Inventiones math. 2, 1—14 (1966)

Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten

EGBERT BRIESKORN (Cambridge, Mass.)*

Einleitung

Nach einem bekannten Satz von MUMFORD [8] kann ein 2-dimensionaler normaler komplexer Raum mit Singularitäten keine topologische Mannigfaltigkeit sein[1]. Für höhere Dimensionen gilt keine derartige Aussage. Ein erstes Beispiel wurde in [2] angegeben. Die singuläre Hyperfläche X im C^n mit der Gleichung

$$z_1^2+\cdots+z_{n-1}^2+z_n^3=0$$

ist für gerades n eine topologische Mannigfaltigkeit. Äquivalent dazu ist die Feststellung, daß der Durchschnitt Σ von X mit der Sphäre

$$S^{2n-1}=\{z\in C^n \,|\, |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=1\}$$

homöomorph zur $(2n-3)$-dimensionalen Sphäre ist. Die Mannigfaltigkeit Σ hat in natürlicher Weise auch eine differenzierbare Struktur.

HIRZEBRUCH [3] hat als erster bemerkt, daß für $n\equiv 2(4)$ diese differenzierbare Struktur nicht die Standardstruktur von S^{2n-3} ist. Er hat gleichzeitig Beziehungen zur Theorie der Transformationsgruppen auf Sphären hergestellt, insbesondere zu [1, 4, 5][2], und hat in diesem Zusammenhang weitere Beispiele für topologisch triviale Singularitäten von Hyperflächen konstruiert.

MILNOR hat dann als Beispiele die folgenden Hyperflächen X_a betrachtet: Es sei $a=(a_1, \ldots, a_n)$ ein beliebiges n-tupel von ganzen Zahlen $a_i>1$. Dann ist $X_a=X(a_1, \ldots, a_n)$ die Hyperfläche in C^n mit der Gleichung

$$z_1^{a_1}+\cdots+z_n^{a_n}=0.$$

Ferner wird eine $(2n-3)$-dimensionale kompakte differenzierbare orientierbare Mannigfaltigkeit $\Sigma_a=\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ definiert durch

$$\Sigma(a_1, \ldots, a_n)=X(a_1, \ldots, a_n)\cap S^{2n-1}.$$

---

* This Research was supported by Air Force Office of Scientific Research gran A-AFOSR 335-63.

[1] Für höher-dimensionale Singularitäten wurde z.B. von D. PRILL in [11] bewiesen, daß ein singulärer Kegel über einer projektiv algebraischen Mannigfaltigkeit keine topologische Mannigfaltigkeit sein kann.

[2] Beispielsweise ist die weiter unten definierte $(2n-3)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\Sigma(2, \ldots, 2, 2k+1)$ diffeomorph zu BREDONS Mannigfaltigkeit M_k^{2n-3}.

Σ_a ist genau dann homöomorph zu einer Sphäre, wenn X_a eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Mit *Satz* 1 dieser Arbeit beweisen wir ein von MILNOR vermutetes notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ eine topologische Sphäre ist. Als Korollar ergibt sich eine Aussage über gewisse lokale Ringe mit eindeutiger Primfaktorzerlegung. In *Satz 2* wird dann die differenzierbare Struktur für die Homotopiesphären $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ mit geradem n bestimmt, und *Satz 3* leistet das Entsprechende für ungerades n. Es ist bekannt, daß eine Homotopiesphäre, welche sich wie die Σ_a mit Codimension 2 in eine Sphäre einbetten läßt, eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit berandet[3]. Umgekehrt ergibt sich nun aber auch aus Satz 2 und Satz 3 als *Korollar*: Jede ungerade dimensionale Homotopiesphäre, die eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit berandet, ist diffeomorph zu einer Mannigfaltigkeit $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$. Zum Beispiel repräsentieren die Mannigfaltigkeiten

$$\Sigma(2, 2, 2, 3, 6k-1) \qquad k=1, \ldots, 28$$

die 28 verschiedenen Strukturen auf der 7-Sphäre.

Ein Teil der Methoden, die in dieser Arbeit zur Untersuchung der Σ_a benutzt werden, ist inzwischen von MILNOR in [*7*] in größerer Allgemeinheit entwickelt worden, nämlich für beliebige durch eine Polynomgleichung gegebene Hyperflächen. Für den Beweis von Aussagen vom Typ der Sätze 1, 2 und 3 sind jedoch gewisse Rechnungen erforderlich, für die gegenwärtig keine allgemein brauchbare Methode verfügbar ist. Für den Fall der $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ sind diese Rechnungen aber sämtlich in einem vor kurzem erschienen Artikel [*10*] von PHAM enthalten, und nur die Arbeit von PHAM ermöglicht den so mühelosen Beweis unserer Resultate.

Herrn Prof. HIRZEBRUCH möchte ich für die vielen Anregungen danken, die ich durch die Korrespondenz mit ihm erhalten habe, insbesondere für den Beweis von Satz 3. Letzten Endes sind die vorliegenden Resultate seinem stetigen Interesse für die Topologie der Singularitäten zu danken. Herrn Prof. MILNOR danke ich für die Möglichkeit, sein Manuskript über die Singularitäten von Hyperflächen zu benutzen.

1.

