérieur de nouveaux sommets; que l'on représente par P le nombre des nouveaux polyèdres ainsi formés, par S le nombre total des sommets, y compris ceux du premier polyèdre, par F le nombre total des faces, et par A le nombre total des arêtes on aura

$$S+F=A+P+1$$

c'est-à-dire que la somme faite du nombre des sommets et de celui des faces surpassera d'une unité la somme faite du nombre des arêtes et de celui des polyèdres."

Zum Beweis unterteilt CAUCHY zuerst alle Seitenflächen in Dreiecke, indem er je von einem festen Eckpunkt aus sämtliche Diagonalen zieht. Jedes Teilpolyeder wird dann in Tetraeder zerlegt, deren gemeinsame Spitze in einem Eckpunkt des Teilpolyeders liegt und deren Grundflächen von den soeben konstruierten Dreiecken gebildet werden. Das Teilpolyeder muß konvex sein, damit alle dabei einzufügenden Dreiecke überhaupt ins Innere zu liegen kommen. Nachdem das ganze Polyeder zu einem Agglomerat von Tetraedern geworden ist, nimmt CAUCHY davon eines nach dem andern weg, und zwar unter der Voraussetzung, daß das zu entfernende Tetraeder jeweils mit mindestens einer Seitenfläche zum Außenrand gehört, aber auch mit mindestens einer Seitenfläche am Restpolyeder hängt. Hier klafft dieselbe Lücke im Beweis wie bei SCHLÄFLI, indem CAUCHY nicht zeigt, daß das wirklich möglich ist; für nichtkonvexe Polyeder reichen die drei berücksichtigten Fälle jedenfalls nicht immer aus, um das Polyedergebilde auf ein einzelnes Tetraeder abzubauen. Die im Satz ausgesprochene Formel findet CAUCHY, indem er auf das am Schluß übrigbleibende Tetraeder den EULERschen Satz anwendet und — rückwärts gehend — sich die Änderung von Ecken-, Kanten- und Flächenzahl bei jedem der betrachteten Fälle überlegt.

Auf die verschiedene Art der Zählung ist es zurückzuführen, daß CAUCHY und EBERHARD zu gänzlich verschiedenen Resultaten gelangen. Im Unterschied zu CAUCHY, dessen Seitenflächen und Zwischenwände nur *Ausschnitte* aus Ebenen sind — und nur diese werden gezählt — zieht EBERHARD jede seiner Linearmannigfaltigkeiten in ihrer ganzen Ausdehnung durch und alle so entstehenden, durch verschiedene Vorzeichensysteme zu unterscheidenden Teilgebiete, auch die sich ins Unendliche erstreckenden, werden bei der Zählung berücksichtigt.

Ebensowenig sind aber auch EBERHARDs Theorem 1 und das Hauptresultat, die „Censusgleichung" in LISTINGs „Census räumlicher Complexe" (1861) vergleichbar. Unter dem hier erstmals auftretenden Begriff „Complex" versteht LISTING „jedes Aggregat von Punkten, Linien, Flächen ein- oder ausschließlich der dadurch abgegrenzten körperlichen Räume", also sehr allgemeine Gebilde, die sich nicht immer durch ein System von Gleichungen beschreiben lassen, deren Bestandteile nur alle irgendwie zusammenhängen müssen, damit sie zu

einem Komplex gerechnet werden. Für den einzelnen Bestandteil fordert LISTING, daß zwei beliebige seiner Punkte immer durch eine ganz in ihm liegende Kurve verbunden werden können. Bei EBERHARD sind es aber gerade jene Gebiete, die aus mehreren getrennten, aber durch das gleiche Vorzeichensystem gekennzeichneten Teilen bestehen, die einen Beitrag zur Summe $X_{n-1}+\cdots+X_1$ liefern. Demgegenüber enthält die analoge Formel bei LISTING sogenannte „cyklomatische Ordnungszahlen", die gewissermaßen die Abweichungen vom konvexen Polyeder ausdrücken.

Das wichtigste Hilfsmittel ist für LISTING die „Cyklose". Sie ist wie folgt definiert (S. 111): „Es sei nun allgemein K ein beliebiger Constituent" (d.h. ein Bestandteil des Komplexes), „L die Gesamtheit der seine Grenze bildenden Constituenten niedriger Curien, M der gesamte übrige körperliche Raum. Lassen sich nun zwei einfach verkettete die Grenze L nirgend durchschneidende Cyklen k und m so ziehen, daß k ganz in K, m ganz in M liegt, so nennen wir diese Eigenschaft von K eine Cyklose."

Die Cyklose wird dann durch einen geeigneten Schnitt zerstört; evtl. sind aber noch weitere Cyklosen vorhanden und damit mehrere Schnitte möglich. Ihre Anzahl, die nicht von der speziellen Auswahl der Schnitte abhängt, ergibt die „cyklomatische Ordnungszahl" des Bestandteiles und die Summe über die cyklomatischen Ordnungszahlen aller Bestandteile der gleichen Dimension gibt die „Attributive"

- $\varkappa^0$ für die Punkte ($\varkappa^0$ ist immer null)
- $\varkappa'$ für die Linien
- $\varkappa''$ für die Flächen
- $\varkappa'''$ für die Räume (wobei auch jene Cyklosen zu zählen sind, welche der Außenraum mit den Innenräumen bildet).

Ist nun

- a die Anzahl der Punkte
- b die Anzahl der Linien
- c die Anzahl der Flächen
- d die Anzahl der Räume (Außenraum mitgezählt),

so lautet die „Censusgleichung" (S. 160):

$$(a-\varkappa^0)-(b-\varkappa')+(c-\varkappa''+\pi)-(d-\varkappa''')=\begin{cases}0 & \text{für } \textit{einen} \text{ Komplex}\\ p-1 & \text{für } p \text{ Komplexe.}\end{cases}$$

Für den Zusatz π ist dabei noch die Anzahl der im Komplex enthaltenen geschlossenen Flächen einzusetzen.

Kehren wir nochmals zu EBERHARD zurück. Zum Spezialfall von linearen Gleichungen bemerkt er (S. 129): „Die Theilgebiete in dem Systeme von $n \geqq p+1$ linearen Mannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ sind die Analoga der gewöhnlichen convexen Polyeder" und nachdem er die EULERsche Relation zitiert hat: „Es liegt die Frage nahe, ob allgemein für ein entsprechendes p-dimensionales Polyeder der Ausdruck

$$\varphi_{p-1}-\varphi_{p-2}+\varphi_{p-3}-\cdots\pm\varphi_0$$

gleichfalls einen von der Anzahl und der Lage der Grenzflächen $f_i(x)=0$ unabhängigen Werth besitzt." Er setzt dann voraus, „$R_{p,n}$ sei ein von allen n Mannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ irgendwie begrenzter Körper". EBERHARD drückt sich hier nicht ganz klar aus; es ist aber anzunehmen, daß er — wie früher — seine begrenzenden Räume vollständig durchzieht, so daß unter $R_{p,n}$ ein *konvexes* p-dimensionales Polyeder zu verstehen ist. Er stellt darüber folgendes, mit Recht als „Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes" bezeichnetes Theorem 3 auf, dessen Beweis mittels Induktion nach der Zahl n der $(p-1)$-dimensionalen Begrenzungsstücke allerdings unvollständig ist: „In einem durch Linearmannigfaltigkeiten $f_i(x)=0$ bestimmten p-dimensionalen Polyeder ergiebt die Anzahl der Grenzgebiete unpaarer Dimension vermindert um die Anzahl der Grenzgebiete paarer Dimension den Werth 0 oder den Werth 2, je nachdem p eine gerade oder eine ungerade Zahl ist."

Im Fall von n linear unabhängigen linearen Gleichungen gewinnt EBERHARD noch eine Aussage über die Zahl φ_h selbst: „Theorem 4: In allen durch n linear unabhängige $(p-1)$-dimensionale Linearmannigfaltigkeiten begrenzten p-dimensionalen Polyedern sind die Anzahlen der h-dimensionalen Grenzgebiete constant und zwar gegeben durch

$$(p, n, h) = \frac{p!}{h!\,(p-h)!} + (n-p)\,\frac{p!}{(h+1)!\,(p-h-1)!} \qquad (h=1, 2, \ldots, p-2)$$

$$(p, n, 0) = p+1+(n-p-1)\,(p-1)."$$

Das 3-dimensionale, von n Ebenen begrenzte Polyeder wird noch besonders erwähnt: es besitzt $3n-6$ Kanten und $2n-4$ Ecken.

§ 2. Die Zusammenhangszahlen der Riemannschen Flächen

Um eine klare Übersicht vom Verlauf der Werte einer mehrdeutigen Funktion einer komplexen Variablen zu gewinnen, greift RIEMANN zu einer geometrischen Deutung. Wir lesen darüber in der 1857 publizierten „Theorie der Abel'schen Functionen" (BERNHARD RIEMANN's Gesammelte mathematische Werke, 1. Auflage 1876, S. 83): „Man denke sich in der (x, y)-Ebene eine andere mit ihr zusammenfallende Fläche (oder auf der Ebene einen unendlich dünnen Körper) ausgebreitet, welche sich so weit und nur so weit erstreckt, als die Function gegeben ist. Bei Fortsetzung dieser Function wird also diese Fläche ebenfalls weiter ausgedehnt werden. In einem Theile der Ebene, für welchen zwei oder mehrere Fortsetzungen der Function vorhanden sind, wird die Fläche doppelt oder mehrfach sein; sie wird dort aus zwei oder mehreren Blättern bestehen, deren jedes einen Zweig der Function vertritt. Um einen Verzweigungspunkt der Function herum wird sich ein Blatt der Fläche in ein anderes fortsetzen, so daß in der Umgebung eines solchen Punktes die Fläche als eine Schraubenfläche mit einer in diesem Punkte auf der (x, y)-Ebene senkrechten Axe und unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges betrachtet werden kann. Wenn die Function nach mehreren Umläufen des z um den Verzweigungswerth ihren vorigen Werth wieder erhält (wie z.B. $(z-a)^{m/n}$, wenn m, n relative Primzahlen sind,

nach n Umläufen von z um a), muß man dann freilich annehmen, daß sich das oberste Blatt der Fläche durch die übrigen hindurch in das unterste fortsetzt."

Eine ähnliche Darstellung findet sich bereits in RIEMANNs Dissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe" (1851). RIEMANN untersucht dort ganz allgemein Flächen mit Hilfe ihrer Zerschneidung durch *Querschnitte*, „d.h. Linien, welche von einem Begrenzungspunkt das Innere einfach — keinen Punkt mehrfach — bis zu einem Begrenzungspunkte durchschneiden" und kommt dabei zur Definition einer Zahl, welche die „Ordnung des Zusammenhangs" ausdrückt.

Eine Definition des Begriffs „Fläche" sucht man vergeblich; es findet sich nur die Bemerkung, daß Umfaltungen der Fläche oder Spaltungen längs einer Linie ausgeschlossen werden sollen. Da Querschnitte immer in Begrenzungspunkten der Fläche beginnen, (endigen dürfen sie hingegen auch in einem früheren Punkt des Querschnitts), sind alle Flächen vorerst berandet; sie sind überdies zweiseitig zu denken, denn die erste einseitige Fläche, das „Möbiusband", wurde erst etwas später (1858) von MÖBIUS entdeckt. Man kann das aber auch folgern aus dem Satz 2) (S. 11): „Durch jeden Querschnitt wird die Anzahl der Begrenzungsstücke entweder um 1 vermindert oder um 1 vermehrt." Er gilt nicht für das Möbiusband.

Die wichtigste Aussage enthält der Lehrsatz II (S. 10): „Wenn eine Fläche T durch n_1 Querschnitte q_1 in ein System T_1 von m_1 einfach zusammenhängenden Flächenstücken und durch n_2 Querschnitte q_2 in ein System T_2 von m_2 Flächenstücken zerfällt, so kann $n_2 - m_2$ nicht $> n_1 - m_1$ sein." RIEMANN versucht das zu beweisen, indem er sich in der Fläche T nacheinander *beide* Querschnittsysteme ausgeführt denkt. Ist das System q_1 bereits gezogen, so können die Querschnitte des Systems q_2 dadurch in mehrere Stücke zerschnitten worden sein; sie können aber auch teilweise mit dem System q_1 zusammenfallen. Die Anzahl der Querschnitte in diesem variierten System q_2' ist abhängig von der Anzahl der ursprünglichen Endpunkte des Systems q_2, sowie von der Art der Schnitt- und Verzweigungspunkte der beiden Systeme; sie wird mit n_2+s bezeichnet. Es zeigt sich, daß sich die Anzahl n_1 der Querschnitte q_1 um die gleiche Zahl s ändert, wenn die Schnitte in der umgekehrten Reihenfolge gezogen werden. Die schließlich resultierende Fläche ist in beiden Fällen dieselbe. Sie besteht aus m_1+n_2+s oder auch aus m_2+n_1+s einfach zusammenhängenden Flächenstücken. Man kann daraus direkt auf $n_2 - m_2 = n_1 - m_1$ schließen. Bei RIEMANN ist die Schlußfolgerung etwas komplizierter und führt vorerst nur auf die im Satz behauptete Ungleichung $n_2 - m_2 \leqq n_1 - m_1$; die umgekehrte Ungleichung erhält er aus einer analogen Betrachtung. „Zufolge dieses Lehrsatzes ist, wenn die Anzahl der Querschnitte unbestimmt durch n, die Anzahl der Stücke durch m bezeichnet wird, $n - m$ für alle Zerlegungen einer Fläche in einfach zusammenhängende Stücke constant.... Diese Zahl kann füglich mit dem Namen „Ordnung des Zusammenhangs" einer Fläche belegt werden."

Der Beweis zum Lehrsatz ist allerdings nicht ganz stichhaltig. Es geht dabei die Voraussetzung ein, daß die bei der Überlagerung beider Systeme entstehenden Schnittpunkte nur *in endlicher Anzahl* auftreten. Das braucht nicht immer zu gelten. Betrachten wir ein „gelochtes" Quadrat der reellen Ebene in folgender Anordnung:

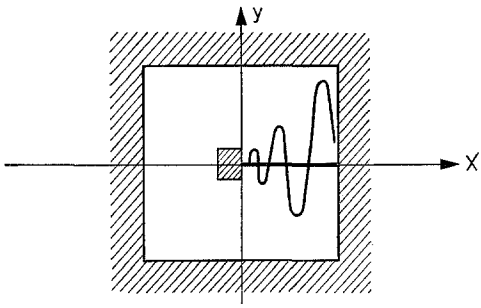


Fig. 1

Das Querschnittsystem q_1 bestehe aus einem Schnitt in der positiven x-Achse, das Querschnittsystem q_2 aber aus der Kurve

$$\left\{y = x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x > 0, \quad y = 0 \text{ für } x = 0\right\}.$$

Diese zerstückelt den ersten Querschnitt in unendlich viele Teile.

Nach obiger Definition hat die einfach zusammenhängende Fläche die Ordnung des Zusammenhangs -1. Um die Ordnung des Zusammenhangs einer aus mehreren Stücken bestehenden Fläche zu erhalten, sind die einzelnen Ordnungen zu addieren. RIEMANN verwendet diese Definition im folgenden nicht, sondern bezeichnet, indem er sich auf aus einem Stück bestehende Flächen beschränkt, ihren Zusammenhang kurz als einfach, zweifach usw., „indem wir unter einer n-fach zusammenhängenden Fläche eine solche verstehen, die durch $n-1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerlegbar ist." Diesen Prozeß rückwärts ablaufen lassend, kann man also zusätzlich sagen, daß diese RIEMANNschen Flächen von endlichem Zusammenhang sich aus endlich vielen Elementarflächenstücken durch Randidentifizierung zusammenfügen lassen.

In der „Theorie der Abel'schen Functionen" entwickelt RIEMANN eine zweite Methode zur Zusammenhangstheorie der Flächen, bei welcher der Begriff „begrenzen" in den Mittelpunkt rückt. Einleitend findet sich folgender, später oft „Riemannsches Lemma" genannter Satz (S. 85): „Wenn in einer Fläche F zwei Curvensysteme a und b zusammengenommen einen Theil dieser Fläche vollständig begrenzen, so bildet jedes andere Curvensystem, das mit a zusammen einen Theil von F vollständig begrenzt, auch mit b die ganze Begrenzung eines Flächentheils, der aus den beiden ersteren Flächentheilen längs a (durch Addition oder Subtraction, jenachdem sie auf entgegengesetzter oder auf gleicher Seite von a liegen) zusammengesetzt ist. Beide Curvensysteme leisten daher für völlige Begrenzung eines Theils von F dasselbe und können für die Erfüllung dieser Forderung einander ersetzen."

RIEMANN definiert anschließend: „Wenn in einer Fläche F sich n geschlossene Curven $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ziehen lassen, welche weder für sich noch mit einander einen Theil dieser Fläche F vollständig begrenzen, mit deren Zuziehung aber jede andere geschlossene Curve die vollständige Begrenzung eines Theils der Fläche F bilden kann, so heißt die Fläche eine $(n+1)$fach zusammenhängende."

Wir wissen auch hier nicht genau, was RIEMANN unter einer „geschlossenen Curve" versteht. Am nächsten liegt die Vermutung, daß er damit ein eindeutiges stetiges Bild einer Kreislinie meint; Auswüchse wie die PEANO-Kurve (1890 publiziert), waren ja damals noch nicht bekannt. Man mag also die a_i etwas ungenau als singuläre, nichtorientierte 1-Zykeln auffassen, die in ihrer Gesamtheit ein maximales, mod 2 homolog unabhängiges System bilden, also eine 1-dimensionale Homologiebasis mod 2 im Sinn der singulären Homologietheorie.

Die Existenz eines solchen Systems ist dabei Voraussetzung („Wenn in einer Fläche ...") und bleibt unerörtert. Hingegen rechtfertigt RIEMANN die Definition, indem er zeigt, daß die Zahl $n+1$ für die Fläche charakteristisch ist.

Kehren wir vorerst für einen Moment zum Lemma zurück. Der Herausgeber des RIEMANNschen Gesamtwerkes, H. WEBER, macht in der 2. Auflage (1892) darauf aufmerksam, daß dagegen von ALBERTO TONELLI ein Einwand erhoben worden sei (Göttinger Nachrichten 1875 und Atti della Reale Accademia dei Lincei, Ser. II, vol. 2, 1875): Das Lemma braucht nicht richtig zu sein, wenn bei den Begrenzungsrelationen nicht *alle* Kurven des zu ersetzenden Systems wirklich auftreten. Man findet leicht ein Beispiel dazu:

Auf einer Kugeloberfläche mit vier Löchern werden die Kurvensysteme a, b, c wie folgt gewählt:

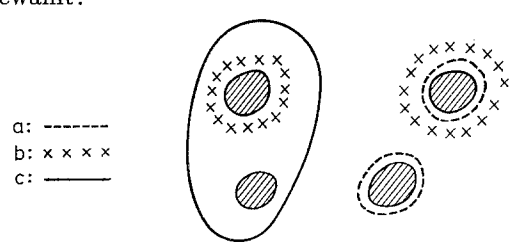


Fig. 2

Es begrenzen dann a und b oder a und c zusammengenommen, nicht aber b und c.

Nimmt man nun an, daß in den beiden Homologien

$$a+b\sim 0 \tag{1}$$

$$a+c\sim 0 \tag{2}$$

wirklich alle Kurven des Systems a auftreten und addiert man die zugehörigen Flächenteile mod 2 („durch Addition oder Subtraction"), so erhält man einen neuen Flächenteil, von dem das Lemma etwas ungenau aussagt, daß er von den Kurvensystemen b und c berandet werde. Wenn man das noch dahin präzisiert, daß darin genau jene Kurven auftreten, die in genau einer der Homologien (1) oder (2) enthalten sind, so ist mit RIEMANNs geometrischer Überlagerung die Additivität der Homologien mod 2 gewonnen worden.

RIEMANN zeigt dann, daß die Zusammenhangszahl der Fläche F nicht vom speziellen System der a_i abhängt, sondern daß vielmehr irdendein System von n geschlossenen Kurven $b_1, \ldots, b_n$, das nicht begrenzt, wieder durch Hinzunahme

einer jeden zusätzlichen geschlossenen Kurve begrenzend wird. Die Argumentation dazu lautet (S. 86): „In der That, da b_1 mit Linien a zusammengenommen einen Theil von F vollständig begrenzt, so kann eine dieser Curven a durch b_1 und die übrigen Curven a ersetzt werden. Es ist daher mit b_1 und diesen $n-1$ Curven a jede andere Curve, und folglich auch b_2, zu völliger Begrenzung eines Theils von F ausreichend, und es kann eine dieser $n-1$ Curven a durch b_1, b_2 und die übrigen Curven a ersetzt werden. Dieses Verfahren kann offenbar, wenn, wie vorausgesetzt, die Curven b zu vollständiger Begrenzung eines Theils von F nicht ausreichen, so lange fortgesetzt werden, bis sämmtliche a durch die b ersetzt worden sind."

RIEMANN nimmt hier genau das Verfahren vorweg, das dem STEINITZschen Austauschsatz der linearen Algebra zugrunde liegt. Nach der Voraussetzung existiert eine Homologie

$$b_1 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i \sim 0 \qquad (\varepsilon_i = 0 \text{ oder } 1) \tag{3}$$

wobei mindestens ein $\varepsilon_i \neq 0$, z. B. $\varepsilon_j = 1$ ist, sonst wäre $b_1 \sim 0$. Somit ist a_j homolog abhängig von $(b_1, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$. Genügt eine geschlossene Curve C einer Homologie

$$C + \sum_{i=1}^{n} \eta_i a_i \sim 0 \qquad (\eta_i = 0 \text{ oder } 1) \tag{4}$$

mit $\eta_j = 1$, so erhält man zusammen mit (3) durch Addition mod 2 eine Homologie, in der das a_j nicht mehr vorkommt. (Da das zu ersetzende Kurvensystem nur aus *einer* Kurve besteht, bleibt TONELLIS Einwand hier ohne Bedeutung.) C berandet also auch zusammen mit dem System $(b_1, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$. (Ist in (4) $\eta_j = 0$, so ist das trivialerweise der Fall.) Das System $(b_1, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ ist überdies homolog unabhängig, denn bestünde eine Homologie

$$b_1 + \sum_{i \neq j} \varrho_i a_i \sim 0 \qquad (\varrho_i = 0 \text{ oder } 1)$$

so könnte zusammen mit (3) wieder durch Addition mod 2 auf eine Abhängigkeit der a_i geschlossen werden.

Sind nun bereits die Kurven $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ ausgetauscht, so ist für die Fortsetzung des Verfahrens zu beachten, daß b_k immer von einem System $(b_1, \ldots, b_{k-1}, a_r, \ldots, a_s)$ abhängt, in dem noch mindestens ein a_i enthalten sein muß, da die Gesamtheit der b_i nach Voraussetzung homolog unabhängig ist. So können nacheinander alle a_i eliminiert werden.

Weiter bemerkt RIEMANN, daß jeder nichtzerstückelnde Querschnitt eine nach dieser zweiten Definition $(n+1)$-fach zusammenhängende Fläche in eine n-fach zusammenhängende verwandelt. Wird dieser Schritt n mal wiederholt, so bleibt eine einfach zusammenhängende Fläche übrig. Die zuletzt gegebene Definition umfaßt also jedenfalls die frühere und ist überdies auch auf geschlossene Flächen anwendbar.

Um die Querschnittstheorie auch für die geschlossene Fläche nutzbar zu machen, muß letztere nach RIEMANN „durch Ausscheidung eines beliebigen Punktes in eine begrenzte verwandelt werden, so daß die erste Zerlegung durch diesen Punkt und einen in ihm anfangenden und endenden Querschnitt, also durch eine geschlossene Curve, geschieht. Die Oberfläche eines Ringes z. B.,

welche eine dreifach zusammenhängende ist, wird durch eine geschlossene Curve und einen Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt."

Im allgemeinen Fall haben die geschlossenen RIEMANNschen Flächen einen $(2p+1)$-fachen Zusammenhang. RIEMANN findet das durch folgende Überlegung (S. 97): „Da die Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche aus Einem Stücke besteht, eine geschlossene Fläche aber durch eine ungerade Anzahl von Schritten eine gerade Zahl von Begrenzungsstücken, durch eine gerade eine ungerade erhält, so ist zu dieser Zerschneidung eine gerade Anzahl von Schnitten erforderlich. Die Anzahl dieser Querschnitte sei $=2p$."

C. NEUMANN, der in der 2. Auflage seiner „Vorlesungen über RIEMANN's Theorie der ABEL'schen Integrale" diese geometrischen Verhältnisse sehr ausführlich darstellt, beweist ebenfalls den Satz, daß die *punktierten* Flächen immer ungeraden Zusammenhang haben (S. 164). Offenbar zieht für ihn das Verschwinden dieser einzigen Randkurve notwendig eine Verminderung des Zusammenhangs um 1 nach sich, denn er ordnet den geschlossenen Flächen die Zusammenhangs- oder „Grundzahl" $2p$ zu. Er schreibt dazu (S. 186): „Wenn RIEMANN die Fläche R selber eine $(2p+1)$-fach zusammenhängende nennt, derselben also die Grundzahl $(2p+1)$ zuertheilt, so denkt er sich jedesmal $\dot{R}$ statt R *substituirt*, wie solches von ihm auch in deutlicher Weise hervorgehoben ist. Empfehlenswerther aber dürfte es vielleicht sein, eine solche stillschweigende Substitution zu vermeiden. Und dann ist die Fläche eine $2p$-fach zusammenhängende zu nennen, ihre Grundzahl also $=2p$ zu setzen."

Wenn RIEMANN manchmal nicht klar ausdrückt, ob er im Moment mit einer geschlossenen oder punktierten Fläche arbeitet, so mag der Grund eher darin liegen, daß er diesen Unterschied nicht als sehr wesentlich empfand, indem eben eine einzige Punktierung den Zusammenhang einer geschlossenen Fläche nicht ändert. Das Querschnittziehen ist dann in dem Sinn zu erweitern, daß der erste „Querschnitt", wie im Fall der Ringfläche, auch eine geschlossene Kurve sein darf. NEUMANNs Auffassung ist allerdings auch von SCHLÄFLI, von KLEIN (der dieser Variante den Ausdruck „ungewöhnlicher Zusammenhang" verleiht), sowie von DYCK vertreten worden.

§ 3. Die Zusammenhangszahlen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten bei Riemann und Betti

Ein im Nachlaß gefundenes „Fragment aus der Analysis Situs", über dessen Datierung nichts bekannt ist, zeigt, daß RIEMANN den Plan hegte, seine so erfolgreiche Zusammenhangstheorie der Flächen auch auf Räume höherer Dimension auszudehnen. Zu diesen nur rudimentär erhaltenen Notizen, in denen aber erstmals Zusammenhangszahlen mod 2 für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten auftreten, bemerkt H. WEBER in der 2. Auflage des RIEMANNschen Gesamtwerks (1892), daß ein im Jahr 1871 erschienener Aufsatz von ENRICO BETTI, „Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni", verwandte Gedanken und Ausführungen enthalte. POINCARÉ kommt in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences vom 31. Oktober 1892 ebenfalls auf dieses Fragment zu sprechen und behauptet kurz: „Betti, dans le tome IV, 2^{e} série des Annali di Matematica, a retrouvé et complété les résultats de Riemann."

Nun ist aber die 1. Auflage des RIEMANNschen Gesamtwerks erst 1876 erschienen. WEBER schreibt im Vorwort, daß der gesamte wissenschaftliche Nachlaß RIEMANNs nach dessen Tod an DEDEKIND gelangt sei und faßt jene Abhandlungen, die in der Zwischenzeit daraus bereits veröffentlicht worden sind, in einer 2. Abteilung zusammen. Das Fragment befindet sich nicht in dieser, sondern in der mit „Nachlaß" betitelten 3. Abteilung, so daß POINCARÉ mit seiner Behauptung, daß BETTIs Abhandlung auf dem RIEMANNschen Fragment fuße, kaum recht haben dürfte.

Ein Vergleich der beiden Arbeiten bringt tatsächlich einige merkwürdig übereinstimmende Definitionen, aber auch einige Mißverständnisse an den Tag, so daß eher anzunehmen ist, daß RIEMANN anläßlich seines im Lebenslauf erwähnten Aufenthaltes in Italien BETTI mündlich mit seinen Gedanken vertraut gemacht hat. Die freundschaftlichen Beziehungen sind belegt durch einen vom 21. 1. 1864 datierten Brief von RIEMANN an BETTI, der mit den Worten „Carissimo Amico" beginnt. (Werke 1. Auflage, S. 280.)

Bereits PAUL HEEGAARD spricht in seiner in dänischer Sprache abgefaßten Dissertation aus dem Jahr 1898 diese Vermutung aus. In der 1916 im Bulltin de la Société mathématique de France erschienenen Übersetzung heißt es (S. 192): „Après la mort de Riemann, Betti publia un Mémoire à ce sujet. Il ne parle pas de collaboration avec Riemann; mais, à juger par les fragments d'une théorie, réunis par Weber après les notes écrites par Riemann, Riemann a, pendant son séjour en Italie essentiellement contribué aux pensées exprimées dans le Mémoire de Betti."

Die wenigen Seiten des RIEMANNschen Fragments enthalten keine Definition der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Der Begriff findet sich aber schon in seiner Habilitationsvorlesung „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (1854). Nach dem von DEDEKIND verfaßten Lebenslauf hat RIEMANN sich in dieser Rede bemüht, seine Gedanken auch den Nichtmathematikern unter den Mitgliedern der Fakultät verständlich zu machen; deshalb wohl die mehr beschreibende Definition (S. 255): „Größenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zuläßt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger Übergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit." Und an anderer Stelle (S. 257): „Geht man bei einem Begriffe, dessen Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, von einer Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer andern über, so bilden die durchlaufenen Bestimmungsweisen eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren wesentliches Kennzeichen ist, daß in ihr von einem Punkte nur nach zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich ist. Denkt man sich nun, daß diese Mannigfaltigkeit wieder in eine andere, völlig verschiedene, übergeht, und zwar wieder auf bestimmte Art, d.h. so, daß jeder Punkt in einen bestimmten Punkt der andern übergeht, so bilden sämmtliche so erhaltenen Bestimmungsweisen eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit." So fortfahrend erscheint die $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit als Zusammensetzung „aus einer Veränderlichkeit von n Dimensionen und aus einer Veränderlichkeit von Einer Dimension."

Das Fragment enthält folgende Definitionen und Sätze (S. 448/449):

1) „Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ m innere zusammenhängende unbegrenzte n-Strecke, welche, einmal genommen, weder einzeln noch in Verbindung ein inneres $(n+1)$-Streck vollständig begrenzen können, und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ m ebenso beschaffene n-Strecke, deren jedes mit einem oder einigen der a zusammengenommen ein inneres $(n+1)$-Streck vollständig begrenzen kann, so kann jedes innere zusammenhängende n-Streck, welches mit den a die ganze Begrenzung eines inneren $(n+1)$-Strecks bilden kann, dies auch mit den b und umgekehrt."

2) „Bildet irgend ein unbegrenztes inneres n-Streck mit den a zusammengenommen die ganze Begrenzung eines inneren $(n+1)$-Strecks, so können in Folge der Voraussetzungen die a nach und nach eliminirt und durch die b ersetzt werden."

Es stellt sich hier auch als erstes die Frage, was unter einem „unbegrenzten n-Streck" zu verstehen ist. Den oben zitierten beiden Sätzen gehen ein paar Notizen über „Einstrecke" voran: „Zwei Einstrecke werden derselben oder verschiedenen Gruppen zugerechnet, je nachdem das eine stetig in das andere übergehen kann oder nicht. Je zwei Einstrecke, welche durch dasselbe Punktepaar begrenzt werden, bilden zusammen ein zusammenhängendes unbegrenztes Einstreck und zwar kann dies die ganze Begrenzung eines Zweistrecks bilden oder nicht, je nachdem sie derselben oder verschiedenen Gruppen angehören. Ein inneres, zusammenhängendes, unbegrenztes Einstreck kann, einmal genommen, entweder zur ganzen Begrenzung eines innern Zweistrecks ausreichen oder nicht."

RIEMANN gewinnt also durch Randidentifizierung aus zwei Einstrecken ein einziges und mit „unbegrenzt" ist demnach gemeint, daß der Rand mod 2 verschwindet. Das unbegrenzte Einstreck, das ein Zweistreck berandet, nimmt, wenn wir mit der Flächentheorie vergleichen, die Stelle der geschlossenen Kurve ein, die einen Flächenteil begrenzt. Berücksichtigt man noch, daß RIEMANN dem Einstreck manchmal das Attribut „zusammenhängend" beifügt, so kann man dem Begriff wohl die sehr allgemeine Deutung eines in der Mannigfaltigkeit liegenden Linienkomplexes geben, der sich aus stetigen Bildern von Strecken zusammensetzt, deren Endpunkte teilweise zu zweien identifiziert worden sind. (Da RIEMANN Spaltungen bei den Flächen ausschließt, muß man dasselbe hier vielleicht für die Verzweigungen tun.)

