

DIE MILNORGITTER DER EXZEPTIONELLEN  
UNIMODULAREN SINGULARITÄTEN

E. BRIESKORN

Bonn 1983

Alles ist schön, was man lang anschaut.

(Erwin Chargaff - Bemerkungen)

### Vorwort

Es hat lange gedauert, bis ich in den Rechnungen, mit denen diese Arbeit anfang, ein Muster erkennen konnte. Das Ergebnis läßt sich, nachdem die Arbeit getan ist, in einem einzigen Satz aussprechen: Für die vierzehn exzeptionellen Singularitäten ist das geometrisch bestimmte Deformationsdiagramm mit dem arithmetisch bestimmten Konfigurationsdiagramm identisch. Der arithmetische Teil dieser Aussage ist auch in einem einzigen Satz zusammengefaßt - dem Theorem 5.9.1. Eine Mitteilung der Ergebnisse in dieser Konzentration ohne ihr Umfeld von Problemen, Techniken und Ideen war mir aber nicht möglich. Ich wollte vielmehr das Ganze so zeigen, wie ich es sehe, und ich wollte für alle, Geometer und Algebraiker, verständlich sein. So schrieb ich diese lange Arbeit. Vermutlich würde keine Zeitschrift bereit sein, sie zu drucken. Sie ist nicht wichtig genug - gemessen an den Maßstäben unserer Tage. Ich veröffentliche sie daher in der Schriftenreihe unseres Instituts - in der Hoffnung, daß sie in irgendeiner Bibliothek dieser Welt irgendwann einmal einen Leser findet.



## Inhalt

Einleitung	1		
§ 1. Definitionen	7		
1.1. Gitter	7		
1.2. Spiegelungsgruppen	9		
1.3. Isotropie - Fahnenkomplexe	12		
1.4. Symmetrische Gebiete	14		
1.5. Quotientenkomplexe	16		
1.6. Baily - Borel - Kompaktifizierung	19		
1.7. Stabilisatorgruppen und Spitzen	20		
1.8. Kongruenzuntergruppen	21		
1.9. Die Gitter $L_{pqr}$	22		
1.10. Wurzelgitter	27		
1.11. Milnorgitter	29		
1.12. Unimodulare Singularitäten	33		
1.13. Hyperbolische und parabolische Gitter	38		
1.14. Monodromiegruppen	40		
1.15. Deformationsdiagramme	41		
1.16. Die Grenzschrift	44		
1.17. Liste von Symbolen	47		
§ 2. Ergebnisse	50		
§ 3. Diskriminantenformen	55		
3.1. Definition der Diskriminantenformen	55		
3.2. Diskriminantenformen und Milnorgitter	57		
3.3. Klassifikation der Diskriminantenformen	57		
3.4. Beschreibung der Diskriminantenformen der $L_{pqr}$	60		
3.5. Berechnung der exzeptionellen Diskriminantenformen	66		
3.6. Isotrope Untergruppen	69		
3.7. Die isotropen Untergruppen der exzeptionellen Diskriminantenformen	72		
		§ 4. Isotrope Untergitter vom Rang 1	76
		4.1. Isotrope Untergitter und isotrope Untergruppen	76
		4.2. Die Klassifikation isotroper Untergitter vom Rang 1	82
		4.3. Isotrope Untergitter vom Rang 1 in den exzeptionellen Gittern	89
		§ 5. Isotrope Untergitter vom Rang 2	91
		5.1. Exzeptionelle definite ternäre Formen	92
		5.2. Exzeptionelle definite Formen höheren Ranges	102
		5.3. Binäre Null-Formen	105
		5.4. Normalformen für Klassen isotroper Untergitter	115
		5.5. $O(L)$ - Klassen isotroper Untergitter von $L$	136
		5.6. Kongruenzuntergruppen und ihre Spitzen	140
		5.7. Stabilisatorgruppen isotroper Untergitter	177
		5.8. $O^*(L)$ - Klassen isotroper Untergitter von $L$	194
		5.9. Die Isotropie - Fahnenkomplexe der exzeptionellen Milnorgitter	200
		§ 6. Geometrische Untergitter	209
		Literatur	

## Verzeichnis der Tabellen

1. Deformationsdiagramme	43
2. Grobe Deformationsdiagramme	45
3. Konfigurationsdiagramme	52
4. Diskriminantenformen der $T_{pqr}$	68
5. Zahl isotroper Untergruppen von Diskriminantenformen	71
6. Isotrope Untergruppen exzeptioneller Diskriminantenformen	75
7. Isotrope Untergitter vom Rang 1 in exzeptionellen Gittern	90
8. Einbettungen der $M_{pqr}''$ in unimodulare Gitter	100
9. Negativ definite $L$ mit $L \perp U \perp U \cong L_{pqr}$	103
10. Diskriminantenformen binärer Nullformen	108
11. Einklassige Geschlechter binärer Nullformen	110
12. Kongruenzuntergruppen mit bijektiver Spitzenabbildung	176
13. Isotrope Untergitter vom Rang 2 in exzeptionellen Gittern	208

## DIE MILNORGITTER DER EXZEPTIONELLEN UNIMODULAREN SINGULARITÄTEN

E. Brieskorn

### Zusammenfassung

Für jede der 14 exzeptionellen unimodularen Singularitäten bestimmen wir ihr Milnorgitter  $L$ , den Komplex  $\mathcal{F}(L)$  der Fahnen primitiver isotroper Untergitter und den Quotienten  $\mathcal{F}(L)/\Gamma$  bezüglich der Monodromiegruppe  $\Gamma$ . Dieses aus  $L$  mit rein arithmetischen Methoden gewonnene Objekt hat eine geometrische Bedeutung für die universelle Deformation der exzeptionellen Singularität.

### Einleitung

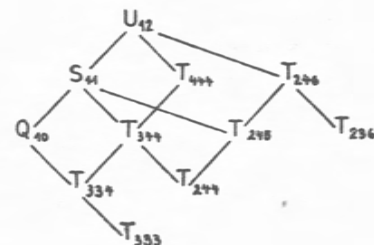
Singularitäten sind ihrem Wesen nach etwas Einzigartiges, etwas, das sich vor vielen anderen Objekten auszeichnet. Es liegt daher in der Natur der Sache, daß Untersuchungen über Singularitäten sich häufig auf eng umgrenzte Klassen solcher Objekte beschränken. So verhält es sich auch mit der hier vorgelegten Arbeit. Sie handelt von 14 Singularitäten, den exzeptionellen unimodularen Singularitäten von Hyperflächen, die von V.I. Arnold im Rahmen seiner Arbeiten zur Klassifikation der Singularitäten analytischer Funktionen entdeckt wurden (vgl. [2]). Es sind dies, mit den Namen, die V.I. Arnold ihnen gegeben

hat, die Singularitäten  $E_{12}, E_{13}, E_{14}, Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, S_{11}, S_{12}, W_{12}, W_{13}$  und  $U_{12}$ .

Diese Singularitäten sind bereits eingehend studiert worden, u.a. von I.V. Dolgachev [14], [15], A.M. Gabrielov [22], V.S. Kulikov [32], V.V. Nikulin [16], H. Pinkham [48], [49], E. Looijenga [36], J. Wahl [56] und auch von mir [9], [10]. Gegenstand dieser Arbeiten war u.a. die Erzeugung der exzeptionellen Singularitäten durch eine Quotientenkonstruktion mit hyperbolischen Dreiecksgruppen, die Berechnung ihrer Dynkindiagramme und Monodromiegruppen, die Erklärung der von Dolgachev entdeckten seltsamen Dualität und die Beschreibung des Verhaltens der Singularitäten bei Deformationen.

