JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

BORCHARDT, C.-W.

Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvemeut des planètes.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 50-67.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1847_1_12_A3_0>

Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes [*];

PAR M. C.-W. BORCHARDT.

1. On sait que différentes questions d'analyse pure et appliquée, entre autres la détermination des inégalités séculaires du mouvement des planètes, conduisent à l'équation que l'on obtient en éliminant les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$
\begin{aligned}
gx_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n, \\
gx_2 &= a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
gx_n &= a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n,
\end{aligned}
$$

les coefficients $a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots$ étant supposés connus et devant satisfaire à l'équation de condition

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

L'équation du $n^{ième}$ degré en g, qui résulte de cette élimination, et que je représenterai par

$$\Gamma = 0,$$

a, comme l'on sait, toutes ses racines réelles. On possède aujourd'hui plusieurs démonstrations de cette propriété de l'équation $\Gamma = 0$, et il ne serait pas d'un grand intérêt d'en offrir une nouvelle, si elle ne prouvait rien de plus que les démonstrations données jusqu'à présent.

[*] J'ai publié, dans le tome XXX du Journal de M. Crelle, un Mémoire sur le même sujet, mais moins complet ; le Mémoire actuel peut être considéré comme une extension du premier.

Mais j'ai reconnu que, en suivant une marche différente de celles que l'on prend ordinairement, on parvient à faire connaître une circonstance assez remarquable, qui a lieu pour l'équation $\Gamma = 0$.

Voici en quoi elle consiste. On sait que la réalité des racines d'une équation algébrique dépend des signes de certaines expressions formées de ses coefficients, expressions qui, lorsque l'équation a toutes ses racines réelles, devront être toutes positives. Or, pour l'équation $\Gamma = 0$, toutes ces expressions peuvent être mises sous la forme d'une somme de carrés de quantités réelles. La démonstration de cette propriété de l'équation $\Gamma = 0$ formera l'objet de ce Mémoire.

Pour le cas de $n = 2$, l'équation $\Gamma = 0$ est le résultat de l'élimination entre les deux équations

$$gx_1 = a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2,$$
$$gx_2 = a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2,$$

ce qui donne

$$\Gamma = g^2 - Ag + B = 0,$$

en posant

$$A = a_{1,1} + a_{2,2}, \quad B = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2;$$

pour que cette équation ait ses racines réelles, il n'y a qu'une condition à remplir, il faut que la quantité

$$A^2 - 4B$$

soit positive. Dans l'équation proposée, on a

$$A^2 - 4B = (a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4a_{1,2}^2,$$

c'est-à-dire égale à la somme de deux carrés, ce qui démontre la proposition énoncée ci-dessus, pour le cas de $n = 2$.

Pour le cas de $n = 3$, c'est-à-dire quand l'équation $\Gamma = 0$ est du troisième degré, la réalité des racines ne dépend encore que du signe d'une seule expression, qui est fort compliquée, mais que, malgré cette complication, M. Kummer, par des tentatives aussi ingénieuses qu'heureuses, est parvenu à représenter sous la forme d'une somme de sept carrés (*voyez* le Journal de M. Crelle, tome XXVII), résultat dont M. Jacobi a montré les applications à la géométrie analytique dans le tome LXLVIII du *Giornale Arcadico*. C'est en cherchant la vraie source analytique de laquelle découle le résultat de M. Kummer, que j'ai trouvé la proposition générale énoncée ci-dessus. Avant d'en donner la démonstration, il sera nécessaire de rappeler quelques notions préliminaires.

2. Les considérations suivantes reposeront principalement sur les propriétés des algorithmes que l'on rencontre dans la résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues. On sait que les valeurs des n inconnues auront toujours un dénominateur commun, que les géomètres sont convenus d'appeler *déterminant*. Donc, si les coefficients des n inconnues dans le système des équations données sont

$$\begin{array}{lll} \alpha_{1,1}, & \alpha_{2,1},\ldots, & \alpha_{n,1}, \\ \alpha_{1,2}, & \alpha_{2,2},\ldots, & \alpha_{n,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,n}, & \alpha_{2,n},\ldots, & \alpha_{n,n}, \end{array}$$

ce dénominateur commun sera appelé déterminant du système d'équations, ou simplement déterminant des quantités $\alpha_{i,k}$, et il sera représenté par la notation symbolique

$$\sum (\pm\, \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n}),$$

que l'on a adoptée parce que tous les termes de la somme dont le déterminant est composé se déduisent du terme

$$+\, \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n},$$

lorsque, en conservant la série des premiers indices des lettres α dans l'ordre naturel, on substitue pour la série des seconds indices toutes les permutations possibles, et que l'on prend le terme correspondant avec le signe $+$ ou $-$, suivant qu'on est parvenu à la permutation dont il s'agit en échangeant deux à deux les indices $1, 2,\ldots, n$ un nombre pair ou un nombre impair de fois. Relativement à ces déterminants ou sommes alternées, je vais rappeler ici deux propositions dont j'aurai besoin dans la suite.