Wir beginnen mit einer kurzen Zusammenstellung einiger Resultate von PHAM [*10*]. Es sei $\Xi_a(t)$ die Stein-Mannigfaltigkeit

$$\Xi_a(t) = \{z \in C^n \mid z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n} = t\}.$$

und insbesondere $\Xi_a = \Xi_a(1)$. Für $t \neq 0$ sind $\Xi_a(t)$ und Ξ_a biholomorph äquivalent. Auf Ξ_a hat man in natürlicher Weise Automorphismen ω_k,

[3] Siehe z.B. KERVAIRE, M.A.: On Higher Dimensional Knots, p. 111, in: Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press 1965.

nämlich die Multiplikation der k-ten Koordinate mit $\xi_k = e^{2\pi i/a_k}$. Die ω_k erzeugen eine Gruppe Ω_a, die ein direktes Produkt von zyklischen Gruppen ist:

$$\Omega_a = \prod_{k=1}^{n} Z_{a_k}.$$

Es sei J_a der ganzzahlige Gruppenring von Ω_a und I_a das Ideal in J_a, das von den Elementen $1+\omega_k+\cdots+\omega_k^{a_k-1}$ erzeugt wird.

Pham beweist ([*10*], p. 337).

Lemma 1 (Pham). *Die ganzzahlige singuläre Homologie* $H_i(\Xi_a, Z)$ *verschwindet für* $i \neq 0, n-1$, *und* $H_{n-1}(\Xi_a, Z) \cong J_a/I_a$.

Der Beweis hierfür ergibt sich daraus, daß man leicht eine Deformationsretraktion von Ξ_a auf den folgendermaßen konstruierten simplicialen Komplex $\mathscr{E}$ angeben kann. Es sei e das Simplex

$$e = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \Xi_a \mid z_k \text{ reell} \geqq 0\}.$$

Dies ist wirklich ein Simplex, denn man hat offensichtlich einen Homöomorphismus von e zum Standardsimplex

$$\Delta_{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid x_k \geqq 0, \textstyle\sum x_k = 1\}.$$

Der simpliciale Komplex $\mathscr{E}$ hat per definitionem als Simplices die Bilder von e und seinen Seiten unter den Transformationen von Ω_a. Man erhält einen $(n-1)$-Zykel $\mathscr{e}$ durch

$$\mathscr{e} = \prod (1-\omega_k)\, e.$$

Dieses $\mathscr{e} \in H_{n-1}(\Xi_a, Z)$ erzeugt H_{n-1} als J_a-Modul und wird gerade von I_a anulliert, und daher ist $H_{n-1}(\Xi_a, Z) = J_a/I_a$.

Aus der obigen Beschreibung von $\mathscr{E}$ läßt sich noch leicht die folgende Folgerung ziehen:

Lemma 2. *Für jedes* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *mit* $n \geqq 3$ *ist* Ξ_a *einfach-zusammenhängend (und daher sogar* $(n-2)$*-fach zusammenhängend).*

Beweis. Nach den vorangehenden Bemerkungen genügt es, zu zeigen, daß die Fundamentalgruppe des 2-Gerüstes $\mathscr{E}_2$ von $\mathscr{E}$ trivial ist. $\mathscr{E}_2$ hat als Eckpunkte die Punkte $p_k^s = (0, \ldots, \xi_k^s, 0, \ldots, 0)$, $0 \leqq s < a_k$. Es hat genau eine Kante für jedes ungeordnete Paar p_i^r, p_k^s mit $i \neq k$ und genau ein 2-Simplex für jedes ungeordnete Tripel p_i^r, p_j^s, p_k^t mit paarweise verschiedenen i, j, k. Kommen in einem geschlossenen Kantenweg $(p_{k_1}^{s_1}, \ldots, p_{k_m}^{s_m})$ aufeinanderfolgend drei Punkte p_i^r, p_j^s, p_k^t mit paarweise verschiedenen i, j, k vor, so kann man sie bezüglich Homotopie durch

p_i^r, p_k^t ersetzen, weil die drei Punkte Eckpunkte eines 2-Simplex sind. Vier aufeinanderfolgende Punkte $p_i^{r_1}, p_k^{t_1}, p_i^{r_2}, p_k^{t_2}$ kann man durch $p_i^{r_1}, p_j^s, p_k^{t_2}$ ersetzen, wobei p_j^s ein beliebiger Punkt mit $j \neq i, k$ ist. Beide Operationen vermindern die Anzahl der Kanten des Weges um 1, und man kann daher durch ihre wiederholte Anwendung jeden geschlossenen Kantenweg in $\mathscr{E}_2$ in einen offensichtlich nullhomotopen Weg überführen. Also ist $\mathscr{E}_2$ und damit auch Ξ_a einfach-zusammenhängend. Q.e.d.

2.

In diesem Abschnitt wollen wir Satz 1 beweisen, d.h. ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß Σ_a eine topologische Sphäre ist. Natürlich benutzen wir die Tatsache, daß für höhere Dimensionen die Poincaré-Vermutung richtig ist, und untersuchen also, wann Σ_a eine einfach-zusammenhängende Homologiesphäre ist.