Bei den Arbeiten zur Deformationstheorie der exzeptionellen Singularitäten ging es zunächst einmal darum, festzustellen, welche Singularitäten bei der Deformation einer 1-modularen exzeptionellen Singularität auftreten können. Solche Singularitäten können natürlich nur 1-modular oder 0-modular sein. Für die 0-modularen Singularitäten ist das Problem m.W. bisher nicht vollständig gelöst. Teilergebnisse findet man u.a. bei P.J. Giblin-C.G. Gibson [23]. Für die 1-modularen Singularitäten, die in dem hier interessierenden Zusammenhang wichtiger sind, habe ich die Frage bereits früher erschöpfend beantwortet. In meiner Arbeit "Die Hierarchie der 1-modularen Singularitäten" findet man Deformationsdiagramme, die beschreiben, welche 1-modularen Singularitäten in der semiuniversellen Deformation einer gegebenen 1-modularen exzeptionellen Singularität auftreten.

$U_{12}$  beispielsweise hat das folgende Diagramm:



Hier liegen zuunterst die drei parabolischen Singularitäten  $T_{333} = \tilde{E}_6$  sowie  $T_{244} = \tilde{E}_7$  und  $T_{236} = \tilde{E}_8$ . Darüber liegen exzeptionelle Singularitäten und die hyperbolischen Singularitäten  $T_{pqr}$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ . Man erinnert sich daran, daß nach Arnolds Klassifikation die 1-modularen Singularitäten gerade in diese drei Klassen zerfallen: die parabolischen, die hyperbolischen und die exzeptionellen Singularitäten.

Man kennt also die Hierarchie der 1-modularen Singularitäten. Das eigentliche Ziel der Arbeiten zur Deformation der exzeptionellen Singularitäten ist aber weiter gesteckt. Es geht nämlich darum, für diese Singularitäten eine ebenso schöne Beschreibung der semiuniversellen Deformation zu finden, wie man sie für die einfachen, die parabolischen und auch die hyperbolischen Singularitäten bereits gefunden hat ([8], [52], [53], [47], [34], [35], [36]). Genauer gesagt: Es geht darum, die semiuniverselle Deformation oder wenigstens gewisse ihrer Teile auf kanonische Weise aus einem möglichst einfachen Datum zu rekonstruieren, welches der Singularität in natürlicher Weise zugeordnet ist. Dieses Datum kann zum Beispiel eine quadratische Form sein, oder eine Liealgebra, oder ein Wurzelsystem, oder ein Diagramm. Die Arbeit von E. Looijenga [36] enthält Schritte in dieser Richtung, ebenso meine inzwischen glücklicherweise erschienene Arbeit [10] von 1978 und meine unveröffentlichte Vorlesungsausarbeitung "Zur Feinstruktur beschränkter symmetrischer Gebiete vom Typ IV". Dort habe ich für die

drei einfachsten unimodularen exzeptionellen Singularitäten  $Q_{10}$ ,  $Z_{11}$ ,  $E_{12}$  folgendes gezeigt: Die Basis der semiuniversellen Deformation - genauer gesagt ein Raum, der damit ganz eng zusammenhängt - ist die Baily-Borel-Kompaktifizierung  $(D/\Gamma)^*$  des Quotienten  $D/\Gamma$  eines beschränkten symmetrischen Gebietes  $D$  vom Typ IV bezüglich der Monodromiegruppe  $\Gamma$ , die als arithmetische Gruppe auf  $D$  operiert.

Die Monodromiegruppe  $\Gamma$  ist eine ursprünglich auf geometrische Weise definierte Untergruppe der Gruppe  $O(L)$  aller Automorphismen des Milnorgitters  $L$ , d.h. des mit der Schnittform versehenen Homologiegitters der Milnorfaser. H. Pinkham hat aber in einer Note in den Comptes Rendus [49] gezeigt, daß  $\Gamma$  sich als eine normale Untergruppe  $O^*(L) \subset O(L)$  von endlichem Index charakterisieren läßt, die durch  $L$  allein auf einfache arithmetische Weise vollständig bestimmt ist. Darüber hinaus hat W. Ebeling in seiner Dissertation [19] vor kurzem bewiesen, daß diese arithmetische Charakterisierung  $\Gamma = O^*(L)$  viel allgemeiner für eine große Klasse von Singularitäten gilt.

Damit verfügt man für die drei einfachsten unimodularen exzeptionellen Singularitäten über eine Konstruktion der gewünschten Art. Sie geht von einem Datum  $L$  aus, dem Milnorgitter, das der Singularität zwar auf geometrische Weise zugeordnet wird, seiner inneren Natur nach aber rein arithmetisch ist: Es ist eine Klasse ganzzahliger quadratischer Formen. Für die anderen 11 unimodularen exzeptionellen Singularitäten kann man diese Konstruktion zwar auch ausführen, aber es ist klar, daß für sie die Baily-Borel-Kompaktifizierung  $(D/\Gamma)^*$  nicht mit dem gesuchten Raum identisch ist, sondern nur dazu birational äquivalent. Trotzdem scheint mir eine arithmetische Untersuchung des Gitters  $L$  sinnvoll zu sein, da sie erstens genaue Informationen über die Randkomponenten von  $(D/\Gamma)^*$  liefert und da man zweitens hoffen kann, daß die dabei gewonnenen Einsichten bei der Konstruktion der gesuchten Kompaktifizierung von Nutzen sein werden.

Da  $L$  ein nicht entartetes Gitter vom Wittindex 2 und Rang  $> 4$  und demzufolge  $D$  ein beschränktes symmetrisches Gebiet vom Typ IV ist, dürfte zumindest für die Experten das Folgende klar sein. Die Konfiguration der Randkomponenten von  $(D/\Gamma)^*$  wird durch die Operation von  $\Gamma$  auf den Randkomponenten von  $D$  bestimmt, und diese entsprechen den primitiven total isotropen Untergittern von  $L$ . Dazu gehört ein Fahnenkomplex, der "Isotropiefahnenkomplex"  $\mathcal{F}(L)$  des Gitters  $L$ . Dieser 1-dimensionale simpliziale Komplex ist nichts anderes als das klassische Tits-Gebäude der orthogonalen Gruppe von  $L_Q = L \otimes \mathbb{Q}$ . Auf  $\mathcal{F}(L)$  operiert kanonisch  $O(L)$  und daher auch  $O^*(L)$ . Der Quotient  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  ist ein endlicher 1-dimensionaler simplizialer Komplex. Er bestimmt die Konfiguration der Randkomponenten von  $(D/\Gamma)^*$ . Die Ecken von  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  sind durch die Dimension der entsprechenden isotropen Gitter bewertet, also 1 oder 2. Darüber hinaus wird sich ergeben, daß jeder Ecke in natürlicher Weise eine bestimmte Singularität im Deformationsdiagramm der gegebenen exzeptionellen Singularität zugeordnet ist, und zwar so, daß den 2-Ecken parabolische Singularitäten entsprechen und den 1-Ecken maximale hyperbolische Singularitäten. Auf diese Weise wird  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  zu einem endlichen Graphen, dessen Ecken mit Singularitätentypen  $T_{pqr}$  bewertet sind. Für  $U_{12}$  beispielsweise ist dies der folgende Graph:



$T_{333}$   $T_{444}$   $T_{244}$   $T_{246}$   $T_{236}$

Das Hauptziel der hier vorgelegten Arbeit ist es, für alle 14 unimodularen exzeptionellen Singularitäten diese Konfi-

gurationsdiagramme  $\mathcal{F}(L)/\mathcal{O}(L)$  auf arithmetische Weise zu bestimmen und sie mit den auf geometrische Weise gewonnenen Deformationsdiagrammen zu vergleichen. Die wichtigsten Ergebnisse sind - nach einigen Vorbereitungen in § 1 - in § 2 zusammengestellt. Die übrigen Abschnitte bringen die Beweise, und diese laufen leider zum Teil und vermutlich mit Notwendigkeit auf eine Untersuchung der einzelnen Fälle hinaus.