Proposition I. « En posant

$$\alpha_{i,k} = \alpha_i^{k-1};$$

» le déterminant

$$\sum(\pm\, \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n})$$

» se transforme dans le produit de toutes les différences des quan-
» tités α_i prises deux à deux, c'est-à-dire

$$\sum(\pm\, \alpha_1^0\, \alpha_2^1\, \alpha_3^2 \ldots \alpha_n^{n-1}) = \pm(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_1 - \alpha_n) \times (\alpha_2 - \alpha_3)\ldots(\alpha_2 - \alpha_n)\ldots \times (\alpha_{n-1} - \alpha_n). \text{ »}$$

Cette propriété des déterminants remarquée par Vandermonde a été posée comme leur définition par plusieurs géomètres. (*Voyez* le *Cours d'analyse algébrique* de M. Cauchy.)

Proposition II. « Soient données un nombre np de quantités

$$(\text{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \alpha_{1,1}, & \alpha_{2,1}, \ldots, & \alpha_{p,1}, \\ \alpha_{1,2}, & \alpha_{2,2}, \ldots, & \alpha_{p,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,n}, & \alpha_{2,n}, \ldots, & \alpha_{p,n}, \end{array} \right.$$

» et soit

$$p \geqq n;$$

» de ces quantités α déduisons les n^2 quantités

$$\begin{array}{lll} \beta_{1,1}, & \beta_{2,1}, \ldots, & \beta_{n,1}, \\ \beta_{1,2}, & \beta_{2,2}, \ldots, & \beta_{n,2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1,n}, & \beta_{2,n}, \ldots, & \beta_{n,n}, \end{array}$$

» en faisant

$$\beta_{i,k} = \alpha_{1,i}\,\alpha_{1,k} + \alpha_{2,i}\,\alpha_{2,k} + \ldots + \alpha_{p,i}\,\alpha_{p,k}.$$

» Cela posé, le déterminant des quantités β est égal à la somme des
» carrés de tous les déterminants que l'on peut former avec n^2 quan-
» tités α, composant n colonnes verticales du tableau (A); c'est-à-dire
» que l'on a

$$\sum(\pm\, \beta_{1,1}\, \beta_{2,2} \ldots \beta_{n,n}) = \mathrm{S}\left[\sum(\pm\, \alpha_{r',1}\, \alpha_{r'',2} \ldots \alpha_{r^{(n)},n})\right]^2.$$

» le signe $\mathbf{S}$ se rapportant à toutes les combinaisons r', r'',..., $r^{(n)}$ des » nombres 1, 2,..., p prises n à n. »

Ce théorème (et même un théorème plus général où les carrés sont remplacés par des produits) a été donné pour la première fois par M. Cauchy [*].

3. Avant d'entrer dans la question spéciale à laquelle se rapporte la proposition énoncée dans le n° **1**, il faut encore rappeler les expressions du signe desquelles dépend la réalité des racines des équations algébriques. La détermination de ces expressions est une simple application du célèbre théorème de M. Sturm sur les équations algébriques. En effet, d'après le théorème de M. Sturm, le nombre N des racines réelles d'une équation $V = 0$ du $n^{ième}$ degré en x, situées entre les limites $x = A$ et $x = B$, B étant supposé $> A$, se détermine de la manière suivante :

Soit V_1 la dérivée de V, et faisons les opérations nécessaires pour développer la fraction $\frac{V}{V_1}$ dans une fraction continue. Soit pour cela

$$\begin{aligned}
V &= V_1 q_1 - V_2,\\
V_1 &= V_2 q_2 - V_3,\\
V_2 &= V_3 q_3 - V_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
V_{n-2} &= V_{n-1} q_{n-1} - V_n,
\end{aligned}$$

où les fonctions V_2, V_3, V_4,..., V_{n-2}, V_{n-1}, V_n seront, en général, des degrés $n-2$, $n-3$, $n-4$,..., 2, 1, 0. Substituons, dans ces fonctions, les valeurs A et B, et formons les deux séries

$$\begin{array}{llllll}
V(A), & V_1(A), & V_2(A), & V_3(A),\ldots, & V_{n-1}(A), & V_n(A),\\
V(B), & V_1(B), & V_2(B), & V_3(B),\ldots, & V_{n-1}(B), & V_n(B);
\end{array}$$

soient A' le nombre des changements de signes qui se trouvent dans

[*] Dans le Mémoire intitulé : *Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs*, etc. (*Journal de l'École Polytechnique*, XVII^e cahier.) Voyez aussi un travail de M. Jacobi inséré dans le tome XXII du Journal de M. Crelle, et qui contient une théorie complète des déterminants.