Ein weiterer Hinweis liefert eine Notiz auf S. 450: „Zwei Vielstreckstheile (Raumtheile) heißen zusammenhängend oder einem Stück gehörig, wenn sich von einem inneren Punkt des einen durch das Innere des Vielstrecks (Raumes) eine Linie nach einem inneren Punkt des andern ziehen läßt." Demnach bedeutet „n-Streck" wohl ganz allgemein einen evtl. aus mehreren Stücken bestehenden n-dimensionalen Teilraum. Faßt man die einzelnen zusammenhängenden Stücke als singuläre n-Simplexe auf und setzt man solche Teile nach dem bei den Einstrecken gegebenen Vorbild durch Randidentifizierung zu unbegrenzten n-Strecken zusammen, so kann man sagen, daß das System $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ des Satzes 1) aus m mod 2 homolog unabhängigen singulären nichtorientierten n-Zykeln besteht und jedes b_j ist von den a_i mod 2 homolog abhängig.

Die Behauptung des Satzes 1) ist — bei verschärften Voraussetzungen — dieselbe wie im Lemma der Flächentheorie. Sie ist symmetrisch in den a_i und b_i;

die Voraussetzung ist es nicht. Ein Beweis fehlt, doch ist anzunehmen, daß RIEMANN ihn wieder durch Addition und Subtraktion von Raumteilen beibringen wollte und die homologe Abhängigkeit der b_i von den a_i nur im Hinblick auf den nachfolgenden Austauschsatz 2) forderte. Ein Beweis fehlt auch hier.

Wir haben in der Flächentheorie gesehen, daß dazu nur die Addierbarkeit der Homologien mod 2 gebraucht wird. Nimmt man das als bewiesen an, so kann das Austauschverfahren ohne Änderung übernommen werden. Ist aber die Äquivalenz der Systeme a und b gezeigt, so existieren die Homologien

$$a_i + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij} b_j \sim 0 \qquad (\varepsilon_{ij} = 0 \text{ oder } 1;\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

und Satz 1) kann vollumfänglich verifiziert werden: Gilt für einen n-Zykel C die Homologie

$$C + \sum_{i=1}^{m} \varrho_i a_i \sim 0 \qquad (\varrho_i = 0 \text{ oder } 1),$$

so gilt auch

$$C + \sum_{i,j} \varrho_i (\varepsilon_{ij} b_j) \sim 0.$$

Die Umkehrung läßt sich sogar aus den Voraussetzungen des Satzes 1) allein beweisen.

Es folgen dann noch zwei Definitionen:

3) „Ein n-Streck A heißt in ein anderes B veränderlich, wenn durch A und durch Stücke von B ein inneres $n+1$-Streck vollständig begrenzt werden kann."

4) „Wenn im Innern einer stetig ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit Hülfe von m festen, für sich nicht begrenzenden, n-Streckstücken jedes unbegrenzte n-Streck begrenzend ist, so hat diese Mannigfaltigkeit einen $m+1$-fachen Zusammenhang $n$ter Dimension."

Da RIEMANN zuläßt, daß A evtl. schon zusammen mit Stücken von B begrenzt, ist „ineinander veränderlich" nicht gleichbedeutend mit homolog. Ist z.B. B eine Lemniskate, die zwei Randkurven einer Fläche umschließt, während A nur die eine Randkurve umkreist, so ist nach RIEMANNs Definition „A in B veränderlich", aber es ist *nicht* $A \sim B$.

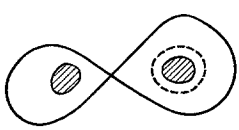


Fig. 3

In 4) stehen die n-Streckstücke abkürzend für die unter 1) aufgeführten zusammenhängenden unbegrenzten n-Strecke. Der Zusatz, daß sie zusammen mit jedem weiteren unbegrenzten n-Streck begrenzen, macht sie zu einem maximalen, mod 2 homolog unabhängigen System, also zu einer n-dimensionalen singulären Homologiebasis mod 2. Ihre Anzahl ist gleich der heutigen n-ten BETTIschen Zahl mod 2. Wie in der Flächentheorie ist aber der Zusammenhang

nach RIEMANN um 1 größer, nämlich $(m+1)$-fach. Ein Spezialfall wird noch besonders erwähnt: „Eine stetig ausgedehnte zusammenhängende Mannigfaltigkeit heißt einfach zusammenhängend, wenn der Zusammenhang jeder Dimension einfach ist."

BETTI stellt seine Theorie von Anfang an auf eine analytische Grundlage. Seine Begriffe sollen vorerst kurz zusammengefaßt werden. n Variable $z_1, \ldots, z_n$, welche alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können, bestimmen einen n-dimensionalen Raum (spazio) S_n. Sind sie durch m (unabhängige) Gleichungen miteinander verknüpft, so spannen die restlichen $n-m$ unabhängigen Variablen einen $(n-m)$-dimensionalen Teilraum S_{n-m} auf; dieser heißt linear zusammenhängend (linearmente connesso), wenn zwei beliebige seiner Punkte durch eine stetige, ganz im Teilraum liegende Kurve verbunden werden können. Ein $(n-1)$-dimensionaler Raum S_{n-1} heißt geschlossen (chiuso), wenn er den S_n so in zwei linear zusammenhängende Teile zerlegt, daß keine zwei in verschiedenen Teilen liegende Punkte durch eine stetige Kurve verbunden werden können, die den S_{n-1} nicht schneidet. Dann heißt es wörtlich (S. 144): „Diremo che uno spazio linearmente connesso S_{n-2} è *chiuso* se divide uno spazio S_{n-1} in due regioni ciascuna linearmente connessa e tali che non si possa da un punto qualunque di una di esse condurre una linea continua tutta contenuta in S_{n-1}, a un punto qualunque dell'altra che non intersechi S_{n-2}: e così di seguito."

Somit erhält man nach BETTI die folgende Definition für den allgemeinen Fall eines „spazio chiuso": Ein Teilraum S_m beliebiger Dimension heißt geschlossen, wenn er einen geschlossenen Raum der nächsthöheren Dimension in zwei linear zusammenhängende Teile zerlegt, so daß keine zwei in verschiedenen Teilen liegende Punkte durch eine stetige Kurve verbunden werden können, die den S_m nicht schneidet. *Nach dieser Definition ist also z.B. ein Meridiankreis auf einer Torusfläche nicht geschlossen, da er sie ja nicht zerlegt!*

Nachdem diese Begriffe festgelegt sind, führt BETTI sofort die Zusammenhangszahlen eines n-dimensionalen Raumes R ein und zwar zuerst den einfachen Zusammenhang und dann allgemeiner (S. 145): „Se invece in R si può imaginare un numero p_m di spazi chiusi di m dimensioni che non possano formare il contorno di una parte linearmente connessa di uno spazio di $m+1$ dimensioni, tutta quanta contenuta in R, e tali che ogni altro spazio chiuso di m dimensioni formi solo o con una parte di essi o con tutti il contorno di una parte linearmente connessa di uno spazio di $m+1$ dimensioni tutta quanta contenuta in R, diremo che R ha di $(p_m+1)^{\text{esimo}}$ ordine la connessione di m^{esima} specie."

Wie der Vergleich mit dem 4. Abschnitt des RIEMANNschen Fragments zeigt, setzt BETTI anstelle der unbegrenzten n-Strecke — ungeachtet der verschiedenen Bedeutung — unbedenklich seine oben definierten „spazi chiusi". RIEMANN setzt ferner von den n-Strecken des Basissystems nur voraus, daß sie für sich nicht begrenzen; er hat schon unter 1) genauer ausgeführt, wie das zu verstehen ist. BETTI sagt ebenso kurz „formano il contorno", verlangt dann aber schärfer, daß sie keinen *linear zusammenhängenden Raum* begrenzen. Das ist wieder etwas anderes: Eine Lemniskate in der Ebene ist nullhomolog, aber sie berandet kein zusammenhängendes Flächenstück.

Um die Definition zu rechtfertigen, muß BETTI nun zeigen, daß für zwei Systeme $(A_1, \ldots, A_t)$ und $(B_1, \ldots, B_{t'})$ mit den verlangten Eigenschaften immer

$t=t'$ ist: „Se t spazi chiusi di m dimensioni $A_1, A_2, \ldots, A_t$ non possono formare soli, e con ogni altro spazio chiuso di m dimensioni formano il contorno di uno spazio linearmente connesso di $m+1$ dimensioni tutto quanto contenuto in R; e se un altro sistema di t' spazi chiusi di m dimensioni, $B_1, B_2, \ldots, B_{t'}$, gode la stessa proprietà, sarà $t=t'$."

Dem Beweis liegt das Austauschverfahren zugrunde. Hier erwähnt BETTI nun, daß er sich dabei auf das gleiche Lemma stütze, das RIEMANN in der Flächentheorie aufgestellt habe. Das Lemma wird mitsamt der Begründung ziemlich wörtlich übersetzt, wobei Systeme von m-dimensionalen, linear zusammenhängenden geschlossenen Räumen die Funktion der Kurvensysteme übernehmen. Das Austauschverfahren selbst wird von BETTI wiederum nicht korrekt durchgeführt. Zwar tauscht er wie RIEMANN in jedem Schritt nur *einen* geschlossenen Raum aus, so daß der früher besprochene Einwand von TONELLI auch hier außer acht gelassen werden kann; dafür will BETTI aber ganz konkret A_1 durch B_1 ersetzen, indem er nämlich mit Hilfe eines beliebigen geschlossenen Raumes C aus den Homologien

$$C+\sum_{i=1}^{t}\varepsilon_i A_i \sim 0 \qquad (\varepsilon_i, \sigma_i = 0 \text{ oder } 1) \tag{1}$$

$$B_1+\sum_{i=1}^{t}\sigma_i A_i \sim 0 \tag{2}$$

auf eine Homologie

$$C+B_1+\sum_{i=2}^{t}\varrho_i A_i \sim 0 \qquad (\varrho_i = 0 \text{ oder } 1)$$

schließt. Obwohl er in der Definition über den beliebigen Raum C nur voraussetzt, daß dieser begrenze „... solo *o con una parte di essi*" (nämlich der A_i) „o con tutti ...", nimmt er nun offenbar an, daß in den Homologien (1) und (2) immer sämtliche A_i auftreten; zumindest muß er die Annahme machen, daß das zu ersetzende A_1 in beiden Relationen wirklich vorkommt.

Schon HEEGAARD übt Kritik an diesem Verfahren (S. 213): „Car pour pouvoir vraiment, de la manière décrite, remplacer successivement les A par les B, il faut être sûr que les A et les B peuvent être accouplés par deux, de sorte que les couples constituent chacun une partie de la frontière (ou toute la frontière) de la variété de $(m+1)^{\text{ième}}$ dimension."

Die Kritik ist aber nur gegenüber BETTI berechtigt, denn RIEMANN setzt von den b nur voraus, daß jedes zusammen mit einem oder einigen der a begrenzt; das kann er tun, denn sonst wäre ein solches $b_i \sim 0$ entgegen der Annahme. Dann verdrängt das b_1 *irgendein* a_i und auf diese Weise kann er „die a nach und nach eliminiren und durch die b ersetzen."

So hat BETTI *zwar den Gedankengang* RIEMANNS *in den Grundzügen richtig erfaßt, in den Einzelheiten jedoch fehlerhaft wiedergegeben.*

Wir haben früher gesehen, daß RIEMANN die Zusammenhangszahlen der Flächen noch auf eine zweite Art definiert, nämlich als die um 1 vermehrte maximale Zahl der Querschnitte, die gezogen werden können, ohne daß die Fläche dabei in Stücke zerfällt. Das Fragment enthält auch in dieser Richtung Ansätze zu einer Verallgemeinerung, deren Ziel wohl darin bestanden hätte,

eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit durch geeignete Querschnitte einfach zusammenhängend zu machen. BETTI greift auch diese Idee auf und meint mit dem folgenden Satz auch bereits das Ziel erreicht zu haben (S. 148): „Per rendere semplicemente connesso, mediante sezioni trasverse semplicemente connesse, uno spazio finito R di n dimensioni, è necessario e sufficiente di fare p_{n-1} sezioni lineari, p_{n-2} di due, p_{n-3} di tre, ..., p_1 di $n-1$ dimensioni, se p_1+1, p_2+1, ..., $p_{n-1}+1$ sono rispettivamente gli ordini delle sue connessioni di 1^a, 2^a, ..., $(n-1)^{esima}$ specie."

HEEGAARD deckt allerdings auch in diesem Beweis verschiedene Mängel auf, fügt aber bei „Cependant, le théorème plusieurs fois proposé $p_m = p_{n-m}$ est probablement inspiré par ces recherches", so daß der Satz vielleicht doch als Keim zum POINCARÉschen Dualitätsgesetz zu werten ist.

§ 4. Die Dycksche Charakteristik

a) Der Mannigfaltigkeitsbegriff

Bestimmtere Formen gewinnt der Mannigfaltigkeitsbegriff bei WALTHER DYCK in „Beiträge zur Analysis situs I" (Mathematische Annalen **32**, S. 457; 1888) und „Beiträge zur Analysis situs II" (Mathematische Annalen **37**, S. 273; 1890). Aus funktionentheoretischen Arbeiten (er nennt SCHWARZ, KLEIN und POINCARÉ) übernimmt er das Prinzip der Randidentifizierung und baut damit die Mannigfaltigkeit aus endlich oder sogar unendlich vielen „Elementargebilden" auf. Letztere werden wie folgt definiert: Die E^{I} als „begrenztes Stück einer Curve", die E^{II} als ein „von einem sich nicht selbst durchsetzenden Curvenzug begrenztes, in eine Ebene ausbreitbares Flächenstück" und endlich die E_n als beliebige Menge von reellen Wertsystemen $(z_1, \ldots, z_n)$, die sich umkehrbar eindeutig und stetig auf eine „Umgebung" eines Punktes $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, vorgegeben durch die n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_i) < r^2$, abbilden läßt. Die einfachste Form der E_n ist durch $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$ gegeben und ihre $(n-1)$-dimensionale Begrenzung $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ heißt eine „sphärische Mannigfaltigkeit S_{n-1}".

Der Identifizierungsprozeß muß nun so vor sich gehen, daß die entstehenden Mannigfaltigkeiten nach DYCK „regulär" ausfallen, worunter er im n-dimensionalen Fall versteht, daß die „Umgebung eines inneren Punktes stets durch eine E_n dargestellt ist". Bei den Flächen bemerkt DYCK, daß es zweckmäßig sei, „eine solche Vereinigung von Randcurven nicht wirklich (geometrisch) auszuführen, sondern nur durch „Zuordnung" der betr. Randstücke — etwa mit Hülfe einer Tabelle — zu fixiren".

Fassen wir zusammen. Die einzelnen Stücke, aus denen die Mannigfaltigkeit aufgebaut ist, sind zusammenhängende Teile eines endlichdimensionalen euklidischen Raumes. Sie werden nach kombinatorischer Art durch (allerdings nicht näher spezifizierte) Zuordnungen aneinandergeklebt und die einzige Forderung, die an das Gefüge gestellt wird, ist, daß die so entstehenden Punktmengen im Kleinen euklidisch ausfallen.

Bei den Flächen wird als erste Eigenschaft der Orientierbarkeitscharakter beschrieben. DYCK führt dazu auf der Elementarmannigfaltigkeit E^{II} eine kleine

Kurve ein, die er mit einem Richtungssinn versieht und nennt dieses Gebilde eine „Indikatrix". An ihre Stelle kann, wie DYCK bemerkt, auch ein dem Sinne nach bezeichnetes Achsenkreuz (x, y) treten, das dann im n-dimensionalen Fall durch ein Koordinatensystem mit n Achsen ersetzt wird, auf denen bestimmte Richtungen als positiv gekennzeichnet sind.

Beim Aufbau der Mannigfaltigkeit M^{II} wird nun auf jede neu hinzugefügte E^{II} der Richtungssinn übertragen. Dabei kann der Fall eintreten, daß eine E^{II} mit mehreren Randteilen zugleich an die M^{II} angeschlossen wird und dabei von den angrenzenden Flächenstücken verschiedene Indikatrizen erhält. Das bedeutet, daß es in dieser Mannigfaltigkeit Wege gibt, längs derer sich die Indikatrix umgekehrt, deshalb der Name „Flächen mit umkehrbarer Indikatrix" im Gegensatz zu den „Flächen mit nicht umkehrbarer Indikatrix", wofür heute die Benennungen „nicht orientierbar" bzw. „orientierbar" verwendet werden. Es liegt eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit umkehrbarer Indikatrix vor, wenn es geschlossene Wege gibt, längs derer eine ungerade Anzahl Achsen ihre Richtung wechselt.

Bezüglich der Bezeichnung „Indikatrix" fügt DYCK in einer Fußnote hinzu (S. 474): „Ich gebe absichtlich diese von *Klein* (Math. Annalen IX, p. 479) ausgesprochene Definition, welche die gemeinte Eigenschaft der Flächen als eine *innere*, d.h. denselben unabhängig von der Umgebung zukommende, charakterisirt ...". Er motiviert auch, weshalb er auf die bis dahin üblichen Begriffe „einseitig" bzw. „zweiseitig" verzichtet. Eine Fläche ist „zweiseitig", wenn man nicht von einer „Seite" auf die andere gelangen kann, ohne den Rand zu überqueren. „Diese letztere Eigenschaft ist indessen — wie ich bei anderer Gelegenheit ausführen will — nur eine Lageneigenschaft der Flächen in unserem dreidimensionalen Raum und sie kann verloren gehen, sofern wir von dieser Lage absehen." DYCK hat also erkannt, daß die Begriffe „mit nicht umkehrbarer Indikatrix" und „zweiseitig" nicht gleichbedeutend sind und daß das erste eine absolute Eigenschaft der Fläche ist, das zweite aber nicht. Er ist indessen nicht mehr darauf zurückgekommen und sein Hinweis hat auch nicht die verdiente Beachtung gefunden; erst E. STEINITZ hat diese Idee wieder aufgegriffen („Beiträge zur Analysis situs", Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft **7**, 1908).

b) Die Charakteristik

Jeder Mannigfaltigkeit wird eine Zahl als ihre „Charakteristik" zugeordnet. Elementargebilde erhalten die Zahl $+1$. Die Charakteristiken der Mannigfaltigkeiten werden dann aus ihrem Entstehungsprozeß berechnet: Jede Operation, die das Entstehen oder Verschwinden eines Elementargebildes bewirkt, wird je nach der Dimension mit $+1$ oder -1 gezählt.

DYCK führt das Verfahren vorerst für den 1-dimensionalen Fall durch. Das Teilen einer E^{I} in zwei Stücke ist mit $+1$, das Zusammenfügen zweier E^{I} mit -1 zu zählen. Darüber hinaus wird festgesetzt, daß das Vereinigen der beiden Endpunkte einer E^{I} ebenfalls mit -1 in Rechnung zu bringen sei, so daß alle geschlossenen Kurvenzüge die Charakteristik 0 erhalten. Nun besteht nach DYCK die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit M^{I} aus einer Anzahl geschlossener und ungeschlossener Kurvenzüge; ihre Charakteristik ist deshalb gleich der Anzahl der

in ihr enthaltenen ungeschlossenen Kurvenzüge. Sie ist unabhängig vom Entstehungsprozeß und die Charakteristik eines Systems von DYCKschen Mannigfaltigkeiten ist gleich der Summe der einzelnen Charakteristiken.

Für das 2-dimensionale Elementargebilde E^{II} zählt analog das Zerschneiden mittels einer Querlinie mit $+1$, das Zusammensetzen zweier Elementargebilde längs gewisser Randlinien mit -1. Diese Abzählung wird auch dann beibehalten, wenn die Mannigfaltigkeit durch die Querlinie nicht zerfällt, bzw. wenn das Vereinigen von Randkurven an *einem* Flächenstück ausgeführt wird. So erhalten z.B. der Kreisring und das Möbiusband die Charakteristik 0; letztere gestattet also nicht, Flächen mit nicht umkehrbarer Indikatrix von solchen mit umkehrbarer Indikatrix zu unterscheiden. Da der Kreisring auch durch „Punktierung" der E^{II} hergestellt werden kann, ist diese Operation mit -1, das Schließen einer Öffnung dementsprechend mit $+1$ zu bewerten. Daraus folgt weiter, daß Rückkehrschnitte die Charakteristik nicht ändern, denn sie lassen sich aus Punktierung und Querschnitt zusammensetzen. Wegen der Additivität der Charakteristik beschränkt sich DYCK dann auf Flächen, die aus einem Stück bestehen.

Eine ohne mehrfache Überdeckung in die Ebene ausbreitbare Fläche nennt DYCK nach MÖBIUS eine „Grundfläche" und denkt sie sich als Elementarflächenstück mit einer gewissen Anzahl Öffnungen. Bei r Randkurven kommt ihr die Charakteristik $K^{II}=2-r$ zu; jeder Rückkehrschnitt zerschneidet sie in Stücke und durch geeignete Querschnitte kann sie in eine Elementarfläche übergeführt werden.

DYCK stellt nun zuerst „Normalformen" für die Flächen mit nicht umkehrbarer Indikatrix auf, indem er gewisse Randkurven der Grundfläche paarweise mit geeignetem Durchlaufsinn identifiziert. Die beiden aufeinander bezogenen Randkurven ergeben einen nicht zerstückelnden Rückkehrschnitt in der neuen Fläche. Die Charakteristik ändert sich dabei nicht; es gilt also für die Normalform $K^{II}=2-r-2s$, wo s die Maximalzahl der nichtzerstückelnden, sich nicht schneidenden Rückkehrschnitte bedeutet. (Man kann auch sagen, daß es $2s$ nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte gibt, die sich je zu zweien in einem Punkt schneiden.)

Dann stellt DYCK die Beziehung zur RIEMANNschen Zusammenhangszahl Z her. Es ist

$$K^{II}=\left.\begin{cases}3-Z & \text{für geschlossene}\\ 2-Z & \text{für berandete}\end{cases}\right\}\text{Flächen}$$

oder allgemein $K^{II}=2-\bar{Z}$, wo $\bar{Z}$ den von KLEIN eingeführten „ungewöhnlichen Zusammenhang" bedeutet. Daß ihm mit seiner Charakteristik auch eine Verallgemeinerung der EULERschen Polyederformel auf beliebige geschlossene, orientierbare Flächen gelungen ist, erwähnt er nirgends. Es ist aber $Z-1$ gleich der 1. BETTIschen Zahl mod 2, p^1, also

$$K^{II}=2-p^1=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2.$$

Man erhält das aber auch direkt aus dem Aufbau der Polyederfläche: α_2 ist die Anzahl der verwendeten Elementarflächenstücke, von denen jedes mit $+1$ zählt. Die Anzahl α_1 der Polyederkanten ist gleich der Anzahl der identifizierten Randkurven (nach DYCK „eingefügte Querschnitte") und diese sind negativ zu zählen. Ferner muß die Fläche dort, wo die Kanten zusammenstoßen noch

je mit einem Punkt verschlossen werden, was nach den früher aufgestellten Regeln positiv zu bewerten ist.

Flächen mit umkehrbarer Indikatrix werden auf zwei verschiedene Arten hergestellt. Die erste Möglichkeit besteht darin, in der Grundfläche gewisse Randkurven, die kreisförmig sein mögen, diametral auf sich selbst zu beziehen. DYCK erwähnt dazu den Satz, daß diese Kurven Rückkehrschnitte ergeben, längs derer sich die Indikatrix umkehrt. Beim Identifizierungsprozeß verringert sich die Zahl der Randkurven, während sich die Charakteristik nicht ändert. Diesen Normalflächen kommt so die Charakteristik $K^{II}=2-r-s'$ zu, wo r die Randkurvenzahl ist und s' die Anzahl der nicht zerstückelnden Rückkehrschnitte, längs derer sich die Indikatrix umkehrt.

Die allgemeinste Normalform konstruiert DYCK dann, indem er in der Grundform wieder σ' Randkurven auf sich selbst bezieht, daneben aber noch 2σ bzw. $2\sigma''$ Randkurven zu zweien mit gleichem bzw. ungleichem Richtungssinn zuordnet. An einer Figur führt er dann die Überlegung durch, daß ein solches zu identifizierendes Kurvenpaar immer durch zwei Kurven ersetzt werden kann, die auf sich selbst bezogen sind. (Man findet diese Aussage später oft so formuliert, „daß ein Henkel sich durch zwei Kreuzhauben ersetzen läßt".) Die Anzahl der möglichen nichtzerstückelnden Rückkehrschnitte ist gleich $\sigma'+2\sigma+2\sigma''$ und es ist $K^{II}=2-r-\sigma'-2(\sigma+\sigma'')$.

Der entstehende Flächentyp ist nun offenbar festgelegt durch die Randkurvenzahl der Grundfläche und die Bestimmung, wieviele davon nach der ersten oder zweiten Art identifiziert werden sollen; m.a.W. bilden Randkurvenzahl, Charakteristik und Orientierbarkeitscharakter ein vollständiges Invariantensystem. DYCKS Untersuchungen gipfeln denn auch in dem Satz (S. 488):

„Indem man von der Erzeugung aller Flächen aus den Grundformen ausgeht, ergeben sich für die Möglichkeit umkehrbar eindeutiger stetiger Abbildung aller Punkte zweier (je aus einem Stück bestehender) Flächen aufeinander die folgenden Bedingungen als nothwendig und hinreichend:

1. Die Flächen müssen zur gleichen Classe, Flächen mit nicht umkehrbarer Indikatrix bez. Flächen mit umkehrbarer Indikatrix, gehören.

2. Ihre Charakteristiken müssen übereinstimmen.

3. Die Anzahl der Randcurven muß bei beiden dieselbe sein."

DYCK macht in einer Fußnote auf JORDANS Arbeit „Sur la déformation des surfaces" (LIOUVILLE'S Journal, Serie 2, Bd. XI, 1866) aufmerksam, die bereits diesen Satz — wenn auch nicht ganz vollständig — enthält:

„Théorème: Pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, il faut et il suffit:

1° Que le nombre des contours séparés qui limitent respectivement ces deux portions de surfaces soit le même.

2° Que le nombre maximum des contours fermés ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement nulle part, que l'on peut tracer sur chacune des deux surfaces sans la partager en deux régions séparées, soit le même de part et d'autre."

Es fehlt also die erste Bedingung; die Beschränkung auf orientierbare Flächen steckt bei JORDAN nur implizit im Beweis.

Im Enzyklopädieartikel „Analysis situs" entwickeln DEHN & HEEGAARD eine Methode, welche die Überführung aller Flächen in „Normalformen" gestattet und vervollständigen damit den von DYCK ausgesprochenen Satz.

Um nun noch zu einer Charakteristik für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten zu gelangen, geht DYCK von folgenden Festsetzungen aus:

„1. Jeder Elementarmannigfaltigkeit E_n kommt die charakteristische Zahl $+1$ zu.

2. Jede Umformung einer M_n, die das Entstehen einer E_n hervorruft, wird entsprechend mit $+1$ gezählt, umgekehrt, jedes Verschwinden einer E_n mit -1."

Für $\varkappa < n$ wird das Ausschneiden $(-E_\varkappa)$ bzw. Einfügen $(+E_\varkappa)$ stets so vorgenommen, daß die sphärische Begrenzung $S_{\varkappa-1}$ der $E_\varkappa$ ganz in die Begrenzung der Mannigfaltigkeit fällt. Die Wirkung des Ausschneidens einer $E_\varkappa$ wird an einem einfachen Beispiel studiert:

Die E_n $\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ wird durch die E_{n-1} $\{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < 1,\ x_n = 0\}$ in zwei E_n zerlegt. Das liefert die symbolische Gleichung $E_n - E_{n-1} = 2E_n$, also zählt $\mp E_{n-1}$ mit ± 1. Man kann aber das Ausschneiden der E_{n-1} zerlegen, indem zuerst die E_{n-2} $\{x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 < 1,\ x_{n-1} = x_n = 0\}$ und dann die beiden E_{n-1}

$$\left\{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 < 1 \begin{pmatrix} x_{n-1} < 0, & x_n = 0 \\ x_{n-1} > 0, & x_n = 0 \end{pmatrix}\right\}$$

weggenommen werden. Das führt zur Gleichung $E_n - E_{n-2} - 2E_{n-1} = 2E_n$, also zählt $\mp E_{n-2}$ mit ∓ 1. So fortfahrend findet DYCK: „Der Prozeß $\mp E_\varkappa$ zählt mit $\mp (-1)^{n-\varkappa}$ für die Charakteristik einer M_n." So tritt der symbolischen Gleichung

$$M_n = E_n + \sum_\varkappa (\mp E_\varkappa),$$

die den Entstehungsprozeß der Mannigfaltigkeit festhält, eine zweite zur Seite:

$$K_n = 1 + \sum_\varkappa \mp (-1)^{n-\varkappa},$$

in welcher die Summe über alle diese mit $+1$ oder -1 bewerteten Schritte zu bilden ist.

In einfachen Beispielen führt diese Methode schnell zu einem Resultat: Die n-dimenionale Sphäre S_n wird durch Ausschneiden eines Punktes in eine E_n verwandelt. Die zugehörige Gleichung lautet: $S_n - E_0 = E_n$; daraus folgt sofort

$$K(S_n) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } n \text{ gerade ist.} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Die „projektive Mannigfaltigkeit P_n" wird aus der E_n erhalten, indem eine P_{n-1} eingefügt wird. Dies liefert eine Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned} P_n - P_{n-1} &= E_n \\ P_{n-1} - P_{n-2} &= E_{n-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_1 - P_0 &= E_1 \\ P_0 &= E_0 \end{aligned}$$

also ist $P_n = E_n + E_{n-1} + \cdots + E_1 + E_0$ und deshalb

$$K(P_n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade ist.} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Die P_n mit gerader Dimension erkennt DYCK als Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer Indikatrix, die P_n ungerader Dimension als solche mit nicht umkehrbarer Indikatrix.

DYCK befaßt sich dann eingehend mit bestimmten analytisch vorgegebenen Mannigfaltigkeiten M_n. Diese läßt er durch stetige Umformungen mit Hilfe eines Parameters aus einer M_n mit bekannter Charakteristik entstehen. Trotz dieses kontinuierlichen Prozesses ändert sich die Charakteristik nur sprunghaft an gewissen singulären Stellen der sich deformierenden M_n. Der Einfluß dieser Punkte (ihr „Punktcharakter") wird untersucht und im betrachteten Parameterintervall aufsummiert. Die errechnete Zahl kann DYCK in Beziehung bringen zur Kroneckerschen Charakteristik eines Funktionensystems. So erhält er auch für $n \geqq 3$ eine Möglichkeit, ihre Unabhängigkeit vom Entstehungsprozeß zu rechtfertigen. Allerdings sind seine Beweise nach heutigem Maßstab nicht streng.

§ 5. Henri Poincaré 1854—1912

Den Auftakt zu POINCARÉs topologischen Werken bildet ein kurzes Résumé in den Comptes Rendus vom 31. Oktober 1892.

Die RIEMANN/BETTIschen Zusammenhangszahlen hatten inzwischen durch E. PICARD eine Anwendung in der reinen Analysis gefunden. „La question n'est pas épuisée cependant"; vor allem ist POINCARÉ auf die Tatsache gestoßen, daß zwei 3-dimensionale, im 4-dimensionalen Raum liegende geschlossene Flächen („surfaces") dieselben BETTIschen Zahlen aufweisen können, „sans que l'on puisse passer de l'une à l'autre par déformation continue". Er deutet kurz an, wie jeder n-dimensionalen geschlossenen Fläche eine Gruppe zugeordnet werden kann, die später Fundamentalgruppe genannt wird, und skizziert dann die Möglichkeit, 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit gleichen BETTIschen Zahlen zu konstruieren, deren Gruppen nicht isomorph sind. Die nähere Ausführung holt er in der „Analysis situs" nach. Seine Vermutung, daß diese Gruppe die Mannigfaltigkeit vollständig charakterisiere, wird von TIETZE bezweifelt (1908), aber erst 1919 durch ein Beispiel von ALEXANDER widerlegt (Note on two three-dimensional manifolds with the same group. Trans. Amer. Math. Soc. 20).

a) Der Mannigfaltigkeitsbegriff

Als erste große Arbeit erscheint 1895 im Journal de l'École Polytechnique die „Analysis situs"; sie enthält eine Fülle ganz neuer Ideen.

Der Begriff Mannigfaltigkeit („variété") bezieht sich wiederum auf Punktmengen des n-dimensionalen reellen Raumes, wird aber bei POINCARÉ enger gefaßt als bei BETTI, indem die definierenden Funktionen viel schärferen Bedingungen unterliegen (S. 196)*:

* Alle Seitenzahlen beziehen sich auf: H. POINCARÉ, Œuvres tome VI.