Man kann die Ergebnisse dieser Arbeit wie folgt zusammenfassen und interpretieren: Für die unimodularen exzeptionellen Singularitäten spiegeln sich wesentliche Aspekte des Deformationsverhaltens in arithmetischen Eigenschaften des Milnorgitters. Es scheint jedoch so zu sein, daß bei strikter Beschränkung auf eine arithmetische Untersuchung des Gitters nicht alle Informationen gewonnen werden können, die für die Deformationstheorie von Interesse sind. Hierfür ist vielmehr zur Zeit eine zusätzliche geometrische Analyse erforderlich. Die Ergebnisse von E. Looijenga für hyperbolische Singularitäten und von W. Ebeling für höhere Singularitäten sowie meine eigenen noch unveröffentlichten Arbeiten führen mich zu der Annahme, daß die für die gesuchte Konstruktion grundlegenden Daten kombinatorischer Art und nicht einfach arithmetisch sind, daß es auf die Dynkindiagramme ankommt und nicht nur auf die quadratischen Formen. Ich erwarte, daß dieses kombinatorische Element bei den höheren Singularitäten stärker hervortreten wird, und daß sich dies schon bei den bimodularen exzeptionellen Singularitäten zeigen muß. Die unimodularen Singularitäten erweisen sich hier als ein schöner Grenzfall: Für sie sind wenigstens noch einige wesentliche Züge des Deformationsverhaltens in der Arithmetik des Milnorgitters aufgehoben.

Ich möchte allen danken, die mir bei der Arbeit geholfen haben. C.T.C. Wall danke ich für eine erste Einführung in die Theorie der quadratischen Formen, E. Looijenga für einheitliche Formulierungen und Beweise einiger Ergebnisse, die ich vorher durch Analyse der

Einzelfälle gefunden hatte. Besonders aber danke ich M. Kneser und K.P. Sondergeld für sehr viel Hilfe bei der Erledigung einer ganzen Reihe von Einzelproblemen. Insbesondere war Herr Sondergeld so freundlich, den kompliziertesten Fall  $U_{12}$  so vollständig für mich zu analysieren, daß mir kaum etwas zu tun übrig bleib. Schließlich danke ich Herrn Van de Ven und dem Mathematischen Institut der Universität Leyden für ihre Gastfreundschaft, die mir geholfen hat, diese Arbeit endlich zu Ende zu bringen.

## § 1. Definitionen

### 1.1. Gitter

Unter einem  $\mathbb{Z}$ -Gitter verstehen wir in dieser Arbeit einen endlich erzeugten freien  $\mathbb{Z}$ -Modul  $L$  zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform  $b : L \times L \rightarrow \mathbb{Q}$  mit Werten im Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen. Wenn  $b$  nur Werte in den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  annimmt, also  $b : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ , nennen wir  $L$  ein ganzzahliges Gitter. Ist im Kontext klar oder unerheblich, was gemeint ist, sprechen wir einfach von einem Gitter. Wir schreiben auch  $(x, y)$  statt  $b(x, y)$ . Ein Isomorphismus von Gittern ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{Z}$ -Moduln, der mit den Bilinearformen verträglich ist. Die Isomorphieklassse von  $L$  bezeichnen wir mit  $\text{class } L$ .

Zu einem  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L$  gehört immer eine quadratische Form  $q : L \rightarrow \mathbb{Q}$ , die wir durch

$$q(x) = b(x, x)$$

definieren. Für ganzzahlige Gitter hat  $q$  Werte in  $\mathbb{Z}$ . Ein gerades Gitter ist ein ganzzahliges Gitter, für das

$q$  Werte in  $2\mathbb{Z}$  hat.

Ein Untergitter von  $L$  ist ein  $\mathbb{Z}$ -Untermodul  $M \subset L$  mit der induzierten Bilinearform.  $M$  heißt primitiv, wenn  $L/M$  torsionsfrei ist. Die Menge der primitiven Untergitter von  $L$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}(L)$ .

Für ein Untergitter  $M \subset L$  bezeichnet  $M_L^\perp$  das Untergitter der zu  $M$  orthogonalen Elemente. Wir schreiben  $M^\perp$  statt  $M_L^\perp$ , wenn  $L$  durch den Kontext festgelegt ist. Orthogonale direkte Summen von Gittern  $M, N$  bezeichnen wir durch  $M \perp N$ , nicht notwendig orthogonale direkte Summen durch  $M \oplus N$ . Zu jedem Gitter  $L$  gehört sein Radikal

$$L^0 = L_L^\perp$$

und das reduzierte Gitter  $\bar{L} = L/L^0$  mit den induzierten Formen  $\bar{b}$  bzw.  $\bar{q}$ . Ein Gitter  $L$  mit  $L^0 = 0$  heißt nichtentartet. Für jedes  $L$  gibt es Isomorphismen  $L \cong \bar{L} \perp L^0$ .

$L$  sei ein Gitter und  $L_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbb{R}$ . Unter der Signatur von  $L$  verstehen wir die Signatur von  $L_{\mathbb{R}}$ , d.h. das Tripel von Zahlen  $(n_-, n_+, n_0)$ , wo  $n_-$  bzw.  $n_+$  die Dimensionen der maximalen negativ bzw. positiv definiten Unterräume von  $L_{\mathbb{R}}$  und  $n_0$  die Dimension des reellen Radikals  $(L_{\mathbb{R}})^0$ . Natürlich ist  $n = n_+ + n_- + n_0$  der Rang von  $L$  und  $i_{\mathbb{R}}(L) = n_0 + \min(n_+, n_-)$  der reelle Witt-index, d.h. die Dimension der maximalen total isotropen Unterräume von  $L_{\mathbb{R}}$ .

Die Diskriminante  $d(L)$  eines  $\mathbb{Z}$ -Gitters  $L$  können wir einfach mit Hilfe irgendeiner Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $L$  durch  $d(L) = \det(b(e_i, e_j))$  definieren.  $L$  ist nichtentartet genau wenn  $d(L) \neq 0$ . Für entartete  $L$  kann man die "reduzierte Diskriminante"  $\bar{d}(L)$  durch  $\bar{d}(L) = d(\bar{L})$  definieren.

Den dualen  $\mathbb{Z}$ -Modul zu einem  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L$  bezeichnen wir mit  $L^\# := \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ . Wenn  $L$  nichtentartet ist, ist  $L^\#$  kanonisch ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter, das duale Gitter. In diesem Fall fassen wir  $L$  mittels der kanonischen Einbettung  $L \hookrightarrow L^\#$  als Untergitter von  $L$  auf. Allgemein ist der Quotient  $G_L$  von  $L^\#$  nach dem Bild von  $L$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Sie ist endlich genau wenn  $L$  nichtentartet ist, und dann gilt  $G_L = L^\# / L$  und  $|G_L| = |d(L)|$ .

## 1.2. Spiegelungsgruppen.

Zu jedem Gitter  $L$  mit quadratischer Form  $q$  gehört eine orthogonale Gruppe  $O(q)$ , und dazu gehören die Gruppen  $O_{\mathbb{Z}}(q)$  und  $O_{\mathbb{Q}}(q)$  sowie  $O_{\mathbb{R}}(q)$ , also  $O_{\mathbb{Z}}(q) = O(L)$ , die Automorphismengruppe des Gitters  $L$ , auch Einheitengruppe genannt, und  $O_{\mathbb{Q}}(q) = O(L_{\mathbb{Q}})$  sowie  $O_{\mathbb{R}}(q) = O(L_{\mathbb{R}})$ , die Automorphismengruppen der quadratischen Räume  $L_{\mathbb{Q}} = L \otimes \mathbb{Q}$  und  $L_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbb{R}$ . Wir haben Untergruppen von  $O(L)$  zu betrachten, die von Spiegelungen erzeugt werden.