la première série, B' le nombre correspondant pour la seconde série : on aura le nombre des racines réelles entre les limites $x = A$ et $x = B$,

$$N = A' - B'.$$

Pour avoir le nombre de toutes les racines réelles de l'équation $V = 0$, il faut donc faire $A = -\infty$, $B = +\infty$. Mais alors la question se simplifie beaucoup, puisque les valeurs des fonctions $V, V_1, V_2, \ldots, V_n$ pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$ ne dépendent que des coefficients de leurs plus hautes puissances. En effet, soient $v, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ les coefficients des plus hautes puissances dans $V, V_1, \ldots, V_n$, c'est-à-dire v le coefficient de x^n dans V, v_1 celui de x^{n-1} dans V_1, v_2 celui de x^{n-2} dans V_2, etc. Alors les deux séries de valeurs seront de même signe terme à terme avec les deux séries

$$\begin{array}{cccccc} (-1)^n v, & (-1)^{n-1} v_1, & (-1)^{n-2} v_2, \ldots, & + v_{n-2}, & - v_{n-1}, & + v_n, \\ v, & v_1, & v_2, \ldots, & v_{n-2}, & v_{n-1}, & v_n. \end{array}$$

En désignant par α et β les nombres de changements de signes qui se trouvent dans ces séries, le nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$ sera égal à

$$\nu = \alpha - \beta.$$

Mais on prouve aisément que

$$\alpha + \beta = n.$$

En effet, supposons d'abord que, dans la seconde série, il n'y ait aucun changement de signe ; il y en aura nécessairement n dans la première, et il est aisé de voir que, par chaque changement de signe que la seconde série gagne, la première en perd autant : donc la somme reste invariablement égale à n. On a donc en même temps

$$\nu = \alpha - \beta,$$
$$n = \alpha + \beta,$$

et de là

$$\nu = n - 2\beta;$$

c'est-à-dire que l'équation $V = 0$ a $n - 2\beta$ racines réelles, et, partant, β paires de racines imaginaires, β désignant le nombre des changements de signe dans la série

$$v,\quad v_1,\quad v_2,\ldots,\quad v_{n-1},\quad v_n,$$

et v_k le coefficient de la plus haute puissance x^{n-k} de x dans la fonction V_k.

Le théorème que je viens d'énoncer n'est pas encore sous sa forme finale; pour la lui donner, il faut chercher les valeurs explicites des quantités $v, v_1, v_2,\ldots, v_n$. C'est à quoi nous parviendrons facilement en ayant recours aux formules de M. Sylvester, démontrées et précisées par M. Sturm dans sa *Démonstration d'un théorème d'algèbre de M. Sylvester,* insérée au tome VII de ce Journal. En effet, supposons que le coefficient de x^n dans V soit $= 1$, et que les racines réelles ou imaginaires de l'équation $V = 0$ soient représentées par les lettres a, b, c,..., h (au nombre de n); M. Sturm donne les expressions suivantes :

$$V = (x-a)(x-b)\ldots(x-h),$$

$$V_1 = \sum (x-b)(x-c)\ldots(x-h),$$

$$V_2 = \frac{1}{\lambda_2}\sum (a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h),$$

$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3}\sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)(x-e)\ldots(x-h),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_n = \frac{1}{\lambda_n}(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-h)^2(b-c)^2\ldots(g-h)^2,$$

les quantités $\lambda_2, \lambda_3,\ldots, \lambda_n$ étant déterminées par les formules

$$\begin{array}{ll}
\lambda_2 = p_1^2, & p_1 = n, \\
\lambda_3 = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^2, & p_2 = \sum (a-b)^2, \\
\lambda_4 = \left(\dfrac{p_1 p_3}{p_2}\right)^2, & p_3 = \sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2, \\
\lambda_5 = \left(\dfrac{p_2 p_4}{p_1 p_3}\right)^2, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots & p_n = (a-b)^2(a-c)^2\ldots(g-h)^2.
\end{array}$$

Ces formules nous montrent que les coefficients des plus hautes puissances de x dans les fonctions $V, V_1, \ldots, V_n$, c'est-à-dire les quantités $v, v_1, \ldots, v_n$, ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
v &= 1,\\
v_1 &= n = p_1,\\
v_2 &= \frac{1}{\lambda_2}\sum (a-b)^2 = \frac{1}{\lambda_2}\, p_2,\\
v_3 &= \frac{1}{\lambda_3}\sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = \frac{1}{\lambda_3}\, p_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_n &= \frac{1}{\lambda_n}(a-b)^2(a-c)^2\ldots(g-h)^2 = \frac{1}{\lambda_n}\, p_n.
\end{aligned}$$

Mais les quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$ étant des fonctions symétriques des racines de l'équation $V = 0$, et, partant, des quantités réelles, les quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sont nécessairement positives; donc les quantités $v, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ ont les mêmes signes que

$$1, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \ldots, \quad p_n;$$

dans le théorème énoncé ci-dessus, on pourra donc substituer cette série au lieu de la série des quantités $v, v_1, \ldots, v_n$.