„Considérons le système suivant formé de p égalités et de q inégalités

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\
&F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\\
&\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0\\
&\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Je supposerai que les functions F et φ sont uniformes et continues et qu'elles ont des dérivées continues; je supposerai de plus que, si l'on forme le tableau

$$
\begin{aligned}
&\frac{dF_1}{dx_1}, \quad \frac{dF_1}{dx_2}, \ldots, \frac{dF_1}{dx_n}\\
&\frac{dF_2}{dx_1}, \quad \frac{dF_2}{dx_2}, \ldots, \frac{dF_2}{dx_n}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dF_p}{dx_1}, \quad \frac{dF_p}{dx_2}, \ldots, \frac{dF_p}{dx_n}
\end{aligned}
$$

et que l'on forme les déterminants obtenus en prenant p colonnes quelconques dans ce tableau, je supposerai, dis-je, que ces déterminants ne s'annulent jamais tous à la fois. Je dirai que l'ensemble des points qui satisfont aux conditions (1), s'il y en a, ce que je suppose, forme une *variété à $n-p$ dimensions*."

Die Mannigfaltigkeit heißt *beschränkt* („finie"), wenn es eine Konstante K so gibt, daß für jeden Punkt $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < K^2$ gilt; sie heißt *zusammenhängend* („continue"), wenn zwei beliebige ihrer Punkte durch stetige Veränderung so ineinander übergeführt werden können, daß dabei das Gleichungssystem (1) immer erfüllt bleibt. Da dieser Zustand durch Zerlegung der Mannigfaltigkeit in (evtl. unendlich viele) Teilstücke immer erreicht werden kann, ist das eine Annahme, die POINCARÉ im folgenden immer stillschweigend macht.

Die Gesamtheit der Punkte, welche statt der einen Ungleichung $\varphi_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, q$) die Gleichung $\varphi_i = 0$ und die übrigen Bedingungen von (1) befriedigt, bildet den *Rand* („frontière complète") der ursprünglichen Mannigfaltigkeit. Ist diese Menge leer, so ist die Mannigfaltigkeit *unberandet* („illimitée"). Schließlich heißt die Mannigfaltigkeit *geschlossen* („fermée"), wenn sie zusammenhängend, beschränkt und unberandet ist.

POINCARÉ gibt noch eine zweite Definition für die Mannigfaltigkeit. Die Koordinaten eines Punktes erscheinen dabei direkt als Funktionen von m unabhängigen Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_m$, deren Variationsbereich evtl. durch eine gewisse Anzahl von Ungleichungen eingeschränkt wird:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \Theta_1(y_1, \ldots, y_m)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_n = \Theta_n(y_1, \ldots, y_m)\\
&\psi_1(y_1, \ldots, y_m) > 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\psi_k(y_1, \ldots, y_m) > 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Die Funktionen Θ_i werden beschränkt und stetig vorausgesetzt. POINCARÉ schließt daraus, daß man sie sogar analytisch annehmen dürfe (S. 200): „Si, en effet, ces fonctions Θ sont finies et continues, on pourra trouver des fonctions Θ', qui seront analytiques et qui différeront des Θ aussi peu que nous voudrons." Nach WEIERSTRASS läßt sich jede stetige Funktion einer reellen Variablen in einem abgeschlossenen Intervall durch ein Polynom approximieren, aber die oben formulierte, viel allgemeinere Behauptung stimmt nicht; man muß das demnach als Voraussetzung ansehen.

Wiederum dürfen die aus je m Funktionen Θ_i gebildeten Funktionaldeterminanten nirgends alle gleichzeitig verschwinden. Liegen mehrere Mannigfaltigkeiten $V_1, \ldots, V_n$ vor, die je durch ein System (2) bestimmt sind, und die die Eigenschaft haben, daß jede mit mindestens einer der übrigen einen nicht leeren Durchschnitt hat, so werden sie mit Hilfe des Prinzips der analytischen Fortsetzung als *eine* Mannigfaltigkeit betrachtet. Haben je zwei aufeinanderfolgende V_i einen nicht leeren Durchschnitt, so bilden sie eine zusammenhängende Kette (chaîne continue), die in sich zurücklaufend ist, wenn überdies $V_n = V_1$ ist.

POINCARÉ zeigt dann, daß

1. jede Mannigfaltigkeit, die nach erster Art definiert ist, auch nach zweiter Art dargestellt werden kann.

2. jeder Punkt der Mannigfaltigkeit V in V eine Umgebung hat, die durch ein System der Form (2) realisiert ist.

Daraus folgt, daß die POINCARÉschen Mannigfaltigkeiten *homogen* sind. POINCARÉ verwendet diese Eigenschaft öfters in seinen Beweisen.

Eine Bemerkung über Substitutionen im n-dimensionalen reellen Zahlenraum geht der Definition der Homöomorphismen voran. Geht ein Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ in den Punkt $(x_1', \ldots, x_n')$ über, mit

$$x_i' = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

und wird vorausgesetzt, „dans un certain domaine, les fonctions φ_i sont uniformes, finies et continues; elles ont des dérivées continues et leur déterminant fonctionnel ne s'annule pas", so kann daraus nur auf die *lokale* Existenz der Umkehrfunktionen geschlossen werden. POINCARÉ aber fährt fort: „Si l'on résout les équations (4) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il vient $x_k = \varphi_k'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et les fonctions φ_k' satisfont aux mêmes conditions que les fonctions φ_i." Er setzt also stillschweigend voraus, daß die Umkehrfunktion im ganzen Bildbereich eindeutig sei.

POINCARÉ schreibt darüber weiter (S. 198): „Il est clair que l'ensemble des substitutions qui satisfont à ces conditions forme un groupe, et ce groupe est un des plus généraux que l'on puisse imaginer. La Science dont l'objet est l'étude de ce groupe et de quelques autres analogues a reçu le nom d'*Analysis situs*." Die Menge der Substitutionen bildet zwar keine Gruppe im heutigen Sinn, denn zwei beliebige Transformationen können nur dann komponiert werden, wenn der Bildbereich des ersten Funktionensystems mit dem Definitionsbereich des zweiten übereinstimmt; sie erfüllt hingegen das Axiomensystem eines Gruppoids im Sinn von BRANDT.

Es sind nun V und V' zwei Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, die nach erster Art durch folgende Bedingungen vorgegeben werden:

$$\begin{cases} F_\alpha = 0 \ (\alpha = 1, \ldots, p) \\ \varphi_\beta > 0 \ (\beta = 1, \ldots, q) \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} F'_\alpha = 0 \ (\alpha = 1, \ldots, p) \\ \varphi'_\beta > 0 \ (\beta = 1, \ldots, q'). \end{cases}$$

„Supposons que l'on puisse faire correspondre à un point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variété V un point $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ de la variété V', de telle sorte que l'on ait

$$x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Je considère le domaine D défini par les inégalités

$$F_\alpha > -\varepsilon \quad F_\alpha < \varepsilon \quad \varphi_\beta > 0.$$

La variété V est évidemment contenue tout entière dans le domaine D. Je suppose que *dans le domaine D* les fonctions ψ_k sont finies, continues et uniformes, qu'elles ont des dérivées continues et que leur déterminant fonctionnel n'est jamais nul. Résolvons maintenant les équations (5), nous trouverons

$$x_k = \psi'_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Je considère le domaine D' défini par les inégalités

$$F'_\alpha > -\varepsilon \quad F'_\alpha < \varepsilon \quad \varphi'_\beta > 0$$

et je suppose que *dans le domaine D'* les fonctions ψ'_k sont finies, continues et uniformes, qu'elles ont des dérivées continues et que leur déterminant fonctionnel n'est pas nul. Il résulte de ces hypothèses qu'à tout point de V correspond un point de V' et un seul et inversement; à toute variété W contenue dans V correspondra une variété W', d'un même nombre de dimensions, contenue dans V'; si W est continue, finie ou illimitée, il en sera de même de W' et inversement. Si toutes ces conditions sont remplies, nous dirons que les deux variétés V et V' sont équivalentes au point de vue de l'*Analysis situs*, ou, pour abréger le langage, qu'elles sont *homéomorphes*, c'est-à-dire de forme pareille."

Wir sehen, daß POINCARÉ für seine Homöomorphismen nebst der Eineindeutigkeit nicht nur Stetigkeit in beiden Richtungen voraussetzt, sondern sogar stetige Differenzierbarkeit; außerdem soll die Abbildung auch noch in einer Umgebung der Mannigfaltigkeit definiert sein. Man nennt die stetig differenzierbaren Homöomorphismen heute *Diffeomorphismen*.

POINCARÉ kommt zu einem *Orientierungsbegriff*, indem er die Reihenfolge der Gleichungen $F_i = 0$ im System (1), bzw. die Variablenfolge im System (2) als wesentlich erachtet. Werden zwei Gleichungen $F_i = 0$, bzw. zwei Variable y_i miteinander vertauscht, so repräsentiert das derart veränderte System die *entgegengesetzte Mannigfaltigkeit* („variété opposée"). Da viel mit Funktionaldeterminanten gearbeitet wird, bewirkt diese Operation dann jeweils einen Vorzeichenwechsel.

Bilden einige Teilmannigfaltigkeiten $v_1, \ldots, v_q$ von V eine Kette im früher erklärten Sinn und ist v_1 durch $x_i = \Theta_i(y_1, \ldots, y_m)$, $|y_k| < \beta_k$, v_2 aber durch $x_i = \Theta'_i(z_1, \ldots, z_m)$, $|z_k| < \gamma_k$ vorgegeben, so hat die Funktionaldeterminante

$$\Delta_1 = \frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(z_1, \ldots, z_m)}$$

im Durchschnitt von v_1 und v_2 immer dasselbe Vorzeichen und die Reihenfolge der z_i kann dabei so gewählt werden, daß $\Delta_1 > 0$ ausfällt; gleiches gilt für die übrigen Determinanten. Wenn nun der Durchschnitt von v_q mit v_1 nicht leer ist, die Kette also in sich zurückläuft, dann ist für diesen letzten Durchschnitt das Vorzeichen der Funktionaldeterminante schon festgelegt und fällt für den ganzen Durchschnitt entweder positiv oder negativ aus. Im ersten Fall heißt die Kette *zweiseitig* („bilatère"), im zweiten Fall *einseitig* („unilatère").

Noch allgemeiner kann ein „réseau" betrachtet werden, „c'est-à-dire un ensemble de variétés telles que chacune d'elles soit la continuation de plusieurs autres et que l'on puisse passer d'une quelconque d'entre elles à une autre quelconque d'entre elles par continuation analytique". Mit dessen Hilfe wird nun die Mannigfaltigkeit selbst als zweiseitig oder einseitig erklärt (S. 214): „Supposons maintenant que l'on ait construit un certain réseau continu de variétés partielles

$$v_1, v_2, \ldots, v_q \tag{4}$$

de telle sorte que tout point de V soit à l'intérieur (j'exclus la frontière) de l'une des variétés (4) ou de plusieurs d'entre elles. Si, dans la partie commune à deux quelconques des variétés (4), le déterminant Δ est positif, je dirai que la variété V est *bilatère*. Si elle ne l'était pas, il est clair qu'on pourrait toujours, avec quelques-unes des variétés (4), former une chaîne unilatère et que la variété V serait unilatère." POINCARÉ verwendet also nicht die von DYCK vorgeschlagene Bezeichnung „mit nicht umkehrbarer Indikatrix" bzw. „mit umkehrbarer Indikatrix", wofür heute „orientierbar" bzw. „nichtorientierbar" gebraucht wird, sondern greift auf die ältere (und kürzere) Benennung „zweiseitig" bzw. „einseitig" zurück, der allerdings heute ein anderer Sinn zukommt.

POINCARÉ nennt dann das Möbiusband als Beispiel einer einseitigen Mannigfaltigkeit und für den zweiseitigen Fall

„1° Tout domaine à n dimensions est bilatère;

2° Toute courbe à 1 dimension est bilatère;

3° Toute surface *fermée* à $n-1$ dimensions est bilatère."

Das dritte Beispiel ist nur dann richtig, wenn man sich auf die von POINCARÉ zuerst gegebene Definition der Mannigfaltigkeit beschränkt. Es liegt dann nur eine einzige Gleichung $F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ vor und Doppelpunkte sind nach den Voraussetzungen nicht zulässig. Die $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit liegt dann nach heutiger Terminologie zweiseitig im (orientierbaren) n-dimensionalen Zahlenraum und ist daher selbst orientierbar. Wird aber die Mannigfaltigkeit nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung aus Stücken zusammengesetzt, so ist POINCARÉS Behauptung nicht mehr richtig: sie wird durch den KLEINschen Schlauch widerlegt.

POINCARÉ beweist dann noch, daß überhaupt alle nach erster Art definierten Mannigfaltigkeiten zweiseitig ausfallen.

b) Der Homologiebegriff und die Bettischen Zahlen bei Poincaré und Picard & Simart

In den Paragraphen 5 und 6 (S. 206—208) führt POINCARÉ die grundlegenden Begriffe Homologie und BETTIsche Zahl ein: „Considérons une variété V à p

dimensions; soit maintenant W une variété à q dimensions ($q \leqq p$) faisant partie de V. Supposons que la frontière complète de W se compose de λ variétés continues à $q-1$ dimensions $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$. Nous exprimerons ce fait par la notation

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0.$$

Plus généralement la notation

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4,$$

où les k sont des entiers et les v des variétés à $q-1$ dimensions, signifiera qu'il existe une variété W à q dimensions faisant partie de V et dont la frontière complète se composera de k_1 variétés peu différentes de v_1, de k_2 variétés peu différentes de v_2, de k_3 variétés peu différentes de la variété opposée à v_3 et de k_4 variétés peu différentes de la variété opposée à v_4. Les relations de cette forme pourront s'appeler des *homologies*."

Das Homologiezeichen steht hier also kurz an Stelle von *begrenzen*. Etwas unklar ist, wozu der Zusatz „peu différente" dient; er fehlt denn auch in der Definition, die POINCARÉ im 1. Complément gibt (S. 291): „Supposons que l'on puisse trouver dans V une variété à $p+1$ dimensions, dont $v_1, v_2, \ldots, v_n$ constituent la frontière complète; j'exprimerai ce fait par la relation suivante: $v_1 + v_2 + \cdots + v_n \sim 0$ que j'appellerai une *homologie*. Il pourra se faire que sur la frontière complète de notre variété à $p+1$ dimensions, une même variété v_1 se retrouve plusieurs fois; dans ce cas, elle figurera dans le premier membre de l'homologie avec un coefficient, qui devra être un nombre entier."

Anschließend an die Definition der Homologien folgt in der Analysis situs ohne Begründung der Zusatz: „Les homologies peuvent se combiner comme des équations ordinaires." Das schließt aber in sich, daß ein gemeinsamer Faktor der Koeffizienten wegdividiert werden darf. *So ist denn in der Folge für* POINCARÉ $v \sim 0$, *wenn es eine ganze Zahl* λ *so gibt, daß* λv *begrenzt.* Damit hat aber das Homologiezeichen nicht mehr die ihm ursprünglich beigelegte Bedeutung von „begrenzen". Es scheint, daß POINCARÉ sich dessen zuerst nicht bewußt geworden ist, und nachher — vielleicht aus Bequemlichkeit — das Homologiezeichen in der Analysis situs immer in der Bedeutung von „Homologie mit Division" braucht; *dadurch entgehen ihm vorerst die Torsionszahlen.*

Im 1. Complément wird POINCARÉ vorsichtiger. Im Anschluß an die oben gegebene Definition heißt es (S. 291): „D'après cette définition, on peut additionner les homologies, les soustraire les unes des autres, les multiplier par un nombre entier. Nous *conviendrons* également qu'il est permis de diviser une homologie par un nombre entier, quand tous les coefficients sont divisibles par cet entier." Ebenso im 2. Complément: „Nous combinerons ... les homologies par addition, soustraction, multiplication et quelquefois par division." Er hat inzwischen den Unterschied zwischen Homologie und Homologie mit Division erkannt.

POINCARÉ definiert dann weiter (S. 207): „Nous dirons que les variétés $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ d'un même nombre de dimensions et faisant partie de V, sont *linéairement indépendantes*, si elles ne sont liées par aucune homologie à coefficients entiers. S'il existe $P_m - 1$ variétés *fermées* à m dimensions faisant partie de V et linéairement indépendantes et s'il n'en existe que $P_m - 1$, nous dirons que l'ordre de connexion de V par rapport aux variétés à m dimensions est égal à P_m. Ainsi

se trouvent définis, en ce qui concerne une variété V à m dimensions, $m-1$ nombres que j'appellerai $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ et qui sont les ordres de connexion de V par rapport aux variétés de $1, 2, \ldots, m-1$ dimensions. Je les appellerai dans la suite les *nombres de Betti.*" Die P_k-1 geschlossenen Mannigfaltigkeiten bilden also ein maximales homolog unabhängiges System der Dimension k. Dabei ist zu beachten, daß die heutige BETTIsche Zahl p_k direkt die Anzahl der unabhängigen Elemente in der Homologiegruppe der Dimension k bezeichnet; es ist also $P_k = p_k+1$ für $k=1, 2, \ldots, m-1$.

Die genaue Beziehung zwischen den POINCARÉschen BETTIschen Zahlen und den RIEMANN/BETTIschen Zusammenhangszahlen decken VEBLEN & ALEXANDER mit Hilfe der Inzidenzmatrizen auf:

$$p_{q\,\text{RIEMANN}} = p_{q\,\text{POINCARÉ}} + t_{q-1} + t_q$$

wobei t_{q-1} bzw. t_q die Anzahl der *geraden* Torsionskoeffizienten $(q-1)$-ter bzw. q-ter Dimension bedeutet.

HEEGAARD setzt sich in seiner Dissertation (1898) mit POINCARÉs Definition der BETTIschen Zahlen kritisch auseinander und bezieht in seine Untersuchungen auch noch das von PICARD und SIMART 1897 veröffentlichte Buch „Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes" mit ein, das im 2. Kapitel eine kurze Darstellung der Analysis situs enthält. Während die Mannigfaltigkeit wie bei POINCARÉ definiert ist, werden in der Definition der BETTIschen Zahlen sowohl Elemente der RIEMANNschen als auch der POINCARÉschen Definition verwendet: „Supposons que dans la variété E_n on puisse trouver p_m-1 variétés fermées S_m d'ordre m, soient $V_1, V_2, \ldots, V_{p_m-1}$ jouissant des propriétés suivantes: prises séparément, elles ne forment pas frontière, et, par une déformation continue, elles ne peuvent se réduire l'une à l'autre; de plus par k_1 variétés voisines de V_1, par k_2 variétés voisines de $V_2, \ldots,$ par k_{p_m-1} variétés voisines de V_{p_m-1}, on ne peut pas faire passer une variété S_{m+1} complètement contenue dans E_n, dont ces $k_1+k_2+\cdots+k_{p_m-1}$ variétés formeraient *une frontière complète*, et cela quels que soient les entiers $k_1, k_2, \ldots, k_{p_m-1}$. Par k variétés voisines de V, il est d'ailleurs bien entendu qu'il s'agit de k variétés de même sens. Cela étant, nous dirons que l'ordre de connexion de E_n, par rapport aux variétés à m dimensions contenues dans cette variété, est p_m si, ayant trouver les p_m-1 variétés précédentes dont l'ensemble ne forme pas une frontière complète dans le sens général que nous venons de définir, on peut toujours, en leur adjoignant une $p_m^{\text{ième}}$ variété fermée quelconque d'ordre m, soit V, contenue dans E_n, déterminer les entiers k de manière que l'ensemble formé par cette variété seule, et par k_1 variétés voisines de V_1, par k_2 variétés voisines de $V_2, \ldots,$ par k_{p_m-1} variétés voisines de V_{p_m-1}, forme une frontière complète."

„k variétés de même sens" wird an anderer Stelle näher erläutert: „k est l'excès du nombre des variétés prises dans un sens sur le nombre des variétés prises en sens contraire". Das gesuchte System soll also folgende Eigenschaften aufweisen: Es existiert keine Homologie

$$\sum_i k_i V_i^{(m)} \sim 0, \qquad \sum k_i^2 \neq 0,$$

hingegen existiert für jede beliebige m-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit $V^{(m)}$ eine Homologie

$$V^{(m)} \sim \sum_i k_i' V_i^{(m)}.$$

Schon TIETZE zeigt an einem Beispiel (1908), daß es Mannigfaltigkeiten gibt, die kein derartiges System enthalten. Die Forderung, daß V *einmal genommen* zusammen mit einer Linearkombination der $V_i^{(m)}$ begrenzt, ist dieselbe, die RIEMANN stellt. Dabei ist aber zu beachten, daß die RIEMANNschen Homologien mod 2 reduziert werden; die Koeffizienten stammen daher aus einem Körper, dem Galois-Feld GF (2). Damit lassen sich die Verhältnisse mit einem endlichdimensionalen Vektorraum vergleichen: Ein maximales System linear unabhängiger Elemente bildet eine Basis und somit hat jedes Element eine Darstellung $V \sim \sum_i h_i V_i$ und die Koeffizienten h_i sind alle 0 oder 1. Mit POINCARÉ betrachten aber PICARD & SIMART die Homologien über dem *Ring der ganzen Zahlen*. Das führt zum Vergleich mit einem Modul über einem Ring R: Hier existieren im allgemeinen keine Basen und man kann nur sagen, daß es zu jedem Modulelement V ein Ringelement r so gibt, daß $rV \sim \sum_i r_i V_i$, $r_i \in R$, erfüllt ist.

Es ist deshalb nicht unberechtigt, wenn HEEGAARD schreibt: „Il faut remarquer au demeurant, que la définition n'est justifiée que quand on aura, en outre, prouvé qu'un système de variétés comme celui qui est mentionné dans la définition *existe véritablement.*" HEEGAARD spricht nur von „la définition"; es scheint ihm entgangen zu sein, daß von den drei Definitionen RIEMANN/BETTI, POINCARÉ und PICARD & SIMART keine zwei übereinstimmen. Bezüglich RIEMANN/BETTI und POINCARÉ ist der Einwand dahin zu präzisieren, daß die Existenz *endlicher Systeme* nicht gesichert ist, was auch in der POINCARÉschen Formulierung „S'il existe ..." zum Ausdruck kommt.

HEEGAARD fährt fort: „V_1, V_2, ... doivent être, entre autres, bilatères". Diese Voraussetzung fehlt tatsächlich bei POINCARÉ, nicht aber bei PICARD & SIMART, die sich schon früher ausdrücklich auf zweiseitige Mannigfaltigkeiten beschränken. Diese Forderung mag im ersten Moment überflüssig erscheinen, ist es doch für die geschlossenen Ketten, die später in der Homologietheorie die Rolle der Mannigfaltigkeiten V_i übernehmen, völlig unwesentlich, ob sie orientierbar sind oder nicht. Der Unterschied liegt darin, daß sich die geschlossenen Ketten aus einzelnen Simplexen zusammensetzen, deren jedes orientiert ist und mit einer bestimmten Vielfachheit in der Kette auftritt, während bei POINCARÉ statt dessen ein einziger geschlossener Raum steht, der eben zuerst orientierbar vorausgesetzt werden muß, damit er als Ganzes überhaupt orientiert werden kann.

Weiter fordert HEEGAARD von den V_i, „de plus, elles doivent être ce que nous appelons *orientées*", womit gemeint ist, daß sie nach dem Vorbild von DYCK mit einer Indikatrix zu versehen sind, „et il est exigé, que ces orientations *concordent* avec l'orientation de la variété limitée par elles". POINCARÉ ist in diesem Punkt sehr unvollständig; er hat zwar erklärt, wie eine Mannigfaltigkeit zu orientieren ist, aber er stellt keine Beziehung her zwischen der Orientierung der Mannigfaltigkeit und der Orientierung ihrer Berandung, d.h. man weiß nicht, wann ein Koeffizient in der Homologie positiv zu nehmen ist.

HEEGAARD kritisiert das mit Recht. Hingegen scheint es, daß er seinerseits wieder etwas zu viel fordert, nämlich daß alle Orientierungen konkordant und dazu noch sämtliche Koeffizienten in den Homologien positiv zu nehmen seien; man kann sich sonst die vermeintlichen Schwierigkeiten nicht erklären, die er am Beispiel der Torusfläche erläutert: „Si l'on maintient ces exigences à la lettre, on rencontrera des difficultés. Sur la surface d'un tore, une courbe méridienne λ et une courbe de latitude β (toutes deux munies d'un sens positif) *ne forment pas* frontière, comme on le suppose généralement, avec toute courbe fermée de la surface ne formant pas frontière à elle seule, même pas s'il est permis de compter β, k_1 fois et λ, k_2 fois. Elles ne peuvent par exemple former avec $(\beta+\lambda)$ la frontière d'aucun fragment de surface si l'on persiste à exiger la dépendance entre l'indicatrice du fragment de surface et celle de la frontière." Läßt man auch negative Koeffizienten zu, so ist natürlich $(\beta+\lambda)-\beta-\lambda\sim 0$.

Die Unabhängigkeit der BETTIschen Zahlen vom gewählten System wird bei PICARD & SIMART wieder durch das Austauschverfahren bewiesen, das sich auf ein präzisiertes „Riemannsches Lemma" stützt. Bei POINCARÉ braucht es keine solche Rechtfertigung, da P_m-1 einfach die Maximalzahl der linear unabhängigen geschlossenen m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist. Dabei sind die Überlegungen, die RIEMANN in seinem Lemma anstellte, in der Behauptung versteckt, daß die Homologien sich wie Gleichungen behandeln lassen.

c) Das Dualitätsgesetz

Über die BETTIschen Zahlen stellt POINCARÉ dann sein berühmtes Dualitätsgesetz auf. Da er sich im ganzen Abschnitt auf orientierbare Mannigfaltigkeiten beschränkt, lautet es (S. 228): „Pour une variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux." Er fügt hinzu: „Ce théorème n'a, je crois, jamais été énoncé; il était cependant connu de plusieurs personnes qui en ont même fait des applications".

Dem ersten Beweis, dessen Unzulänglichkeit wieder von HEEGAARD erkannt wird, liegt das in einem Spezialfall schon von KRONECKER verwendete Verfahren der Schnittzahlbestimmung zugrunde. Jeder Schnittpunkt zweier geschlossener, zweiseitiger Mannigfaltigkeiten V_1, V_2 der Dimensionen h bzw. $p-h$, die beide derselben p-dimensionalen Mannigfaltigkeit angehören, wird mit der Zahl $+1$ oder -1 versehen, wobei das Vorzeichen mit Hilfe einer Funktionaldeterminante bestimmt wird. $N(V_1, V_2)$ stellt dann den Überschuß der positiven Schnittpunkte über die negativen dar. Es wird also vorausgesetzt, daß nur endlich viele isolierte Schnittpunkte auftreten.

Ist U eine h-dimensionale Mannigfaltigkeit, so versteht POINCARÉ unter „coupure" jede in U enthaltene Mannigfaltigkeit, „1° si elle est fermée; 2° si elle n'est pas fermée, mais si sa frontière fait partie de la frontière complète de U."

Das folgende Theorem spielt im Beweis des Dualitätsgesetzes eine wichtige Rolle (S. 225/226): „La condition nécessaire et suffisante (si les variétés V_i sont fermées et à $h-1$ dimensions) pour que l'on puisse choisir la coupure V de telle sorte que l'égalité $\sum k_i(V, V_i)=0$ n'ait pas lieu, c'est que l'homologie $\sum k_i V_i \sim 0$ n'ait pas lieu."

Der Querschnitt V ist also hier eindimensional; später fällt diese Einschränkung weg. Wichtig ist dabei vor allem der Fall, wo U — und damit auch der

Querschnitt — geschlossen ist. Ist nun $\sum k_i V_i \sim 0$, so beweist POINCARÉ zwar die Existenz einer geschlossenen Kurve V', so daß $\sum k_i N(V', V_i) \neq 0$ ist, aber HEEGAARD bemerkt dazu (S. 220): „Nous savons sans doute qu'une courbe fermée V' peut être tracée dans U de sorte que $\sum N(V', V_i) \gtrless 0$, *mais il n'est pas certain que cette courbe puisse être découpée dans aucune variété* V. Damit will er sagen, daß es fraglich sei, ob V' eine *begrenzende* Kurve sei. Er fährt dann fort: „Mais non seulement le théorème n'est pas prouvé: *il ne peut pas être exact.*" Er untermauert seine These durch das Beispiel einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit, für die er die BETTIschen Zahlen $P_1 = 2$ und $P_2 = 1$ findet.

Wir wollen sehen, wie POINCARÉ beim Beweis des Dualitätsgesetzes vorgeht (S. 227). Die Mannigfaltigkeit U der Dimension h wird geschlossen vorausgesetzt, so daß alle „coupures" geschlossene Teilmannigfaltigkeiten sind. Davon gibt es $P_p - 1$ linear unabhängige der Dimension p, nämlich $C_1, \ldots, C_\lambda (\lambda = P_p - 1)$; ferner sollen $V_1, \ldots, V_\mu$ μ geschlossene Mannigfaltigkeiten der Dimension $h - p$ darstellen. Nun wird das Schnitttheorem verwendet: „La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait entre elles une homologie $\sum k_i V_i \sim 0$ c'est que l'on ait

$$\sum k_i N(C_1, V_i) = \sum k_i N(C_2, V_i) = \cdots = \sum k_i N(C_\lambda, V_i) = 0.$$

Or, si le nombre μ des V_i est supérieur à λ, on pourra toujours trouver des entiers k_i satisfaisant à ces conditions, puisque nous aurons μ arbitraires k_i et λ conditions à remplir. Si donc les V_i sont linéairement indépendantes, on aura $\mu \leqq \lambda$. Donc $P_{h-p} \leqq P_p$; mais, en changeant p en $h - p$, on trouve $P_p \leqq P_{h-p}$."

HEEGAARD ist davon überzeugt, daß $P_1 \geqq P_{n-1}$ allgemein gilt für n-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeiten. (Dieser Satz findet sich auch bei PICARD & SIMART.) Sein Beispiel besagt aber, daß $P_1 = P_{n-1}$ nicht immer richtig ist. Das verleitet ihn offenbar dazu, im Fall des 1-dimensionalen Querschnittes von POINCARÉs Beweis zu behaupten, „l'inégalité $\mu \leqq \lambda$ est prouvée, sans doute", und auf die Lücke im Beweis des Schnitttheorems anspielend, „mais le théorème $\mu \geqq \lambda$ n'est par conséquent pas prouvé". Beim POINCARÉschen Beweis ist es indessen völlig gleichgültig, ob die C_i oder die V_i von höherer Dimension sind. Offenbar sieht HEEGAARD auch nicht genau, wo der Fehler steckt; das bleibt wiederum POINCARÉ selbst vorbehalten.

1899 erscheint in dem Comptes Rendus eine kurze Mitteilung „Sur les nombres de Betti", in der POINCARÉ zur Kritik von HEEGAARD Stellung nimmt (S. 289): „Ces critiques sont en partie fondées; le théorème n'est pas vrai des nombres de Betti *tels que Betti les définit*; c'est ce qui résulte d'un exemple cité par M. Heegaard .... Le théorème est vrai, au contraire, des nombres de Betti tels que je les définis."

Es scheint, daß weder POINCARÉ noch HEEGAARD die RIEMANN/BETTIsche Definition genau studiert haben: Alle Homologien werden dort mod 2 genommen und daß für die BETTIschen Zahlen mod 2 das Dualitätsgesetz wiederum gültig ist (sogar für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten), wurde 1913 von VEBLEN & ALEXANDER bewiesen. POINCARÉ analysiert im 2. Complément das Beispiel von HEEGAARD genau (S. 355—357): Es weist einen 1-dimensionalen Torsionskoeffizienten vom Wert 2 auf; damit existiert eine geschlossene Kurve, die erst begrenzt, wenn sie zweimal durchlaufen wird. Diese ist linear abhängig im POINCARÉschen Sinn und für POINCARÉ ist denn auch $P_1 = 1$. HEEGAARD aber

findet $P_1 = 2$. Er bestimmt also gar nicht die BETTIsche Zahl P_1, so wie sie von POINCARÉ definiert wurde, sondern viel eher die Anzahl der geschlossenen Kurven V_i eines Systems, das jene zweite, bei PICARD & SIMART geforderte Eigenschaft besitzt, daß jede beliebige geschlossene Kurve V eine Darstellung $V \sim \sum k_i V_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$ hat; d.h. $P_{1\text{HEEGAARD}}$ wäre die *Anzahl der Elemente einer 1-dimensionalen Homologiebasis, vermehrt um 1.* Leider fehlen weitere Beispiele, um diese These nachprüfen zu können.