Zu jedem nicht-isotropen Vektor  $v \in L_{\mathbb{R}}$  bzw.  $v \in L_{\mathbb{Q}}$  gehört eine Spiegelung  $s_v \in O(L_{\mathbb{R}})$  bzw.  $s_v \in O(L_{\mathbb{Q}})$ , nämlich

$$s_v(x) = x - 2 \frac{(x, v)}{(v, v)} v.$$

Elemente  $v \in L$  mit  $(v, v) = \pm 1, \pm 2$  definieren Spiegelungen  $s_v \in O(L)$ , und umgekehrt folgt aus  $s_v \in O(L)$  und  $(v, L) = \mathbb{Z}$  notwendig  $(v, v) = \pm 1, \pm 2$ . Wir beschränken uns jetzt auf gerade Gitter, so daß nur  $(v, v) = \pm 2$  möglich ist. Es sei

$$\Lambda_+(L) = \{v \in L \mid q(v) = 2\}$$

$$\Lambda_-(L) = \{v \in L \mid q(v) = -2\}$$

Dazu gehören die Spiegelungsgruppen

$$R_+(L) = \langle s_v \rangle_{v \in \Lambda_+(L)}$$

$$R_-(L) = \langle s_v \rangle_{v \in \Lambda_-(L)}.$$

Wir werden diese Gruppen jetzt auf andere Weise charakterisieren. Wir setzen voraus, daß  $q$  nichtentartet ist. Dann werden  $O(L_{\mathbb{R}})$  bzw.  $O(L_{\mathbb{Q}})$  bekanntlich von Spiegelungen erzeugt (vgl. z.B. [40] § 43 B). Jedes  $\varphi \in O(L_{\mathbb{R}})$  ist Produkt von höchstens  $n$  Spiegelungen:

$$\varphi = s_{v_1} \cdots s_{v_k}.$$

Dann definiert man die reelle Spinornorm

$$\sigma_+(\varphi) \in \mathbb{R}/\mathbb{R}^{*2} = \{\pm 1\} \text{ wie folgt}$$

$$\sigma_+(\varphi) = \prod_{j=1}^k q(v_j) \pmod{\mathbb{R}^{*2}}$$

(vgl. z.B. [40] § 55). Multipliziert man  $q$  mit  $-1$ , dann gilt natürlich  $O(q) = O(-q)$ , also  $\varphi \in O(-q)$ . Aber als Element von  $O(-q)$  hat  $\varphi$  eine andere Spinornorm, nämlich

$$\sigma_-(\varphi) = \prod_{j=1}^k (-q(v_j)) \pmod{\mathbb{R}^{*2}}.$$

$\sigma_+$  und  $\sigma_-$  definieren für jedes Gitter  $L$  zwei Homomorphismen  $O(L_{\mathbb{R}}) \rightarrow \{\pm 1\}$ . Durch Komposition mit den kanonischen Homomorphismen  $O(L) \rightarrow O(L_{\mathbb{R}}) \rightarrow O(L_{\mathbb{R}})$  erhält man daraus zwei kanonische Homomorphismen

$$\sigma_+ : O(L) \rightarrow \{\pm 1\}$$

$$\sigma_- : O(L) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

Dazu gehören die Kerne dieser Homomorphismen:

$$O_+(L) = \ker \sigma_+$$

$$O_-(L) = \ker \sigma_-.$$

Als weiteren kanonischen Homomorphismus hat man die Determinante

$$\delta : O(L) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

Ihr Kern ist die spezielle orthogonale Gruppe

$$O^+(L) = \ker \delta.$$

Schließlich induziert die Restklassenabbildung  $L \rightarrow G_L$  einen kanonischen Homomorphismus

$$\tau : O(L) \rightarrow \text{Aut}(G_L).$$

Wir bezeichnen seinen Kern mit

$$\tilde{O}(L) = \ker \tau.$$

Definition:

$$O_+^*(L) = O_+(L) \cap \tilde{O}(L)$$

$$O_-^*(L) = O_-(L) \cap \tilde{O}(L)$$

Wenn das Vorzeichen  $\pm$  im Kontext festgelegt oder unwichtig ist, schreiben wir  $O^*(L)$  statt  $O_+^*(L)$  bzw.  $O_-^*(L)$ . Zu dieser Definition bemerken wir, daß für ein nichtentartetes reell indefinites Gitter folgendes gilt.

$O^*(L) = O^+(L) \cap O_+(L) \subset O(L)$  ist eine normale Untergruppe vom Index 4. Sie bildet mit jeder ihrer drei anderen Nebenklassen eine Untergruppe vom Index 2 in  $O(L)$ . Diese drei Gruppen sind gerade die Gruppen  $O^+(L)$ ,  $O_+^*(L)$  und  $O_-(L)$ . Die vier Nebenklassen von  $O^*(L)$  in  $O(L)$  sind gerade die Durchschnitte von  $O(L)$  mit den vier topologischen Zusammenhangskomponenten der reellen Liegruppe



$O(L_{\mathbb{R}})$ .

Die Bedeutung der Gruppen  $O^*(L)$  liegt in einem vor kurzem bewiesenen wichtigen Satz von M. Kneser ([30], Satz 4). Dieser Satz besagt folgendes: Für ein gerades nichtentartetes Gitter vom Rang  $\geq 6$  und Wittindex  $\geq 2$ , welches noch gewissen häufig erfüllten Zusatzvoraussetzungen genügt, gilt

$$\begin{aligned} R_+(L) &= O_+^*(L) \\ R_-(L) &= O_-^*(L). \end{aligned}$$

Im unimodularen Fall wurde dies schon von C.T.C. Wall bewiesen ([58]).

### 1.3. Isotropie-Fahnenkomplexe.

$L$  sei ein Gitter und  $q$  seine quadratische Form. Ein Untergitter  $M \subset L$  heißt total isotrop, wenn  $M \subset M^\perp$ . Wir setzen im folgenden  $L$  als nichtentartet voraus. In  $\mathcal{L}(L)$  definieren wir die folgenden Mengen isotroper Gitter:

$$\mathcal{J}(L) = \{M \in \mathcal{L}(L) \mid M \subset M^\perp, M \neq 0\}$$

$$\mathcal{J}_k(L) = \{M \in \mathcal{J}(L) \mid \text{rang } M = k\}.$$

Es sei  $\mathcal{J}(L) \neq \emptyset$ . Das Maximum  $i$  der  $k$  mit  $\mathcal{J}_k(L) \neq \emptyset$  ist der rationale Wittindex  $i = i_Q(L)$ . Natürlich gilt  $2i \leq \text{rang}(L) = n$  und

$$\mathcal{J}(L) = \bigcup_{k=1}^i \mathcal{J}_k(L).$$

Wir definieren jetzt einen abstrakten simplizialen Komplex  $\mathcal{F}(L)$  mit der Eckenmenge  $\mathcal{J}(L)$ . Dabei verstehen wir allgemein unter einem abstrakten simplizialen Komplex  $\mathcal{F}$  mit

der Eckenmenge  $\mathcal{J}$  eine Menge  $\mathcal{F}$  von nichtleeren endlichen Teilmengen von  $\mathcal{J}$ , die den folgenden zwei Bedingungen genügt:

- (i)  $e \in \mathcal{J}$  impliziert  $\{e\} \in \mathcal{F}$
- (ii)  $\sigma \in \mathcal{F}$  und  $\tau \subset \sigma$  und  $\tau \neq \emptyset$  impliziert  $\tau \in \mathcal{F}$ .

Die Elemente von  $\mathcal{F}$  heißen die Simplices von  $\mathcal{F}$ .

#### Definition:

Der Isotropie-Fahnenkomplex  $\mathcal{F}(L)$  ist die Menge der nicht leeren Teilmengen von  $\mathcal{J}(L)$ , welche eine Fahne bilden.

$\mathcal{F}(L)$  ist ein  $(i-1)$ -dimensionaler simplizialer Komplex von besonderer Struktur:  $\mathcal{F}(L)$  ist ein Gebäude vom Typ  $C_1$  im Sinne von J. Tits ([55], Theorem 7.4).