Ces quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$ peuvent encore être représentées sous une autre forme en y appliquant les deux propositions sur les déterminants rappelées au n° **2**. En effet, soit m le nombre des quantités $a, b, \ldots, f$; nous avons

$$p_m = \sum [(a-b)(a-c)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(e-f)]^2;$$

mais, d'après la proposition I du n° **2**, nous savons que

$$\pm (a-b)(a-c)\ldots(a-f)(b-c)\ldots(e-f)$$

est égal au déterminant des quantités

$$\begin{array}{llll}
1, & 1, & 1, \ldots, & 1,\\
a, & b, & c, \ldots, & f,\\
a^2, & b^2, & c^2, \ldots, & f^2,\\
a^3, & b^3, & c^3, \ldots, & f^3,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a^{m-1}, & b^{m-1}, & c^{m-1}, \ldots, & f^{m-1};
\end{array}$$

donc p_m est la somme des carrés de tous les déterminants qu'on peut former par m colonnes verticales du tableau

$$\begin{array}{llll}
1, & 1, & 1,\ldots, & 1,\\
a, & b, & c,\ldots, & h,\\
a^2, & b^2, & c^2,\ldots, & h^2,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a^{m-1}, & b^{m-1}, & c^{m-1},\ldots, & h^{m-1},
\end{array}$$

en sorte que p_m rentre dans la catégorie des quantités dont il est question dans la proposition II du n° **2**. Ainsi, d'après cette proposition, en posant

$$\beta_{i,k} = a^{i-1}a^{k-1} + b^{i-1}b^{k-1} + \ldots + h^{i-1}h^{k-1},$$

nous aurons

$$p_m = \sum(\pm\, \beta_{1,1}\,\beta_{2,2}\ldots\beta_{m,m});$$

mais $\beta_{i,k}$ n'est autre chose que la somme des puissances $i+k-2$ des racines de l'équation $V=0$: p_m est donc le déterminant des m^2 quantites [*],

$$\begin{array}{llll}
s_0, & s_1, & s_2,\ldots, & s_{m-1},\\
s_1, & s_2, & s_3,\ldots, & s_m,\\
s_2, & s_3, & s_4,\ldots, & s_{m+1},\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1},\ldots, & s_{2m-2},
\end{array}$$

s_k représentant la somme des puissances $k^{ièmes}$ des racines de l'équation $V=0$.

En réunissant les résultats obtenus dans ce numéro, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. « Soit proposée une équation $V=0$ du $n^{ième}$ degré; des

[*] Résultat qui coïncide avec les formules données par M. Cayley dans le tome XI de ce Journal.

» coefficients de cette équation déduisons les sommes des puissances
» de ses racines jusqu'à l'ordre $2n-2$ inclusivement, et avec ces quan-
» tités, que nous désignerons par s_0, s_1, $s_2,\ldots$, s_{2n-2}, formons les
» quantités $p_1, p_2, p_3,\ldots, p_n$ en posant

$$p_1 = s_0 = n,$$

» p_2 égale au déterminant des quantités

$$\begin{matrix} s_0, & s_1, \\ s_1, & s_2; \end{matrix}$$

» p_3 égale au déterminant des quantités

$$\begin{matrix} s_0, & s_1, & s_2, \\ s_1, & s_2, & s_3, \\ s_2, & s_3, & s_4, \end{matrix}$$

» et ainsi de suite, jusqu'à p_n qui sera le déterminant des quantités

$$\begin{matrix} s_0, & s_1, & s_2,\ldots, & s_{n-1}, \\ s_1, & s_2, & s_3,\ldots, & s_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1}, & s_n, & s_{n+1},\ldots, & s_{2n-2}; \end{matrix}$$

» cela posé, l'équation $V = 0$ aura autant de paires de racines imagi-
» naires qu'il y aura de changements de signes dans la série

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3,\ldots, \quad p_n. \text{ »}$$

A ce théorème, on peut ajouter les corollaires suivants :

Corollaire 1. Dans la série

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3,\ldots, \quad p_n,$$

il ne peut y avoir que $\frac{n}{2}$ changements de signes tout au plus.