Wieder zeigt TIETZE an einem Beispiel, daß diese Definition jedenfalls nicht zu einer eindeutig festgelegten Zahl führt, falls sie nicht durch eine zusätzliche Forderung ergänzt wird; diese lautet bei TIETZE dahin, daß das System ein Minimum an Mannigfaltigkeiten enthalten solle. In der heutigen Theorie wird statt dessen gefordert, daß die Erzeugenden der Torsionsgruppe so gewählt werden, daß sie diese derart in ein direktes Produkt von zyklischen Untergruppen zerlegen, daß die Ordnung jeder Untergruppe die Ordnung der nachfolgenden teilt; ihre Anzahl ist dann eindeutig bestimmt und die Ordnungen der durch sie erzeugten zyklischen Untergruppen sind die Torsionszahlen.

Da HEEGAARDs Beispiel zeigt, daß aus $2\nu \sim 0$ nicht immer $\nu \sim 0$ folgt, unterscheidet POINCARÉ diese Homologien durch den Zusatz „Homologies sans division". Er ist nun aber der Meinung, daß genau der Unterschied von Homologie mit oder ohne Division verantwortlich sei für die Differenz, die bei der Bestimmung der BETTIschen Zahlen nach seiner, bzw. nach der HEEGAARDschen Definition, die er fälschlicherweise für die RIEMANN/BETTIsche hält, resultiert, und folgert dann im 2. Complément, daß die beiden Definitionen genau dann dasselbe Ergebnis liefern, wenn in der Mannigfaltigkeit keine Torsionszahlen auftreten.

Das letztere ist richtig, das erstere nicht. Gehen wir noch einmal von der RIEMANN/BETTIschen Definition aus. Wenn die Homologien mod 2 genommen werden, dann ist die Anzahl der homolog unabhängigen Zykeln einer bestimmten Dimension gleich der Anzahl der Elemente in der zugehörigen Homologiebasis. Betrachtet man nun die Homologien über dem Ring der ganzen Zahlen, so ist das nicht mehr der Fall. POINCARÉ sieht die RIEMANN/BETTIsche Definition unter dem ersten Aspekt, HEEGAARD hebt den zweiten Aspekt hervor.

Zum mißglückten Beweis schreibt POINCARÉ im 1. Complément (S. 293): „La démonstration que j'en ai donnée dans l'*Analysis situs*, semble s'appliquer également bien aux deux définitions des nombres de Betti; elle doit donc avoir un point faible" und zum Einwand von HEEGAARD bezüglich des Schnitttheorems: „C'est là, en effet le véritable point faible de la démonstration." Offenbar ließ sich diese Lücke aber nicht so einfach schließen, denn POINCARÉ gibt im 1. Complément nicht nur einen ganz neuen Beweis zum Dualitätsgesetz, sondern entwickelt überhaupt seine Theorie vollständig neu auf der Basis von n-dimensionalen Polyedern. Das gibt ihm dann auch die Mittel in die Hand, um den Mangel im Schnitttheorem aufzudecken: Enthält die geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeit V eine geschlossene 2-dimensionale Mannigfaltigkeit V_2 und eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit V_1, *die erst begrenzt, wenn sie mehr als einmal genommen wird, so ist dabei um nichts weniger* $N(V_1, V_2) = 0$. So steht denn fest, daß das Schnitttheorem jedenfalls nicht taugt, um damit die Anzahl der Elemente einer *Homologiebasis* zu ermitteln.

d) Die Fundamentalgruppe

Durch die Betrachtung der auf einer Mannigfaltigkeit V ausgebreiteten mehrdeutigen, unverzweigten Funktionen $F_1, \ldots, F_\lambda$ entdeckt POINCARÉ, daß nicht nur Zahlengrößen, sondern auch Gruppen geeignet sind, zur Charakterisierung von V beizutragen.

Durchläuft ein Punkt M eine geschlossene Kurve auf V, so kann es vorkommen, daß die Endwerte der Funktionen F_i nicht mehr mit ihren Anfangswerten übereinstimmen. „L'ensemble de toutes les substitutions que les fonctions F subiront ainsi, quand le point M décrira tous les contours fermés que l'on peut tracer sur la variété V en partant du point initial M_0, formera évidemment un groupe que j'appelle g."

Ein Punkt M beschreibt auf V ein „lacet", „s'il va d'abord de M_0 en M_1 par un chemin quelconque M_0BM_1, s'il décrit ensuite un contour infiniment petit et si, enfin, il revient de M_1 à M_0 par le *même* chemin M_1BM_0." Für geschlossene Kurven, die sich auf ein „lacet" zusammenziehen lassen — die also nach heutiger Terminologie nullhomotop sind — führt POINCARÉ die Bezeichnung $M_0BM_0 \equiv 0$ ein, die dann die folgende, ziemlich vage umschriebene Erweiterung erfährt: „Si maintenant M_0AM_1, M_0BM_1, M_0CM_1 sont trois chemins différents tracés sur V et allant de M_0 à M_1, je conviendrai d'écrire

$$M_0AM_1CM_0 \equiv M_0AM_1BM_0 + M_0BM_1CM_0."$$

Man ist dabei versucht, das Zeichen $\equiv$ nur auf solche geschlossenen Kurven anzuwenden, die sich lediglich um einen hin- und zurückdurchlaufenen Weg unterscheiden.

POINCARÉ macht darauf aufmerksam, daß die Reihenfolge der Summanden wohl zu beachten sei und fügt bei (S. 241): „Il résulte de cette convention que l'on aura $M_0BM_0 \equiv 0$ si le contour fermé M_0BM_0 constitue la frontière complète d'une variété à deux dimensions faisant partie de V; et, en effet, ce contour fermé pourra alors être décomposé en un nombre très grand de lacets." Das stimmt offensichtlich nicht: ein nullhomologer Weg braucht nicht nullhomotop zu sein. Im 5. Complément (1904) bedeutet „$K \equiv 0 \pmod V$" dann auch präziser (S. 490): „cela veut dire qu'il existe dans V une aire simplement connexe A dont la frontière est formée par le cycle K."

POINCARÉ fährt fort (S. 241): „Nous sommes ainsi conduits à envisager des relations de la forme $k_1C_1 + k_2C_2 \equiv k_3C_3 + k_4C_4$ où les k sont des entiers et les C des contours fermés tracés sur V et partant de M_0. Ces relations, que j'appellerai des *équivalences*, ressemblent aux homologies que j'ai étudiées plus haut. Elles en diffèrent:

1° Parce que, dans les homologies, les contours peuvent partir d'un point initial quelconque;

2° Parce que, dans les homologies, on a le droit d'intervertir l'ordre des termes d'une somme."

Diese Bemerkungen werfen etwas mehr Licht auf die Bedeutung des Äquivalenzzeichens. Aus der Analogie zu den Homologien schält sich heraus, daß $k_1C_1 + k_2C_2 \equiv k_3C_3 + k_4C_4$ genau dann gilt, wenn die Kurve $k_1C_1 + k_2C_2 - k_4C_4 - k_3C_3$

nullhomotop ist. POINCARÉ betont an dieser Stelle auch, daß aus $2A \equiv 0$ nicht auf $A \equiv 0$ geschlossen werden dürfe. Es scheint deshalb doch sehr wahrscheinlich, daß er, indem er $V \sim 0$ schreibt, sofern λV begrenzt, sich dessen bewußt war, daß das im allgemeinen nicht bedeutet, daß auch V wirklich begrenzt.

Nach diesen Vorbereitungen führt POINCARÉ die Fundamentalgruppe ein (S. 242): „Cela posé, il est clair que l'on peut imaginer un groupe G satisfaisant aux conditions suivantes:

1° A chaque contour fermé M_0BM_0 correspondra une substitution S du groupe;

2° La condition nécessaire et suffisante pour que S se réduise à la substitution identique, c'est que $M_0BM_0 \equiv 0$;

3° Si S et S' correspondent aux contours C et C' et si $C'' \equiv C + C'$, la substitution correspondant à C'' sera SS'.

Le groupe G s'appellera le *groupe fondamental* de la variété V."

Über die Beziehung zwischen den Gruppen G und g stellt POINCARÉ fest, daß sie isomorph sein können („isomorphisme holoédrique"), daß sie aber dann nur homomorph sind („isomorphisme mériédrique"), „si un contour fermé M_0BM_0 non décomposable en lacets ramène les fonctions F à leurs valeurs primitives".

Die erzeugenden Elemente der Gruppe G werden nun mit $S_1, \ldots, S_p$ bezeichnet. „A chacune d'elles correspondra un contour fermé, de sorte que nous aurons *p contours fermés fondamentaux* $C_1, C_2, \ldots, C_p$ et qu'un contour fermé quelconque soit équivalent à une combinaison des contours fondamentaux se succédant dans un certain ordre." Die zugelassenen Kurven müssen allerdings vorerst auf solche eingeschränkt werden, die durch den gemeinsamen Ausgangspunkt der C_i hindurchgehen, denn nur für diese ist der Äquivalenzbegriff überhaupt definiert. (POINCARÉ erweitert ihn im 5. Complément auf solche Kurven C, C', die mittels eines hin- und zurückdurchlaufenen Hilfsweges α an einen gemeinsamen Ausgangspunkt angeschlossen werden und für die $C \equiv -\alpha + C' + \alpha$ erfüllt ist.)

Die C_i brauchen nicht unabhängig zu sein. Gilt $k_1C_1 + k_2C_2 + k_1'C_1 + k_3C_3 \equiv 0$, so ist auch die Substitution $S_1^{k_1}S_2^{k_2}S_1^{k_1'}S_3^{k_3}$ gleich der Gruppeneins von G. Diese „équivalences fondamentales" zwischen den C_i bestimmen also das Relationensystem zwischen den Erzeugenden der Gruppe G und damit deren Struktur. Man kann sich wundern, daß POINCARÉ nichts darüber erwähnt, daß die so bestimmte Gruppe bis auf Isomorphie unabhängig ist vom gewählten Ausgangspunkt M_0.

Die 1. Bettische Zahl findet POINCARÉ nun nach folgender „Regel": „Quand on aura formé ainsi les équivalences fondamentales, on en déduira les homologies fondamentales qui n'en diffèrent que parce que l'ordre des termes est indifférent. La connaissance de ces homologies fera immédiatement connaître le nombre de Betti P_1."

POINCARÉ selbst verwendet nirgends den Begriff Homologie*gruppe*. Mit Hilfe der Gruppentheorie läßt sich jedoch besser verfolgen, was hier geschieht: Die Fundamentalgruppe wird nach ihrer Kommutatoruntergruppe faktorisiert;

das liefert die 1. Homologiegruppe und P_1-1 ist die Maximalzahl ihrer linear unabhängigen Elemente.

An einfachen Beispielen von 3-dimensionalen homogenen Mannigfaltigkeiten, die POINCARÉ durch paarweises Identifizieren von Seitenflächen eines Würfels konstruiert, entwickelt er eine Methode, mit der er die Fundamentalgruppe und die BETTIsche Zahl P_1 explizit bestimmt. Er führt auch das in den Comptes Rendus nur skizzierte Beispiel noch genauer aus. Es liefert ihm das wichtige Resultat, daß die Übereinstimmung der Bettischen Zahlen für $n \geqq 3$ nicht hinreichend ist für den Homöomorphismus zweier geschlossener Mannigfaltigkeiten. Offen bleibt dabei die Frage, ob die Isomorphie der Fundamentalgruppen dazu wohl hinreichend sei.

Der Terminus „einfach zusammenhängend", der bis dahin bedeutete, daß alle Bettischen Zahlen den Wert 1 haben, wird nun reserviert für Mannigfaltigkeiten, deren Fundamentalgruppe nur aus der Identität besteht. Vom 1. Complément an wird er — wiederum abweichend — denjenigen Mannigfaltigkeiten vorbehalten, die homöomorph sind zur Kugel oder Sphäre.

e) Die Polyederformel

POINCARÉ beschäftigt sich auch mit der EULERschen Polyederformel. Er führt dazu den Begriff des n-dimensionalen Polyeders ein (S. 270/271): „Soit donc V une variété fermée à p dimensions. Subdivisons-la en un certain nombre de variétés v_p à p dimensions; ces variétés v_p ne seront pas fermées et leurs frontières seront formées par un certain nombre de variétés v_{p-1} à $p-1$ dimensions; les frontières des v_{p-1} seront formées à leur tour par un certain nombre de variétés v_{p-2} à $p-2$ dimensions, et ainsi de suite; j'arriverai ensuite à un certain nombre de variétés v_1 à une dimension, qui auront pour frontières un certain nombre de points isolés ou de variétés à zéro dimension que j'appellerai v_0. La variété V peut avoir des nombres de Betti quelconques, mais je suppose expressément que les variétés $v_p, v_{p-1}, \ldots, v_1$ sont simplement connexes. J'appellerai $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots, \alpha_1$ et α_0 le nombre des v_p, des $v_{p-1}, \ldots$ des v_1 et des v_0. La figure formée par toutes ces variétés pourra s'appeler un polyèdre; car l'analogie avec les polyèdres ordinaires est évidente. ... Je me propose de calculer le nombre

$$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} \cdots \mp \alpha_1 \pm \alpha_0."$$

Werden die v_p weiter unterteilt in kleinere Teilmannigfaltigkeiten v_p', wobei auch in allen Dimensionen neue Begrenzungsstücke hinzukommen und bereits vorhandene ebenfalls weiter unterteilt werden, so heißt das neue Polyeder P' vom Polyeder P *abgeleitet* („dérivé"). Zwei verschienene Polyedereinteilungen derselben Mannigfaltigkeit V heißen *kongruent* („congruent"). POINCARÉ möchte beweisen, daß für kongruente Polyeder P und P' $N_p = N_{p'}$ ist; damit käme dann auch allen zu V homöomorphen Mannigfaltigkeiten dieselbe Zahl N zu. Zu diesem Zweck untersucht er vorerst, was mit der Zahl N bei einer Polyederunterteilung geschieht.

Jede $(p-1)$-dimensionale Zelle v_{p-1} gehört genau zu zwei p-dimensionalen Zellen v_p. Die v_q mit $q < p-1$ gehören im allgemeinen mehreren v_{q+1} an, aber POINCARÉ schließt für das abgeleitete Polyeder den Fall nicht aus, daß auch solche

v_q auftreten, die wiederum nur zwei v_{q+1} voneinander trennen; diese v_q nennt er „régions singulières", was hier mit „ausgeartete Zellen" übersetzt werden soll. Trägt eine Zelle v_h keine ausgearteten Zellen v_{h-1} auf ihrem Rand, so heißt sie regulär („régulière"), andernfalls heißt sie irregulär („irrégulière"). Wird ein v'_q entfernt und die daran angrenzenden v_{q+1} miteinander verschmolzen, so ändert sich die Zahl N nicht unter den folgenden Bedingungen:

„1° Si q est plus petit que $p-1$, il faut que la région v'_q soit singulière;

2° Et, dans tous les cas, il faut qu'elle soit régulière."

Ist v_q eine irreguläre Zelle, so darf sie deshalb nicht einfach entfernt werden, weil sonst mindestens eines ihrer berandenden v_{q-1} nachher nur noch *einer* q-dimensionalen Zelle angehören würde, was nicht zulässig ist. Ist aber v_q regulär, so ist das ausgeschlossen und ist v_q zudem noch ausgeartet, so vermindern sich v_q und v_{q+1} je um eine Einheit, wenn die trennende Zelle v_q weggenommen wird, während sich die übrigen Zahlen α_i $(i=0, 1, \ldots, q-1, q+2, \ldots, p)$ nicht ändern.

POINCARÉ geht nun vom abgeleiteten Polyeder P' über eine endliche Reihe dazwischengeschalteter Polyeder P_i zum Ausgangspolyeder P zurück. Der Schritt von P_i zu P_{i+1} wird folgendermaßen beschrieben: „Si dans P_i il y a des v'_0 singuliers, j'en supprimerai un. S'il n'y en a pas, tous les v'_1 seront réguliers; s'il y a des v'_1 singuliers, j'en supprimerai un. S'il n'y a pas de v'_1 singuliers, tous les v'_2 seront réguliers; s'il y a des v'_2 singuliers, j'en supprimerai un. Et ainsi de suite."

Ist man erst soweit, daß alle v'_{p-1} regulär geworden sind, dann hat man nur noch die Unterteilungen der p-dimensionalen Zellen v_p rückgängig zu machen und das ursprüngliche Polyeder P ist wieder hergestellt. Da keine dieser Operationen die Zahl N ändert, gilt also für zwei Polyeder P und P', die durch Unterteilung auseinander hervorgehen, $N_p = N_{p'}$.

Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf zwei *beliebige* Polyeder P und P' einer Mannigfaltigkeit V beruht auf folgender Behauptung (S. 271): „Il existera toujours un polyèdre P'' qui sera dérivé à la fois de P et de P' et qu'on obtiendra en combinant les deux modes de décomposition." POINCARÉ behandelt dann die Überlagergung der beiden Schnittsysteme wie eine gewöhnliche Polyederunterteilung und schließt so aus den beiden Gleichungen $N_{p''} = N_p$ und $N_{p''} = N_{p'}$ auf $N_p = N_{p'}$. Dazu ist aber zu bemerken, daß beim resultierenden Polyeder P'' die Zahlen α''_q, wie schon das Beispiel bei RIEMANN lehrte, nicht mehr unbedingt endlich ausfallen; auch sind die Zellen v''_q von P'' evtl. nicht mehr einfach zusammenhängend, so daß sie gar kein Polyeder im POINCARÉschen Sinn mehr bilden. *Es ist somit nicht stichhaltig bewiesen, daß die Zahl N eine topologische Invariante ist.*

Unter einem p-dimensionalen „tétraèdre généralisé" versteht POINCARÉ den *Rand* eines $(p+1)$-dimensionalen Simplexes: „J'appelle ainsi le polyèdre formé par la frontière complète du domaine

$$x_1 > 0, \ldots, x_p > 0, x_{p+1} > 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1} < 1."$$

Nach einer Anmerkung im 1. Complément ist dieser Begriff auf alle dazu homöomorphen Mannigfaltigkeiten auszudehnen.

POINCARÉ findet für die Anzahl der Begrenzungsstücke

$$\alpha_p = p+2; \quad \alpha_{p-1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}; \quad \ldots$$

$$\alpha_q = \frac{(p+2)!}{(q+2)!\,(p-q)!}; \quad \ldots \quad \alpha_1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}; \quad \alpha_0 = p+2.$$

In die allgemeine Formel für α_q hat sich ein Flüchtigkeitsfehler eingeschlichen: Das $(p+1)$-dimensionale Simplex ist durch $p+2$ Eckpunkte bestimmt, eine q-dimensionale Seite durch $q+1$ Eckpunkte, also ist

$$\alpha_q = \binom{p+2}{q+1} = \frac{(p+2)!}{(q+1)!\,(p-q+1)!} \qquad (q = 0, 1, \ldots, p+1).$$

Das stimmt dann auch überein mit der Bemerkung, „c'est-à-dire que les nombres α_q sont égaux aux coefficients du binome." Somit erhält POINCARÉ

$$(1-1)^{p+2} = 1 - \alpha_p + \alpha_{p-1} - \cdots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 \pm 1 = 1 - N \pm 1.$$

Daraus folgt

$$N = 2 \text{ für gerades } p$$
$$N = 0 \text{ für ungerades } p,$$

was als Spezialfall schon in der EBERHARDschen Formel enthalten ist. Der Zusatz (S. 276): „Ainsi pour un polyèdre simplement connexe, le nombre N est égal à 2 si p est pair et à 0 si p est impair", ist indessen wegen des vorhin besprochenen Mangels nicht lückenlos bewiesen.

Auf S. 282 findet sich der Satz, daß für ein *beliebiges* Polyeder ungerader Dimension $N = 0$ ist und somit unabhängig von den BETTIschen Zahlen. Der Beweis ist nicht vollständig. POINCARÉ definiert dazu neue Größen $\beta_{\lambda,\mu}$, die DEHN & HEEGAARD „kombinierte Anzahlen" nennen.

Ist $\lambda > \mu$, so wird für jede λ-dimensionale Zelle r_λ die Anzahl ihrer μ-dimensionaler Begrenzungsstücke bestimmt; $\beta_{\lambda,\mu}$ bedeutet die Summe dieser Anzahlen. Alle r_λ wurden bei der Definition des Polyeders einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Unter Verwendung von $N = 2$ oder 0 für einfach zusammenhängende Polyeder folgt

$$\beta_{\lambda,\lambda-1} - \beta_{\lambda,\lambda-2} + \cdots \mp \beta_{\lambda,0} = 2\alpha_\lambda \quad \text{oder} \quad 0$$

je nachdem λ ungerade oder gerade ist. Ist $\lambda < \mu$, so gehört jede λ-dimensionale Zelle r_λ einer gewissen Anzahl μ-dimensionaler Zellen an; wieder bedeutet $\beta_{\lambda,\mu}$ die Summe dieser Anzahlen. Direkt aus der Definition folgt $\beta_{\lambda,\mu} = \beta_{\mu,\lambda}$. Alle Zellen $r_\mu (\mu = \lambda+1, \ldots, p)$, welche ein bestimmtes r_λ auf ihrem Rand tragen, bilden zusammen den „Stern" von r_λ („l'aster de r_λ"). Die Herleitung der Beziehung

$$\beta_{\lambda,p} - \beta_{\lambda,p-1} + \cdots \mp \beta_{\lambda,\lambda+1} = 2\alpha_\lambda \quad \text{oder} \quad 0$$

je nachdem $p-\lambda$ ungerade oder gerade ist, ist ziemlich undurchsichtig (S. 276, Gleichung (A)). Sie beruht auf der Annahme, daß der Stern S von r_λ, mit einem geeigneten Raum geschnitten, ein $(p-\lambda-1)$-dimensionales, einfach zusammenhängendes Polyeder W bilde, wobei jeder k-dimensionalen Zelle von S genau eine $(k-\lambda-1)$-dimensionale Zelle von W entsprechen soll $(k = \lambda+1, \ldots, p)$.

Indem in der Tabelle

$$\begin{aligned}
&\beta_{p,p-1} - \beta_{p,p-2} + \beta_{p,p-3} - \cdots, \pm\beta_{p,1} \mp \beta_{p,0} \\
&\beta_{p-1,p-2} - \beta_{p-1,p-3} + \cdots, \mp\beta_{p-1,1} \pm \beta_{p-1,0} \\
&\cdots \\
&+\beta_{2,1} - \beta_{2,0} \\
&+\beta_{1,0}
\end{aligned}$$

sowohl über die Zeilen, als auch über die Spalten summiert wird, resultiert für gerades p eine Identität, für ungerades p aber die Gleichung

$$2\alpha_p + 2\alpha_{p-2} + \cdots + 2\alpha_3 + 2\alpha_1 = 2\alpha_{p-1} + 2\alpha_{p-3} + \cdots 2\alpha_2 + 2\alpha_0$$

und folglich $N = 0$. Dieses Resultat bestätigt sich später noch auf einem andern Weg.

Im letzten Abschnitt der Analysis situs findet sich noch ein Ansatz zur Herleitung der allgemeinen EULER-POINCARÉschen Formel, welche die Beziehung zwischen N und den BETTIschen Zahlen festhält.

Für das 2-dimensionale (orientierbare) Polyeder lautet die Formel:

$$N = 3 - P_1;$$

sie wird von POINCARÉ unter Verwendung des Homologiebegriffs bewiesen. Jedem der α_0 Eckpunkte des Polyeders wird eine beliebige Zahl zugeordnet und jeder der α_1 Kanten die Differenz der Zahlen, die zu ihren Endpunkten gehören. Werden statt dessen direkt die α_1 Kanten mit Differenzen δ belegt, so ist aus der zuerst gemachten Festsetzung ersichtlich, daß von den α_1 Differenzen δ nur deren $\alpha_0 - 1$ beliebig wählbar sind. ($\alpha_0 - 1$ ist die maximale Anzahl der homolog unabhängigen Punkte, was aber von POINCARÉ nirgends erwähnt wird.)

Da alle 2-Zellen einfach zusammenhängend vorausgesetzt sind, ist es leicht, zu zeigen, daß jeder 1-Zykel einem Kantenzykel homolog ist; damit ist $P_1 - 1$ auch die Maximalzahl der homolog unabhängigen geschlossenen Kantenwege. Zwischen den α_1 Differenzen der Kanten bestehen $\alpha_2 + (P_1 - 1)$ Relationen. Es ist nämlich für jeden geschlossenen Kantenzug die algebraische Summe der Differenzen null, wenn die Orientierung der Kante durch das Vorzeichen der Differenz berücksichtigt wird. Die $\alpha_2 + (P_1 - 1)$ Relationen stammen von den Umrandungen Π der α_2 Flächenstücke und von den $P_1 - 1$ homolog unabhängigen 1-Zykeln C''. Da die übrigen geschlossenen Kantenzüge als Linearkombinationen der Π und C'' dargestellt werden können, liefern sie keine zusätzlichen Relationen mehr.

Nach POINCARÉ besteht indessen zwischen den $\alpha_2 + (P_1 - 1)$ Relationen eine Abhängigkeit: sie können einmal so kombiniert werden, daß jede Kante zweimal und zwar in entgegengesetztem Sinn durchlaufen wird. „Dire que chaque arête est parcourue ainsi deux fois en sens contraire, c'est dire que l'ensemble des polygones, dont on parcourt ainsi les périmètres, forme un polyèdre fermé. Or, on ne peut évidemment construire de la sorte qu'un seul polyèdre fermé, qui est le polyèdre donné." Hier steckt also implizit die Voraussetzung drin, daß das

Polyeder orientierbar sei. (Es ist $N=2-P_1$ für nichtorientierbare Polyeder.) Somit ist $\alpha_1-[(\alpha_2+P_1-1)-1]$ die Zahl der unabhängigen Differenzen δ und also

$$\alpha_0-1=\alpha_1-\alpha_2-P_1+2$$

oder

$$N=3-P_1.$$

POINCARÉ berechnet anschließend die Zahl N für ein 3-dimensionales (orientierbares) Polyeder. An den eben gegebenen Beweis anknüpfend, bezeichnet er die $\alpha_2+(P_1-1)$ Relationen zwischen den δ durch die Gleichungen $\varepsilon=0$. Bestand im 2-dimensionalen Fall eine einzige Relation zwischen den Gleichungen $\varepsilon=0$, so findet POINCARÉ jetzt mit analogen Überlegungen $\alpha_3+(P_2-1)$ Relationen, zwischen denen wieder eine einzige Abhängigkeit vorliegt, sofern das Polyeder orientierbar vorausgesetzt wird. Damit ist

$$\alpha_0-1=\alpha_1-(\alpha_2+P_1-1)+(\alpha_3+P_2-1)-1$$

und POINCARÉ errechnet daraus

$$N=P_2-P_1.$$

(Richtig wäre $N=P_1-P_2$, wenn wie früher $N=\alpha_3-\alpha_2+\alpha_1-\alpha_0$ gesetzt wird.)

Damit hat POINCARÉ ein Bildungsgesetz für die Zahl N erkannt und er gibt im weiteren nur noch Resultate:

$$\alpha_0-1=\alpha_1-(\alpha_2+P_1-1)+(\alpha_3+P_2-1)-(\alpha_4+P_3-1)+1$$

oder

$$N=3-P_1+P_2-P_3$$

für das 4-dimensionale Polyeder und für das p-dimensionale Polyeder

$$N=P_{p-1}-P_{p-2}+\cdots+P_2-P_1 \quad \text{für ungerades } p$$

(richtig wären die umgekehrten Vorzeichen) und

$$N=3-P_1+P_2-\cdots+P_{p-1} \quad \text{für gerades } p.$$

Mit Hilfe des Dualitätsgesetzes schließt POINCARÉ aus der Formel für ungerades p nochmals auf $N=0$.

f) Die Polyeder als Grundlage einer neuen Theorie

Für die Ausführungen im 1. und 2. Complément bilden nun die Polyeder die Grundlage. Damit wird 1899 der entscheidende Schritt zur Algebraisierung der Topologie möglich.

α_q bedeutet wie früher die Anzahl der q-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten v_q, die mit $a_1^q, a_2^q, \ldots, a_{\alpha_q}^q$ bezeichnet werden und die — jenes ein analytisches Stückchen — immer eine Darstellung durch ein Gleichungssystem haben. Wichtig werden jetzt vor allem die Relationen, die zwischen einem a_i^q und den Zellen („cases") der nächsthöheren bzw. nächstkleineren Dimension bestehen. Ist z.B. a_i^{q-1} durch

$$F_1=F_2=\cdots=F_{n-q}=F_{n-q+1}=0, \qquad \varphi_\gamma>0$$

gegeben, a_i^q aber durch

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_{n-q} = 0, \quad F_{n-q+1} > 0, \quad \varphi_\gamma > 0,$$

dann heißt die Beziehung *direkt*; sie wird *indirekt* („inverse"), falls für a_i^q *oder* a_i^{q-1} die entgegengesetzte Mannigfaltigkeit genommen wird, was bedeutet, daß zwei Gleichungen miteinander vertauscht werden.

„Cela posé, soit $\varepsilon_{i,j}^q$ un nombre qui sera égal à zéro, si a_j^{q-1} n'est pas frontière de a_i^q; à $+1$, si a_j^{q-1} est frontière de a_i^q et en relation directe avec a_i^q; et, enfin, à -1, si a_j^{q-1} est frontière de a_i^q mais en relation inverse avec a_i^q. Nous conviendrons d'écrire la *congruence*

$$a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1} \tag{3}$$

qui nous fait connaître les frontières de a_i^q. L'ensemble des congruences (3), relatives aux différentes $\nu_p, \nu_{p-1}, \ldots, \nu_0$ de V constitue ce qu'on peut appeler le *schéma d'un polyèdre.*"

POINCARÉ holt hier das nach, was wir in der „Analysis situs" vermißt haben: er erklärt, wann die Orientierung von Zelle und Randzelle konkordant ist. Für die Kongruenzen wird übrigens dasselbe Zeichen verwendet, wie früher für die Äquivalenzen; die beiden Begriffe haben jedoch nichts miteinander zu tun.

Die Koeffizienten des Schemas genügen der Bedingung

$$\sum_j \varepsilon_{i,j}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1} = 0. \tag{5}$$

Ausdrücklich erwähnt POINCARÉ, daß

$$\sum_i \varepsilon_{i,k}^p = 0$$

ist für jedes k, wenn p die Dimension des Polyeders ist. Man findet das, wenn man annimmt, daß jedes a_i^{p-1} einmal in direkter und einmal in indirekter Beziehung zu den angrenzenden p-dimenionalen Zellen steht. Das bedeutet aber, *daß* POINCARÉ *nur orientierbare Mannigfaltigkeiten zuläßt.*

Wenn ein gegebenes Schema ein Polyeder repräsentieren soll, müssen die Koeffizienten also die Forderungen (5) erfüllen; dazu stellt POINCARÉ noch die Bedingung, daß für jedes a_i^q sämtliche a_j^h $(h > q)$, die zum „Stern" von a_i^q gehören, sich zu einem einfach zusammenhängenden Polyeder zusammenfügen sollen. Die aus den Zellen a_i^q gebildeten Linearkombinationen $\sum_i \lambda_i a_i^q$ werden von POINCARÉ wieder als „variétés" bezeichnet, obwohl sie im allgemeinen nicht seinem in der „Analysis situs" gegebenem Mannigfaltigkeitsbegriff genügen.

POINCARÉ nimmt dann die Bestimmung der BETTIschen Zahlen in Angriff. „Mais je me proposerai d'abord de déterminer le nombre $P_q' - 1$ des variétés à q dimensions, fermées et linéairement indépendantes, que l'on peut tracer sur notre polyèdre V, mais *en nous bornant à celles qui sont des combinaisons des variétés* ν_q. Le nombre P_q' sera alors ce que j'appellerai le *nombre de Betti réduit.*"

Eine Mannigfaltigkeit $\sum_i \lambda_i a_i^q$ heißt nun *geschlossen*, wenn

$$\sum \lambda_i a_i^q \equiv 0 \tag{7, q}$$

erfüllt ist. Da dieser q-dimensionale geschlossene Raum sich nun aus einzelnen orientierten Stücken zusammensetzt, ist es unwesentlich, ob er als Ganzes orientierbar ist oder nicht; HEEGAARDs früher berechtigte Forderung nach „Zweiseitigkeit" wird hier bereits wieder überflüssig.

Die Homologien erhält man nun aus den Kongruenzen, denn

$$a_k^{q+1} \equiv \sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q$$

bedeutet auch

$$(9, q) \qquad \sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q \sim 0.$$

Den Beweis, daß man auf diese Art alle Homologien *zwischen den* a_i^q erhalte, holt POINCARÉ an anderer Stelle nach (§ VI). Das allgemeine Prinzip besteht darin, zu zeigen, daß jeder aus Zellen aufgebaute berandende Zykel eine *Zellkombination* berandet. POINCARÉ beschränkt sich dabei auf 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Die vom fraglichen Zykel berandete Teilmannigfaltigkeit wird etwas deformiert, um unliebsame Schnittpunkte zu vermeiden und kann anschließend stückweise durch homologe Polyederzellen ersetzt werden.