Um die Homologie von $\Sigma_a \subset S^{2n-1}$ zu berechnen, können wir wegen der Alexanderdualität $H_i(\Sigma_a, \boldsymbol{Z}) \cong H^{2n-2-i}(S^{2n-1} - \Sigma_a, \boldsymbol{Z})$ die Homologie des Komplementes $S^{2n-1} - \Sigma_a$ berechnen. Aber $S^{2n-1} - \Sigma_a$ ist ein Deformationsretrakt der Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{C}^n - X_a$, denn man hat sogar einen Homöomorphismus φ von $(S - \Sigma_a) \times (0, \infty)$ auf $\boldsymbol{C}^n - X_a$ vermöge

$$\varphi\big((z_1, \dots, z_n), \tau\big) = (\tau^{1/a_1} z_1, \dots, \tau^{1/a_n} z_n).$$

Daher betrachten wir nun die Mannigfaltigkeit $Y_a = \boldsymbol{C}^n - X_a$. Wir definieren eine Abbildung $p\colon Y_a \to \boldsymbol{C}^*$ auf $\boldsymbol{C}^* = \{t \in \boldsymbol{C} \mid t \neq 0\}$ durch $t = z_1^{a_1} + \dots + z_n^{a_n}$. Die Fasern von p sind gerade die $\Xi_a(t)$, und $p\colon Y_a \to \boldsymbol{C}^*$ ist ein lokal-triviales Faserbündel über $\boldsymbol{C}^*$ mit typischer Faser Ξ_a. Dies ermöglicht die Berechnung der Homotopie und Homologie von Y_a.

Für die Homotopie erhalten wir aus der exakten Homotopiesequenz der Faserung p, daß für $n \geqq 3$ gilt $\pi_1(Y_a) \cong \boldsymbol{Z}$ und $\pi_{n-1}(Y_a) \cong J_a/I_a$.

Die Homologie von Y_a berechnet sich aus der Spektralsequenz der Faserung $Y_a \to \boldsymbol{C}^*$ mit dem E^2-Term

$$E^2_{p,q} = H_p(\boldsymbol{C}^*, H_q(\Xi_a(t), \boldsymbol{Z})).$$

Das lokale Koeffizientensystem $H_q(\Xi_a(t), \boldsymbol{Z})$ ist aber nicht trivial. Vielmehr gilt nach [*10*], p. 340.

Lemma 3. *Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\boldsymbol{C}^*)$ operiert auf $H_{n-1}(\Xi_a, \boldsymbol{Z})$* durch Potenzen des Automorphismus ω, wo

$$\omega\colon J_a/I_a \to J_a/I_a$$

die Multiplikation mit $\prod \omega_k$ ist.

Aus Lemma 3 und Lemma 1 ergibt sich, daß $E^\infty_{p,q} \cong E^2_{p,q}$ und daß die $E^2_{p,q}$ wie folgt aussehen:

$$E^2_{0,n-1} \cong \operatorname{cokern}(1-\omega),$$

$$E^2_{1,n-1} \cong \operatorname{kern}(1-\omega),$$

$E^2_{0\,0} \cong Z$, $E^2_{1,0} \cong Z$, $E^2_{pq} = 0$ sonst.

Daher verschwindet $H_i(Y_a, \boldsymbol{Z})$ für $i \neq 0, 1, n-1, n$ und die Homologiegruppen $H_{n-1}(Y_a, \boldsymbol{Z})$ und $H_n(Y_a, \boldsymbol{Z})$ verschwinden genau dann, wenn $1-\omega\colon J_a/I_a \to J_a/I_a$ ein Isomorphismus ist. Da J_a/I_a ein freier $\boldsymbol{Z}$-Modul von endlichem Rang ist, ist $1-\omega$ genau dann ein Isomorphismus, wenn für die Determinante gilt

$$\det(1-\omega) = \pm 1.$$

Diese Bedingung können wir selbstverständlich auch mit Hilfe des charakteristischen Polynoms $\Delta_a(t)$ von ω als $\Delta_a(1) = \pm 1$ formulieren, wo

$$\Delta_a(t) = \det(t \cdot 1 - \omega).$$

Lemma 4.

$$\Delta_a(t) = \prod_{0<i_k<a_k} (t - \xi_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{i_n}), \quad \text{wo} \quad \xi_k = e^{2\pi i/a_k}.$$

Beweis. Wir können J_a/I_a als Tensorprodukt

$$\bigotimes_{k=1}^{n} V_k$$

auffassen, wobei V_k der von den ω_k^i aufgespannte $\boldsymbol{Z}$-Modul ist. Dann ist $\omega = \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n$, wo $\omega_k\colon V_k \to V_k$ die Multiplikation mit ω_k ist. Tensoriert man alles mit $\boldsymbol{C}$, dann ist offenbar für jede a_k-te Einheitswurzel $x_k = \xi_k^{i_k}$, $0 < i_k < a_k$, der Vektor

$$\sum_{r=0}^{a_k-1} x_k^r \omega_k^r$$

ein Eigenvektor von ω_k zum Eigenwert x_k^{-1}, und daher erhält man mit den

$$\prod_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{a_k-1} x_k^r \omega_k^r$$

eine Basis von Eigenvektoren für ω in $J_a/I_a \otimes \boldsymbol{C}$. Die zugehörigen Eigenwerte sind $\xi_1^{-i_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{-i_n}$, $0 < i_k < a_k$, und das beweist Lemma 4.

Als nächstes Problem erledigen wir die Frage nach dem einfachen Zusammenhang der $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$.