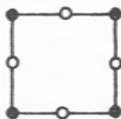
Wenn  $2i < n$ , kann  $\mathcal{F}(L)$  kanonisch mit dem klassischen Titsgebäude  $\Delta(SO(q), \mathbb{Q})$  identifiziert werden, denn man erhält eine bijektive Abbildung von  $\mathcal{F}(L)$  auf die Menge der eigentlichen  $\mathbb{Q}$ -parabolischen Untergruppen von  $SO(q)$ , indem man jeder Fahne ihren Stabilisator in  $SO(q)$  zuordnet. Im Falle  $2i = n \geq 4$  gilt dies nicht. In diesem Fall ist  $\Delta(SO(q), \mathbb{Q})$  der Oriflamme-Komplex zu dem durch  $L_Q$  definierten polaren Raum, und dieser Komplex ist ein Gebäude vom Typ  $D_1$  (vgl. [55], 7.12). Es versteht sich von selbst, daß wir  $\mathcal{F}(L)$  auch anders hätten definieren können: als Fahnenkomplex zu den isotropen Untervektorräumen von  $L_Q$  oder zu den projektiven linearen Teilräumen der durch  $q$  definierten rationalen Quadrik in dem projektiven Raum  $P(L_Q)$ .

Wir sind besonders an dem Fall  $i_Q(L) = 2$  interessiert. In diesem Fall ist  $\mathcal{F}(L)$  von besonders einfacher kombinatorischer Struktur:  $\mathcal{F}(L)$  ist ein verallgemeinertes Viereck ([55] 7.2.8). Ein gewöhnliches Viereck hat 4 Ecken und 4 Seiten:





Man kann daraus 8 vollständige Fahnen bilden. Der zugehörige Fahnenkomplex ist ein Zykel mit acht 1-Simplices:



Der Isotropie-Fahnenkomplex  $\mathcal{F}(L)$  besteht aus sehr vielen solchen Zykeln - er ist ein Gebäude vom Typ  $C_2$ .

#### 1.4. Symmetrische Gebiete.

Wir betrachten weiterhin ein Gitter  $L$  vom Rang  $n > 4$  mit  $i_Q(L) = 2$ . Wir setzen jetzt zusätzlich  $i_{\mathbb{R}}(L) = 2$  voraus. In diesem Fall hat man die folgende alternative Beschreibung von  $\mathcal{F}(L)$ . Es sei  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  der komplexe projektive Raum zu  $L_{\mathbb{C}} = L \otimes \mathbb{C}$  und

$$Q_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid q(z) = 0\}.$$

In dieser komplexen projektiven Quadrik  $Q_{\mathbb{C}}$  liegen die analog definierten reellen und rationalen Quadriken  $Q_{\mathbb{R}}$  und  $Q_{\mathbb{Q}}$ . Für die Signatur von  $q$  gilt  $(n_-, n_+) = (n-2, 2)$  oder  $(n_-, n_+) = (2, n-2)$ . Da wir notfalls von  $q$  zu  $-q$  übergehen können, ohne  $\mathcal{F}(L)$  zu ändern, setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus:  $(n_-, n_+) = (n-2, 2)$ . In  $Q_{\mathbb{C}}$  definieren wir dann mittels der zu  $q$  gehörigen

hermiteschen Form die offene Menge

$$U = \{z \in Q_{\mathbb{C}} \mid b(z, \bar{z}) > 0\}.$$

Diese Menge zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten  $U = U_0 \cup U_1$ . Wir wählen eine, etwa  $U_0$ , davon aus und bezeichnen sie mit  $D_L$ .

$$D_L = U_0.$$

$D_L$  ist ein hermitesches symmetrisches Gebiet vom Typ IV, und die Einbettung  $D_L \subset Q_{\mathbb{C}}$  ist gerade die Boreleinbettung in den zugehörigen kompakten hermiteschen symmetrischen Raum  $Q_{\mathbb{C}}$ . Der Rand  $\partial D_L$  von  $D_L$  zerfällt im Sinne der Theorie der hermiteschen symmetrischen Gebiete in 0-dimensionale und 1-dimensionale Randkomponenten ([61]). Die 0-dimensionalen Randkomponenten sind die Punkte von  $\partial_0 D_L = Q_{\mathbb{R}}$ .

$$\partial_1 D_L = \partial D_L \setminus \partial_0 D_L$$

zerfällt in 1-dimensionale Randkomponenten. Sie sind die Durchschnitte von  $\partial_1 D_L$  mit den Komplexifizierungen der Geraden in  $Q_{\mathbb{R}}$ . Durch die Vorgabe von  $L$  sind unter den Randkomponenten von  $D_L$  die rationalen Randkomponenten ausgezeichnet. In der eben gegebenen Beschreibung erhält man diese rationalen Randkomponenten, wenn man statt von allen Punkten und Geraden in  $Q_{\mathbb{R}}$  nur von den Punkten und Geraden in  $Q_{\mathbb{Q}}$  ausgeht.  $\mathcal{B}_0(L)$  bzw.  $\mathcal{B}_1(L)$  sei die Menge der 0- bzw. 1-dimensionalen rationalen Randkomponenten und

$$\mathcal{B}(L) = \mathcal{B}_0(L) \cup \mathcal{B}_1(L).$$

Man erhält kanonische bijektive Abbildungen

$$\mathcal{J}_1(L) \rightarrow \mathcal{B}_0(L)$$

$$\mathcal{J}_2(L) \rightarrow \mathcal{B}_1(L)$$

Sie sind definiert durch

$$E \mapsto P(E \otimes C) \quad E \in \mathcal{J}_1(L)$$

$$E \mapsto P(E \otimes C) \cap \partial P_L \quad \text{für } E \in \mathcal{J}_2(L)$$

Definiert man für  $F_0 \in \mathcal{B}_0$  und  $F_1 \in \mathcal{B}_1$  Inzidenz durch  $F_0 \in \bar{F}_1$ , dann geben die gerade definierten Abbildungen eine inzidenzserhaltende bijektive Abbildung

$$\mathcal{J}(L) \rightarrow \mathcal{B}(L).$$

Es folgt: Der Isotropie-Fahnenkomplex  $\mathcal{F}(L)$  ist kanonisch isomorph zum Fahnenkomplex der rationalen Randkomponenten des beschränkten symmetrischen Gebietes  $D_L$ .

### 1.5. Quotientenkomplexe.

Es sei weiterhin  $L$  ein nichtentartetes Gitter und  $\mathcal{F}(L)$  sein Isotropie-Fahnenkomplex mit der Eckenmenge  $\mathcal{J}(L)$ . Die Eckenmenge  $\mathcal{J}(L)$  hat eine Partialordnung durch die Inklusion. Dadurch ist  $\mathcal{F}(L)$  ein geordneter simplizialer Komplex. Außerdem hat  $\mathcal{F}(L)$  eine Färbung: Jedes Simplex von  $\mathcal{F}(L)$  ist durch den Typ der entsprechenden Fahne gefärbt. Insbesondere ist  $\mathcal{F}(L)$  für  $i_{\mathcal{F}}(L) = 2$  ein 1-dimensionaler simplizialer Komplex mit gerichteter Kantenmenge und gefärbter Eckenmenge. Die Ecken aus  $\mathcal{J}_1(L)$  nennen wir schwarze Ecken und bezeichnen sie in den Diagrammen durch einen schwarzen Punkt, die Ecken aus  $\mathcal{J}_2(L)$  nennen wir weiße Ecken und bezeichnen sie durch einen weißen Punkt. Jedes 1-Simplex hat eine schwarze und eine

weiße Ecke:



Die Gruppe  $O(L_{\mathbb{Q}})$  operiert auf  $\mathcal{F}(L)$  als gefärbtem geordnetem simplizialen Komplex. Dadurch wird für jede Untergruppe  $G \subset O(L_{\mathbb{Q}})$  ebenfalls eine Operation auf  $\mathcal{F}(L)$  induziert. Die Quotientenmenge  $\mathcal{F}(L)/G$  ist in kanonischer Weise die Eckenmenge eines abstrakten simplizialen Komplexes  $\mathcal{K}$ . Die Simplices dieses Komplexes sind die Bilder der Simplices von  $\mathcal{F}(L)$  unter der Restklassenabbildung  $\mathcal{J}(L) \rightarrow \mathcal{J}(L)/G$ . Andererseits operiert  $G$  auf  $\mathcal{F}(L)$ , und für den Orbitraum hat man eine kanonische surjektive Abbildung

$$\mathcal{F}(L)/G \rightarrow \mathcal{K}.$$

Wir wollen im folgenden voraussetzen, daß diese Abbildung bijektiv ist, d.h.  $\mathcal{F}(L)/G$  ein simplizialer Komplex mit der Eckenmenge  $\mathcal{J}(L)/G$ . Es wird sich herausstellen, daß diese Annahme in den uns interessierenden Fällen zutrifft. Wir nennen den geordneten und gefärbten Komplex  $\mathcal{F}(L)/G$  den Quotientenkomplex.