Aus der Homologie (9, q) folgt immer die Kongruenz

$$(10, q) \qquad \sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q \equiv 0,$$

was besagt, daß berandende Linearkombinationen immer geschlossen sind.

Bei der Bestimmung der reduzierten BETTIschen Zahlen P_q' läßt POINCARÉ sich von der Analogie zur Theorie der linearen Gleichungen leiten (S. 300/301): „Soit α_q le nombre des variétés a_i^q; soit α_q' le nombre de ces variétés qui restent distinctes, si l'on ne regarde pas comme distinctes des variétés liées par une homologie de la forme (9, q); soit α_q'' le nombre de ces variétés qui restent distinctes, si l'on ne regarde pas comme distinctes des variétés liées par une congruence de la forme (7, q). Il résulte de ces définitions:

1° qu'il y a $\alpha_q - \alpha_q'$ homologies distinctes de la forme (9, q);

2° qu'il y a $\alpha_q - \alpha_q''$ congruences distinctes de la forme (7, q);

3° que $\alpha_q' \geqq \alpha_q''$, car si plusieurs a_i^q sont liés par une homologie de la forme (9, q), elles seront liées également par la congruence (10, q) correspondante.

Enfin le nombre cherché $P_q' - 1$ est égal à $\alpha_q' - \alpha_q''$, car les variétés fermées de la forme $\sum_i \lambda_i a_i^q$ réellement distinctes, sont en nombre égal à celui des congruences (7, q), c'est-à-dire au nombre $\alpha_q - \alpha_q''$. Le nombre $P_q' - 1$ est le nombre de ces variétés qui restent distinctes en ne regardant pas comme distinctes celles qui sont liées par une homologie (9, q). Or le nombre de ces homologies est $\alpha_q - \alpha_q'$; nous avons donc

$$P_q' - 1 = (\alpha_q - \alpha_q'') - (\alpha_q - \alpha_q') = \alpha_q' - \alpha_q''."$$

POINCARÉ erhält also $P_q' - 1$ vorerst einfach als Differenz: Basiszahl für die q-Zykeln weniger Basiszahl für die nullhomologen q-Zykeln. (Letztere sind nach (10, q) immer geschlossen.) Etwas künstlicher fällt die Interpretation der

zweiten Differenz aus: Von den α'_q Basisketten, die durch keine Homologie miteinander verknüpft sind, ist die Anzahl derer abzuziehen, die überhaupt nicht geschlossen sind, nämlich α''_q.

Leicht zu beweisen ist ferner die Beziehung

$$\alpha_{q-1} - \alpha'_{q-1} = \alpha''_q.$$

POINCARÉ definiert nirgends die BETTIschen Zahlen P_0 und P_p; diese treten erst bei TIETZE auf. Er stellt aber fest, daß eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit einen einzigen linear unabhängigen Eckpunkt besitze; folglich ist $\alpha'_0 = 1$. Ebenso existiert — als Folge der Orientierbarkeit — eine einzige Kongruenz $\sum_i a_i^p \equiv 0$. Seltsamerweise berandet diese Gesamtheit der p-dimensionalen Zellen des p-dimensionalen Polyeders für POINCARÉ einen offenbar $(p+1)$-dimensionalen Raum P; es besteht deshalb die einzige Homologie $\sum a_i^p \sim 0$, also ist $\alpha_p = \alpha'_p + 1$ und $\alpha_p = \alpha''_p + 1$, woraus $\alpha'_p = \alpha''_p$ folgt.

Aus den beiden Gleichungssystemen

$$\begin{aligned}
\alpha'_0 &= 1 \\
\alpha_0 &= \alpha'_0 + \alpha''_1 \\
\alpha_1 &= \alpha'_1 + \alpha''_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{p-1} &= \alpha'_{p-1} + \alpha''_p \\
\alpha_p &= \alpha'_p + 1
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\alpha'_1 - \alpha''_1 &= P'_1 - 1 \\
\alpha'_2 - \alpha''_2 &= P'_2 - 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha'_{p-1} - \alpha''_{p-1} &= P'_{p-1} - 1 \\
\alpha'_p - \alpha''_p &= 0
\end{aligned}$$

gewinnt POINCARÉ nun für die reduzierten BETTIschen Zahlen die Formel

$$\alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \cdots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 = 1 - (P'_{p-1} - 1) + \cdots \mp (P'_2 - 1) \pm (P'_1 - 1) \mp 1.$$

Nimmt man das Resultat vorweg, daß die reduzierten BETTIschen Zahlen mit den gewöhnlichen übereinstimmen, so ist damit die EULER-POINCARÉsche Formel für die orientierbare Mannigfaltigkeit bewiesen.

DEHN & HEEGAARD haben dieses Resultat dann erstmals auf nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten erweitert. Man findet es leicht, wenn man beachtet, daß für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten weder eine Homologie noch eine Kongruenz zwischen den p-dimensionalen Zellen besteht. Im System links ist deshalb die unterste Gleichung $\alpha_p = \alpha'_p + 1$ durch $\alpha_p = \alpha'_p$ zu ersetzen. Die Formel für die orientierbare Mannigfaltigkeit lautet bei DEHN & HEEGAARD:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \cdots + (-1)^n \alpha_n = 1 + (-1)^n - (P_1 - 1) + (P_2 - 1) - \cdots + (-1)^{n-1} (P_{n-1} - 1);$$

sie wird durch den folgenden Zusatz ergänzt: „Um für *einseitige* M_n die analoge Formel zu erhalten, braucht man nur auf der rechten Seite der obigen Gleichung die Zahl $(-1)^n$ fortzulassen." Verwendet man die heutigen BETTIschen Zahlen $p_k = P_k - 1$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, ferner

$$p_0 = 1$$

$$p_n = \begin{pmatrix} 1 \text{ für orientierbare} \\ 0 \text{ für nichtorientierbare} \end{pmatrix} \text{Mannigfaltigkeiten,}$$

so erhält die Formel die gebräuchliche Gestalt:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \alpha_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k.$$

POINCARÉ beweist als nächstes, daß die reduzierten BETTIschen Zahlen sich nicht ändern bei einer Unterteilung des Polyeders. Da diese in hohem Maß beliebig ist („supposons que l'on subdivise chacune des variétés a_i^p en plusieurs autres, que j'appellerai les b_i^p"), ist das ziemlich mühsam. Es wird wesentlich davon Gebrauch gemacht, daß die Zellen a_i^q nach Voraussetzung alle einfach zusammenhängend sind, so daß aus jeder Kongruenz $A \equiv 0$, die innerhalb eines a_i^q besteht, die Homologie $A \sim 0$ folgt.

Um den Beweis der Übereinstimmung von reduzierten und gewöhnlichen BETTIschen Zahlen zu vervollständigen, müßte jeder beliebige Zykel der Mannigfaltigkeit sich einem aus einer Zellkombination gebildeten Zykel homolog erweisen. POINCARÉ streift diesen Punkt nur flüchtig: „Soit maintenant W une variété quelconque, fermée, à q dimensions, située sur V. On peut toujours construire un polyèdre V', dérivé de V, au sens de la page 271 de l'*Analysis situs*, et tel que W soit une combinaison des b_i^q." Der Einwand, der gegen diese Überlagerungspolyeder erhoben werden kann, wurde schon früher besprochen. Die Behauptung, daß die reduzierten BETTIschen Zahlen auch die BETTIschen Zahlen der Mannigfaltigkeit seien, ist denn auch bis zum ALEXANDERschen Invarianzbeweis Hypothese geblieben.

Als äußerst wertvolles Hilfsmittel erweist sich das *duale Polyeder*, („polyèdre réciproque"). POINCARÉ zeigt seine Existenz, indem er für das 3-dimensionale Polyeder eine Konstruktionsmethode entwickelt, die sich auch auf n-dimensionale Polyeder erweitern läßt.

POINCARÉ beginnt mit einer baryzentrischen Unterteilung. (Er braucht allerdings noch nicht diese Bezeichnung.) Auf jeder Kante, auf jeder Fläche und in jeder 3-Zelle wird ein beliebiger Punkt $P(a_i^1)$, bzw. $P(a_i^2)$, bzw. $P(a_i^3)$ bestimmt. Der Punkt $P(a_i^2)$ wird dann innerhalb der Fläche mit ihren Eckpunkten verbunden und mit den Punkten $P(a_i^1)$ jener Kanten, welche die Fläche beranden. Die Fläche wird dadurch in Dreiecke unterteilt. Dann wird die 3-Zelle in Tetraeder zerlegt, welche die Dreiecke der Flächen zur Basis haben und den Punkt $P(a_i^3)$ als gemeinsame Spitze. Die Tetraederkanten, welche von einem Flächenpunkt $P(a_i^2)$ nach den innern Punkten $P(a_j^3)$ und $P(a_k^3)$ der beiden angrenzenden 3-Zellen führen, ergeben zusammen *eine Kante* b_i^1 des reziproken Polyeders; zu jeder Fläche a_i^2 gehört demnach eine Kante b_i^1. Ausgehend vom Kantenpunkt $P(a_i^1)$, kann die *Fläche* b_i^2 durch das Polygon repräsentiert werden, das sich zusammensetzt aus Dreicken der Form $P(a_i^1)\ P(a_k^3)\ P(a_j^2)$, wobei die Indizes k, j Flächen und Räume bezeichnen, die an die Kante a_i^1 anstoßen und zudem zueinander inzident sind. Jeder Kante a_i^1 wird in dieser Weise eine Fläche b_i^2 zugeordnet. Endlich fügen sich alle Tetraeder mit gemeinsamer Spitze im Eckpunkt a_i^0 des Ausgangspolyeders zu einem einfach zusammenhängenden Polyeder aneinander; letzteres liefert die gesuchte 3-Zelle b_i^3. Begrenzt wird sie von den b_k^2, die jenen a_k^1 entsprechen, welche vom Eckpunkt a_i^0 ausgehen.

„La juxtaposition des volumes b_i^3 constituera un nouveau polyèdre P', que j'appellarai le *polyèdre réciproque de P*, et qui aura pour cases les b_i^3, pour faces les b_i^2, pour arêtes les b_i^1, pour sommets les points $b_i^0 = P(a_i^3)$.

A chaque case b_i^3 de P' correspondra un sommet a_i^0 de P;

A chaque face b_i^2 de P' correspondra une arête a_i^1 de P;

A chaque arête b_i^1 de P' correspondra une face a_i^2 de P;

A chaque sommet b_i^0 de P' correspondra une case a_i^3 de P."

POINCARÉ äußert sich nicht darüber, wie die Orientierung des reziproken Polyeders zu bewerkstelligen ist, damit den Kongruenzen

$$a_i^3 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^3 a_j^2, \qquad a_i^2 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1, \qquad a_i^1 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^1 a_j^0$$

von P entsprechende von P' gegenübergestellt werden können, nämlich

$$b_i^3 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^1 b_i^2, \qquad b_i^2 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^2 b_j^1, \qquad b_i^1 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^3 b_j^0.$$

Bei dieser Indizierung sind die Koeffizienten $\varepsilon_{i,j}$ der *transponierten Matrix* zu entnehmen. In 2. Complément schreibt POINCARÉ für den allgemeinen Fall richtiger

$$b_i^q \equiv \sum_j \varepsilon_{ji}^{p-q+1} b_j^{q-1}$$

und, „nous pouvons l'écrire également

$$b_i^q \equiv \sum_j \varepsilon_{ij}^{\prime q} b_j^{q-1}$$

en posant $\varepsilon_{ji}^{p-q+1} = \varepsilon_{ij}^{\prime q}$." Halten wir fest, daß nur orientierbare Polyeder diese Vorschriften erfüllen können.

POINCARÉ beweist dann sehr sorgfältig, daß jedem Kantenzykel von P ein solcher des reziproken Polyeders P' entspricht und umgekehrt. Ist der Zykel von P nullhomolog, so ist es auch der ihm zugehörige von P' und umgekehrt. Daraus folgt aber sofort, daß die reduzierte BETTIsche Zahl bezüglich der Kanten von P mit der reduzierten BETTIschen Zahl bezüglich der Kanten von P' übereinstimmt. Mit Hilfe des dualen Polyeders läßt sich scheinbar die Gleichheit der reduzierten und gewöhnlichen BETTIschen Zahlen sehr leicht nachweisen (S. 319): „En effet, la définition du polyèdre P' comporte un certain arbitraire: ses sommets b_i^0 ne sont assujettis qu'à être intérieurs aux cases a_i^3 de P. Dans ces conditions, on peut évidemment choisir toujours le polyèdre P' de façon qu'une ligne fermée *quelconque* soit une combinaison des b_i^1."

Auch diese Schlußweise ist wenig stichhaltig. Nach Konstruktion des dualen Polyeders schneidet die Kante b_i^1 die Fläche a_i^2 *in genau einem Punkt*. Eine beliebige geschlossene Kurve kann aber evtl. unendlich viele Schnittpunkte mit a_i^2 haben, so daß auch nach endlich vielen Unterteilungen von a_i^2 die erstrebte Ausgangslage noch nicht erreicht ist.

POINCARÉ nimmt dann den neuen Beweis zum Dualitätstheorem in Angriff. Er beschränkt sich dabei auf ein 3-dimensionales Polyeder, das N_1 Kanten, N_2 Seitenflächen und N_3 Räume zählt. In einer großen Tabelle werden die Relationen der Flächen einerseits zu den Räumen (Kästchen rechts oben), anderer-

seits zu den Kanten (Kästchen links unten) festgehalten. Wir finden ein Beispiel mit $N_1=3$, $N_2=4$ und $N_3=2$:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon^3_{1,1} & \varepsilon^3_{2,1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon^3_{1,2} & \varepsilon^3_{2,2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon^3_{1,3} & \varepsilon^3_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon^3_{1,4} & \varepsilon^3_{2,4} \\ \varepsilon^2_{1,1} & \varepsilon^2_{2,1} & \varepsilon^2_{3,1} & \varepsilon^2_{4,1} & 0 & 0 \\ \varepsilon^2_{1,2} & \varepsilon^2_{2,2} & \varepsilon^2_{3,2} & \varepsilon^2_{4,2} & 0 & 0 \\ \varepsilon^2_{1,3} & \varepsilon^2_{2,3} & \varepsilon^2_{3,3} & \varepsilon^2_{4,3} & 0 & 0 \end{array}$$

Die ersten N_2 Kolonnen und Zeilen heißen „von erster Art"; die letzten N_3 Kolonnen bzw. N_1 Zeilen heißen „von zweiter Art". Aus den Kolonnen erster Art entnimmt man die Kongruenzen, denn jede Spalte repräsentiert eine Fläche, die i-te z.B. die Fläche a_i^2 und die $\varepsilon^2_{i,j}$ in den N_1 untersten Zeilen der i-ten Spalte geben darüber Auskunft, welche Kanten zur Begrenzung von a_i^2 gehören. POINCARÉ beschreibt den Vorgang folgendermaßen (S. 322): „Considérons une colonne quelconque de la première sorte; par exemple la $i^{\text{ième}}$ colonne. Multiplions les éléments de cette colonne et de la $k^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte par a_k^2 et ajoutons; puis égalons à la somme obtenue, en multipliant les éléments de cette même colonne et de la $j^{\text{ième}}$ ligne de la seconde sorte par a_j^1; nous obtiendrons la congruence $a_i^2 \equiv \sum \varepsilon^2_{i,j} a_j^1$, ce qui est bien une des congruences (3) du paragraphe II. Toutes les autres congruences n'en sont que des combinaisons."

Die Homologien liest man aus den hinteren N_3 Kolonnen ab: Die i-te Spalte repräsentiert nun den Raum a_i^3 und jene $\varepsilon^3_{i,j} \neq 0$ der ersten N_2 Zeilen kennzeichnen alle a_j^2, die zusammen die vollständige Begrenzung von a_i^3 bilden. Mit POINCARÉs Worten: „Pour cela, envisageons, par exemple, la $i^{\text{ième}}$ colonne de la seconde sorte; multiplions les éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de cette colonne par a_k^2, ajoutons et égalons à zéro; nous trouverons $\sum \varepsilon^3_{i,k} a_k^2 \sim 0$, ce qui est bien une des homologies (5) du paragraphe II, dont toutes les autres ne sont que des combinaisons."

Folgende elementare Operationen, die jedoch immer zwischen Kolonnen oder Zeilen *der gleichen Art* stattfinden müssen, bringen die Matrix (1) auf die „reduzierte Form":

1° Ajouter une colonne à une autre *de même sorte*, ou l'en retrancher;

2° Ajouter une ligne à une autre *de même sorte*, ou l'en retrancher;

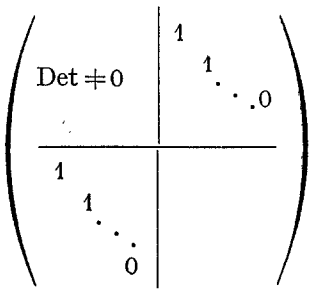
3° Permuter deux colonnes de même sorte, en changeant tous les signes de l'une d'elles;

4° Permuter deux lignes de même sorte, en changeant tous les signes de l'une d'elles.

Toutes ces transformations, pour lesquelles les éléments de tableau restent entiers, s'appelleront les *transformations arithmétiques* du tableau."

Dazu treten (als 5. Operation) noch die „transformations algébriques" hinzu: „multiplier tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre entier ou non, différent de zéro."

Mit diesen 5 Operationen ist es möglich, die Matrix auf eine solche Gestalt zu bringen, daß in den beiden Kästchen, welche durch die Kolonnen erster Art und die Zeilen zweiter Art, oder durch die Kolonnen zweiter Art und die Zeilen erster Art gebildet werden, die Diagonalelemente 1 oder 0, sämtliche übrigen Elemente aber 0 sind. Die Elemente im quadratischen Kästchen links oben brauchen dabei nicht ganzzahlig zu bleiben, aber ihre Determinante ist immer noch von 0 verschieden. Die Matrix hat damit z.B. die folgende Form:



„S'il en est ainsi, je dirai, que le tableau est réduit."

Kolonnenoperationen bewirken lediglich Kombinationen der Kongruenzen und Homologien unter sich. Wird aber von den Zeilen erster Art die i-te zu k-ten addiert, so legt POINCARÉ fest (S. 322): „Nous convenons de dire qu'à la nouvelle $k^{\text{ième}}$ ligne (celle à laquelle on a ajouté la $i^{\text{ième}}$ ligne) correspond toujours la variété a_k^2; mais qu'à la nouvelle $i^{\text{ième}}$ ligne (qui d'ailleurs n'a pas changé) correspond la variété $a_i^2 - a_k^2$. Si l'on fait la cinquième opération sur la $k^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte, en multipliant les éléments par une constante m, nous conviendrons de dire qu'à la nouvelle $k^{\text{ième}}$ ligne correspond la variété $\frac{1}{m} a_k^2$ (notation qui n'a qu'une valeur symbolique, à moins que $\frac{1}{m}$ ne soit entier)."

Die umgeformte Matrix gibt also nicht mehr die Berandungseigenschaften der ursprünglichen a_i^2 an, sondern jene von gewissen, nicht notwendig ganzzahligen Linearkombinationen.

Wie vorhin entnimmt man der neuen Tabelle wieder die Kongruenzen und Homologien, die evtl. erst nach Multiplikation mit einem geeigneten Faktor ganzzahlig werden. Es bleibt nun noch zu klären, wieviele davon unabhängig sind.

Enthalten N_2' unter den N_3 Kolonnen zweiter Art eine Eins, so ist das auch die Anzahl der verschienenen (d.h. unabhängigen) Homologien; die übrigen $N_3 - N_2'$ Kolonnen enthalten nur Nullen, liefern also nur triviale Homologien. Enthalten N_2'' Zeilen zweiter Art eine Eins, so enthalten die übrigen $N_2 - N_2''$ nur Nullen; letzteres ist die gesuchte Anzahl der verschiedenen Kongruenzen, deren rechte Seite null ist, die also geschlossene 2-Ketten darstellen. Für die BETTIsche Zahl bezüglich der Flächen gilt daher

$$P_2 = N_2 - N_2'' - N_2' + 1.$$

Wird die ursprüngliche Matrix (1) transponiert, so gibt sie über die Berandungseigenschaften der *Kanten* des dualen Polyeders P' Auskunft. Daraus folgt sofort, daß $P_1' = P_2$ ist. Da schon früher bewiesen worden ist, daß auch $P_1' = P_1$ gilt, kann POINCARÉ nun das fundamentale Ergebnis aussprechen (S. 325):

„Donc le nombre de Betti relatif aux faces de P est égal au nombre de Betti relatif aux arêtes de P.

Notre théorème fondamental est donc démontré en ce qui concerne le polyèdre P, c'est-à-dire en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à quatre dimensions." Er fügt bei: „La démonstration pourrait, sans aucun doute, s'étendre à un polyèdre quelconque." Präzisieren wir, daß beim Beweis die Voraussetzung der Orientierbarkeit des Polyeders eingegangen ist; nur dann kann das duale Polyeder P' so orientiert werden, daß die Matrix der Kanten von P' gleich der transponierten Matrix der Flächen von P ist.

g) Die Torsionszahlen

Das 2. Complément (1900) enthält nebst einigen Ergänzungen noch den wichtigen Begriff der Torsion.

Die Tabellen für die Berandungsrelationen werden jetzt vereinfacht: Die aus den Koeffizienten ε_{ij}^q gebildete Matrix T_q hält nur noch die Relationen zwischen den a_i^q und den a_j^{q-1} fest, besteht somit aus dem linken unteren Kästchen der großen Tabelle. POINCARÉ stellt sie gegenüber früher in transponierter Form auf, indem er festlegt, daß jedem a_i^q eine Zeile, jedem a_j^{q-1} eine Kolonne entsprechen soll. Somit drückt jede Zeile eine Kongruenz aus:

$$(1) \qquad a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1}$$

und damit aber auch gleichzeitig die Homologie

$$(2) \qquad \sum \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1} \sim 0,$$

Die Existenz des dualen Polyeders P' — im Fall $n=3$ bewiesen — wird im folgenden auch für das p-dimensionale Polyeder vorausgesetzt, und es soll so orientiert sein, daß die dualen Kongruenzen folgendermaßen lauten:

$$(1 \text{ bis}) \qquad b_i^q \equiv \sum \varepsilon_{ji}^{p-q+1} b_j^{q-1} = \sum \varepsilon_{ij}'^q b_j^{q-1};$$

es besteht demnach zwischen den Elementen $\varepsilon_{ij}'^q$ der dualen Matrix T_q' und den Elementen von T_{p-q+1} die Beziehung

$$\varepsilon_{ji}^{p-q+1} = \varepsilon_{ij}'^q.$$

Die Anwendung der früher definierten Schnittzahl $N(V_1, V_2)$ auf duale Zellen a_i^q bzw. b_j^{p-q} liefert noch folgende Aussage: Es ist $N(a_i^q, b_k^{p-q}) = 0$ für $i \neq k$ und $N(a_i^q, b_i^{p-q}) = \pm 1$, wobei das Vorzeichen nur von der Dimension q abhängt und nicht vom Index i. Um es zu bestimmen, müssen wieder die die Zellen a_i^q, b_i^{p-q} definierenden Gleichungssysteme zugezogen werden. Indem POINCARÉ die Bedingung $\varepsilon_{ij}'^q = \varepsilon_{ji}^{p-q+1}$ berücksichtigt, findet er

$$N(a_i^q, b_i^{p-q}) = \quad N(a_j^{q-1}, b_j^{p-q+1}) \quad \text{falls } q \text{ gerade ist,}$$
$$N(a_i^q, b_i^{p-q}) = -N(a_j^{q-1}, b_j^{p-q+1}) \quad \text{falls } q \text{ ungerade ist.}$$

Da es immer möglich ist, so zu orientieren, daß $N(a_i^0, b_i^p) = +1$ ist, so folgt daraus

$$N(a_i^1, b_i^{p-1}) = -1, \qquad N(a_i^2, b_i^{p-2}) = -1,$$
$$N(a_i^3, b_i^{p-3}) = +1, \qquad N(a_i^4, b_i^{p-4}) = +1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Matrix T_q wird dann umgeformt; POINCARÉ entwickelt hier die Theorie der Elementarteiler. Die folgenden Operationen

„1° Ajouter une colonne à une autre ou l'en retrancher;

2° Permuter deux colonnes et changer le signe de l'une d'elles;

3° Faire les mêmes opérations sur les lignes;"

genügen, um die ganzzahlige Matrix T_q auf eine besondere Diagonalform zu bringen. Ist n die kleinere der Zeilen- resp. Spaltenzahl, so ist das i-te Diagonalelement durch $\frac{M_{n-i}}{M_{n-i+1}}$ gegeben, wobei unter M_{n-i} der größte gemeinsame Teiler (g.g.T) aller i-reihiger Unterdeterminanten zu verstehen ist; speziell ist M_{n-1} der g.g.T. aller Matrixelemente. Diese n Zahlen

$$M_{n-1}, \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}, \ldots, \frac{M_0}{M_1},$$

die dann durch ω_i^q ersetzt werden, nennt POINCARÉ „les invariants du tableau T", denn sie ändern sich nicht unter den oben erwähnten Zeilen- und Spaltenoperationen. Es ist zu beachten:

„1° Que chacun de ces invariants divise le suivant;

2° Que quelques-uns de ces invariants peuvent être nuls, mais que, si l'un d'eux l'est, tous ceux qui le suivent le sont également."

Ist γ_q der Rang der Matrix T_q, so ist das auch die Anzahl der von Null verschiedenen invarianten Faktoren ω_i^q. Die umgeformte Matrix stellt wieder das Relationensystem zwischen gewissen q- bzw. $(q-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten c_i^q bzw. d_i^{q-1} dar, die Linearkombinationen der a_i^q bzw. a_i^{q-1} sind und aus diesen *ohne Division* gewonnen werden. Die Kongruenzen und Homologien haben nun die einfache Form:

(1 bis) $$c_i^q \equiv \omega_i^q d_i^{q-1},$$

(2 bis) $$\omega_i^q d_i^{q-1} \sim 0.$$

Wie früher leitet POINCARÉ daraus die BETTIsche Zahl P_q her. (Es ist α_q'' durch γ_{q+1} und $\alpha_q - \alpha_q'$ durch γ_q zu ersetzen.) Die Formel lautet nun:

$$P_q = \alpha_q - \gamma_{q+1} - \gamma_q + 1.$$

Da die Matrix T'_{p-q+1} des dualen Polyeders mit der transponierten Matrix von T_q identisch ist, hat sie ebenfalls den Rang γ_q. POINCARÉ kann nach kurzer Rechnung $P'_{p-q} = P_q$ folgern. Daraus erhält er sofort das Dualitätsgesetz für das p-dimensionale Polyeder:

$$P_{p-q} = P_q,$$

„si l'on se rappelle que les nombres de Betti relatifs aux deux polyèdres réciproques P et P' sont les mêmes". POINCARÉ hat das im 1. Complément für die Kanten eines 3-dimensionalen Polyeders bewiesen, und er macht dort die Bemerkung, „on pourrait arriver au même résultat, en remarquant que l'on peut construire un polyèdre qui serait, à la fois dérivé du polyèdre P et dérivé du

polyèdre réciproque P', et en appliquant le théorème du paragraphe V'', das aussagt, daß sich die BETTIschen Zahlen bei einer Unterteilung nicht ändern. Das scheint ihm zu genügen, denn er geht nicht mehr darauf ein.

POINCARÉ kommt nun noch einmal auf die beiden verschiedenen Definitionen der Homologien zu sprechen. Läßt man die Division zu, so folgen aus den Homologien (2 bis) sofort die γ_q Homologien $d_i^{q-1} \sim 0$; jede beliebige $(q-1)$-dimensionale Homologie ist dann von der Form

$$\sum_{i=1}^{\gamma_q} \lambda_i d_i^{q-1} \sim 0; \tag{3}$$

sie ist hingegen von der Form

$$\sum_{i=1}^{\gamma_q} \lambda_i \omega_i^q d_i^{q-1} \sim 0, \tag{4}$$

falls man keine Division zuläßt. Die Schlußfolgerung (S. 350) ist dieselbe, die POINCARÉ schon im 1. Complément gezogen hat: „Pour que les deux définitions des nombres de Betti coïncident, il faut et il suffit, que les deux formules (3) et (4) concordent, c'est-à-dire que les invariants ω_i^q qui ne sont pas nuls, soient égaux à 1." Das veranlaßt ihn, zweierlei Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden: „Celles de la première sorte que j'appellerai *variétés sans torsion*, seront celles pour lesquelles les invariants de tous les tableaux T_q sont tous égaux à 0 ou 1. ... Celles de la seconde sorte, que j'appellerai *variétés a torsion*, seront celles pour lesquelles certains de ces invariants ne sont égaux ni à 0 ni à 1, et pour lesquelles, par conséquent, les deux définitions des nombres de Betti ne sont pas d'accord."

POINCARÉ erkennt auch die Bedeutung des Produktes $\omega_1^q \omega_2^q \dots \omega_{\gamma_q}^q$: „Envisageons maintenant les combinaisons linéaires des a_i^{q-1} qui seraient homologues à zéro en vertu des homologies (3), et demandons-nous quelles sont parmi ces combinaisons celles qui restent distinctes, si, abandonnant les homologies (3), on se borne aux homologies (4) sans admettre le droit de diviser les homologies. Nous verrons tout de suite que le nombre de ces expressions qui sont ainsi distinctes est précisément le produit $\omega_1^q \omega_2^q \dots \omega_{\gamma_q}^q$." Das Produkt gibt uns also die Anzahl der $(q-1)$-dimensionalen Zykeln bekannt, die zwar nicht nullhomolog, aber divisions-nullhomolog sind; m. a. W. ist diese Zahl gleich der Ordnung der Torsionsgruppe, und deren Erzeugende sind die d_i^{q-1}, die zu den $\omega_i^q \neq 0, 1$ gehören.

Für die Invarianten, die weder 0 noch 1 sind, führt POINCARÉ die Bezeichnung „coefficients de torsion" ein (S. 363).

Um zu einem Dualitätsgesetz für die Torsionskoeffizienten zu gelangen, muß POINCARÉ nachweisen, daß die Tabellen T_q und T_q' gleiche Invarianten besitzen. Hier muß wieder ein Hilfssatz vorangestellt werden: Liegt eine Kongruenz $\sum \lambda_i a_i^q \equiv 0$ zwischen den q-dimensionalen Zellen des Polyeders P vor, so existiert immer eine Kongruenz $\sum \mu_i b_i^q \equiv 0$ zwischen q-dimensionalen Zellen des reziproken Polyeders, so daß $\sum \lambda_i a_i^q \sim \sum \mu_i b_i^q$ ist und umgekehrt. Das läßt sich nicht aus den Schemata allein beweisen; es müssen dazu wieder Eigenschaften der den Schemata zugrundegelegten Punktmengen beigezogen werden.

Mit Hilfe dieses Satzes zeigt POINCARÉ, daß jeder Torsionskoeffizient der Matrix T_q auch ein Torsionskoeffizient der Matrix T_q' ist und umgekehrt. Das Dualitätstheorem ist nun allerdings mit einem Flüchtigkeitsfehler behaftet,

indem POINCARÉ außerdem den Tabellen T_q' und T_{p-q} (statt T_{p-q+1}) gleiche Invarianten attestiert. Es lautet (S. 364):

„*Les tableaux également distants des extrêmes ont mêmes coefficients de torsion.*"

Rektifiziert man diesen Irrtum, so ergibt sich $\omega_i^q = \omega_i^{p-q+1}$. Es ist dabei zu beachten, daß ω_i^q ein $(q-1)$-*dimensionaler Torsionskoeffizient* ist. Setzt man mit VEBLEN & ALEXANDER $\omega_i^q = \tau_i^{q-1} = \tau_i^{p-q}$, so erhält man die bekannte Formel

$$\tau_i^k = \tau_i^{p-k-1}.$$

POINCARÉ erwähnt am Schluß des 2. Complément noch den Satz: „Tout polyèdre qui a tous ses nombres de Betti égaux à 1 et tous ses tableaux T_q bilatères" (d.h., daß die Torsionskoeffizienten fehlen) „est simplement connexe, c'est-à-dire homéomorphe à l'hypersphère." Er widerlegt diese Behauptung im 5. Complément selbst durch das Beispiel einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die zwar obigen Bedingungen genügt, deren Fundamentalgruppe jedoch nicht nur aus der Identität besteht. Von DEHN stammt ein Konstruktionsverfahren zur Gewinnung weiterer solcher Mannigfaltigkeiten, die er „Poincarésche Räume" nennt. (Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. **69**, 1910.)

POINCARÉS 3. und 4. Complément ist der Anwendung der Theorie auf spezielle algebraische Flächen gewidmet.

§ 6. Der Anfang einer rein kombinatorischen Topologie bei Dehn & Heegaard

Lagen bis dahin allen topologischen Betrachtungen Punktmengen des euklidischen Raumes zugrunde und diente deren Zerlegung in ein Zellsystem lediglich als Hilfsmittel zur Charakterisierung gewisser Eigenschaften, so rücken DEHN & HEEGAARD im Enzyklopädieartikel „Analysis situs" (1907) nun diesen in abstrakter Weise zusammengefügten Komplex in den Mittelpunkt.