Lemma 5. *Für $n \geq 4$ ist $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$ mindestens $(n-3)$-fach zusammenhängend.*

Beweis. Σ_a ist Deformationsretrakt von $X_a - \{0\}$. Entfernt man aus der Mannigfaltigkeit X_a die reell 2-codimensionale Mannigfaltigkeit $X_a^{\hat{}} = \{z \in X_a \mid z_n = 0\}$, so erhält man eine Surjektion $\pi_1(X_a - X_{\hat{a}}) \to \pi_1(X_a - \{0\})$. Die Mannigfaltigkeit $X_a - X_{\hat{a}}$ kann durch Projektion auf $C^* = \{z_n \in C \mid z_n \neq 0\}$ als Faserbündel über C^* mit Faser $\Xi_{\hat{a}}$ aufgefaßt werden, wo $\hat{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$. Aber $\Xi_{\hat{a}}$ ist nach Lemma 3 einfach zusammenhängend, und daher folgt aus der exakten Homotopiesequenz dieser Faserung $\pi_1(X_a - X_{\hat{a}}) = Z$. Daher ist $\pi_1(X_a - \{0\})$ abelsch, also

$$\pi_1(\Sigma_a) \cong H_1(\Sigma_a, Z) \cong H^{2n-3}(S - \Sigma_a, Z) \cong H^{2n-3}(Y_a, Z) = 0.$$

Schließlich folgt nun wegen des Satzes von HUREWICZ für $i \leqq n-3$

$$\pi_i(\Sigma_a) \cong H_i(\Sigma_a) \cong H^{2n-2-i}(S - \Sigma_a) \cong H^{2n-2-i}(Y_a) = 0.$$

Q.e.d.

Zur Formulierung des Kriteriums in Satz 1 ist es zweckmäßig, jedem n-tupel $a = (a_1, \ldots, a_n)$ einen bewerteten Graphen

$$G_a = G(a_1, \ldots, a_n)$$

zuzuordnen. $G(a_1, \ldots, a_n)$ hat n Eckpunkte, die mit $a_1, \ldots, a_n$ bewertet sind, und die wir auch mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen, in der Hoffnung, daß dies nicht zu Mißverständnissen führt. G_a hat eine a_i und a_j verbindende Strecke für jedes Punktepaar a_i, a_j mit größtem gemeinsamen Teiler $(a_i, a_j) > 1$. Auf diese Weise sind Zusammenhangskomponenten und insbesondere isolierte Punkte von G_a wohldefiniert. Ferner ist es zweckmäßig, eine gewisse Bedingung für die Komponente K von G_a zu formulieren, in der die geraden a_k liegen:

Bedingung (B). *K besteht aus einer ungeraden Anzahl von Punkten, und für $a_i, a_j \in K$ mit $i \neq j$ gilt $(a_i, a_j) = 2$.*

Der folgende Satz wurde von MILNOR in einem Brief an NASH vermutet (s. auch [7]).

Satz 1. *Es sei n eine natürliche Zahl > 3 und $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ein n-tupel natürlicher Zahlen $a_k > 1$. Dann gilt*[4]*:*

(i) *$\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ ist eine topologische Sphäre genau wenn für das charakteristische Polynom $\Delta_a(t)$ gilt*

$$\Delta_a(1) = 1.$$

(ii) *$\Delta_a(1) = 1$ genau wenn der a zugeordnete Graph G_a eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

[4] Für $n = 3$ sind die Bedingungen für G_a äquivalent dazu, daß Σ_a eine ganzzahlige Homologiesphäre ist.

(a) *G_a hat mindestens zwei isolierte Punkte.*

(b) *G_a hat einen isolierten Punkt und eine Bedingung* (B) *genügende Komponente.*

Beweis. (i) Nach Lemma 5 ist Σ_a mindestens $(n-3)$-fach zusammenhängend. Σ_a ist also eine Sphäre genau wenn es eine Homologiesphäre ist, d.h. wenn die Homologiegruppen $H_{n-2}(\Sigma_a, Z)$ und $H_{n-1}(\Sigma_a, Z)$ verschwinden. Diese verschwinden, da sie wegen der Alexanderdualität isomorph zu $H^n(S-\Sigma_a, Z) \cong H^n(Y_a, Z)$ bzw. $H^{n-1}(S-\Sigma_a, Z) \cong H^{n-1}(Y_a, Z)$ sind, genau dann, wenn die letzteren Gruppen verschwinden, d.h. nach den Bemerkungen im Anschluß an Lemma 3 genau wenn $\Delta_a(1) = \pm 1$, wegen Lemma 4 also genau wenn $\Delta_a(1) = 1$.

(ii) Dies ist eine Folgerung aus Lemma 4. Das Polynom $\Delta_a(t)$ hat als charakteristisches Polynom einer ganzzahligen Matrix ganzzahlige Koeffizienten, und die Wurzeln von $\Delta_a(t) = 0$ sind die Einheitswurzeln $\xi_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot \xi_n^{i_n}$. Daher ist $\Delta_a(t)$ ein Produkt von Kreisteilungspolynomen $\Phi_d(t)$

$$\Delta_a(t) = \prod_\nu \Phi_{d_\nu}(t),$$

wobei d_ν die Ordnungen der $\xi_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot \xi_n^{i_n}$ durchläuft, eventuell mehrfach. Bekanntlich ([*13*], § 141, Satz VII) gilt $\Phi_d(1) = 1$, wenn d keine Primzahlpotenz ist, während für eine Primzahl q natürlich gilt $\Phi_{q^m}(1) = q$. Daher gilt $\Delta_a(1) = 1$ genau dann, wenn für jedes $i = (i_1, \ldots, i_n)$ mit $0 < i_k < a_k$ die Ordnung der Einheitswurzel $\xi^i = \xi_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot \xi_n^{i_n}$ keine Primzahlpotenz ist. Zu zeigen ist, daß dies äquivalent zu (a) oder (b) ist. Es sei K irgend eine Komponente von G_a und zwecks Einfachheit seien die Punkte von G_a so numeriert, daß $K = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Es sei $\kappa(K)$ die Anzahl der $(i_1, \ldots, i_r)$, $0 < i_k < a_k$, für welche $\xi_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot \xi_r^{i_r} = 1$. Es ist nicht schwer, zu sehen, daß $\kappa(K) = 0$ ist genau wenn K Bedingung (B) genügt oder aber ein isolierter Punkt ist. Diese Aussage ist äquivalent zu (ii), denn die Ordnung aller ξ^i ist keine Primzahlpotenz genau wenn G_a wenigstens zwei Komponenten K_1, K_2 hat mit $\kappa(K_1) = \kappa(K_2) = 0$.