Corollaire 2. Pour que l'équation $V = 0$ ait toutes ses racines réelles, il est nécessaire et suffisant que les quantités

$$p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_n$$

soient toutes positives.

4. Retournons à présent à la proposition énoncée dans le n° **1**, et prouvons que, pour l'équation $\Gamma = 0$, les quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$ sont des sommes de carrés.

L'équation $\Gamma = 0$ est le résultat de l'élimination des n inconnues x_1, $x_2, \ldots, x_n$ entre les n équations

$$(1) \quad \begin{cases} gx_1 = a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n, \\ gx_2 = a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ gx_n = a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n, \end{cases}$$

où

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

Multiplions chacune de ces équations par g, puis substituons dans le second membre, au lieu de gx_1, $gx_2, \ldots$, gx_n, leurs valeurs tirées des équations (1); nous obtiendrons

$$(2) \quad \begin{cases} g^2x_1 = a''_{1,1}x_1 + a''_{2,1}x_2 + \ldots + a''_{n,1}x_n, \\ g^2x_2 = a''_{1,2}x_1 + a''_{2,2}x_2 + \ldots + a''_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^2x_n = a''_{1,n}x_1 + a''_{2,n}x_2 + \ldots + a''_{n,n}x_n, \end{cases}$$

où

$$a''_{i,k} = a''_{k,i} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{h,i}\,a_{h,k}.$$

En multipliant chacune de ces équations par g, et substituant pour gx_1, $gx_2, \ldots$, gx_n leurs valeurs tirées des équations (1), nous obtiendrons un troisième système d'équations également semblable au système (1) dans lequel g sera remplacé par g^3 et les quantités $a_{i,k}$ par

$$a'''_{i,k} = a'''_{k,i} = \sum_h a_{h,i}\,a''_{h,k} = \sum_{h'}\sum_{h''} a_{i,h'}\,a_{h',h''}\,a_{h'',k}.$$

En continuant de cette manière, nous trouverons le système d'équations suivantes qui correspondent à la $r^{\text{ième}}$ puissance de g :

$$(r)\qquad \begin{cases} g^r x_1 = a^{(r)}_{1,1}\, x_1 + a^{(r)}_{2,1}\, x_2 + \ldots + a^{(r)}_{n,1}\, x_n, \\ g^r x_2 = a^{(r)}_{1,2}\, x_1 + a^{(r)}_{2,2}\, x_2 + \ldots + a^{(r)}_{n,2}\, x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g^r x_n = a^{(r)}_{1,n}\, x_1 + a^{(r)}_{2,n}\, x_2 + \ldots + a^{(r)}_{n,n}\, x_n, \end{cases}$$

où

$$a^{(r)}_{i,k} = a^{(r)}_{k,i} = \sum_{h'} \sum_{h''} \cdots \sum_{h^{(r-1)}} a_{i,h'}\, a_{h',h''} \ldots a_{h^{(r-2)},h^{(r-1)}}\, a_{h^{(r-1)},k} = \sum_{h} a_{h,i}\, a^{(r-1)}_{h,k},$$

toutes les sommations se rapportant aux quantités h dont chacune prend les valeurs 1, 2,..., n.

A présent, multiplions le système d'équations (r) par $g^{r'}$, et substituons pour $g^{r'} x_1, g^{r'} x_2, \ldots, g^{r'} x_n$ leurs valeurs tirées du système d'équations (r'); le résultat devant être identique avec le système d'équations $(r + r')$, nous aurons l'équation

$$a^{(r+r')}_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a^{(r)}_{h,i}\, a^{(r')}_{h,k},$$

qui, en substituant q et $r - q$ au lieu de r et r', devient

$$(3)\qquad a^{(r)}_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a^{(q)}_{h,i}\, a^{(r-q)}_{h,k}.$$

Cette équation subsistera pour toutes les valeurs de q moindres que r depuis $q = 1$ jusqu'à $q = r - 1$. Pour ces valeurs extrêmes, il faudra faire

$$(4)\qquad a^{1}_{i,k} = a_{i,k}.$$

L'équation (3) subsistera même pour les valeurs $q = 0$ et $q = r$, si nous faisons

$$(5)\qquad \begin{cases} a^{(0)}_{i,k} = 1, \text{ pour } i = k, \\ \phantom{a^{(0)}_{i,k}} = 0, \ i \text{ étant différent de } k. \end{cases}$$