Der Aufbau geht stufenweise vor sich. Eine erste endliche Anzahl von Elementen $P_0', P_0'', \ldots, P_0^{\alpha_0}$, „Punkten", bildet in ihrer Gesamtheit einen Punktkomplex C_0. Je zwei dieser Punkte, P_0^i, P_0^k, sollen wieder eine beliebige (endliche) Anzahl neuer Elemente S_1, „Strecken oder Linienstücke" erzeugen können, die durch (P_0^i, P_0^k) oder $S_1^{i,k}$ gekennzeichnet sind. Wird von den Punkten vorausgesetzt, daß jeder zu mindestens einer Strecke gehört, so bilden alle Punkte und Strecken zusammen einen eindimensionalen Komplex C_1, von dem dann weiter verlangt wird, daß er zusammenhängend sein soll, d.h., daß je zwei seiner Punkte durch einen Streckenzug verbunden werden können. Ein spezieller C_1 ist der Kreis Π_1; er hat das Schema

$$\{P_0^1, P_0^2, \ldots, P_0^i, \ldots, P_0^l; (P_0^1, P_0^2), (P_0^2, P_0^3), \ldots, (P_0^l, P_0^1)\}, \qquad P_0^i \neq P_0^k.$$

Eine eindimensionale Mannigfaltigkeit M_1 ist entweder ein Kreis oder entsteht aus einem solchen durch Weglassen einer Strecke.

Jeder Kreis Π_1 soll nun wieder eine beliebige Anzahl Dinge $(\Pi_1)^1, (\Pi_1)^2, \ldots$ bestimmen können, die als Flächenstücke S_2 bezeichnet werden. Diese Methode führt zu einem Flächenkomplex C_2, falls der Streckenkomplex die Eigenschaft hat, daß jede seiner Strecken mindestens einem Π_i angehört. Durch starke Ein-

schränkungen kommt man zur 2-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit M_2: Alle Strecken sollen zu genau zwei Flächenstücken gehören und alle Flächen, die im Eckpunkt P_0 zusammenstoßen, sollen *eine* „zyklisch geordnete Gruppe" bilden, womit gemeint ist, daß man nacheinander alle diese Flächenstücke erreicht, wenn man — immer über die gemeinsame Kante zum nächsten fortschreitend — den Eckpunkt P_0 umläuft. Ein solcher Komplex heißt eine geschlossene Fläche. Nicht unter diesen Begriff fällt demnach zum Beispiel die Oberfläche zweier Tetraeder, die eine gemeinsame Ecke besitzen, da dort die Flächenstücke *zwei* „zyklische Gruppen" bilden. Werden aus den so definierten Flächen einzelne S_2 entfernt, die keine gemeinsamen Punkte haben dürfen, so entsteht eine berandete Fläche. Berandete und geschlossene Flächen heißen auch 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

Die einfachste geschlossene Mannigfaltigkeit, die Kugelfläche oder 2-Sphäre Π_2, dient dann zur Gewinnung von 3-dimensionalen Raumstücken S_3. Damit ein C_3 eine geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeit darstellt, muß er folgenden Forderungen genügen: „1) Jede S_2 gehört zu zwei S_3. Dann ordnen sich an jeder S_1 alle S_3 zu „Gruppen"; 2) alle S_3 an einer S_1 bilden nur eine Gruppe. Bezeichnen wir dann die S_1, S_2, S_3, die durch einen bestimmten Punkt des Komplexes gehen, als Pseudopunkte, Pseudostrecken und Pseudoflächenstücke, so bilden diese Elemente vermöge der Bedingungen 1) und 2) einen oder mehrere Komplexe, von denen wir jeden entsprechend als eine geschlossene Pseudofläche bezeichnen dürfen. Wir wählen dann als dritte Bedingung: 3) An jedem Punkt soll es nur eine solche Pseudofläche geben, und zwar soll diese eine Kugelfläche sein."

Die so konstruierte Pseudofläche läßt sich bereits mit dem späteren Umgebungskomplex eines Punktes vergleichen, denn man kann sie offenbar auch gewinnen, indem man von den im Eckpunkt P_0 zusammenstoßenden 3-dimensionalen Elementen jene Randstücke nimmt, die den Punkt P_0 selbst nicht enthalten.

Das Verfahren hat man sich analog fortgesetzt zu denken: die 3-Sphären S_3 erzeugen die 4-dimensionalen Bestandteile für den Komplex C_4, der unter besonderen Bedingungen zur Mannigfaltigkeit M_4 wird, usw. Die Schemata werden allerdings rasch unübersichtlich. Werden durch die Punkte P_0^1, P_0^2 zwei Strecken $(P_0^1, P_0^2)^1$, $(P_0^1, P_0^2)^2$ gelegt, so hat das eingespannte Flächenstück die Bezeichnung $\left((P_0^1, P_0^2)^1, (P_0^1, P_0^2)^2\right)$. Das Schema für die 2-dimensionale Elementar-Mannigfaltigkeit E_2 lautet also:

$$\{P_0^1, P_0^2; (P_0^1, P_0^2)^1, (P_0^1, P_0^2)^2; \left((P_0^1, P_0^2)^1, (P_0^1, P_0^2)^2\right)\}.$$

Wird abkürzend $(P_0^1, P_0^2)^i = S_1^i$ gesetzt, so ist

$$\{P_0^1, P_0^2; S_1^1, S_1^2; (S_1^1, S_1^2)^1, (S_1^1, S_1^2)^2\}$$

das Schema für die 2-Sphäre Π_2.

Liegt nun ein C_n vor, der auf einen andern Komplex C_n' abgebildet wird, und ist dabei zugelassen, daß mehreren Punkten $P_0^1, \ldots, P_0^{p_0}$ von C_n derselbe Punkt von C_n' entspricht, sofern nur keine zwei davon demselben höherdimensionalen Element angehören, so heißt das Bild $C_n'(C_n)$ ein „Komplex mit Singularitäten"; für jedes S_k bleibt dabei die Dimension erhalten, aber es können mehrere zusammenfallen.

Die Orientierung der Elemente oder „Indikatrixbestimmung" erfolgt von unten nach oben; d.h., daß die Kreise mit einem Durchlaufsinn versehen werden, der sich auf die Flächenstücke überträgt. Dann werden wie bei DYCK „einseitige" und „zweiseitige" Flächenkomplexe unterschieden, was wieder im Sinn von nichtorientierbar bzw. orientierbar aufzufassen ist. Da die zur Erzeugung von Raumstücken verwendeten geschlossenen Kugelflächen „zweiseitig" sind, lassen sie sich mit einer Indikatrix versehen, welche die Orientierung des Raumelementes bestimmt, usw.

Es bleiben noch die *Transformationen* zu besprechen. *„Interne Transformation"* eines Streckenkomplexes bedeutet, daß auf einer Strecke (P_0^i, P_0^k) ein neuer Punkt Q_0 eingeführt und die Strecke (P_0^i, P_0^k) dann durch die beiden Strecken (P_0^i, Q_0) und (Q_0, P_0^k) ersetzt wird. Die interne Transformation eines Flächenkomplexes läßt weiter zu, daß eine neue Strecke $(P_0^i, P_0^k) = T_1$ hinzugenommen wird, falls P_0^i und P_0^k zu einem Kreis gehören, in den ein Flächenstück S_2 eingespannt ist. S_2 wird dann durch die beiden Flächenstücke ersetzt, die aus der Unterteilung von S_2 entstanden sind. Liegt ein C_3 vor, so umfaßt die interne Transformation auch Unterteilungen der Raumelemente, wobei die Berandung des eingeführten Flächenstückes ein Kreis sein soll, der zur Begrenzung des Raumelementes gehört.

Zwei Komplexe heißen *elementarverwandt* oder *homöomorph*, wenn sie sich unter eventueller Abänderung der Bezeichnung der Elemente als identisch erweisen, oder wenn man diesen Zustand nach beliebig oft wiederholter interner Transformation erreichen kann. Die Begriffe Elementarmannigfaltigkeit und Sphäre erhalten daher eine entsprechende Erweiterung.

Die *„externe Transformation"* wird am Beispiel eines singulären Flächenkomplexes $C_2'(C_2)$ erläutert, der auf einer Mannigfaltigkeit M_n $(n > 2)$ liegen soll. Entspricht jedem Punkt P_0^i von $C_2'(C_2)$ ein Punkt Q_0^i, einer Verbindungsstrecke S_1^l zweier Punkte eine Verbindungsstrecke T_1^l der entsprechenden Punkte, jedem Flächenstück S_2^h ein in die entsprechenden Elemente eingespanntes Flächenstück T_2^h, so stellt dieser Komplex ebenfalls ein Bild $C_2''(C_2)$ von C_2 dar. Nun werde angenommen, daß je zwei entsprechende Punkte P_0^i, Q_0^i durch eine Strecke U_1^i verbunden werden können, so daß sich durch die Punkte $P_0^i, Q_0^i, P_0^k, Q_0^k$ ein Kreis $\{S_1^l, U_1^k, T_1^l, U_1^i\}$ legen läßt, der ein Elementarflächenstück E_2^l der Mannigfaltigkeit begrenzt. Werden diese Elementarflächenstücke für alle Begrenzungsstrecken zweier entsprechender Flächen S_2^h und T_2^h gebildet, so setzen sich alle diese Flächenstücke zu einer Sphäre zusammen. Wird noch vorausgesetzt, daß alle so erhaltenen Sphären wiederum Elementarraumstücke E_3 der M_n begrenzen, dann gehen $C_2'(C_2)$ und $C_2''(C_2)$ durch *externe Transformation* auseinander hervor. Es wird also der Begriff der stetigen Deformation ins Kombinatorische übersetzt.

DEHN & HEEGAARD definieren dann: „Gehen zwei Komplexe eventuell nach vorhergehenden internen Transformationen auseinander durch eine Reihe von externen Transformationen hervor, so nennen wir sie *homotop*." Externe Transformationen, die noch zusätzliche Bedingungen erfüllen, führen auf *isotope* Komplexe.

Von den ohne Beweis ausgesprochenen Sätzen seien nur die wichtigsten erwähnt: „Zwei homotope Komplexe sind homöomorph. Zwei homöomorphe, einem E_n angehörige $(n-m)$-dimensionale Komplexe mit (oder ohne) Singu-

laritäten sind homotop." Schon TIETZE bemerkt, daß die Aussage „Sind zwei Komplexe mit einem dritten homöomorph, dann sind sie auch miteinander homöomorph", eines Beweises bedürfe, den er für den Fall $n=2$ selbst gibt, während E. BILZ sie für $n \leqq 4$ bestätigt (Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis Situs. Math. Ztschr. **18**, 1923).

Werden die abstrakt definierten Elemente des Komplexes nachträglich wieder mit Punktmengen aufgefüllt, so erhält man eine Anwendung dieser ganzen Theorie, die nach DEHN & HEEGAARD als ein „durch seine anschauliche Bedeutung ausgezeichneter Teil der Kombinatorik" aufzufassen ist. In diesem Sinn bringt der zweite Teil des Artikels dann eine umfassende Zusammenstellung der bis dahin bekannten Resultate über Linien- und Flächenkomplexe (mit detaillierter Literaturangabe), aber auch ein Konstruktionsverfahren zur Herstellung von Normalformen für die Flächen, bei denen es sich aber noch nicht um das Fundamentalpolygon handelt. Ferner sind die wichtigsten Begriffe und Ergebnisse aus POINCARÉs topologischen Arbeiten formuliert.

Die Problematik, die das Übertragen der aus dem Komplex gefundenen Resultate auf Punktmannigfaltigkeiten mit sich bringt, kommt hier allerdings noch nicht so deutlich zum Ausdruck. Der Übergang von der reinen Theorie zur Anwendung wird durch ein Axiomensystem vermittelt (S. 168/169), aus dem folgen sollte, daß die Elementarverwandtschaft der Schemata für die Homöomorphie der Punktmengen (im heutigen Sinn) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig sei. TIETZE macht auf die Fragwürdigkeit dieser Behauptung aufmerksam (1908), während STEINITZ — ebenfalls 1908 — vermutet, daß dem kombinatorischen Homöomorphismus vielleicht eine etwas allgemeinere Zellteilung zugrunde gelegt werden sollte (Beiträge zur Analysis situs. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **7**, 1908).

§ 7. Der Beitrag Tietzes zur Topologie der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten

In der 1908 publizierten Arbeit „Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten" von HEINRICH TIETZE wird das Gedankengut POINCARÉs einer kritischen Betrachtung unterzogen.

a) Der Mannigfaltigkeitsbegriff

TIETZE schließt sich der von A. HURWITZ auf dem Zürcher Kongreß 1897 in seinem Vortrag über analytische Funktionen beiläufig zum Ausdruck gebrachten Auffassung an, wonach die Punktmengen, die aufeinander eineindeutig und umkehrbar stetig abbildbar sind, in Klassen einzuteilen seien und das allgemeinste Ziel der Analysis situs darin bestehe, für die einzelnen Klassen ein vollständiges Invariantensystem zu gewinnen. Solche eineindeutig und umkehrbar stetig aufeinander abbildbaren Punktmengen nennt HURWITZ „äquivalent"; TIETZE greift dafür auf den von POINCARÉ geprägten Begriff „homöomorph" zurück, den er damit — von POINCARÉ abweichend — im heutigen Sinn verwendet.

Als besonders vordringlich erachtet TIETZE das Studium der *Punktmannigfaltigkeiten*, wobei dieser Begriff allerdings zuerst abgegrenzt werden muß.

„Hierzu erscheint es am naturgemäßesten, durch Angabe von inneren Merkmalen, von denen man dann nachzuweisen hat, daß sie bei umkehrbar stetigen und eindeutigen Transformationen nicht verloren gehen, aus der Gesamtheit aller Punktmengen die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten herauszuheben, um so auf einem Wege, der aus der Theorie der Punktmengen herauswächst, die Analysis situs der kontinuierlichen Punktmannigfaltigkeiten zu entwickeln."

Mit den großen Schwierigkeiten, die diesem direkten Weg anhaften, rechtfertigt TIETZE, daß er seinen Mannigfaltigkeitsbegriff an gewisse Darstellungsformen anknüpft. „Unter einer Mannigfaltigkeit wird man dann eine auf die betreffende Art dargestellte Punktmenge oder eine einer solchen homöomorphe Punktmenge verstehen." Die gewählte Darstellungsform, „das Schema", besteht sozusagen aus einem Konstruktionsplan, der darüber Auskunft gibt, wie die Mannigfaltigkeit aus gewissen Bausteinen durch Randidentifizierung zusammengefügt werden soll, wobei verschiedene Bedingungen zu berücksichtigen sind.

Der Aufbau selbst geht ähnlich vor sich wie bei DEHN & HEEGAARD. Die einfachsten Schemata sind die geschlossene und die ungeschlossene Linie, letztere repräsentiert durch die Strecke (Schema ε_1), erstere durch das Schema σ_1, das aus zwei Strecken besteht, bei denen je einem Endpunkt der einen Strecke ein Endpunkt der andern zugeordnet ist. Solche zugeordnete Punkte sind dann definitionsgemäß als *ein* Punkt der Mannigfaltigkeit aufzufassen. Wird in σ_1 eine Fläche eingespannt, so entsteht die „2-dimensionale Elementarmannigfaltigkeit ε_2", ein „Polygon mit 2 Seiten". Etwas allgemeiner bildet eine Kreisscheibe mit in n Teile unterteilter, mit einer Richtung versehener Peripherie das Schema für eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, indem gewisse dieser n Teile paarweise identifiziert werden. Noch allgemeiner wird das Verfahren unter Verwendung von endlich vielen Kreisscheiben. Der Herstellungsprozeß wird für die 2- und 3-dimensionale Mannigfaltigkeit sehr ausführlich geschildert, für die n-dimensionale Mannigfaltigkeit jedoch nur kurz gestreift.

TIETZE weist darauf hin, daß die Darstellung der Mannigfaltigkeit durch ein Zellsystem die Möglichkeit bietet, die Analysis situs, ohne unendliche Punktmengen einzubeziehen, wie bei DEHN & HEEGAARD rein kombinatorisch zu entwickeln. Da jedoch der Stetigkeitsbegriff an den Umgebungsbegriff gebunden ist, definiert er für den Fall der rein kombinatorischen Betrachtungsweise (S. 13): „Zwei *Schemata* sollen *homöomorph* genannt werden, wenn sie ein gemeinsames abgeleitetes Schema haben, wenn sie also die Eigenschaft haben, daß man durch Unterteilung aus dem einen Schema ein Schema gewinnen kann, das sich auch aus dem zweiten Schema durch Unterteilung erhalten läßt."

Da aber das Zellsystem bei TIETZE nicht in der gleichen Weise zum selbständigen Objekt erhoben wird wie bei DEHN & HEEGAARD, sondern in erster Linie als Hilfsmittel zur Darstellung von Punktmengen verwendet wird, hat er zu untersuchen, wie sich die beiden Definitionen von „homöomorph" zueinander verhalten. Es ist klar, daß zwei durch homöomorphe Schemata definierte Punktmengen selbst — im Sinn der eineindeutigen und umkehrbar stetigen Beziehbarkeit — homöomorph sind. Was nun die Umkehrung dieses Sachverhaltes anbelangt, so stößt TIETZE hier auf dieselbe Schwierigkeit, der wir schon bei POINCARÉ begegnet sind. Liegen nämlich zwei durch Schemata definierte Punktmannigfaltigkeiten vor, die im mengentheoretischen Sinn homöomorph sind, so kann

ein gemeinsames abgeleitetes Schema deshalb nicht einfach dadurch erhalten werden, daß man vermöge des Homöomorphismus die Unterteilung der einen Mannigfaltigkeit jener der andern überlagert, weil diese dadurch evtl. in unendlich viele Zellen zerlegt wird. Aus diesem Grund sieht sich TIETZE gezwungen, in der Folge *zwischen topologischen Invarianten der Schemata und topologischen Invarianten der Punktmannigfaltigkeiten zu unterscheiden.* Auch stellt er ausdrücklich fest, daß sich rein kombinatorisch bewiesene Sätze nur mit Vorsicht auf Punktmannigfaltigkeiten übertragen lassen.

Die für das Folgende wichtigen Definitionen sollen nun kurz erläutert werden. Eine Mannigfaltigkeit heißt *geschlossen*, wenn beim Identifizierungsprozeß keine Randstücke frei bleiben. Jeden Baustein denke man sich „mit einem Sinn", d.h. mit einer DYCKschen Indikatrix, versehen. Wird ein Randpaar mit umgekehrtem Sinn zusammengefügt, so heißt die Zuordnung „von erster Art"; sie heißt „von zweiter Art", wenn das Randpaar gleichsinnig aufeinandergeklebt wird. Ist es möglich, alle Zuordnungen nach erster Art vorzunehmen, dann heißt die Mannigfaltigkeit *zweiseitig*; sie heißt *einseitig*, wenn das nicht der Fall ist. Ein n-dimensionales Schema heißt *einfach zusammenhängend*, wenn es einem der beiden Schemata ε_n oder σ_n, welche die n-dimensionale Vollkugel bzw. die n-Sphäre repräsentieren, homöomorph ist.

Wir wollen uns noch kurz der wichtigsten Bedingung zuwenden, die TIETZE den Zuordnungsvorschriften des Schemas einer Mannigfaltigkeit auferlegt und die so gefaßt ist, daß sie für die geschlossenen Mannigfaltigkeiten die Konstruktion eines „reziproken Schemas", d.h. eines dualen Komplexes im POINCARÉschen Sinn ermöglicht. Wir finden folgende Formulierung (S. 24): „In einem $(n+1)$-dimensionalen Schema hat nämlich jede Zelle m^{ter} Dimension eine durch ein $(n-m)$-dimensionales Schema repräsentierte Umgebungsmannigfaltigkeit. Daß alle diese Schemata der Umgebungsmannigfaltigkeiten einfach zusammenhängend seien, ist eine Bedingung, die von den das $(n+1)$-dimensionale Schema definierenden Vorschriften zu erfüllen ist." Bei der Besprechung der 3-dimensionalen Schemata ist zu erfahren, wie TIETZE den Begriff der Umgebungsmannigfaltigkeit so weit als möglich kombinatorisch zu erfassen sucht: Die Polygone, die durch Identifizieren die 3-dimensionale Mannigfaltigkeit liefern, mögen auf einer oder mehreren Kugeloberflächen liegen. Dann denkt sich TIETZE „um jede Ecke der Polygoneinteilung einen kleinen Kreis beschrieben". Jede dieser Peripherien wird durch die von der Ecke ausgehenden Kanten unterteilt. Die Kreise jener Eckpunkte, welche bei der Identifizierung zusammenfallen, also per definitionem *eine* Ecke des Schemas bilden, liefern nun selbst ein 2-dimensionales Schema, indem aus der Zuordnungsvorschrift für die ursprünglichen Polygone eine solche für die Peripherieteile der kleinen Kreise hergeleitet wird. Dieses Schema ist die Umgebungsmannigfaltigkeit der Ecke, und von ihm wird gefordert, daß es homöomorph sei entweder zu ε_2, dem Schema der 2-dimensionalen berandeten Elementarmannigfaltigkeit, oder zu σ_2, dem Schema der 2-Sphäre.

POINCARÉ stellt eine ähnliche Bedingung an die 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die er durch paarweises Identifizieren der Seitenflächen von Polyedern konstruiert: Wird der „Stern" des Eckpunktes M mit der Oberfläche einer 4-dimensionalen ε-Kugel um M geschnitten, so muß die entstehende Schnittfigur dem EULERschen Polyedersatz genügen. Bei POINCARÉ ist das ein ganz

natürlicher Prozeß, der sich innerhalb des 4-dimensionalen Raumes, in den die 3-dimensionale Mannigfaltigkeit gelagert ist, abspielt. TIETZE versucht, seine Bedingungen möglichst in einer kombinatorischen Terminologie auszudrücken; immerhin ist mit dem Ausdruck „kleine Kreise" doch etwas der rein kombinatorischen Topologie Fremdes eingegangen. Für die Konstruktion des reziproken Schemas wird auf POINCARÉ verwiesen.

b) Die Bettischen Zahlen

TIETZE definiert nun vorerst, was zu verstehen ist unter Linien-, Flächen- und m-dimensionalen Raumstücken, die zur Mannigfaltigkeit gehören. E_1 bezeichnet das reelle Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$; es wird durch das Schema ε_1 repräsentiert. „Unter einem *Linienstück* einer Mannigfaltigkeit soll eine Gesamtheit G von Punkten der Mannigfaltigkeit verstanden werden, die auf E_1 eineindeutig und stetig abgebildet werden kann." Sind a^0 und b^0 die Endpunkte des Linienstücks, so zerfallen alle möglichen solchen Abbildungen in zwei Klassen, je nachdem a^0 auf -1 oder auf $+1$ abgebildet wird. Im ersten Fall heißt a^0 der frühere (negative), im zweiten Fall der spätere (positive) Endpunkt. Wird darüber eine Wahl getroffen, z.B. soll a^0 positiv sein, so wird damit dem Linienstück a^1 ein Durchlaufsinn erteilt. Das wird symbolisiert durch eine POINCARÉsche Kongruenz $a^1 \equiv +a^0 - b^0$. Für einen einzigen Punkt wird die Forderung nach Eineindeutigkeit der Abbildung ausdrücklich gelockert: es soll gestattet sein, daß den Punkten -1 und $+1$ derselbe Punkt c^0 der Mannigfaltigkeit entspreche. c^0 ist dann sowohl positiver wie negativer Endpunkt, also $a^1 \equiv 0$.

In ähnlicher Weise wird das *Flächenstück* definiert als die Gesamtheit G von Punkten der Mannigfaltigkeit, die eineindeutig und stetig auf den abgeschlossenen Einheitskreis E_2 (repräsentiert durch das Schema ε_2) abgebildet wird. Dabei wird die Eineindeutigkeit in Strenge wieder nur für die Innenpunkte gewahrt, während für die in R Teile k_i unterteilte Kreisperipherie zugelassen ist, daß mehrere Stücke in eine einzige Linie l_{λ_i} von G zusammenfallen. Diesen verallgemeinerten Flächenstücken a^2 kann ebenfalls ein Sinn beigelegt werden, der sich bei einer gegebenen Abbildung auf E_2 durch einen positiven Umlaufsinn der Peripherie festlegen läßt. Letzterer überträgt sich wiederum auf die Kreisbogen k_i. Das führt zur symbolischen Gleichung

$$a^2 \equiv \sum_{i=1}^{R} \delta_i l_{\lambda_i},$$

wobei l_{λ_i} das dem Kreisbogen k_i entsprechende Linienstück darstellt und δ_i entweder $+1$ oder -1 ist, je nachdem bei der Abbildung dem positiven Sinn von k_i der positive oder negative Sinn von l_{λ_i} zukommt.

Endlich wird das *m-dimensionale Raumstück* als eine Punktmenge der Mannigfaltigkeit erklärt, die sich, evtl. mit Ausnahme gewisser Randelemente, eineindeutig und stetig auf die m-dimensionale Vollkugel

$$E_m = \{(x_1, \ldots, x_m) \,|\, x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leqq 1\}$$

abbilden läßt. Nach demselben Muster werden die Kongruenzen gebildet:

$$u^m \equiv \sum \delta_i u_i^{m-1}.$$

Da nach Konstruktion alle u_i^{m-1} dem Raumstück u^m angehören, ist δ_i immer $+1$ oder -1.

Für die Kongruenzen gelten folgende Regeln: Die Reihenfolge der Summanden ist unwesentlich, deshalb gilt $u^m \equiv 0$ für den Fall, daß u^m eine geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit bildet. Ferner dürfen Kongruenzen beidseitig mit derselben ganzen Zahl multipliziert werden. Neue Kongruenzen entstehen, indem die linken bzw. rechten Seiten von gegebenen Kongruenzen addiert werden.

Sind $u_1^m, \ldots, u_r^m$ beliebige m-dimensionale Raumstücke, so können sie auch gemeinsame Innenpunkte haben. Linearkombinationen der Form $\sum h_i u_i^m$ werden als „m-dimensionale Gebilde" bezeichnet; sie genügen i. allg. nicht dem Mannigfaltigkeitsbegriff.

Haben die u_i^m keine gemeinsamen Innenpunkte, wird dasselbe von den $(m-1)$-dimensionalen berandenden Raumstücken vorausgesetzt und bildet $\sum u_i^m$ eine geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit, so kann der Sinn der u_i^m derart gewählt werden, daß $\sum u_i^m \equiv 0$ gilt. Ohne Beweis wird noch der Satz erwähnt: „Wenn $u^m \equiv \sum \delta_i u_i^{m-1}$ ist, so ist $\sum \delta_i u_i^{m-1} \equiv 0$".

Besonders wichtig erweisen sich die Kongruenzen, die zwischen den mit einem Sinn versehenen Zellen a_i^m des Schemas bestehen. Die Gesamtheit der Beziehungen

$$a_i^m \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{m-1}} \varepsilon_{ij}^m a_j^{m-1} \qquad (i = 1, \ldots, \alpha_m;\ m = 1, \ldots, n)$$

heißt bei TIETZE „das POINCARÉsche Relationensystem".

Zu POINCARÉ besteht insofern ein Unterschied, als dieser die Zellen a_i^m, die er durch Unterteilung seiner Punktmengen gewinnt, alle einfach zusammenhängend voraussetzt und diese Eigenschaft in seinen Beweisen auch verwendet. Bei TIETZE braucht das offenbar für die direkt dem Schema entnommenen Zellen nicht zu gelten. Wir werden später auf das Beispiel des 3-dimensionalen projektiven Raumes stoßen, dessen einzige 2-Zelle eine projektive Ebene ist. TIETZE selbst äußert sich nicht zu diesem Punkt.

Aus den Kongruenzen wird nun der Homologiebegriff entwickelt (S. 30): „Sind nämlich $u_1^{m+1}, u_2^{m+1}, \ldots, u_\alpha^{m+1}$; $u_1^m, u_2^m, \ldots, u_\beta^m$ in V gelegene Raumstücke und besteht die Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{\alpha} h_i u_i^{m+1} \equiv \sum_{i=1}^{\beta} k_i u_i^m, \tag{4}$$

so soll gesagt werden, das Gebilde $\sum_{i=1}^{\beta} k_i u_i^m$ sei bezüglich V homolog null, in Zeichen:

$$\sum_{i=1}^{\beta} k_i u_i^m \sim 0.$$

Eine derartige als Homologie bezeichnete Relation bedeutet also das Vorhandensein solcher in V gelegener Raumstücke u_i^{m+1}, daß dieselben der Kongruenz (4) Genüge leisten."

Der Homologiebegriff wird dann erweitert, indem TIETZE zuläßt, daß auf beiden Seiten einer Homologie zwischen m-dimensionalen Raumstücken ein und dasselbe Symbol eines m-dimensionalen Raumstückes addiert wird. Aus den

Rechenregeln über Kongruenzen folgt ferner, daß es erlaubt ist, Homologien zu addieren oder eine Homologie auf beiden Seiten mit derselben ganzen Zahl zu multiplizieren. In einer Fußnote wird vermerkt, daß im Text nur von „Homologien ohne Division" Gebrauch gemacht werde.

An anderer Stelle (S. 32, Fußnote 14) findet sich noch die zusätzliche Forderung, daß die von einem nullhomologen Gebilde begrenzte Mannigfaltigkeit *zweiseitig* sein müsse. Es wird sich aber später zeigen, daß TIETZE selbst diese Forderung mehrmals mißachtet; hier wollen wir vorerst nur seine Begründung untersuchen. „Diese Bedingung der Zweiseitigkeit ist offenbar wesentlich. Dies wird besonders deutlich, wenn man in irgendeiner n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V $(n>2)$ ein längs einer beliebigen geschlossenen Linie l^1 von V verlaufendes MÖBIUSsches Band betrachtet, dessen Randlinie mit $2l^1$ homolog ist, während die Homologie

$$2l^1 \sim 0 \quad \text{(bezügl. } V\text{)}$$

offenbar im allgemeinen nicht gilt."

Unter „Randlinie" ist hier wohl nur die äußere Kontur des Bandes gemeint. Stellt man das Möbiusband aber aus einem Rechteck a^2 her, indem man die beiden Längsseiten B_1 und B_2 frei läßt, die beiden Schmalseiten, gleichsinnig identifiziert, aber eine weitere Kante C der Mannigfaltigkeit ergeben, so besteht die Kongruenz

$$a^2 \equiv B_1 + B_2 + 2C$$

und infolgedessen die Homologie

$$B_1 + B_2 + 2C \sim 0.$$

Falls man die Orientierung berücksichtigt, gilt aber für l^1

$$2l^1 \sim B_1 - B_2 \sim 0.$$

$2l^1$ ist also nicht homolog zur Randlinie des Möbiusbandes und somit ist auch nicht erwiesen, daß die nicht nullhomologe Kurve $2l^1$ immer eine *einseitige* Mannigfaltigkeit begrenzt, was TIETZE irrtümlicherweise durch dieses Beispiel belegen wollte.

TIETZE geht dann zur „POINCARÉschen Definition" der BETTIschen Zahlen einer Mannigfaltigkeit V über, die dahin präzisiert ist, daß von den *in den Homologien auftretenden Mannigfaltigkeiten* die Zweiseitigkeit vorausgesetzt wird (S. 32/33): „Nehmen wir an, es gäbe ein System von zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen in V gelegenen Mannigfaltigkeiten $W_1^{(m)}, W_2^{(m)}, \ldots, W_t^{(m)}$, zwischen denen keine Homologie

$$k_1 W_1^{(m)} + k_2 W_2^{(m)} + \cdots + k_t W_t^{(m)} \sim 0 \quad \text{(bezügl. } V\text{)}$$

besteht, während jede zweiseitige geschlossene m-dimensionale in V gelegene Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$ einer Homologie

$$k W^{(m)} + k_1 W_1^{(m)} + k_2 W_2^{(m)} + \cdots + k_t W_t^{(m)} \sim 0 \qquad (k \neq 0)$$

genügt. Ist dann $V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \ldots, V_{t'}^{(m)}$ ein anderes System von Mannigfaltigkeiten mit den gleichen Eigenschaften wie das System $W_1^{(m)}, W_2^{(m)}, \ldots, W_t^{(m)}$, so ist ohne weiteres klar, daß $t' = t$ sein muß. Die Anzahl t der Mannigfaltigkeiten eines solchen Systems ist also eine für die Mannigfaltigkeit V charakteristische Zahl, die offenbar auch für alle zu V homöomorphen Mannigfaltigkeiten den gleichen

Wert hat. Es ist also die Zahl t eine topologische Invariante. Die topologische Invariante $t+1$ wird dann die m^{te} BETTIsche Zahl der Mannigfaltigkeit V genannt und mit P_m bezeichnet. Man hat $t=0$, $P_m=1$ zu setzen, wenn in V jede zweiseitige geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit $W^{(m)}$ einer Homologie $kW^{(m)} \sim 0$ $(k \neq 0)$ genügt."