Für später merken wir an, daß für eine Komponente K, die nicht die geraden a_k enthält, $\kappa(K)$ gerade ist. Denn es ist

$$\kappa(K) = \frac{a_1 \ldots a_r}{[a_1, \ldots, a_r]} - \sum_i \frac{a_1 \ldots \hat{a}_i \ldots a_r}{[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_r]} + \\ + \sum_{i<j} \frac{a_1 \ldots \hat{a}_i \ldots \hat{a}_j \ldots a_r}{[a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_r]} \mp \cdots,$$

wobei $[a_1, \ldots, a_s]$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_1, \ldots, a_s$ bezeichnet, und mod 2 gilt daher

$$\kappa(K) \equiv \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \equiv 0(2).$$

Zu Satz 1 bemerken wir noch folgendes: Satz 1 lehrt, daß die Topologie eines komplexen Raumes in der Umgebung eines normalen singulären Punktes trivial sein kann, und aus den Sätzen 2 und 3 folgt entsprechendes für die Differentialtopologie. Daher wird man sich für die Topologie der Einbettungen der Singularität interessieren. Als einfache Konsequenz des bereits Bewiesenen haben wir:

Lemma 6. *Es sei $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ eine topologische $(2n-3)$-Sphäre, $n>3$ und alle $a_i>1$. Es sei $\Sigma_a \subset S^{2n-1}$ die Inklusion. Dann ist Σ_a in S^{2n-1} verknotet. Die Knotengruppe $\pi_1(S^{2n-1}-\Sigma_a)$ ist unendlich zyklisch.*

Beweis. Wäre Σ_a unverknotet in S^{2n-1}, dann müßte $S^{2n-1}-\Sigma_a$ den Homotopietyp von S^1 haben. Aber es wurde gezeigt, daß $\pi_{n-1}(S-\Sigma_a) \cong J_a/I_a$.

3.

Aus Satz 1 erhalten wir ein Korollar über Ringe mit eindeutiger Primfaktorzerlegung (kurz: ZPE-Ringe). Es ist bekannt und kann mit den im folgenden benutzten Methoden bewiesen werden, daß der lokale Ring der holomorphen Funktionskeime in einer isolierten Singularität einer Hyperfläche der Dimension >3 ein ZPE-Ring ist. Für 3-dimensionale Singularitäten beweisen wir

Korollar 1. *Wenn $G(a_1, a_2, a_3, a_4)$ Bedingung (a) oder (b) von Satz 1 genügt, ist der lokale Ring*

$$\boldsymbol{C}\{z_1, \ldots, z_4\}/(z_1^{a_1}+z_2^{a_2}+z_3^{a_3}+z_4^{a_4})$$

ein ZPE-Ring.

Beweis. Für jedes positive reelle ρ definieren wir einen Steinschen Raum X^ρ durch

$$X^\rho = \{z \in X_a \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_4|^2 < \rho\}.$$

Die Mannigfaltigkeit $Y^\rho = X^\rho - \{0\}$ hat den gleichen Homotopietyp wie Σ_a, insbesondere gilt $H^2(Y^\rho, \boldsymbol{Z}) \cong H^2(\Sigma_a, \boldsymbol{Z})$, d.h.: wegen Satz 1 haben wir unter den Voraussetzungen des Korollars $H^2(Y^\rho, \boldsymbol{Z})=0$. Wegen des Schejaschen Fortsetzungssatzes [*12*] p. 360 für die Cohomologie mit Koeffizienten in der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{Y^\rho}$ gilt

$$H^1(Y^\rho, \mathcal{O}_{Y^\rho}) \cong H^1(X^\rho, \mathcal{O}_{X^\rho}) = 0,$$

denn X^ρ ist Steinsch. Also erhält man für die Garbe $\mathcal{O}^*_{Y^\rho}$ der nichtverschwindenden holomorphen Funktionskeime aus der exakten Cohomologiesequenz

$$\cdots \to H^1(Y^\rho, \mathcal{O}_{Y^\rho}) \to H^1(Y^\rho, \mathcal{O}^*_{Y^\rho}) \to H^2(Y^\rho, \boldsymbol{Z}) \to \cdots,$$

daß $H^1(Y^\rho, \mathcal{O}^*_{Y^\rho})=0$, so daß also jede 1-codimensionale analytische Menge in Y^ρ der Divisor einer holomorphen Funktion ist. Dafür, daß $R=C\{z_1, \ldots, z_4\}/(z_1^{a_1}+\cdots+z_4^{a_4})$ ein ZPE-Ring ist, ist notwendig und hinreichend, daß in R jedes Primideal q der Höhe 1 ein Hauptideal ist. Ein solches q definiert für jedes hinreichend kleine ρ eine 1-codimensionale analytische Menge in Y^ρ, welche, wie eben bemerkt, der Divisor einer holomorphen Funktion f in Y^ρ ist. Die Funktion f läßt sich zu einer holomorphen Funktion auf X^ρ fortsetzen, und diese repräsentiert ein $f\in R$ für welches $q=R\cdot f$. Also ist q ein Hauptideal. Q.e.d.