In den Fällen, die uns interessieren, ist  $G$  eine arithmetische Gruppe, z.B.  $G = O(L)$  oder  $G = O^*(L)$ . Dann ergibt sich aus dem Hauptresultat der Reduktionstheorie für arithmetische Gruppen ([6] 15.6)

$$|\mathcal{F}(L)/G| < \infty.$$

$\mathcal{F}(L)/G$  ist also dann ein endlicher simplizialer Komplex, der durch die Fahnentypen gefärbt ist. Ist insbesondere  $i_{\mathcal{F}}(L) = 2$ , dann ist  $\mathcal{F}(L)/G$  ein endlicher 1-dimensionaler simplizialer Komplex mit schwarz und weiß gefärbten Ecken. Die Zahl der schwarzen Ecken ist  $h_{1,G}(L)$ , die der weißen Ecken  $h_{2,G}(L)$ , wobei die Klassenzahl

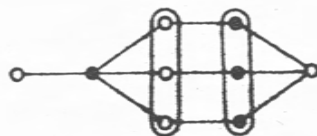
$$h_{k,G}(L) = |\mathcal{J}_k(L)/G|$$

die Zahl der  $G$ -Äquivalenzklassen primitiver total isotroper Untergitter von  $L$  vom Rang  $k$  ist. Wir werden diese endlichen Komplexe durch ein Diagramm mit weißen und schwarzen Punkten beschreiben, dessen Verbindungsstrecken  $\bullet \text{---} \circ$  den  $G$ -Klassen voller isotroper Fahnen  $F_1 \subset F_2$  entsprechen. Wir nennen dies Diagramm das  $G$ -Konfigurationsdiagramm von  $L$ . Ein Beispiel für ein solches Diagramm wurde schon in der Einleitung angegeben:



Eine unserer Aufgaben wird darin bestehen, für alle 14 exzeptionellen Milnorgitter  $L$  die Konfigurationsdiagramme für  $\mathcal{F}(L)/O(L)$  und  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  explizit zu berechnen.

Auf  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  operiert kanonisch die endliche Gruppe  $O(L)/O^*(L)$ . Der Quotient ist  $\mathcal{F}(L)/O(L)$ . Wenn beide Komplexe simplizial sind, genügt es, die Operation auf der Eckenmenge zu beschreiben. Wir begnügen uns mit der Angabe der Orbits in der Eckenmenge. Soweit diese nicht aus einem einzigen Punkt bestehen, kennzeichnen wir die Punkte in einem Orbit durch Einkreisen. Beispiel:



### 1.6. Baily-Borel-Kompaktifizierung

$L$  sei ein nichtentartetes Gitter vom Rang  $n > 4$  und  $i_{\mathbb{Q}}(L) = i_{\mathbb{R}}(L) = 2$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $(n_-, n_+) = (n-2, 2)$ . Ferner sei  $\Gamma \subset O_{\mathbb{Q}}(L)$  eine Untergruppe von endlichem Index, z.B.  $\Gamma = O^*(L)$ . Dann operiert  $\Gamma$  eigentlich diskontinuierlich auf dem beschränkten symmetrischen Gebiet  $D_L$  und der Quotient  $D_L/\Gamma$  hat nach W.L. Baily und A. Borel [5] eine kanonische Kompaktifizierung  $(D_L/\Gamma)^*$ , die als Menge durch

$$(D_L/\Gamma)^* = D_L \cup \bigsqcup_{F \in \mathcal{B}(L)} F / \Gamma$$

definiert ist. Der Rand

$$\bigsqcup_{F \in \mathcal{B}(L)} F / \Gamma$$

besteht aus  $h_{2,\Gamma}(L)$  Kurven mit insgesamt  $h_{1,\Gamma}(L)$  Spitzen, wobei eine Spitze zu mehreren Kurven gehören kann. Die Konfiguration dieser Kurven wird gerade durch das  $\Gamma$ -Konfigurationsdiagramm zu  $\mathcal{F}(L)/\Gamma$  beschrieben: Die weißen Ecken entsprechen Kurven, die schwarzen den Spitzen. Eine Strecke



bedeutet, daß die entsprechende Spitze auf der entsprechenden Kurve liegt. Die mit einer weißen Ecke direkt verbundenen schwarzen Ecken entsprechen bijektiv den Spitzen der entsprechenden Kurve, denn wir haben vorausgesetzt, daß  $\mathcal{F}(L)/\Gamma$  ein simplizialer Komplex ist, und für die später betrachteten Gitter ist dies der Fall.

Die zu einem 2-dimensionalen primitiven total isotropen Gitter  $E \subset L$  gehörige Randkurve ist kanonisch isomorph zu

$$H_E / \Gamma_E,$$

wo

$$H_E = \mathbb{P}(E_{\mathbb{C}}) \cap \partial D_L$$

die zu  $E$  gehörige Randkomponente ist und

$$\Gamma_E = \text{Bild}(\text{Stab}_{\Gamma}(E) \rightarrow \text{SL}(E)).$$

Wir nennen diese Gruppe  $\Gamma_E$  die Stabilisatorgruppe von  $E$ . Sie bestimmt insbesondere das Geschlecht und die Spitzen von  $H_E / \Gamma_E$  und stellt eine zusätzliche wichtige Information dar, die zum Konfigurationsdiagramm hinzukommt.

### 1.7. Stabilisatorgruppen und Spitzen.

$E \subset L$  sei wie in 1.6 ein zweidimensionales isotropes Gitter und  $\Gamma_E$  seine Stabilisatorgruppe. Bei Identifikation von  $E$  mit  $\mathbb{Z}^2$  liefert  $\Gamma_E$  eine Untergruppe von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ , die durch  $E$  bis auf Konjugation in  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  bestimmt ist. Es sei  $\mathcal{C}(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$  die Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Wegen  $\Gamma \subset \mathcal{O}(L)$  induziert die Zuordnung  $E \mapsto \Gamma_E$  eine wohldefinierte kanonische Abbildung

$$\text{STAB} : \mathcal{J}_2(L) / \Gamma \rightarrow \mathcal{C}(\text{SL}(2, \mathbb{Z})).$$

Wir wollen diese Bewertung der weißen Eckenmenge von  $\mathcal{J}(L) / \Gamma$  mit Konjugationsklassen von Untergruppen von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  kurz die Stabilisatorbewertung von  $\mathcal{J}(L) / \Gamma$  nennen. Wir können diese Bewertung vergrößern, indem wir jeder Konjugationsklasse von arithmetischen Untergruppen von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  die Zahl  $s$  ihrer Spitzen zuordnen. Wir erhalten auf diese Weise eine Bewertung der weißen Ecken von  $\mathcal{J}(L) / \Gamma$  mit natürlichen Zahlen

$$s : \mathcal{J}_2(L) / \Gamma \rightarrow \mathbb{N}.$$

Wir nennen diese Abbildung die Spitzenbewertung.