Après avoir établi l'équation (3) pour toutes les valeurs de q depuis $q = 0$ jusqu'à $q = r$, retournons à l'équation $\Gamma = 0$. Cette équation est le résultat de l'élimination des n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les n équations (1); Γ sera donc ce que devient le déterminant

$$\sum (\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}),$$

lorsqu'on diminue les n quantités $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ de la même quantité g. On aura donc

$$\pm \Gamma = g^n - (a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n})\, g^{n-1} + \ldots,$$

et de là

$$s_1 = g_1 + g_2 + \ldots + g_n = \sum_i a_{i,i},$$

où $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont les n racines de l'équation $\Gamma = 0$. En appliquant le même raisonnement au système d'équations (r), nous obtiendrons

$$s_r = g_1^r + g_2^r + \ldots + g_n^r = \sum_i a_{i,i}^{(r)},$$

ce qui, à l'aide de l'équation (3), se transformera en

$$s_r = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k}^{(q)}\, a_{i,k}^{(r-q)}, \tag{6}$$

q ayant une quelconque des valeurs $0, 1, 2, \ldots, r$. Cette équation, remarquable par sa symétrie et par sa généralité, nous conduira à la démonstration de notre théorème.

Les quantités p_m ont été définies dans le numéro précédent comme les déterminants des quantités

$$\begin{array}{llll}
s_0, & s_1, & s_2, \ldots, & s_{m-1}, \\
s_1, & s_2, & s_3, \ldots, & s_m, \\
s_2, & s_3, & s_4, \ldots, & s_{m+1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1}, \ldots, & s_{2m-2}.
\end{array}$$

Or les quantités renfermées dans ce tableau, en y appliquant l'équation (6), peuvent être représentées sous la forme suivante :

$$\begin{array}{llll}
s_0 = \sum a^{(0)}_{i,k}\, a^{(0)}_{i,k}, & s_1 = \sum a^{(0)}_{i,k}\, a'_{i,k}, & s_2 = \sum a^{(0)}_{i,k}\, a''_{i,k}, \ldots, & s_{m-1} = \sum a^{(0)}_{i,k}\, a^{(m-1)}_{i,k}. \\
s_1 = \sum a'_{i,k}\, a^{(0)}_{i,k}, & s_2 = \sum a'_{i,k}\, a'_{i,k}, & s_3 = \sum a'_{i,k}\, a''_{i,k}, \ldots, & s_m = \sum a'_{i,k}\, a^{(m-1)}_{i,k}; \\
s_2 = \sum a''_{i,k}\, a^{(0)}_{i,k}, & s_3 = \sum a''_{i,k}\, a'_{i,k}, & s_4 = \sum a''_{i,k}\, a''_{i,k}, \ldots, & s_{m+1} = \sum a''_{i,k}\, a^{(m-1)}_{i,k}. \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
s_{m-1} = \sum a^{(m-1)}_{i,k}\, a^{(0)}_{i,k}, & s_m = \sum a^{(m-1)}_{i,k}\, a'_{i,k}, & s_{m+1} = \sum a^{(m-1)}_{i,k}\, a''_{i,k}, \ldots, & s_{2m-2} = \sum a^{(m-1)}_{i,k}\, a^{(m-1)}_{i,k},
\end{array}$$

les sommes de ce tableau se rapportant à toutes les valeurs de i et de k depuis 1 jusqu'à n inclusivement. En faisant

$$\beta_{t,u} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a^{(t)}_{i,k}\, a^{(u)}_{i,k},$$

on a donc

$$p_m = \sum (\pm\, \beta_{0,0}\, \beta_{1,1} \ldots \beta_{m-1,m-1});$$

sous cette forme, p_m rentre dans la forme des déterminants considérés dans la proposition II du n° **2**, les $n.p$ quantités α étant ici remplacées par les $m.n^2$ quantités

$$a^{(0)}_{i,k}, \quad a'_{i,k}, \quad a''_{i,k}, \ldots, \quad a^{(m-1)}_{i,k}.$$

Nous avons donc, d'après cette proposition,

$$p_m = \mathbf{S}\left[\sum \pm\, a^{(0)}_{i,k}\, a'_{i',k'}\, a''_{i'',k''} \cdots a^{(m-1)}_{i^{(m-1)},\,k^{(m-1)}}\right]^2,$$

i, k; i', k'; i'', k'';...; $i^{(m-1)}, k^{(m-1)}$ représentant m systèmes quelconques des deux indices i, k, et la somme $\mathbf{S}$ se rapportant à toutes les combinaisons m à m des n^2 systèmes i, k.