4.

Es sei bP_{2m} die Gruppe der $(2m-1)$-dimensionalen Homotopiesphären, die eine $2m$-dimensionale parallelisierbare Mannigfaltigkeit beranden, $(m>2)$. Für gerades m ist bP_{2m} eine zyklische Gruppe hoher Ordnung. Für ungerades m ist $bP_{2m}=0$ oder $bP_{2m}=\boldsymbol{Z}_2$, (vgl. hierzu und zum folgenden [6]). Speziell für $m\equiv 1 \bmod 4$ gilt $bP_{2m}=\boldsymbol{Z}_2$ nach PETERSON[5]. Um für eine Homotopiesphäre $\Sigma=\partial M$, M parallelisierbar, zu entscheiden, welches Element in bP_{2m} sie repräsentiert, hat man für m gerade die Signatur $\sigma(M)$ der Schnittmatrix von $H_m(M, \boldsymbol{Z})$ zu berechnen, und für m ungerade eine mod 2-Invariante, die Arf-Invariante $c(M)$.

Für die Σ_a erhält man folgendermaßen eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit M_a mit $\partial M_a=\Sigma_a$. Zunächst sei

$$D^{2n}=\{z\in \boldsymbol{C}^n \mid |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\leqq 1\}$$

und wie früher $S^{2n-1}=\partial D^{2n}$. Dann sei

$$M_a(t)=\Xi_a(t)\cap D^{2n} \quad \text{und} \quad \Sigma_a(t)=\Xi_a(t)\cap S^{2n-1}.$$

Wenn $|t|$ hinreichend klein ist, ist nach einem bekannten Satz von EHRESMANN[6] $\Sigma_a(t)$ diffeomorph zu Σ_a. Ferner ist für $|t|$ hinreichend klein $M_a(t)$ eine differenzierbare berandete Mannigfaltigkeit mit Rand $\Sigma_a(t)$. Da die Mannigfaltigkeit $M_a(t)$ ein triviales Normalbündel in $\boldsymbol{C}^n$ hat, ist $M_a(t)$ stabil parallelisierbar, also parallelisierbar ([6], p. 509), und daher ist $M_a(t)$ eine Mannigfaltigkeit der gewünschten Art.

Derartige Argumente kann man für beliebige isolierte Singularitäten von Hyperflächen entwickeln ([7]). Das Besondere des vorliegenden Falles besteht darin, daß wir die Invarianten $\sigma(M)$ und $c(M)$ explizit berechnen können. Der Grund hierfür ist, daß für $|t|$ klein $M_a(t)-\partial M_a(t)$ diffeomorph zu $\Xi_a(t)$ ist, weil für hinreichend kleines $|t|$ die Funktion

[5] BROWN, E.H., and F.P. PETERSON: The Kervaire invariant of $(8k+2)$-manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 670—675 (1964).

[6] EHRESMANN, C.: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie, p. 29—55. Brüssel 1950.

$f(z)=|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2$ auf $\Xi_a(t)$ keine kritischen Punkte außerhalb $M_a(t)$ hat. Im folgenden sei t_0 fest so gewählt, daß alle vorstehenden Aussagen zutreffen, und es sei

$$M_a=M_a(t_0).$$

Wir fassen zusammen:

Lemma 7. *M_a ist eine berandete parallelisierbare Mannigfaltigkeit, deren Rand ∂M_a diffeomorph zu Σ_a ist. $M_a-\partial M_a$ ist diffeomorph zu Ξ_a.*

5.

In diesem Abschnitt bestimmen wir die differenzierbare Struktur von $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ für gerade n. Das heißt: Wir berechnen die Arf-Invariante $c(M_a)$. Dies ist ein rein rechnerisches Problem wegen eines mir durch [7] bekanntgewordenen Resultates von LEVINE [9], das wir für unseren speziellen Fall als Teil (i) des folgenden Satzes formulieren.

Satz 2. *$\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ sei eine topologische Sphäre, $n\geqq 4$ gerade. Dann gilt für die Arf-Invariante $c(M_a)$ folgendes:*

(i) *(Levine)*

$$c(M_a)=0 \quad \textit{genau, wenn} \quad \Delta_a(-1)\equiv \pm 1 \bmod 8,$$

$$c(M_a)=1 \quad \textit{genau, wenn} \quad \Delta_a(-1)\equiv \pm 3 \bmod 8.$$

(ii) *$c(M_a)=1$ dann und nur dann, wenn G_a genau einen isolierten Punkt a_k und nur eine weitere Komponente hat und $a_k\equiv \pm 3$ mod 8.*

Beweis von (ii). Es ist

$$\Delta_a(t)=\prod_\nu \Phi_{d_\nu}(t).$$

Es gilt $\Phi_d(-1)=\pm 1$ für d ungerade und $\Phi_d(-1)=\Phi_d(1)$, wenn $d\equiv 0(4)$, während für $d\equiv 2(4)$ gilt $\Phi_d(-1)=\pm\Phi_{d/2}(1)$. Daher kann höchstens dann $\Delta_a(t)\equiv \pm 3$ mod 8 gelten, wenn d_ν von der Form $2\cdot q^m$ mit ungeradem q vorkommen. Dieses ist sicher ausgeschlossen, wenn G_a zwei oder mehr isolierte Punkte a_k mit ungeradem a_k hat. Nehmen wir also an, daß a_k der einzige ungerade isolierte Punkt von G_a ist und K die nach Satz 1 notwendigerweise existierende Komponente, die Bedingung (B) genügt. K_i, $i\in I$, seien die übrigen Komponenten.