### 1.8. Kongruenzuntergruppen

Die Untergruppen von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ , welche als Stabilisatorgruppen bei der Untersuchung der exzeptionellen Gitter auftreten werden, sind wohlbekannte klassische Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe. Für jede natürliche Zahl  $N$  definieren wir die folgenden Kongruenzuntergruppen

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1(N) \quad b \equiv c \equiv 0(N) \right\}$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1(N) \quad c \equiv 0(N) \right\}$$

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0(N) \right\}$$

Die Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma(N)$  der Stufe  $N$  ist die homogene Kongruenzuntergruppe  $N$ -ter Stufe vom größten Index in  $\Gamma(1) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Die Gruppe  $\Gamma_0(N)$  ist für eine Primzahl  $N \neq 5, 7, 11$  eine Kongruenzuntergruppe  $N$ -ter Stufe von kleinstem Index in  $\Gamma(1)$ .  $H$  sei die obere Halbebene. Die Modulkurven

$$Y(N) = H / \Gamma(N)$$

$$Y_1(N) = H / \Gamma_1(N)$$

$$Y_0(N) = H / \Gamma_0(N)$$

haben die folgende Bedeutung:  $Y(N)$  parametrisiert ellip-

tische Kurven zusammen mit einem bestimmten Isomorphismus der Gruppe der Punkte der Ordnung  $N$  mit  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ . Die Kurve  $Y_1(N)$  parametrisiert elliptische Kurven zusammen mit einem Punkt der Ordnung  $N$ , und  $Y_0(N)$  parametrisiert elliptische Kurven zusammen mit einer zyklischen Untergruppe der Ordnung  $N$ . Diese Modulkurven sind vielfach untersucht worden (vgl. z.B. [31] Band 2, p. 52, ferner [24] Band 3, p. 303-304, oder auch [51] Chapter 1.6 und [45], [46]). Man kennt für diese Modulkurven ihr Geschlecht und die Zahl  $s$  der Spitzen. Insbesondere weiß man, für welche Werte von  $N$  die Kurven rational sind:  $N = 1, \dots, 5$  für  $\Gamma(N)$ , sowie  $N = 1, \dots, 10, 12$  für  $\Gamma_1(N)$  und  $N = 1, \dots, 10, 12, 13, 16, 18, 25$  für  $\Gamma_0(N)$ . Die folgende Tabelle zeigt die Zahl der Spitzen für diese rationalen Modulkurven.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	16	18	25
$s(\Gamma(N))$	1	3	4	6	12										
$s(\Gamma_1(N))$	1	2	2	3	4	4	6	6	8	8	10				
$s(\Gamma_0(N))$	1	2	2	3	2	4	2	4	4	4	6	2	6	8	6

### 1.9. Die Gitter $L_{pqr}$

Wir wollen jetzt die Gitter  $L_{pqr}$  einführen, die den Hauptgegenstand unserer Untersuchung darstellen werden. Obwohl, wie wir in § 3 sehen werden, eine invariante rein Gitter-theoretische Charakterisierung möglich wäre, ziehen wir es vor, die Gitter mit Hilfe einer Basis  $e_1, \dots, e_n$  und der zugehörigen Matrix der Skalarprodukte  $(e_i, e_j)$  zu beschreiben, und zwar deswegen, weil dies hinsichtlich der geometrischen Bedeutung der Gitter in der Natur der Sache

liegt, da die Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  einer geometrischen Basis des Milnorgitters entspricht (vgl. 1.11). Wir beschreiben die Matrix der  $(e_i, e_j)$  durch einen Graphen mit den Ecken  $\{1, \dots, n\}$  und mit gefärbten Kanten. Dabei sind verschiedene Ecken  $i, j$  durch  $|(e_i, e_j)|$  Kantenverbunden. Diese Kanten sind mit dem Vorzeichen von  $(e_i, e_j)$  gefärbt. Graphisch werden positive Kanten mit durchgezogenen Linien dargestellt und negative mit Unterbrochenen

● — ● für  $(e_i, e_j) > 0$

● - - ● für  $(e_i, e_j) < 0$ .

Die Diagonalelemente definieren wir durch

$$(e_i, e_i) = -2.$$

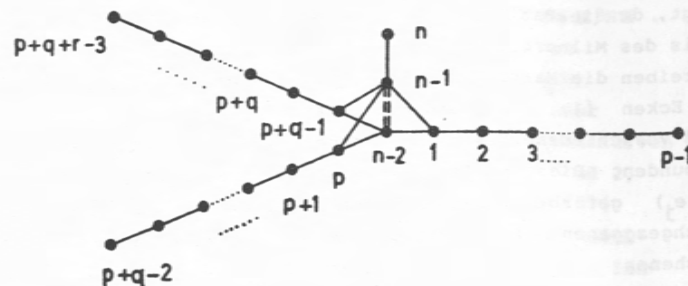
Damit wird die Vorgabe der Matrix  $((e_i, e_j))$  äquivalent zur Vorgabe des entsprechenden Diagramms.

Wir geben nun die Graphen an, die unsere Gitter beschreiben. Es seien  $p, q, r$  irgendwelche natürlichen Zahlen mit  $2 \leq p \leq q \leq r$ . Wir setzen

$$n = p+q+r.$$

Definition:

$D_{pqr}$  sei der folgende Graph mit den Ecken  $\{1, \dots, n\}$



Ferner sei  $D'_{pqr}$  der Graph, der aus  $D_{pqr}$  durch Fortlassen von  $n$  entsteht, und  $D''_{pqr}$  der Graph, der aus  $D_{pqr}$  durch Fortlassen von  $n$  und  $n-1$  entsteht. Die Definition des sternförmigen Graphen  $D''_{pqr}$  verallgemeinern wir in offensichtlicher Weise auf alle Tripel von natürlichen Zahlen  $p, q, r \geq 1$ .

#### Definition:

$L_{pqr}$  sei das Gitter  $\mathbb{Z}^n$  mit der Bilinearform, deren Matrix  $((e_i, e_j))$  bezüglich der Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  durch  $D_{pqr}$  beschrieben wird.

Entsprechend sind die Gitter  $L'_{pqr}$  und  $L''_{pqr}$  durch  $D'_{pqr}$  und  $D''_{pqr}$  definiert. Man hat kanonische Inklusionen von primitiven Untergittern

$$L''_{pqr} \subset L'_{pqr} \subset L_{pqr}.$$

Diese Gitter werden später ausführlich untersucht. An dieser Stelle geben wir nur einige ihrer einfachsten Eigenschaften an. Signatur und Diskriminante dieser ganzzahligen geraden Gitter sind bekannt und leicht zu bestimmen. Es sei

$$d_{pqr} = pqr - pq - pr - qr = pqr \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right).$$

Dann gilt:

$$d(L''_{pqr}) = -(-1)^n d_{pqr}$$

Es sei

$$L'''_{pqr} = \bigoplus_{i=1}^{n-3} \mathbb{Z} e_i \subset L''_{pqr}.$$

Offenbar ist  $L'''_{pqr}$  negativ definit. Hieraus und aus der Formel für die Diskriminante ergibt sich für die Signatur von  $L''_{pqr}$

$$(n_-, n_+, n_0) = \begin{cases} (n-2, 0, 0) & \text{für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \\ (n-3, 0, 1) & \text{für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 \\ (n-3, 1, 0) & \text{für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1. \end{cases}$$

Die Gitter  $L_{pqr}$  und  $L'_{pqr}$  kann man folgendermaßen mit Hilfe von  $L''_{pqr}$  beschreiben. Es sei

$$f_1 = e_{n-2} - e_{n-1}$$

$$f_2 = e_{n-2} - e_{n-1} - e_n.$$

Dann gilt

$$((f_i, f_j)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Insbesondere erzeugt  $f_1$  ein eindimensionales isotropes Gitter

$$K = \mathbb{Z} f_1$$

und  $f_1, f_2$  zusammen erzeugen eine unimodulare hyperbolische Ebene

$$U = \mathbb{Z} f_1 \oplus \mathbb{Z} f_2$$

Offenbar gilt:

$$L'_{pqr} = L''_{pqr} \perp K$$

$$L_{pqr} = L''_{pqr} \perp U.$$

Daraus folgt: Für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$  ist  $L_{pqr}$  ein nicht-entartetes gerades Gitter mit der Signatur  $(n_-, n_+, n_0) = (n-2, 2, 0)$  und  $L'_{pqr}$  ein entartetes Gitter mit dem 1-dimensionalen Radikal  $K$  und der Signatur  $(n_-, n_+, n_0) = (n-3, 1, 1)$ .