Die Zweiseitigkeit hat hier eine etwas andere Funktion. Wie früher gesehen, bedeutet „geschlossen" bei TIETZE, daß beim Aufbau der Mannigfaltigkeit durch Ränderidentifizierung keine Randstücke frei bleiben. Damit eine solche Mannigfaltigkeit kongruent null wird, also nach heutiger Terminologie einen Zykel bildet, müssen alle zu identifizierenden Ränderpaare jeweils mit entgegengesetzter Orientierung aufeinandergeklebt werden können; das heißt aber mit TIETZE, daß die Mannigfaltigkeit zweiseitig ist.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß TIETZE die Homologien allgemeiner zwischen *Gebilden* erklärt hat, während zur Bestimmung der BETTIschen Zahlen vorerst nur die homolog unabhängigen *Mannigfaltigkeiten* maßgebend sind.

In einer Fußnote wird noch vermerkt, daß die Definition von P_m auch auf $m=0$ und $m=n$ erweitert werden kann: „Im Fall $m=0$, wo die geschlossenen zweiseitigen m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten Punktepaare werden, ist offenbar P_0 gleich der Anzahl der zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, aus denen V besteht. (Für $n=0$ soll $P_0=\alpha_0-1$ gesetzt werden, wenn α_0 die Anzahl der Punkte ist, aus denen V besteht.) P_n aber ist die Anzahl der zweiseitigen geschlossenen unter diesen P_0 zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten."

Die Definition mutet etwas willkürlich an: Ist t die Anzahl der zusammenhängenden Teilmannigfaltigkeiten, in die V zerfällt, so ist t auch die Anzahl der homolog unabhängigen Punkte in V; um die Analogie zu den übrigen BETTIschen Zahlen herzustellen, müßte eigentlich $P_0=t+1$ gesetzt werden. Dabei würde allerdings jeder einzelne Punkt wie eine „zweiseitige geschlossene Mannigfaltigkeit" behandelt, während TIETZE diese Charakterisierung nur dem Punktepaar zuerkennt. Leitende Idee dazu mag gewesen sein, daß *zwei* Strecken ε_1 bzw. *zwei* Elementarflächenstücke ε_2 nötig sind, um die zweiseitigen geschlossenen Mannigfaltigkeiten σ_1 bzw. σ_2 herzustellen. Andererseits findet man aber nirgends so etwas wie eine homologe Abhängigkeit zwischen zwei *Punktepaaren* definiert. Richtig absurd erscheint die Definition $P_0=\alpha_0-1$ für den aus α_0 Punkten bestehenden Punktekomplex; zu erwarten wäre am ehesten $P_0=\alpha_0+1$ oder allenfalls direkt $P_0=\alpha_0$.

Ähnliches gilt für die Zahl P_n. Zerfällt V in n-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten, von denen r geschlossen und zweiseitig sind, so stellen diese ein maximales homolog unabhängiges System $W_i^{(n)}$ $(i=1, \ldots, r)$ für V dar, und in Übereinstimmung mit der Definition der übrigen P_i wäre eigentlich $P_n=r+1$ zu setzen. Man sieht dabei übrigens das Unzweckmäßige dieser Definition ein, die nicht P_i direkt als Maximalzahl der homolog unabhängigen i-Zykeln einführt, ist doch die BETTIsche Zahl P_i $(i=1, \ldots, n)$ einer nicht zusammenhängenden Mannigfaltigkeit V nicht gleich der Summe $\sum_j P_i^j$ der BETTIschen Zahlen P_i^j der Teilmannigfaltigkeiten V^j.

Als *Annahme* I bezeichnet TIETZE die der gegebenen Definition der BETTIschen Zahlen zugrunde liegende Annahme, daß sich in jeder Mannigfaltigkeit V ein endliches System m-dimensionaler Mannigfaltigkeiten $W_1^{(m)}, \ldots, W_t^{(m)}$ mit den

verlangten Eigenschaften wirklich finden läßt. (Die Existenzfrage wurde ja bereits von HEEGAARD aufgeworfen.) Ein Beispiel beleuchtet, weshalb TIETZE diese Annahme fragwürdig findet: In einer 3-dimensionalen Vollkugel liege eine geschlossene Kurve U^1, die unendlich viele, immer kleiner werdende und sich gegen einen Punkt häufende Schlingen ausführt. „Nun ist man es gewöhnt, der berandeten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit V die BETTIsche Zahl $P_1 = 1$ beizulegen, was so viel bedeutet, als daß es zu jeder geschlossenen Linie W^1 in V eine ganze Zahl k gibt, so daß $kW^1 \sim 0$ bezüglich V ist. Es ist indes wohl kaum zweifelhaft, daß die geschlossene Linie U^1 sich diesem Satz entzieht." Die Anschauung trügt hier. Die als singuläre geschlossene 1-Kette aufgefaßte Kurve ist nach dem Approximationssatz einer simplizialen geschlossenen 1-Kette der Kugel homolog und damit auch selbst nullhomolog.

Um eine besser fundierte Definition der BETTIschen Zahlen zu erhalten, wird diese nun von TIETZE direkt an das Schema geknüpft (S. 35): „Sei V die betrachtete n-dimensionale Mannigfaltigkeit, von der wir der Einfachheit halber annehmen wollen, daß sie, wenn überhaupt, nur $(n-1)$-dimensionale, also nur eigentliche Randmannigfaltigkeiten besitze, und sei

$$a_i^m \equiv \sum_{j=1}^{\alpha_{m-1}} \varepsilon_{ij}^m a_j^{m-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_m;\ m = 1, 2, \ldots, n)$$

das POINCARÉsche Relationensystem von V. Bedeutet dann γ_m den Rang der aus den Zahlen ε_{ij}^m gebildeten Matrix, so werde die m^{te} BETTIsche Zahl P_m durch die Gleichung

$$P_m - 1 = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5}$$

definiert."

In einer Fußnote wird ergänzt, daß die Gleichung (5) für P_0 und P_n ebenfalls gültig sei, sofern $\gamma_0 = \gamma_{n+1} = 1$ gesetzt wird, denn es kann gezeigt werden, daß $\alpha_0 - \gamma_1$ gleich ist der Anzahl der zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, aus denen V besteht, und $\alpha_n - \gamma_n$ gleich der Anzahl der zweiseitigen geschlossenen unter ihnen (und nach der früher gemachten Bemerkung muß man das wohl direkt als Definition von P_0 und P_n ansehen), so daß $P_0 = \alpha_0 - \gamma_1$ und $P_n = \alpha_n - \gamma_n$ ist.

Von der so definierten BETTIschen Zahl wird dann an anderer Stelle bewiesen, daß sie sich bei Unterteilungen des Schemas nicht ändert, daß sie also eine topologische Invariante *des Schemas* darstellt.

Die Formel (5) dient bei POINCARÉ im 1. und 2. Complément vorwiegend als Mittel zur Berechnung der in der „Analysis situs" definierten BETTIschen Zahlen. TIETZE legt dann sehr klar die verschiedenen Annahmen dar, welche benützt werden müssen, um zu motivieren, daß die durch Formel (5) gegebene Zahl P_m wirklich die früher definierte BETTIsche Zahl repräsentiert und diskutiert anschließend deren Wahrscheinlichkeit. Er schickt voraus, daß manche Schlüsse in den POINCARÉschen Beweisen auf dessen analytisch definierte Mannigfaltigkeiten zugeschnitten seien, infolgedessen für den hier zugrunde gelegten allgemeineren Mannigfaltigkeitsbegriff versagen.

Annahme II besagt (S. 36), „daß jede zweiseitige geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit in V einem aus den m-dimensionalen Zellen des Schema $\sum$ von V zusammengesetzten zweiseitigen geschlossenen Gebilde $\sum k_i a_i^m$ homolog ist."

Unter dieser Annahme II betrifft die früher berührte Existenzfrage etwas spezieller Systeme von zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Zellgebilden $G_1^{(m)}, \ldots, G_s^{(m)}$ des Schemas, so daß zwischen den $G_i^{(m)}$ keine Homologie besteht, wogegen jedes weitere m-dimensionale, geschlossene zweiseitige Zellgebilde allein oder zusammen mit einzelnen oder allen $G_i^{(m)}$ einer Homologie genügt. TIETZE weist im folgenden die Existenz eines solchen Systems nach. Er stützt sich dabei auf einen Satz aus der Theorie der linearen Formen, wonach durch eine gleichzeitig auf die beiden Variablenreihen a_i^m und a_j^{m-1} ausgeübte lineare ganzzahlige Transformation mit Determinante 1 neue Variablenreihen b_i^m und c_j^{m-1} entstehen, so daß das POINCARÉsche Relationensystem

$$a_i^m \equiv \sum_j^{\alpha_{m-1}} \varepsilon_{ij}^m \, a_j^{m-1} \qquad (i = 1, \ldots, \alpha_m)$$

übergeht in die „reduzierte Form"

$$b_i^m \equiv \omega_i^m \, c_i^{m-1} \qquad (i = 1, \ldots, \gamma_m) \tag{6}$$

$$b_i^m \equiv 0 \qquad (i = \gamma_m + 1, \ldots, \alpha_m).$$

Dabei bedeuten $\omega_i^m, \ldots, \omega_{\gamma_m}^m$ wieder die Elementarteiler der Matrix (ε_{ij}^m) und das System der

$$b_{\gamma_m+1}^m, \ldots, b_{\alpha_m}^m \tag{7}$$

bildet eine Basis für die geschlossenen zweiseitigen m-dimensionalen Gebilde. TIETZE drückt das folgendermaßen aus: „Es ist nun sofort ersichtlich, daß ein Gebilde

$$\sum_{i=1}^{\alpha_m} h_i \, a_i^m = \sum_{i=1}^{\alpha_m} k_i \, b_i^m$$

nur dann zweiseitig und geschlossen sein kann, wenn $k_1 = k_2 = \cdots = k\gamma_m = 0$ sind, wenn es also die Form

$$\sum_{i=\gamma_m+1}^{\alpha_m} k_i \, b_i^m$$

hat, und daß umgekehrt jedes Gebilde von dieser Form zweiseitig geschlossen ist." Da schon die a_i^m linear unabhängig sind, sind es natürlich auch die b_i^m; hingegen brauchen diese nicht homolog unabhängig zu sein. Aus den Homologien

$$\sum_{j=1}^{\alpha_m} \varepsilon_{ij}^{m+1} \, a_j^m \sim 0 \qquad (i = 1, \ldots, \alpha_{m+1}) \tag{8}$$

oder aus den *unabhängigen* Homologien

$$\omega_i^{m+1} c_i^m \sim 0 \qquad (i = 1, \ldots, \gamma_{m+1}) \tag{9}$$

lassen sich nun solche zwischen den Gebilden des Systems (7) herleiten, und zwar speziell so, daß γ_{m+1} der b_i^m von den übrigen $s = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1}$ homolog abhängen. „Wird nun die Annahme gemacht (im folgenden als *Annahme* III bezeichnet), daß zwischen den Gebilden (7) keine anderen Homologien bestehen, als solche, die aus den Homologien (8) und somit aus den Homologien (9) rechnerisch gefolgert werden können, so stellen die s ausgewählten Gebilde ein System

von der gesuchten Beschaffenheit vor, und die Anzahl der Gebilde des Systems ist gleich $\alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1}$, wie behauptet wurde."

Diese Annahme III bezeichnet TIETZE „in hohem Grad als wahrscheinlich". POINCARÉ hat sie im Fall der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit für die Kanten und Flächen des Polyeders nachgewiesen, und von VEBLEN & ALEXANDER wird sie später für den allgemeinen Fall bestätigt.

Unter Verwendung der Annahmen II und III folgt bis dahin, daß $P_m - 1 \leqq s = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1}$ ist. Um aber auf Gleichheit schließen zu können, bedarf TIETZE noch einer *Annahme* IV (S. 39): „Es lassen sich s aus den Zellen von Σ zusammengesetzte zweiseitige geschlossene m-dimensionale Gebilde, die untereinander durch keine Homologie, mit jedem anderen solchen Gebilde aber durch eine Homologie verbunden sind, speziell auch so auswählen, daß jedes einzelne der s Gebilde einer in V gelegenen zweiseitigen geschlossenen m-dimensionalen Mannigfaltigkeit homolog ist."

Annahme IV wird dadurch notwendig, weil TIETZE die Homologien zwischen „Gebilden" erklärt, während in der von POINCARÉ übernommenen Definition für die BETTIschen Zahlen ein maximales homolog unabhängiges System von *Mannigfaltigkeiten* ausschlaggebend ist.

POINCARÉ erklärt den Homologiebegriff nur zwischen Mannigfaltigkeiten. Seine in den Compléments betrachteten Zellkombinationen genügen zwar nicht unbedingt seiner Mannigfaltigkeitsdefinition, sie stehen aber stellvertretend für die „variétés", und POINCARÉ nennt sie auch so. Später übernehmen die „circuits" (VEBLEN & ALEXANDER), die Zykeln oder geschlossenen Ketten die Rolle der Mannigfaltigkeiten sowohl im Homologiebegriff wie auch in der Definition der BETTIschen Zahlen. Die Annahme IV, von der TIETZE sagt, daß es als unbewiesen gelten müsse, daß sie richtig sei, wird damit überflüssig.

Ausführlich besprochen wird auch Annahme II, die als Bestandteil des ALEXANDERschen Invarianzsatzes 1915 bewiesen wird. TIETZE kann sie lediglich auf einfachere Aussagen zurückführen, die aber zum Teil direkt unhaltbar erscheinen.

So stellt TIETZE denn fest, daß die Übereinstimmung der ursprünglichen, von POINCARÉ stammenden Definition der BETTIschen Zahlen mit der durch Formel (5) gegebenen einstweilen nicht gewährleistet sei und daß die erhobenen Einwände es rechtfertigen, „für das Folgende an der durch die Formel (5) gegebenen Definition der Zahlen P_m festzuhalten."

Die BETTIsche Zahl P_m ist somit nach TIETZE die maximale Anzahl der homolog unabhängigen, aus den Zellen von Σ zusammengesetzten, zweiseitig geschlossenen m-dimensionalen Gebilde, vermehrt um 1, und in diese Definition geht nur noch Annahme III ein.

c) Einseitige Mannigfaltigkeiten

Die ursprüngliche Definition der BETTIschen Zahlen bezog sich auf die in der Mannigfaltigkeit V gelegenen *zweiseitigen*, geschlossenen, homolog unabhängigen Teilmannigfaltigkeiten. TIETZE versucht nun, seine Theorie so zu erweitern, daß auch die *einseitigen* geschlossenen Mannigfaltigkeiten miterfaßt werden, also solche, die keine freien Ränder haben, bei denen aber beim Identifizieren mindestens ein Randpaar gleichsinnig zusammengefügt worden ist.

Wird die 3-dimensionale Vollkugel durch einen Meridiankreis unterteilt, auf dem Nord- und Südpol markiert sind, und werden anschließend diametral gelegene Punkte der Oberfläche identifiziert, so entsteht der 3-dimensionale (zweiseitige) projektive Raum T_3. Für diese Unterteilung lautet das POINCARÉ-sche Relationensystem

$$a^3 \equiv 0$$
$$a^2 \equiv 2a^1$$
$$a^1 \equiv 0.$$

Da keine geschlossenen zweiseitigen 2-dimensionalen Gebilde auftreten, ist $P_2 = 1$; hingegen stellt a^2 eine *einseitige* geschlossene Fläche dar.

TIETZE stellt dann die gegenüber früher nur leicht modifizierte Existenzfrage (S. 50): „Gibt es in jeder n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V ein System von geschlossenen (zwei- oder einseitigen) m-dimensionalen ($m < n$), durch keine Homologie verbundenen Mannigfaltigkeiten $\phi_1^{(m)}$, $\phi_2^{(m)}, \ldots, \phi_r^{(m)}$ von der Art, daß jede, sei es zweiseitige, sei es einseitige geschlossene m-dimensionale in V gelegene Mannigfaltigkeit $\phi^{(m)}$ bezüglich V einer Homologie

$$k\phi^{(m)} + k_1\phi_1^{(m)} + \cdots + k_r\phi_r^{(m)} \sim 0 \qquad (k \neq 0)$$

genügt?"

Könnte diese Existenzfrage in bejahendem Sinn beantwortet werden, so wäre r wieder unabhängig vom gewählten System, und die Zahl $Q_m = r + 1$ wäre eine zu P_m analoge topologische Invariante. Der früher angeführten Gründe wegen wählt TIETZE wieder den Umweg über das Schema, um zu einer einwandfreien Definition der neuen Größen zu gelangen.

Sind $u_1^m, \ldots, u_\alpha^m$ m-dimensionale, in der Mannigfaltigkeit V gelegene Raumstücke ohne gemeinsame Innenpunkte und gilt

$$\sum_{i=1}^{\alpha} u_i^m \equiv \sum_j h_j u_j^{m-1}$$

(wo auch die u_j^{m-1} keine gemeinsamen Innenpunkte haben sollen) und stellt die linke Seite der Kongruenz eine einseitige geschlossene Mannigfaltigkeit dar, so sind die Koeffizienten h_i alle durch 2 teilbar. TIETZE benützt dazu die Bezeichnung

$$\sum_{i=1}^{\alpha} u_i^m \equiv 0 \quad [\text{mod } 2], \tag{18}$$

setzt also den Modul in eckige Klammern, um damit den Unterschied zu den gewöhnlichen (zahlentheoretischen) Kongruenzen hervorzuheben. Bildet $\sum u_i^m$ aber eine geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit, so kann der Sinn der u_i^m so gewählt werden, daß jedes $h_i = 0$ wird.

Ein Gebilde $\sum h_i u_i^m$ heißt nun „geschlossen", wenn

$$\sum h_i u_i^m \equiv 0 \quad [\text{mod } 2]$$

gilt, also wenn der Rand mod 2 Null ist; es heißt „zweiseitig geschlossen", wenn

$$\sum h_i u_i^m \equiv 0$$

ist, also wenn der Rand überhaupt verschwindet.

Stellt $\sum u_i^m$ eine geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit dar, so gilt dasselbe nur noch für die entgegengesetzte Mannigfaltigkeit $\sum(-u_i^m)$; stellt $\sum u_i^m$ eine geschlossene einseitige Mannigfaltigkeit dar, so gilt dasselbe auch für alle 2^α Linearkombinationen $\sum \delta_i u_i^m$, $\delta_i = \pm 1$, so daß die Orientierung der u_i^m hier keine Rolle spielt.

„Aus diesem Grund mögen, wenn es sich um die Betrachtung geschlossener, evtl. auch einseitiger Gebilde handelt, zwei durch verschiedene Linearformen $\sum h_i u_i^m$, $\sum h_i' u_i^m$ dargestellte, also arithmetisch verschiedene Gebilde, wenn sie der Kongruenz

$$\sum h_i u_i^m \equiv \sum h_i' u_i^m \pmod 2$$

genügen, als geometrisch nicht verschieden angesehen werden, während bei der nur auf die zweiseitigen geschlossenen Gebilde beschränkten Betrachtung arithmetisch verschiedene Gebilde als völlig verschieden galten."

TIETZE kleidet nun seine durch Formel (5) gegebene Definition der BETTIschen Zahlen P_m in Worte und erhält dann durch eine kleine Abänderung daraus die Definition von Q_m (S. 53): „Man mache die (oben mit III bezeichnete) Annahme, daß zwischen den Zellen eines Schema Σ von V keine anderen Homologien bestehen, als die aus dem POINCARÉschen Relationensystem von Σ gewonnenen und die aus diesen rechnerisch ableitbaren. Unter dieser Annahme bestimme man ein System von Gebilden, das aus der Gesamtheit Γ aller aus den Zellen von Σ zusammengesetzten *zweiseitigen* geschlossenen m-dimensionalen Gebilden so ausgewählt ist, daß zwischen den Gebilden des Systems keine Homologie, zwischen jedem Gebilde aus Γ und den Gebilden des Systems aber eine Homologie besteht. Die von der speziellen Wahl des Systems unabhängige Anzahl der Gebilde eines solchen Systems, um 1 vermehrt, werde als die der Mannigfaltigkeit V zugehörige Zahl P_m bezeichnet. Wörtlich mit dieser Definition von P_m übereinstimmend, nur unter Weglassung des Wortes ‚zweiseitig', werde nun die der Mannigfaltigkeit V zugehörige Zahl Q_m definiert. Es ergibt sich sofort das Bestehen der Ungleichung $Q_m \geqq P_m$."

Um die Existenz eines solchen Systems nachzuweisen, greift TIETZE wieder auf das POINCARÉsche Relationensystem in seiner reduzierten Form zurück:

$$(6) \qquad \begin{aligned} b_i^m &\equiv \omega_i^m c_i^{m-1} && (i = 1, \ldots, \gamma_m) \\ b_i^m &\equiv 0 && (i = \gamma_m + 1, \ldots, \alpha_m). \end{aligned}$$

Von den Elementarteilern ω_i^m der Matrix (ε_{ij}^m) werden diejenigen, welche > 1 sind, bei POINCARÉ „coefficients de torsion" genannt; bei TIETZE heißen sie noch etwas genauer „Torsionszahlen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung."

Damit der Rand eines m-dimensionalen Gebildes $\sum_{i=1}^{\alpha_m} k_i b_i^m \bmod 2$ verschwindet, müssen alle Zahlen $k_i \omega_i$ $(i = 1, \ldots, \gamma_m)$ durch 2 teilbar sein. Sind also β_m der Elementarteiler, z. B. $\omega_{\gamma_m - \beta_m + 1}^m, \ldots, \omega_{\gamma_m}^m$ gerade, die übrigen aber ungerade, so müssen demnach $k_1, \ldots, k_{\gamma_m - \beta_m}$ durch 2 teilbar sein. Damit also $\sum_{i=1}^{\alpha_m} k_i b_i^m$ geschlossen ist, ist notwendig und hinreichend, daß gilt

$$\sum_{i=1}^{\alpha_m} k_i b_i^m \equiv \sum_{i=\gamma_m - \beta_m + 1}^{\alpha_m} k_i b_i^m \pmod 2.$$

Die letzten $\alpha_m - \gamma_m$ der Gebilde

$$b^m_{\gamma_m-\beta_m+1},\ b^m_{\gamma_m-\beta_m+2},\ \ldots,\ b^m_{\alpha_m} \tag{21}$$

sind mit den früher gefundenen, zweiseitigen, identisch; dazu treten nun noch die β_m einseitig geschlossenen. Weiter sind die Homologien zu bestimmen, die zwischen den Gebilden (21) bestehen, und zwar mit Bezug auf Annahme III diejenigen, welche aus dem POINCARÉschen Relationensystem gewonnen werden. In diesem Schritt geschieht etwas merkwürdig Ungereimtes, und in der Folge zeigt es sich, daß die Q_m nicht den BETTIschen Zahlen mod 2 gleichzusetzen sind, wie man es eigentlich erwartet. TIETZE argumentiert so (S. 55): „Diese Homologien lassen sich, wie bereits im §6 bemerkt, als Homologien zwischen den zweiseitigen geschlossenen Gebilden $b^m_{\gamma_m+1}, \ldots, b^m_{\alpha_m}$ darstellen, und zwar erhält man γ_{m+1} unabhängige Homologien, aus denen sich alle übrigen rechnerisch ableiten lassen. Es ergibt sich hieraus, analog wie im §6 bei der entsprechenden für zweiseitige geschlossene Gebilde angestellten Betrachtung, daß man ein System von $t = \alpha_m - \gamma_m + \beta_m - \gamma_{m+1}$ durch keine Homologie verbundenen, aus den Zellen des Schema zusammengesetzten, geschlossenen m-dimensionalen Gebilden aufstellen kann, derart, daß jedes andere solche Gebilde zusammen mit diesen t Gebilden einer Homologie genügt. In dem Nachweis der Existenz eines solchen Systems ist die erforderliche Ergänzung zur Definition von Q_m geleistet und gleichzeitig die Formel

$$Q_m = t + 1 = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1} + \beta_m + 1 = P_m + \beta_m$$

gefunden.... *Die Differenz $Q_m - P_m$ ist gleich der Anzahl der geraden Torsionskoeffizienten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.*"

Fassen wir zusammen. Indem die Randgebilde mod 2 reduziert werden, erhält man mehr geschlossene Gebilde. Daß zwischen den neu hinzugekommenen einseitigen geschlossenen Gebilden keine zusätzlichen Homologien bestehen, folgt aus dem früher erwähnten Satz, daß nullhomologe Gebilde immer $\equiv 0$, also zweiseitig geschlossen sind. TIETZE bezieht nun wie vorher γ_{m+1} m-dimensionale Homologien aus den *nicht mod 2 reduzierten Kongruenzen*

$$b^{m+1}_i \equiv \omega^{m+1}_i c^m_i \qquad (i = 1, \ldots, \gamma_m),$$

und erhält somit

$$[\alpha_m - (\gamma_m - \beta_m)] - \gamma_{m+1} \overset{\text{Def.}}{=} Q_m - 1$$

homolog unabhängige, im Sinn von TIETZE geschlossene, m-dimensionale Gebilde. (Also solche, deren Rand mod 2 verschwindet.)

Zweierlei fällt dabei auf. Für die β_m einseitigen geschlossenen Gebilde $b^m_{\gamma_m-\beta_m+1}, \ldots, b^m_{\gamma_m}$ bestehen die Kongruenzen

$$b^m_i \equiv \omega^m_i c^{m-1}_i \quad \text{mit} \quad \omega^m_i \equiv 0 \quad \text{mod } 2.$$

Diese liefern die $(m-1)$-dimensionalen Homologien $\omega^m_i c^{m-1}_i \sim 0$; $\omega^m_i c^{m-1}_i$ begrenzt also ein *einseitiges* Gebilde. Z.B. gilt für die einseitige, mod 2 geschlossene Fläche a^2 im früher betrachteten 3-dimensionalen projektiven Raum $a^2 \equiv 2a^1$; das 1-dimensionale Gebilde $2a^1$ begrenzt somit die einseitige projektive Ebene. Dies zeigt, daß TIETZE sich nicht an die ursprünglich gestellte Forderung hält,

wonach die im Zusammenhang mit dem Homologiebegriff auftretenden begrenzten Gebilde immer zweiseitig sein müssen.

Ferner betont TIETZE, daß mit der Einbeziehung der einseitigen Gebilde Linearformen, die mod 2 kongruent sind, als geometrisch nicht verschieden anzusehen seien. Wird das konsequent durchgeführt, so müssen die β_{m+1} Gebilde $\omega_i^{m+1} c_i^m$ mit geradem ω_i^{m+1} dem 0-Gebilde gleichgesetzt werden, und diese liefern infolgedessen nur triviale Homologien. Dann bestehen aber zwischen den Gebilden (21) nur noch $\gamma_{m+1} - \beta_{m+1}$ mod 2 unabhängige Homologien, also existieren

$$[\alpha_m - (\gamma_m - \beta_m)] - (\gamma_{m+1} - \beta_{m+1}) = \alpha_m - \gamma_m - \gamma_{m+1} + \beta_m + \beta_{m+1}$$

mod 2 homolog unabhängige Gebilde, deren Rand mod 2 verschwindet.

Man kommt auf diese Weise auf die m-te RIEMANNsche Zusammenhangszahl (oder BETTIsche Zahl mod 2), die sich also von den Q_m durch das additive Glied β_{m+1} unterscheidet.

d) Die Fundamentalgruppe

Bereits POINCARÉ hatte erkannt, daß die Fundamentalgruppe es erlaubt, solche Mannigfaltigkeiten weiter zu unterscheiden, die in den BETTIschen Zahlen und in den Torsionskoeffizienten übereinstimmen. Die auftretenden Gruppen waren dabei durch ein System von (endlich vielen) Erzeugenden und den zwischen ihnen bestehenden Relationen bestimmt.

TIETZE stellt dazu fest, daß zwei durch verschiedene Systeme von Erzeugenden und Relationen vorgegebene Gruppen sehr wohl isomorph sein können, daß aber bis dahin ein Kriterium fehle, das allgemein gestatte, zu entscheiden, wann das der Fall sei. Aus der Theorie der Mannigfaltigkeiten leitet TIETZE nun zwei Gruppeninvarianten her, deren Gleichheit für den Isomorphismus notwendig, jedoch nicht hinreichend ist.

Die Gruppe sei also durch die n erzeugenden Operationen $s_1, \ldots, s_n$ und die definierenden Relationen

$$(23) \qquad F_i(s_1, \ldots, s_n) = s_1^{\varkappa'_{i1}} s_2^{\varkappa'_{i2}} \ldots s_n^{\varkappa'_{in}} s_1^{\varkappa''_{i1}} s_2^{\varkappa''_{i2}} \ldots = 1 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

vorgegeben. Mit Erweiterung bzw. Reduktion erster Art ist das Hinzunehmen bzw. Weglassen von Folgerelationen gemeint. Bei einer Erweiterung zweiter Art wird eine neue Erzeugende t und eine zusätzliche Relation $(f(s_1, \ldots, s_n))^{-1} t = 1$ aufgenommen. Bei einer Reduktion zweiter Art kann eine Erzeugende t, welche nur in einer einzigen Relation der Form $(f(s_1, \ldots, s_n))^{-1} t = 1$ auftritt, zusammen mit dieser Relation eliminiert werden. Durch wiederholte Anwendung solcher Operationen gelangt TIETZE zu folgendem Schluß (S. 61): „Die Eigenschaft zweier definierender Relationensysteme, dieselbe Gruppe zu bestimmen, ist daher gleichbedeutend mit der Möglichkeit, durch eine Reihe von Erweiterungen und Reduktionen der ersten und zweiten Art von dem einen Relationensystem ausgehend, zu dem anderen zu gelangen."

Dann werden die aus den Relationen (23) stammenden Größen

$$\lambda_{ij} = \varkappa'_{ij} + \varkappa''_{ij} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

zu einer Matrix (λ_{ij}) zusammengefaßt. Der Nachweis, daß für zwei verschiedene, die gleiche Gruppe darstellende Relationensysteme die aus der Matrix (λ_{ij}) gebildeten Elementarteiler >1 gleich ausfallen, kennzeichnet diese als Gruppeninvarianten; sie werden die „POINCARÉ*schen Zahlen*" genannt.

Als weitere Invariante erweist sich die Zahl $\zeta = n - r$, wo r den Rang der Matrix (λ_{ij}) bedeutet. r ist aber auch gleich der Anzahl der Relationen, die unabhängig bleiben, wenn die Gruppe abelsch gemacht wird, indem man sie nach ihrer Kommutatoruntergruppe faktorisiert. (Unter der supponierten Vertauschbarkeit sind die definierenden Relationen von der Form $F_i = s_1^{\lambda_{i1}} s_2^{\lambda_{i2}} \dots s_n^{\lambda_{in}}$. Ist die i-te Zeile A_i der Matrix (λ_{ij}), der die Relation F_i entspricht, eine Linearkombination der übrigen, z.B. $A_i = \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2$, so gilt auch

$$F_i = s_1^{\xi_1 \lambda_{11} + \xi_2 \lambda_{21}} s_2^{\xi_1 \lambda_{12} + \xi_2 \lambda_{22}} \dots s_n^{\xi_1 \lambda_{1n} + \xi_2 \lambda_{2n}} = \xi_1 F_1 + \xi_2 F_2,$$

so daß F_i eine Folgerelation ist.)

Die Definition der Fundamentalgruppe wird von TIETZE an das Schema geknüpft, und der Weg zu ihrer Bestimmung ist einem Verfahren von POINCARÉ nachgebildet. TIETZE findet folgendes Resultat: Die BETTIsche Zahl P_1 ist gleich der um 1 vermehrten Zahl ζ der Fundamentalgruppe, und die POINCARÉschen Zahlen sind nichts anderes als die 1-dimensionalen Torsionskoeffizienten.

Für die geschlossenen, zweiseitigen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten folgt wegen $P_1 = P_2$, daß sich sämtliche bis dahin bekannten topologischen Invarianten aus der Fundamentalgruppe herleiten lassen.

TIETZE fügt bei: „*Eine* Einschränkung ist bei dieser Aussage allerdings zu machen. Während sich nämlich die Gleichheit von zwei Zahlenreihen stets feststellen läßt, ist die Frage, ob zwei Gruppen isomorph seien, nicht allgemein lösbar."

Die Vermutung, daß aber auch der Fundamentalgruppe nicht sämtliche Angaben zu entnehmen sind, die eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit vollständig charakterisieren, stellt TIETZE an einem Beispiel zur Diskussion. Er konstruiert eine ganze Folge von — in gewisser Hinsicht besonders einfachen — zweiseitigen, geschlossenen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die später oft „Linsenräume" genannt werden.