Man sieht leicht, daß dann gilt

$$\Delta_a(-1)=\pm a_k^{\prod_{i\in I}\kappa(K_i)}$$

Aber $3^2\equiv 1(8)$, $5^2\equiv 1(8)$, und

$$\prod_{i\in I}\kappa(K_i)$$

ist – wie früher bemerkt – gerade, außer wenn $I=\emptyset$. Daher ist $\Delta_a(-1)\equiv \pm 1(8)$ außer wenn $I=\emptyset$ und $a_k\equiv \pm 3(8)$. Q.e.d.

Beispiel. Es sei $a=(a_1, \ldots, a_n)=(2, \ldots, 2, d)$, d ungerade, n gerade, $n \geqq 6$. Dann gilt

$$c(M_a)=0, \quad \text{wenn} \quad d \equiv \pm 1(8)$$

$$c(M_a)=1, \quad \text{wenn} \quad d \equiv \pm 3(8).$$

Insbesondere ist also für jedes gerade n mit $bP_{2n-2} \neq 0$ die Sphäre $\Sigma(2, \ldots, 2, 3)$ das nicht triviale Element von bP_{2n-2}.

6.

In diesem Abschnitt bestimmen wir die differenzierbare Struktur der $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ für ungerade n. Dazu genügt es nach [*6*], die Signatur $\sigma(M_a)$ zu berechnen. Denn wenn M' und M'' orientierte parallelisierbare $4m$-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Homotopiesphären Σ' und Σ'' als Rändern sind, dann sind Σ' und Σ'' orientierungstreu diffeomorph genau dann, wenn

$$\sigma(M') \equiv \sigma(M'') \bmod \sigma_m .$$

wobei $\sigma_m = 8 \cdot$ Ordnung bP_{4m}, oder mehr explizit

$$\sigma_m = 2^{2m+1}(2^{2m-1}) \cdot \text{Zähler}\left(\frac{4B_m}{m}\right)$$

($B_m = m$-te Bernoullische Zahl). Damit $\sigma(M_a)$ wohldefiniert ist, hat man eine Orientierung für M_a zu wählen. Im folgenden sei M_a mit der Orientierung versehen, die durch die natürliche Orientierung der komplexen Mannigfaltigkeit Ξ_a induziert wird.

Die folgenden Ergebnisse einschließlich der Beweise wurden mir von Hirzebruch mitgeteilt.

Satz 3. *Es sei $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ eine topologische Sphäre, $n \geqq 5$ ungerade. Dann wird der orientierte Diffeomorphietyp von Σ_a durch die Signatur $\sigma(M_a)$ bestimmt (s.o.). Es gilt*

$$\sigma(M_a) = \sigma_a^+ - \sigma_a^-$$

wobei σ_a^+ = Anzahl der n-tupel ganzer Zahlen

$$j=(j_1, \ldots, j_n), \qquad 0<j_k<a_k,$$

für die

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{j_k}{a_k} < 1 \qquad \mathit{mod}\, 2$$

und σ_a^- = Anzahl der $(j_1, \ldots, j_n)$, für die

$$-1 < \sum_{k=1}^{n} \frac{j_k}{a_k} < 0 \qquad \mathit{mod}\, 2.$$

Beweis. Auch hier ist der wichtigste Teil der Arbeit bereits von PHAM geleistet worden, nämlich die Berechnung der Schnittmatrix von Ξ_a. Als Basis in $H_{n-1}(\Xi_a, \boldsymbol{C}) = J_a/I_a \otimes \boldsymbol{C}$ wählen wir die im Beweis von Lemma 4 eingeführten Eigenvektoren, nämlich die

$$v_j = \prod_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{a_k-1} x_k^r \omega_k^r, \quad \text{wo} \quad x_k = e^{2\pi i \frac{j_k}{a_k}}.$$

Ist

$$v_i = \prod_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{a_k-1} y_k^r \omega_k^r,$$

dann ergibt sich aus [*10*], p. 359 als Schnittzahl von v_j und v_i die reelle Zahl (bei $\boldsymbol{C}$-bilinearer Fortsetzung von $\langle\,,\rangle$)

$$\begin{aligned}\langle v_j, v_i\rangle = (-1)^{(n-1)(n-2)/2}(1 - x_1 \cdot \cdots \cdot x_n) \times \\ \times \prod_k (1 - x_k^{-1}) \prod_k (1 + x_k y_k + \cdots + (x_k y_k)^{a_k-1}).\end{aligned}$$

Also gilt $\langle v_j, v_i\rangle \neq 0$ genau dann, wenn $i = a - j$, d.h. wenn für alle k gilt $i_k = a_k - j_k$. Daher erhält man mit den Vektoren $v_j + v_{a-j}$ und $i(v_j - v_{a-j})$ eine Basis von $J_a/I_a \otimes \boldsymbol{R}$, bezüglich welcher die Schnittmatrix Diagonalform hat. Es gilt

$$\langle v_j + v_{a-j}, v_j + v_{a-j}\rangle = \langle i(v_j - v_{a-j}), i(v_j - v_{a-j})\rangle = 2\langle v_j, v_{a-j}\rangle.$$