Voilà le résultat annoncé au n° **1**, résultat qui peut être énoncé par le théorème suivant :

Théorème. « Soit

$$\Gamma = 0$$

» l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré en g qui résulte de l'élimination des n in-
» connues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$\begin{aligned}
o &= (a_{1,1} - g)x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n, \\
o &= a_{1,2}x_1 + (a_{2,2} - g)x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
o &= a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + (a_{n,n} - g)x_n;
\end{aligned}$$

» soit s_h la somme des puissances $h^{\text{ièmes}}$ des racines de cette équation,
» et p_m le déterminant des quantités

$$\begin{array}{llll}
s_0, & s_1, & s_2, \ldots, & s_{m-1}, \\
s_1, & s_2, & s_3, \ldots, & s_m, \\
s_2, & s_3, & s_4, \ldots, & s_{m+1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
s_{m-1}, & s_m, & s_{m+1}, \ldots, & s_{2m-2};
\end{array}$$

» de sorte que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les quantités des signes desquelles dé-
» pend la réalité des racines de l'équation $\Gamma = o$; soit, de plus,

$$a''_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{h,i}\, a_{h,k}, \quad a'''_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{h,i}\, a''_{h,k}, \ldots, \quad a^{(m-1)}_{i,k} = \sum_{h=1}^{h=n} a_{h,i}\, a^{(m-2)}_{h,k},$$

» et formons le tableau suivant :

$$\begin{array}{llllllllllll}
1 & o \ldots & o; & o & 1 \ldots & o, \ldots; & o & o \ldots & 1; \\
a_{1,1} & a_{2,1} \ldots & a_{n,1}; & a_{1,2} & a_{2,2} \ldots & a_{n,2}, \ldots; & a_{1,n} & a_{2,n} \ldots & a_{n,n}; \\
a''_{1,1} & a''_{2,1} \ldots & a''_{n,1}; & a''_{1,2} & a''_{2,2} \ldots & a''_{n,2}, \ldots; & a''_{1,n} & a''_{2,n} \ldots & a''_{n,n}; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a^{(m-1)}_{1,1} & a^{(m-1)}_{2,1} \ldots & a^{(m-1)}_{n,1}; & a^{(m-1)}_{1,2} & a^{(m-1)}_{2,2} \ldots & a^{(m-1)}_{n,2}, \ldots; & a^{(m-1)}_{1,n} & a^{(m-1)}_{2,n} \ldots & a^{(m-1)}_{n,n};
\end{array}$$

» tableau qui consiste en n^2 colonnes verticales chacune de m quan-
» tités; combinons m à m ces n^2 colonnes verticales de toutes les ma-
» nières possibles, et pour chaque combinaison renfermant m^2 quantités
» formons le déterminant : que ces déterminants soient désignés par M,
» M', M'',... ; cela posé, on aura

$$p_m = M^2 + M'^2 + M''^2 + \ldots \text{ »}$$

5. Faisons l'application de ce théorème général au cas de $n = 3$, traité par M. Kummer. Posons, pour ce cas,

$$a_{1,1} = \mathrm{A}, \qquad a_{2,2} = \mathrm{B}, \qquad a_{3,3} = \mathrm{C},$$
$$a_{2,3} = a_{3,2} = \mathrm{D}, \quad a_{1,3} = a_{3,1} = \mathrm{E}, \quad a_{1,2} = a_{2,1} = \mathrm{F},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 &= a''_{1,1} = \mathrm{A}^2 + \mathrm{F}^2 + \mathrm{E}^2, & \mathrm{D}_1 &= a''_{2,3} = a''_{3,2} = (\mathrm{B}+\mathrm{C})\,\mathrm{D} + \mathrm{EF},\\
\mathrm{B}_1 &= a''_{2,2} = \mathrm{F}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{D}^2, & \mathrm{E}_1 &= a''_{1,3} = a''_{3,1} = (\mathrm{A}+\mathrm{C})\,\mathrm{E} + \mathrm{DF},\\
\mathrm{C}_1 &= a''_{3,3} = \mathrm{E}^2 + \mathrm{D}^2 + \mathrm{C}^2, & \mathrm{F}_1 &= a''_{1,2} = a''_{2,1} = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\mathrm{F} + \mathrm{DE}.
\end{aligned}$$

On aura donc, pour la quantité p_2, le tableau

$$\begin{matrix} 1\ 0\ 0, & 0\ 1\ 0, & 0\ 0\ 1,\\ \mathrm{A\ F\ E}, & \mathrm{F\ B\ D}, & \mathrm{E\ D\ C}; \end{matrix}$$

et pour la quantité p_3 on formera le tableau

$$\begin{matrix} 1\ 0\ 0, & 0\ 1\ 0, & 0\ 0\ 1,\\ \mathrm{A\ F\ E}, & \mathrm{F\ B\ D}, & \mathrm{E\ D\ C},\\ \mathrm{A_1 F_1 E_1}, & \mathrm{F_1 B_1 D_1}, & \mathrm{E_1 D_1 C_1}. \end{matrix}$$