Eine Kugeloberfläche sei durch den in l gleiche Teile unterteilten Äquator in zwei Polygone zerlegt. Ist ein Punkt der oberen Kalotte durch die Winkel $\varphi, \vartheta > 0$ (geographische Länge und Breite) fixiert, so soll ihm der Punkt φ', ϑ' der unteren Kalotte zugeordnet werden, für den

$$\varphi' = \varphi + \frac{2\pi\lambda}{l}, \quad \vartheta' = -\vartheta$$

gilt, wobei λ und l *feste* ganze Zahlen sein sollen, mit $0 \leqq \lambda \leqq l-1$. Es werden also nach einer Verdrehung der unteren Kalotte um den Winkel $\frac{2\pi\lambda}{l}$ die bezüglich der Äquatorebene spiegelbildlich gelegenen Punkte der Kugeloberfläche identifiziert. Es zeigt sich, daß man sich dabei auf Werte von λ und l beschränken kann, die zueinander relativ prim sind und für die $\lambda \leqq \frac{l}{2}$ gilt, denn die andern Fälle liefern nichts Neues.

Für die so konstruierte Mannigfaltigkeit ist $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 1$, und das POINCARÉsche Relationensystem lautet

$$a^3 \equiv 0$$

$$a^2 \equiv l a^1$$

$$a^1 \equiv 0,$$

woraus $P_1 = P_2 = 1$ folgt. Für $l > 1$ existiert ein Torsionskoeffizient. Die Fundamentalgruppe ist zyklisch und hat die Ordnung l.

Zwei Mannigfaltigkeiten (l, λ) mit gleichem l stimmen in der Fundamentalgruppe und in allen bis dahin bekannten Invarianten überein; es stellt sich die Frage, ob sie homöomorph seien.

(1,0) liefert die 3-Sphäre, (2,1) den 3-dimensionalen projektiven Raum. Da das Maximum der möglichen verschiedenen, zu einem festen l gehörenden Mannigfaltigkeiten gegeben ist durch die Zahl $\frac{1}{2}\varphi(l)$ (wo φ die EULERsche Funktion bedeutet), so ist $l = 5$ der kleinstmögliche Wert, für den die Homöomorphie von (5,1) und (5,2) nicht mehr gesichert ist. Aus einigen Überlegungen heraus erscheint das TIETZE auch eher zweifelhaft. Er vermutet deshalb, daß schon die 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten solche Eigenschaften besitzen können, die sich in der Fundamentalgruppe nicht widerspiegeln. Diese Vermutung wird 1919 durch ALEXANDER bestätigt.

§ 8. Die Bettischen Zahlen mod 2 bei Veblen & Alexander

In der 1913 erschienenen gemeinsamen Arbeit „Manifolds of n dimensions" machen VEBLEN & ALEXANDER in knappester Form mit den Hauptresultaten aus POINCARÉs ersten beiden Compléments bekannt.

Die Theorie wird straff und systematisch aufgebaut. Ausgangspunkt ist das *n-dimensionale Simplex*, definiert als jenes Teilgebiet in dem durch $n+1$ linear unabhängige, $(n-1)$-dimensionale lineare Räume unterteilten n-dimensionalen Zahlenraum, das ganz im Endlichen liegt. Ist $[P]$ eine beliebige Menge von Objekten, „Punkte" genannt, so heißt jede Teilmenge von $[P]$, die ein eindeutiges Bild des *Innern* des n-Simplexes ist, eine n-Zelle E_n; die Bildpunkte des Randes des n-Simplexes bilden den Rand der n-Zelle und gehören dieser nicht an.

Die Punkte des definierenden n-Simplexes und seines Randes sind mit einer nicht näher erläuterten „order relation" versehen, die dann vermöge der eindeutigen Abbildung auch zwischen den Punkten im Innern und auf dem Rand der Zelle E_n erklärt ist und alsdann die Einführung des Stetigkeitsbegriffs ermöglichen soll: „Moreover, when we say that a cell a is on the boundary of another cell b, we always mean to imply that the correspondence between the points of a and those of the simplex defining a is continuous with respect to the order relations among the points of b and its boundary." Man hat die „order relation" wohl als Abstandsbegriff aufzufassen, um so mehr, als ALEXANDER in seinem wenig später erschienenen Invarianzbeweis für die BETTIschen Zahlen davon Gebrauch macht. Das die Zelle a definierende Simplex $\bar{a}$ wird somit auf eine Punktmenge abgebildet, die in ihrer Eigenschaft als Randzelle von b

bereits eine „order relation" erhalten hat, so daß es nun einen Sinn hat, von der Abbildung $\bar{a} \to a$ nicht nur Eineindeutigkeit, sondern auch Stetigkeit zu fordern.

Ist C_n eine Menge von i-dimensionalen Zellen x_j^i $(i = 0, 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, \alpha_i)$, wobei α_i die Anzahl der i-dimensionalen Zellen bedeutet, so heißt C_n ein *Komplex*, wenn das Zellgefüge folgende Axiome erfüllt:

„(1) The boundary of every i-cell $(i > 0)$ is made up entirely of cells x_k^j of dimensionalities less than i.

(2) Every i-cell $(i < n)$ is on the boundary of some $(i+1)$-cell x_k^{i+1}."

VEBLEN & ALEXANDER sehen nun vorerst von einer Orientierung der einzelnen Zellen ab. Der nichtorientierte Komplex heißt *geschlossen* („closed"), wenn jede $(n-1)$-dimensionale Zelle auf einer geraden Anzahl von n-Zellen liegt; andernfalls heißt er *offen* oder *berandet* („open or bounded"); die Berandung besteht dann aus allen $(n-1)$-dimensionalen Zellen (mit deren Berandung), die auf einer ungeraden Anzahl n-Zellen liegen. Enthält ein n-dimensionaler geschlossener Komplex keinen n-dimensionalen geschlossenen Teilkomplex, so wird er als „n-circuit" bezeichnet.

Weitere Bedingungen treten hinzu, wenn der Komplex eine Mannigfaltigkeit darstellen soll: „The totality of points in the various cells of a complex C_n constitutes an ordered set $[P]$. This set will be called a *manifold* M_n if and only if it has the following three properties.

1. That every point P is interior to some n-cell of $[P]$. (This condition is obviously satisfied by all the points interior to the n-cells of C_n, but would not in general be satisfied by the points on their boundaries.)

2. That if two n-cells E_n^1 and E_n^2 of $[P]$ have a point in common, there exists an n-cell contained within each of the cells E_n^1 and E_n^2.

3. That if P and P' be any two points of C_n, there always exists a chain of overlapping n-cells connecting an n-cell about P to an n-cell about P'."

Bedingung 1) sagt aus, daß die Mannigfaltigkeit im Kleinen euklidisch ist, denn jeder Punkt liegt in einer n-Zelle, die — mit ihrer Berandung — als homöomorphes Bild einer Vollkugel aufgefaßt werden kann. (Die Punktmenge $[P]$ muß dazu das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllen.) Der Komplex ist ferner geschlossen, denn jede $(n-1)$-Zelle gehört nach 1) mindestens zwei n-Zellen an, und zusammen mit 2) folgt dann, daß sie genau zwei n-Zellen des Komplexes angehört. Damit ist also die *Unverzweigtheit* des Komplexes gefordert, während die Aussage 3) oft als *Verbindbarkeitsbedingung* bezeichnet wird.

Eine „regular subdivision" eines Komplexes ist eine Unterteilung nach dem Muster von POINCARÉ. Jede Kante wird durch einen Zwischenpunkt in zwei „eindimensionale Pyramiden" zerlegt; anschließend wird in jeder 2-Zelle ein neuer Eckpunkt bestimmt, der dann mit allen Eckpunkten der Peripherie, und zwar auch mit den eben erst neu eingeführten, verbunden wird, wodurch eine Unterteilung in Dreiecke oder „zweidimensionale Pyramiden" entsteht. So fortfahrend gelangt man zum Schluß zu einem Komplex $\bar{C}_n$, der aus n-dimensionalen Tetraedern aufgebaut ist, die sich sogar so auf die definierenden Simplexe abbilden lassen, daß Eckpunkte, Kanten usw. der Zelle dabei in Eckpunkte, Kanten usw. des Simplexes übergehen.

Zählt der unterteilte Komplex $\bar{C}_n\, p$ Eckpunkte $x_1^0, \ldots, x_p^0$ und ist S ein Simplex mit den p Eckpunkten $V_1, \ldots, V_p$ und gilt die eineindeutige Zuordnung $x_j^0 \leftrightarrow V_j$, so entspricht auch jeder i-Zelle von $\bar{C}_n$ das durch die entsprechenden Eckpunkte bestimmte i-Simplex von S und verschiedenen Zellen von $\bar{C}_n$ werden verschiedene Simplexe von S zugeordnet. Dieser Sachverhalt wird in einem Theorem formuliert (S. 177): „Every complex may be subdivided into a complex $\bar{C}_n$ which is equivalent to a complex D_n the elements of which are a subset of the elements upon the boundary of a simplex of $p-1$ dimensions."

Dieser spezielle Komplex $\bar{C}_n$ kann nun *durch eine einzige Matrix* charakterisiert werden. Die Zeilen bzw. Spalten stehen dabei in eineindeutiger Beziehung zu den Eckpunkten bzw. zu den n-Zellen von $\bar{C}_n$ und das Matrixelement α_{ij} ist 1 oder 0, je nachdem, ob der i-te Eckpunkt zur Zelle x_j^n gehört oder nicht. $k+1$ beliebig ausgewählte Eckpunkte von $\bar{C}_n$ definieren also genau dann eine k-Zelle, wenn die Matrix eine Spalte aufweist, die in den betreffenden Zeilen eine 1 enthält.

Um zu den neuen Größen R_i zu gelangen, werden aber wieder nach dem Vorbild von POINCARÉ sämtliche Matrizen $X_{i-1,i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ aufgestellt; sie geben Auskunft über die Berandungsrelationen zwischen den $(i-1)$- und den i-dimensionalen Zellen. Da vorerst die Orientierung außer acht gelassen wird, nehmen alle Elemente η_{jk}^i der Matrix $X_{i-1,i}$ die Werte 0 oder 1 an. Zu den POINCARÉschen Matrizen des 2. Complément besteht die Beziehung $\eta_{jk}^i = |\varepsilon_{kj}^i|$.

Ist

$$(X_{i-1,i}) \qquad \sum_{k=1}^{\alpha_i} \eta_{jk}^i x_k^i = 0 \qquad (j=1, \ldots, \alpha_{i-1})$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem *mod 2* mit der Matrix $X_{i-1,i}$, in dem die i-dimensionalen Zellen x_k^i als Variable auftreten, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können, so stellen genau die i-circuits dessen sämtliche Lösungen dar. Ist $\sigma_{i-1,i}$ die Anzahl der unabhängigen Lösungen, $\varrho_{i-1,i}$ der Rang der Matrix $X_{i-1,i}$, so gilt

$$\sigma_{i-1,i} = \alpha_i - \varrho_{i-1,i}.$$

Diese Zahl wird noch auf eine zweite Art berechnet. Jede Spalte der Matrix $X_{i,i+1}$ liefert eine Lösung des Gleichungssystems $(X_{i-1,i})$, denn sie markiert jene i-Zellen mit einer 1, deren Gesamtheit die Berandung der betreffenden $(i+1)$-Zelle bildet. Von diesen Kolonnen sind $\varrho_{i,i+1}$ linear unabhängig. Die durch sie dargestellten i-dimensionalen Zellgebilde ergeben eine Basis für die berandenden i-circuits; hingegen braucht nicht jeder circuit berandend zu sein.

„Let (R_i-1) be the number of i-circuits which must be added to the bounding i-circuits before we can obtain a complete set of linearly independent solutions." R_i-1 bezeichnet also die Maximalzahl der mod 2 homolog unabhängigen i-circuits. Es gilt

$$\sigma_{i-1,i} = \varrho_{i,i+1} + (R_i - 1).$$

Wird $\sigma_{i-1,i}$ aus diesen beiden Gleichungen eliminiert, so erhält man

$$\alpha_i - \varrho_{i-1,i} = \varrho_{i,i+1} + (R_i - 1).$$

Aus einfachen Überlegungen heraus folgt $\alpha_0 - 1 = \varrho_{0,1}$ und $\alpha_n - \varrho_{n-1,n} = 1$. Damit haben VEBLEN & ALEXANDER eine Folge von Gleichungen gewonnen, die — in

geeigneter Weise addiert — auf folgende Formel führen:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i=1+(-1)^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(R_i-1).$$

Wird die Orientierung der Zellen mitberücksichtigt, so führt der gleiche Weg auf ein *nicht mod 2 reduziertes* Gleichungssystem

$$(A_{i-1,i}) \qquad \sum_{k=1}^{\alpha_i}\varepsilon_{jk}^i x_k^i=0 \quad (j=1,\ldots,\alpha_{i-1}), \quad \varepsilon_{jk}^i=0,\ 1 \text{ oder } -1$$

und P_i-1 ist die Anzahl der orientierten i-circuits, die zu der maximalen Anzahl unabhängiger, berandender circuits addiert werden muß, um zu einem vollständigen System linear unabhängiger Lösungen für das Gleichungssystem $(A_{i-1,i})$ zu gelangen.

In analoger Weise wird dann die EULER-POINCARÉsche Formel hergeleitet. Sie lautet für die zweiseitige Mannigfaltigkeit

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i=1+(-1)^n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(P_i-1)$$

und für die einseitige Mannigfaltigkeit

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\alpha_i=1+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(P_i-1).$$

VEBLEN & ALEXANDER decken dann noch den Zusammenhang auf, der zwischen den Zahlen R und P besteht.

Sind $A_{i,i+1}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ die Matrizen, so wie sie aus dem orientierten Komplex gezogen werden und ist $\nu_{i,i+1}$ ihr Rang, sind ferner $\bar{A}_{i,i+1}$ die auf Diagonalform gebrachten Matrizen und werden diese nun nachträglich mod 2 reduziert, so werden dabei die Werte der Torsionskoeffizienten durch 0 oder 1 ersetzt, je nachdem, ob sie gerade oder ungerade sind. Der Rang der mod 2 reduzierten Matrix $\bar{A}_{i,i+1}$ ist dann gleich dem Rang der Matrix $X_{i,i+1}$, also gleich $\varrho_{i,i+1}$.

Ist $t_{i,i+1}$ die Anzahl der geraden Torsionskoeffizienten von $A_{i,i+1}$, so gilt nun

$$\nu_{i,i+1}-\varrho_{i,i+1}=t_{i,i+1};$$

überdies ist

$$t_{0,1}=0$$

$$t_{n-1,n}=\begin{pmatrix}0 \text{ für zweiseitige}\\ 1 \text{ für einseitige}\end{pmatrix}\text{Mannigfaltigkeiten.}$$

Aus den Gleichungen

$$\alpha_i-\varrho_{i-1,i}=\varrho_{i,i+1}+(R_i-1)$$

$$\alpha_i-\nu_{i-1,i}=\nu_{i,i+1}+(P_i-1)$$

folgern VEBLEN & ALEXANDER dann die Abhängigkeit der neuen Größen R_i von bereits bekannten Invarianten:

$$R_i=P_i+t_{i-1,i}+t_{i,i+1}.$$

Die Invarianz der R_i ist so auf die Invarianz der BETTIschen Zahlen und der Torsionskoeffizienten zurückgeführt; für die diesbezüglichen Beweise wird auf POINCARÉ verwiesen.

Für die zweiseitige Mannigfaltigkeit folgt aus den Dualitätsgesetzen sofort

$$R_i = R_{n-i}.$$

VEBLEN & ALEXANDER beweisen aber darüber hinaus, daß diese letzte Formel auch für *einseitige* Mannigfaltigkeiten gültig ist. Dazu benötigen sie den Begriff des dualen Komplexes, dessen Existenz sie — einmal mehr POINCARÉ zitierend — direkt für einen regulär unterteilten n-dimensionalen Komplex $\bar{C}_n$ zeigen, der den Mannigfaltigkeitsbedingungen genügt. Ist C'_n dieser duale Komplex und sind $X'_{0,1}, \ldots, X'_{n-1,n}$ seine Inzidenzmatrizen, so hat $X'_{n-i-1,n-i}$ denselben Rang wie $X_{i,i+1}$; demnach ist

$$R_i = \alpha_i - \varrho_{i-1,i} - \varrho_{i,i+1} = \alpha'_{n-i} - \varrho'_{n-i,n-i+1} - \varrho'_{n-i-1,n-i} = R'_{n-i}.$$

Die Invarianz der Zusammenhangszahlen R_i verwendend, folgern sie daraus sofort

$$R_i = R_{n-i}.$$

Wir finden zum Schluß noch die Begründung, weshalb es nicht möglich ist, auf diesem Weg auch ein Dualitätsgesetz für die BETTIschen Zahlen und die Torsionskoeffizienten von *einseitigen* Mannigfaltigkeiten nachzuweisen: „Similar theorems do not hold for one-sided manifolds; for although a dual complex C'_n may always be found, as was shown above, we cannot in the one-sided case so assign the senses to the cells of C_n and C'_n that corresponding cells are similary sensed."

§ 9. Der Alexandersche Invarianzbeweis für die Bettischen Zahlen

Nachdem VEBLEN & ALEXANDER gezeigt haben, wie die Zahlen P_i bzw. R_i aus dem Komplex zu bestimmen sind, bleibt noch die Frage zu klären, ob es sich dabei überhaupt um Invarianten der Mannigfaltigkeit handle. Wir haben gesehen, daß POINCARÉ diesen Punkt auch nicht befriedigend erledigt hat; außerdem arbeitet er immer unter der Annahme, daß die Mannigfaltigkeit, alle Zellen des Polyeders und alle Zykeln der Mannigfaltigkeit aus endlich vielen analytischen Stücken aufgebaut sind. ALEXANDER bemerkt dazu: „But such an assumption opens the way to a theoretical objection in that the numbers (P) and (R) when calculated from the analytic cycles alone might conceivably fail to be topological invariants." Um diesen Einwand zu beseitigen, beschränkt er sich im folgenden nicht auf die Betrachtung solcher „analytischer Zykeln", sondern bezieht auch „cycles possessing singularities of however complicated a nature" mit ein.

ALEXANDER führt den Beweis nur für eine geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeit durch, die für das Folgende durch einen speziellen, aus endlich vielen Tetraedern bestehenden Komplex ersetzt wird. Da die Mannigfaltigkeit singularitätenfrei vorausgesetzt wird, schließen die Tetraeder in jedem Eckpunkt

so aneinander, daß sie ein einfach zusammenhängendes Teilstück der Mannigfaltigkeit ergeben. ALEXANDER versteht darunter einfach „one which can be mapped upon the interior of a tetrahedron". Durch weitere Unterteilung läßt sich sogar die Forderung erfüllen, daß jedes Tetraeder zusammen mit seinen unmittelbar angrenzenden Tetraedern in einem einfach zusammenhängenden Teilstück der Mannigfaltigkeit liegt. Diese spezielle Unterteilung wird als Komplex Π bezeichnet. Seine 3-Zellen bestehen nach Definition aus dem *Innern* dieser Tetraeder. Der Übergang von einem gewöhnlichen Polyeder $\varkappa$ zu einem Komplex Π wird durch eine „regular subdivision" vermittelt.

Ein 1- oder 2-dimensionaler Zykel c ist definiert als eine Teilmenge der Mannigfaltigkeit, die als eindeutiges stetiges Bild eines geschlossenen 1- bzw. 2-dimensionalen Komplexes λ aufgefaßt werden kann. Verschiedene Punkte des Komplexes λ dürfen dabei ausdrücklich auf denselben Punkt von c abgebildet werden. So entstehen Zykeln, die auch Singularitäten enthalten können; daher der Name „singuläre Zykeln". Die Zellen des Zykels sind dabei die Bilder der Zellen des Komplexes λ. Ist nun die durch die Mannigfaltigkeit vorgegebene Punktmenge mit einer Metrik versehen, so können die Zellen des Komplexes λ so fein unterteilt werden, daß der Abstand für je zwei Punkte einer Zelle des Zykels c eine Größe ε nicht übersteigt, denn die oben definierte Abbildung ist auf dem Komplex λ gleichmäßig stetig.

Die Berandung eines offenen $(i+1)$-dimensionalen Komplexes besteht aus einem oder mehreren i-dimensionalen geschlossenen Komplexen $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$, die bei der Abbildung in Zykeln $c_1, \ldots, c_i$ der Mannigfaltigkeit übergehen; letztere können teilweise oder auch ganz zusammenfallen. Der Zykel c_1 heißt nun abhängig von den Zykeln $c_2, \ldots, c_i$, wenn er im nichtorientierten Fall in ungerader Anzahl, im orientierten Fall aber einfach mit einem Koeffizienten $\neq 0$ in der Berandungsmenge auftritt. Eine Menge von Zykeln heißt unabhängig, wenn keiner ihrer Zykeln von den übrigen abhängt. R_1-1, R_2-1 bzw. P_1-1, P_2-1 sind die größtmöglichen Anzahlen von unabhängigen 1- bzw. 2-Zykeln der Mannigfaltigkeit; $R_i^{\varkappa}-1$ und $P_i^{\varkappa}-1$ $(i=1, 2)$ sind die entsprechenden Zahlen für die aus Zellen des Polyeders $\varkappa$ gebildeten Zykeln. Das Haupttheorem lautet dann:

$$R_i^{\varkappa}=R_i, \quad P_i^{\varkappa}=P_i \quad (i=1, 2).$$

Dem Beweis wird noch ein Lemma vorangestellt, das die Aussage enthält, daß in einem einfach zusammenhängenden Teilgebiet keine nichtbegrenzenden Zykeln existieren.

Der Beweis zum Theorem gliedert sich in zwei Abschnitte:

a) Ist die Mannigfaltigkeit in ein spezielles Polyeder vom Typ Π unterteilt, so ist jeder Zykel der Mannigfaltigkeit abhängig von einem oder mehreren aus Zellen des Polyeders Π gebildeten Zykeln.

b) Jedes Polyeder kann durch Unterteilung in einen Komplex vom Typ Π übergeführt werden. Zu zeigen ist, daß sich dabei die Maximalzahl der unabhängigen Zykeln nicht ändert.

ad a). Ist der Zykel c in hinreichend kleine Zellen unterteilt, so kann die Annahme gemacht werden, daß die Punkte im Innern und auf dem Rand einer

Zelle, wenn sie je mit dem nächsten, oder — falls mehrere vorhanden — mit einem der nächsten Eckpunkte des Komplexes Π verbunden werden, alle an denselben oder aber an benachbarte Eckpunkte von Π angeschlossen werden. Ist der Zykel c eindimensional und sind A_1, A_2 die Endpunkte einer 1-Zelle, B_1, B_2 die betreffenden Eckpunkte des Komplexes, so fallen diese letzteren entweder zusammen oder sie begrenzen eine Polyederkante B_1B_2. Nach der Voraussetzung über den Komplex Π liegt der geschlossene Linienzug („circuit") $A_1A_2B_2B_1A_1$ in einem einfach zusammenhängenden Teil der Mannigfaltigkeit und nach dem Lemma bildet er die Begrenzung des Bildes eines offenen Komplexes. Wiederholt man das für jede Zelle des Zykels c, so berandet dieser entweder allein (wenn alle Eckpunkte B_i zusammenfallen) oder zusammen mit einem oder mehreren Zykeln des Polyeders Π einen offenen singulären Komplex. Der Zykel c hängt also nach Definition von den Zykeln des Polyeders Π ab.

Ist aber c ein 2-Zykel, so werden die Eckpunkte A_1, A_2, A_3 einer 2-Zelle mit den Eckpunkten B_1, B_2, B_3 von Π verbunden, von denen je zwei entweder zusammenfallen oder eine Polyederkante beranden. Die geschlossenen Linienzüge $A_1A_2B_2B_1A_1$, $A_2A_3B_3B_2A_2$ und $A_3A_1B_1B_3A_3$ begrenzen drei Flächenstücke, welche zusammen mit den Zellen $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ einen geschlossenen Komplex bilden. Nach den Voraussetzungen über das Polyeder Π liegt er ebenfalls in einem einfach zusammenhängenden Teil der Mannigfaltigkeit und nach dem Lemma berandet er deshalb das Bild r eines offenen 3-dimensionalen Komplexes. Diese Bilder r setzen sich wieder zu einem singulären Komplex der Mannigfaltigkeit zusammen, der von c und im allgemeinen von einem oder mehreren aus 2-Zellen des Polyeders gebildeten Zykeln begrenzt wird. Damit sind jedenfalls die Ungleichungen $R_1^{\Pi} \geqq R_1$ und $R_2^{\Pi} \geqq R_2$ sowie — falls die Orientierung noch berücksichtigt wird — $P_1^{\Pi} \geqq P_1$ und $P_2^{\Pi} \geqq P_2$ bewiesen.

Die umgekehrten Ungleichungen erhält ALEXANDER, indem er mit ähnlichen Überlegungen zeigt, daß jede Menge von Zykeln aus Polyederzellen, die bezüglich der Mannigfaltigkeit nicht unabhängig ist, auch bezüglich des Polyeders nicht unabhängig ist. Damit gilt für die geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$R_1^{\Pi} = R_1,\ R_2^{\Pi} = R_2,\ P_1^{\Pi} = P_1,\ P_2^{\Pi} = P_2.$$

ALEXANDER fügt hier die Bemerkung hinzu, daß sich dieser Gedankengang sofort übertragen lasse auf höherdimensionale Mannigfaltigkeiten, die mit einer Simplexeinteilung versehen sind.

Da der Rand eines n-Simplexes ein Polyeder vom Typ Π darstellt, ergibt sich leicht das Korollar: „If a manifold be topologically equivalent to the boundary of an n-dimensional simplex, or generalized tetrahedron, its invariants (P) and (R) are all equal to unity." Das wird so begründet: „If we remove from one of the n-cells of the polyhedron a small n-dimensional simplex, there will be left a simply connected region containing all the cycles of the polyhedron." Hier wird also gewissermaßen RIEMANNS Methode der „Punktierung" (Entfernung eines kleinen 2-Simplexes) einer geschlossenen Fläche auf den Rand eines $(n+1)$-Simplexes übertragen. Alle Zykeln des Restpolyeders — und nach dem Theorem genügt es, diese zu betrachten — sind aber auf Grund des Lemmas berandend.

ad b). Ist $\varkappa'$ der Ausgangskomplex, $\varkappa$ aber der Komplex nach Unterteilung einer Zelle E von $\varkappa'$, dann muß jeder i-Zykel c_i von $\varkappa$, der nicht schon zu $\varkappa'$ ge-

hört, notwendig durch den neuen Endpunkt V von $\varkappa$ gehen. Die Basis der Zellen von c_i, die den Punkt V zur gemeinsamen Spitze haben, sind Zellen der Berandung von E. Sie bilden einen oder mehrere Zykeln d_{i-1} der Dimension $i-1$; nur im Fall $i=1$ bestehen sie aus einer geraden Anzahl von Punkten. Da die Berandung der Zelle E homöomorph ist zum Rand eines Simplexes, begrenzen diese Zykeln oder Punkte in jedem Fall einen Komplex d_i, der aus Randzellen von E besteht. d_i bildet aber zusammen mit jenen Zellen von c_i, die den Punkt V enthalten, einen geschlossenen Komplex e_i, von dem wieder gezeigt werden kann, daß er begrenzt.

Damit kann aber der Zykel c_i durch einen homologen ersetzt werden, der den Punkt V nicht mehr passiert, somit dem Ausgangskomplex $\varkappa'$ angehört; also sind die Ungleichungen $P_i^{\varkappa} \leqq P_i^{\varkappa'}$ und $R_i^{\varkappa} \leqq R_i^{\varkappa'}$ bewiesen.

Anschließend wird noch mit einer ähnlichen Argumentation gezeigt, daß jeder Zykel von $\varkappa'$, der einen Komplex aus $\varkappa$ begrenzt, auch einen Komplex aus $\varkappa'$ begrenzt. Das liefert die umgekehrten Ungleichungen, so daß unmittelbar folgt

$$P_i^{\varkappa} = P_i^{\varkappa'} \quad \text{und} \quad R_i^{\varkappa} = R_i^{\varkappa'} \qquad (i = 1, 2).$$

ALEXANDER trägt dann noch nach, daß man auf dem gleichen Weg auch die Invarianz der Torsionskoeffizienten nachweisen könne.

Mit diesem, vom September 1913 datierten und 1915 publizierten Resultat wurde die Homologietheorie zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Literatur

a) Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen

ALEXANDROFF, P., & H. HOPF, Topologie, Erster Band. Berlin: Springer 1935.

FEIGL, G., Geschichtliche Entwicklung der Topologie. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. **37**, 273—286 (1928).

KNESER, H., Die Topologie der Mannigfaltigkeiten. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. **34**, 1—14 (1925).

SEIFERT, H., & W. THRELFALL, Lehrbuch der Topologie. New York: Chelsea Publ. Comp. 1947.

TIETZE, H., & L. VIETORIS, Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie. Enzykl. Math. Wiss. III AB/13, 141—237 (1930).

VAN DER WAERDEN, B. L., Kombinatorische Topologie. Jhber. Deutsch. Math.-Vereinig. **39**, 121—139 (1930).

VEBLEN, O., Analysis Situs, 2. Auflage. Amer. Math. Soc. Colloquium publ. 5/II (1931).

b) Quellen

ALEXANDER, J. W., A proof of the invariance of certain constants in Analysis Situs. Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 148—154 (1915).

ALEXANDER, J. W., Note on two threedimensional manifolds with the same group. Trans. Amer. Math. Soc. **20**, 339—342 (1919).

BETTI, E., Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Ann. Mat. pura appl. 2/4, 140—158 (1871).

BILZ, E., Beitrag zu den Grundlagen der kombinatorischen Analysis Situs. Math. Ztschr. **18**, 1—41 (1923).

CAUCHY, A., Recherches sur les polyèdres. Œuvres Sér. 2, **1**, 7—25.

DEHN, M., Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. **69**, 137—168 (1910).

DEHN, M., & P. HEEGAARD, Analysis Situs. Enzykl. Math. Wiss. III AB/3, 153—220 (1907).
DYCK, W., Beiträge zur Analysis Situs I. Math. Ann. **32**, 457—512 (1888).
DYCK, W., Beiträge zur Analysis Situs II. Math. Ann. **37**, 273—316 (1890).
EBERHARD, V., Ein Satz aus der Topologie. Math. Ann. **36**, 121—133 (1890).
GAUSS, C. F., Zur Electrodynamik. Werke Bd. **5**, S. 605.
HEEGAARD, P., Sur l'Analysis Situs. Bull. Soc. Math. France **44**, 161—242 (1916).
HURWITZ, A., Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit. Verh. des ersten Intern. Math. Kongr. in Zürich, 1897.
JORDAN, C., Sur la déformation des surfaces. Journal de math. pures et appl., Sér. 2, **11**, 105—109 (1866).
KLEIN, F., Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen. Math. Ann. **7**, 549—557 (1874).
KLEIN, F., Über den Zusammenhang der Flächen. Math. Ann. **9**, 476—482 (1876).
LISTING, J. B., Vorstudien zur Topologie. Gött. Studien, 811—875 (1847).
LISTING, J. B., Der Census räumlicher Complexe. Abh. Ges. Wiss. Göttingen **10**, 97—180 (1861).
NEUMANN, C., Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 2. Auflage. Leipzig: Teubner 1884.
PICARD, E., & A. SIMART, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, tome **1**. Paris: Gauthier-Villars 1897.
POINCARÉ, H., Œuvres tome **6**. Paris: Gauthier-Villars 1953. Alle Seitenzahlen beziehen sich auf dieses Buch.
Erstveröffentlichungen der besprochenen Arbeiten:
Analysis situs. Journal de l'École Polytechnique **1**, 1—121 (1895).
Complément à l'Analysis situs. Rend. circ. mat. Palermo **13**, 285—343 (1899).
Second complément à l'Analysis situs. Proc. London Math. Soc. **32**, 277—308 (1900).
Cinquième complément à l'Analysis situs. Rend. circ. mat. Palermo **18**, 45—110 (1904).
RIEMANN, B., Gesammelte mathematische Werke, 1. Auflage. Leipzig: Teubner 1876.
SCHLÄFLI, L., Theorie der vielfachen Kontinuität. Werke Bd. 1, 169—387. Basel: Birkhäuser 1950.
STEINITZ, E., Beiträge zur Analysis situs. Sitz.ber. Berl. Math. Ges. **7**, 29—49 (1908).
TIETZE, H., Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Monatsh. Math. Phys. **19**, 1—118 (1908).
TONELLI, A., Zur Lehre vom Zusammenhang. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 387—390 (1875).
VEBLEN, O., & J. W. ALEXANDER, Manifolds of n dimensions. Ann. of Math. **14**, 163—178 (1913).

Rebbergstraße 2
8422 Pfungen
Schweiz

(Eingegangen am 21. Mai 1972)