Die Formel für $\sigma(M_a)$ ist daher bewiesen, sobald wir gezeigt haben, daß $\langle v_j, v_{a-j}\rangle > 0$ genau wenn

$$0 < \sum \frac{j_k}{a_k} < 1 \qquad \mathrm{mod}\, 2$$

und entsprechend $\langle v_j, v_{a-j}\rangle < 0$ wenn

$$-1 < \sum \frac{j_k}{a_k} < 0 \qquad \mathrm{mod}\, 2.$$

Durch Umformungen erhalten wir aus der Formel für die Schnittmultiplizität für ungerades n

$$\begin{aligned}\left(\prod a_k^{-1}\right)\langle v_j, v_{a-j}\rangle &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\prod(1 - x_k^{-1}) + \prod(1 - x_k)\right) \\ &= \mathrm{Rea}\,(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod (1 - x_k) \\ &= \mathrm{Rea}\,(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod \left(-2i\, e^{\pi i \frac{j_k}{a_k}} \sin \pi \frac{j_k}{a_k}\right) \\ &= \mathrm{Rea}\left(-e^{\pi i (\frac{1}{2} + \sum \frac{j_k}{a_k})} \prod 2 \sin \pi \frac{j_k}{a_k}\right).\end{aligned}$$

Da

$$\prod 2 \sin \pi \frac{j_k}{a_k} > 0,$$

folgt, daß $\langle v_j, v_{a-j} \rangle > 0$ genau wenn Rea $e^{\pi i (\frac{1}{2} + \sum j_k/a_k)} < 0$, d.h. genau wenn

$$0 < \sum \frac{j_k}{a_k} < 1 \qquad \bmod 2.$$

Q.e.d.

7.

Hirzebruch hat die Berechnung von $\sigma(M_a)$ für $a = (p, q, 2, \ldots, 2)$ für zwei teilerfremde ungerade Zahlen p und q in Beziehung gebracht zu Rechnungen, die mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz zusammenhängen[7]. Es sei

n die Anzahl der qx mit

$$1 \leqq x \leqq \frac{p-1}{2},$$

deren absolut kleinster Rest mod p negativ ist.

n' die Anzahl der py mit

$$1 \leqq y \leqq \frac{q-1}{2},$$

deren absolut kleinster Rest mod q negativ ist.

Dann kann man durch nicht zu schwierige Umformungen der Berechnungsvorschriften für σ_a^+, σ_a^-, n und n' das folgende Lemma beweisen:

Lemma 8. *Es sei* $(a_1, \ldots, a_{2m+1}) = (2, \ldots, 2, p, q)$, *wo* p *und* q *ungerade und relativ prim sind. Dann gilt*

$$\sigma_a^+ - \sigma_a^- = (-1)^m \left(\frac{(p-1)(q-1)}{2} + 2(n+n') \right).$$

Beispiel. $p = 3$, $q = 6k - 1$. Dann ist $n = 1$, $n' = k$. Also $\sigma_a^+ - \sigma_a^- = (-1)^m \cdot 8k$. Das heißt: *Die* $(4m-1)$*-dimensionalen Sphären*

$$\Sigma(2, \ldots, 2, 3, 6k-1) \qquad k = 1, \ldots, \frac{\sigma_m}{8}$$

repräsentieren die sämtlichen $\sigma_m/8$ *differenzierbaren Strukturen in* bP_{4m}.

---

[7] Vgl. z.B. Hasse, H.: Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., p. 101. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1964.

Für die Signatur der parallelisierbaren Mannigfaltigkeit M_a mit Rand $\Sigma(2, \ldots, 2, 3, 6k-1)$ gilt

$$\frac{\sigma(M_a)}{8} = (-1)^m k .$$

Aus diesem Beispiel und dem Beispiel zu Satz 2 folgt:

Korollar 2. *Jede ungeradedimensionale Sphäre, die eine parallelisierbare Mannigfaltigkeit berandet, ist diffeomorph zu einer Sphäre* $\Sigma(a_1, \ldots, a_n)$.

Literatur

[1] Bredon, G.E.: Examples of differentiable group actions. Topology **3**, 115—122 (1965).

[2] Brieskorn, E.: Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. **55**, 1395—1397 (1966).

[3] Hirzebruch, F.: $0(n)$-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären, kuriose Involutionen. (Vorläufige Fassung eines Manuskripts.)

[4] Hsiang, W.C., and W.Y. Hsiang: Some results on differentiable actions. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 134—137 (1966).

[5] Jänich, K.: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand als Orbiträume differenzierbarer G-Mannigfaltigkeiten ohne Rand. (Erscheint demnächst)

[6] Kervaire, M.A., and J. Milnor: Groups of homotopy spheres: I. Ann. of Math. **77**, 504—537 (1963).

[7] Milnor, J.: On isolated singularities of hypersurfaces. (Manuskript)

[8] Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Publ. Math. de l' Institut des hautes études scientifiques. No. 9. Paris 1961.

[9] Levine, J.: Polynomial invariants of knots of codimension two. Annals of Math. (Erscheint demnächst.)

[10] Pham, F.: Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. Bull. Soc. Math. de France **93**, 333—367 (1965).

[11] Prill, D.: On highly-connected homogeneous manifolds. Erscheint demnächst in Proc. Am. Math. Soc.

[12] Scheja, G.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Math. Ann. **144**, 345—360 (1961).

[13] Weber, H.: Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., Bd. I. Braunschweig: Vieweg 1898.

Department of Mathematics
Mass. Inst. of Technology
Cambridge, Mass.

(*Eingegangen am 10. Juni 1966*)