



Artikel

Bemerkungen über die beiden vorstehenden Aufsätze.

Borchardt, C.W.

in: Journal für die reine und angewandte

Mathematik | Journal für die reine und angewandte

Mathemati...

3 Seite(n) (287 - 289)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

19.

Bemerkung über die beiden vorstehenden Aufsätze.

(Von C. W. Borchardt.)

Das algebraische Prinzip, mit dessen Beweise sich die beiden vorstehenden Aufsätze beschäftigen, ist, wie mein scharfsinniger Freund Herr *Hermite* in seinem Briefe erwähnt, von *Jacobi* aufgestellt worden, der es indessen nicht bekannt gemacht hat.

Außer dem hier gegebenen *Jacobischen Beweise* jenes Prinzips, der sich unter seinen hinterlassenen Handschriften gefunden hat, kennt man durch mündliche Ueberlieferung überdies eine *Anwendung*, die er davon gemacht hat, und von welcher Herr *Hermite* in seinem Briefe ebenfalls spricht. Um über diese Anwendung einige Erläuterungen zu geben, lasse ich eine Stelle aus einem Briefe folgen, den *Jacobi* im März 1847 an mich richtete:

„Ich weiß nicht, wie Sie Ihren Satz *) bewiesen haben; vielleicht mittelst einer Abhandlung von *Sturm*, wo er seinen Satz durch combinatorische Formeln darstellt. *Ich habe mir einen einfachen Beweis gesucht, der weder einen Satz über Gleichungen, noch über Determinanten voraussetzt.*“

Den Sinn dieser letzten Worte erfuhr ich bald darauf durch mündliche Mittheilungen von *Jacobi*. Das von ihm zum Beweise jenes Satzes angewandte Verfahren bestand nämlich, wie er mir sagte, in Folgendem.

Um für eine gegebene Gleichung, deren Wurzeln mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bezeichnet werden mögen, zu entscheiden, wieviel Paare derselben imaginär sind, bildete er den Ausdruck:

$$(1.) \quad S = \Sigma(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^2,$$

wo die Summe auf die Werthe $\alpha = \alpha_1, = \alpha_2, \dots = \alpha_n$ auszudehnen ist; derselbe läßt sich auch so darstellen:

*) Es ist der Satz über die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln einer Gleichung, welcher sich im *Liouvilleschen Journal* (T. XII, pag. 59) abgedruckt findet, und den ich bereits vor dem Druck brieflich *Jacobi* mitgetheilt hatte.

einigt, gaben dann mit Hülfe des Prinzips der Unveränderlichkeit der Anzahl der positiven und negativen Quadrate den zu beweisenden Satz, wonach die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ mit der Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammenfällt.

Seit dem Jahre 1847, aus welchem ohne Zweifel auch der hier abgedruckte unvollendete *Jacobische* Aufsatz stammt, sind in neuerer Zeit die Herren *Sylvester* und *Hermite*, ohne von der *Jacobischen* Arbeit zu wissen, auf das in Rede stehende Prinzip gekommen.

Herr *Sylvester* hat dasselbe aufgestellt und dafür den Namen des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen vorgeschlagen. Die von ihm gemachte Anwendung desselben bezieht sich auf die für die *Sturmschen* Funktionen erzeugende quadratische Form, welche er als von Herrn *Hermite* ihm mitgetheilt anführt. (S. Sylvester, on a theory of the syzygetic relations etc. Phil. Trans. 1853 pag. 481, 84, und: a demonstrat. of the theorem, that every homog. quadr. polyn. etc. Phil. Magaz. 1852 II. pag. 138.)

Herr *Hermite* hat außer dem hier veröffentlichten Beweise des Prinzips eine Anwendung davon gemacht, die, mit der *Jacobischen* im Grundgedanken übereinstimmend, umfassender als diese ist. Seine erwähnte erzeugende quadratische Form ist der oben mit *S* bezeichneten ganz ähnlich, aber sie ist allgemeiner, und zwar in der Art, daß man aus ihr nicht nur den besonderen Fall des *Sturmschen* Satzes herzuleiten im Stande ist, wo $-\infty$ und $+\infty$ die Grenzen sind, zwischen denen die Anzahl der reellen Wurzeln bestimmt werden soll, sondern eben sowohl den allgemeinen Fall, wo irgend zwei endliche reelle Größen jene Grenzen sind. Eine weitere Verallgemeinerung des Gedankens der erzeugenden quadratischen Form hat Herrn *Hermite* dazu geführt, ähnliche Untersuchungen für Gleichungen mit imaginären Coefficienten anzustellen (Bd. LII. pag. 39 dieses Journals) sowie den *Sturmschen* Satz auf zwei simultane Gleichungen auszudehnen. (S. comptes rendus de l'ac. de Paris 1853 I. pag. 294, 96.)

Schließlich ist der Aufsatz des Herrn *Brioschi* anzuführen: „Sur les séries qui donnent le nombre de racines réelles etc.” (Nouvelles Annales de M. *Terquem*, Juillet 1856), in welchem sich sowohl ein eleganter Beweis des in Rede stehenden Prinzips findet als seine Anwendung auf die Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln.