De là on conclut

$$p_2 = (\mathrm{A}-\mathrm{B})^2 + (\mathrm{B}-\mathrm{C})^2 + (\mathrm{C}-\mathrm{A})^2 + 6\mathrm{D}^2 + 6\mathrm{E}^2 + 6\mathrm{F}^2,$$

dans le tableau duquel on tire les carrés qui forment la valeur de p_3; il est évident qu'à chaque quantité de la troisième ligne horizontale, on peut ajouter la quantité correspondante de la seconde ligne multipliée par λ, plus la quantité correspondante de la première ligne multipliée par μ, sans altérer en aucune façon la valeur des déterminants qu'on en forme. En posant

$$\lambda = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}, \quad \mu = \mathrm{BC} + \mathrm{AC} + \mathrm{AB} - \mathrm{D}^2 - \mathrm{E}^2 - \mathrm{F}^2,$$

on trouvera que la troisième ligne horizontale du tableau se change en

$$\mathrm{A'\ F'\ E'}, \quad \mathrm{F'\ B'\ D'}, \quad \mathrm{E'\ D'\ C'},$$

où

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= \mathrm{BC} - \mathrm{D}^2, & \mathrm{B}' &= \mathrm{AC} - \mathrm{E}^2, & \mathrm{C}' &= \mathrm{AB} - \mathrm{F}^2,\\
\mathrm{D}' &= \mathrm{EF} - \mathrm{AD}, & \mathrm{E}' &= \mathrm{DF} - \mathrm{BE}, & \mathrm{F}' &= \mathrm{DE} - \mathrm{CF}.
\end{aligned}$$

De là on tire la valeur suivante de p_3 :

$$p_3 = 12(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + 2(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) + R^2,$$

où l'on a

$$M_1 = EF' - FE', \quad M_2 = FD' - DF', \quad M_3 = DE' - ED',$$

$$N_1 = CD' - DC' - (BD' - DB'), \quad P_1 = CE' - EC' - (BE' - EB'),$$
$$Q_1 = CF' - FC' - (BF' - FB'),$$

$$N_2 = AD' - DA' - (CD' - DC'), \quad P_2 = AE' - EA' - (CE' - EC'),$$
$$Q_2 = AF' - FA' - (CF' - FC'),$$

$$N_3 = BD' - DB' - (AD' - DA'), \quad P_3 = BE' - EB' - (AE' - EA'),$$
$$Q_3 = BF' - FB' - (AF' - FA'),$$

$$R = BC' - CB' + CA' - AC' + AB' - BA'.$$

En se rappelant les équations identiques connues,

$$FE' + BD' + DC' = 0, \quad EA' + DF' + CE' = 0, \quad AF' + FB' + ED' = 0,$$
$$EF' + DB' + CD' = 0, \quad AE' + FD' + EC' = 0, \quad FA' + BF' + DE' = 0,$$

on prouve aisément que

$$M_1 = -N_1 = N_2 + N_3, \quad M_2 = -P_2 = P_1 + P_3, \quad M_3 = -Q_3 = Q_1 + Q_2;$$

on aura donc

$$2(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2) = 3M_1^2 + (N_3 - N_2)^2,$$
$$2(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) = 3M_2^2 + (P_1 - P_3)^2,$$
$$2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) = 3M_3^2 + (Q_2 - Q_1)^2,$$

et, après cette réduction, la valeur de p_3 prendra la forme suivante;

$$p_3 = 15(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + (N_3 - N_2)^2 + (P_1 - P_3)^2 + (Q_2 - Q_1)^2 + R^2,$$

résultat qui coïncide exactement avec celui de M. Kummer, représenté sous la forme que lui a donnée M. Jacobi dans le *Giornale Arcadico*.

Il est bon de remarquer que la valeur de p_2 n'est pas nécessaire pour reconnaître la réalité des trois racines; car, d'après le corollaire 1 du théorème énoncé dans le n° **2**, dans une équation du troisième degré, dans laquelle la quantité p_3 est positive, la quantité p_2 doit l'être également.

D'après le théorème général que nous avons démontré dans le numéro précédent, il n'y a aucune difficulté de faire pour $n = 4$ et pour les valeurs plus élevées de n également, le calcul des carrés dont la somme forme les quantités $p_2, p_3, \ldots, p_n$. Ainsi, pour le cas de $n = 4$, les quantités p_2, p_3, p_4 sont respectivement représentées par une somme de 12, de 55 et de 135 carrés. Par des considérations analogues à celles qui, pour le cas de $n = 3$, ont réduit de 13 à 7 le nombre des carrés formant la valeur de p_3, on parvient également à rabaisser ces nombres 12, 55 et 135. Je n'entrerai pas dans ces détails, et je me contenterai d'avoir indiqué, pour tous les cas, les opérations nécessaires au calcul des carrés qui forment les valeurs des quantités p_2, $p_3, \ldots, p_n$.