Die drei Gitter  $L'_{pqr}$  mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

also  $L'_{333}$ ,  $L'_{244}$  und  $L'_{236}$  spielen eine besondere Rolle. Sie sind negativ semidefinit. Ihr Radikal hat Rang 2. Wir beschreiben es folgendermaßen durch Erzeugende:

$$L'^0_{pqr} = \mathbb{Z}f_0 \perp \mathbb{Z}f_1.$$

Dabei ist  $f_0 \in L''_{pqr}$  eine bestimmte Linearkombination

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i$$

Wir geben die Koeffizienten  $a_i$  an, indem wir im Diagramm  $D''_{pqr}$  die Ecke  $i$  mit  $a_i$  bewerten. In ähnlicher Weise werden wir später häufiger Vektoren in unseren Gittern beschreiben.

$(p, q, r)$	$f_0$
$(3, 3, 3)$	
$(2, 4, 4)$	
$(2, 3, 6)$	

Offenbar gilt:

$$L'_{333} = L''_{233} \perp L'^0_{333}$$

$$L'_{244} = L''_{234} \perp L'^0_{244}$$

$$L'_{236} = L''_{235} \perp L'^0_{236}.$$

### 1.10 Wurzelgitter.

$M$  sei ein gerades Gitter. Dann sind die nicht isotropen Elemente  $v \in M$  mit minimalen  $|(v, v)|$  diejenigen mit  $(v, v) = \pm 2$ . Solche Elemente wollen wir Minimalvektoren nennen. Mit  $\underline{M}$  bezeichnen wir das von allen Minimalvektoren erzeugte Untergitter. Für die von uns betrachteten Gitter  $L_{pqr}$ ,  $L'_{pqr}$ ,  $L''_{pqr}$  und überhaupt für alle Milnorgitter  $L$  gilt:

$$L = \underline{L}.$$

Dabei wird  $L$  sogar von Minimalvektoren  $v$  mit einem festen Vorzeichen von  $(v, v)$  erzeugt.



Insbesondere hat man natürlich ein eindeutiges Vorzeichen, wenn die Gitter definit sind. Die definiten Gitter  $M$  mit  $M = \underline{M}$  sind wohlbekannt. Um sie zu beschreiben, genügt es, die irreduziblen definiten Gitter  $M$  mit  $M = \underline{M}$  zu beschreiben, denn bekanntlich besitzt jedes definite Gitter eine eindeutige orthogonale Zerlegung in irreduzible definite Gitter (vgl. z.B. [40], Theorem 105.1). Die irreduziblen geraden definiten von Minimalvektoren erzeugten Gitter sind bekannt (vgl. [7], [43]). Es sind gerade die Wurzelgitter

$$A_k, D_k, E_6, E_7, E_8.$$

Die Wurzeln sind gerade die Minimalvektoren. Wir wollen dabei in Übereinstimmung mit unserer Festsetzung  $(e_i, e_i) = -2$  mit  $A_k, D_k, E_k$  anders als meist üblich die negativ definiten Wurzelgitter bezeichnen. Wir können sie mit den Gittern  $L_{pqr}^n$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$  identifizieren:

$$\begin{aligned} A_k &= L_{1,1,k}^n & E_6 &= L_{233}^n \\ D_k &= L_{2,2,k-2}^n & E_7 &= L_{234}^n \\ & & E_8 &= L_{235}^n \end{aligned}$$

Anders gesagt: Die  $E_k$  sind die folgenden reduzierten Gitter:

$$\begin{aligned} \bar{L}_{333}^1 &= E_6 \\ \bar{L}_{244}^1 &= E_7 \\ \bar{L}_{236}^1 &= E_8. \end{aligned}$$

Wegen der Sonderrolle der Gitter  $L_{333}^1, L_{234}^1, L_{236}^1$  sind wir besonders an dem  $E_k$ -Anteil in der orthogonalen Zerlegung definiten Gitter interessiert. Es sei also  $M$  irgendein gerades negativ definites Gitter. Es sei vorausgesetzt, daß

$$\underline{M} = E_k \perp N$$

wobei in der orthogonalen Zerlegung von  $N$  in irreduzible Summanden kein Summand  $E_6$  oder  $E_7$  oder  $E_8$  vorkommt. Dann definieren wir

$$\underline{\bar{M}} = E_k.$$

Dieses Untergitter  $\underline{\bar{M}}$  ist unter den angegebenen Voraussetzungen durch  $M$  eindeutig bestimmt. Ist  $M$  allgemeiner ein gerades negativ semidefinites Gitter,  $\bar{M}$  seine Reduktion nach dem Radikal und  $\pi : M \rightarrow \bar{M}$  die Restklassenabbildung, dann definieren wir unter den obigen Voraussetzungen über  $\bar{M}$

$$\underline{\bar{M}} = \pi^{-1}(\bar{M}).$$

### 1.11. Milnorgitter

Wir wollen jetzt die Beziehung der im vorhergehenden entwickelten algebraischen Begriffe und Konstruktionen zur Geometrie der Singularitäten herstellen. Der Zusammenhang zwischen beiden wird dadurch vermittelt, daß algebraische Objekte dieser Art den Singularitäten als Invarianten zugeordnet werden. Es kann sich hier nur darum handeln, diesen Zusammenhang so weit wie nötig zu bestimmen. Für alle Einzelheiten sei auf die Literatur verwiesen (z.B. [41], [33], [21]), für eine kritische Diskussion der verschiedenen Invarianten auf meinen Vortrag über Milnorgitter und Dynkindiagramme [11].

$X_0$  sei eine komplexe Hyperfläche in einem offenen Gebiet des  $\mathbb{C}^{m+1}$  und  $x \in X_0$  ein isolierter singulärer Punkt. Dann existiert zu dem komplexen Raumkeim  $(X_0, x)$



eine im wesentlichen eindeutig bestimmte semiuniverselle Deformation  $(X, x) \rightarrow (S, s_0)$ . Wir nehmen an, daß für  $X$  und  $S$  in der üblichen Weise geeignete Repräsentanten gewählt sind.  $\Delta \subset S$  sei die Diskriminante,  $S' = S - \Delta$  und  $X'$  das Urbild von  $S'$ . Die Abbildung  $X' \rightarrow S'$  ist ein differenzierbares Faserbündel, dessen typische Faser  $X_s$  man die Milnorfaser von  $(X_0, x)$  nennt. Sie hat den Homotopietyp eines Buketts von  $m$ -Sphären. Ihre  $m$ -te Homologiegruppe  $H_m(X_s, \mathbb{Z})$  ist also eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe, deren Rang  $n$  man die Milnor-Zahl von  $(X_0, x)$  nennt. Auf diesem  $\mathbb{Z}$ -Modul wird für  $m \equiv 0(2)$  durch die Schnittform eine symmetrische Bilinearform definiert, und damit wird die Homologiegruppe zu einem ganzzahligen Gitter. Dieses Gitter

$$L = H_m(X_s, \mathbb{Z})$$

wollen wir kurz das Milnorgitter von  $(X_0, x)$  nennen. Es hängt von einer Reihe von Wahlen ab, aber seine Klasse ist durch  $(X_0, x)$  eindeutig bestimmt.

Zu dem Faserbündel  $X' \rightarrow S'$  gehört eine Darstellung

$$\rho : \pi_1(S', s) \rightarrow O(L)$$

Das Bild  $\Gamma \subset O(L)$  nennt man die Monodromiegruppe von  $(X_0, x)$ . Also:

$$\Gamma = \text{Bild}(\rho)$$

$\mathcal{L}(L)$  sei die Menge aller primitiven Untergitter von  $L$ . Darin ist eine Teilmenge

$$\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}(L)$$

ausgezeichnet.  $\mathcal{L}^*$  ist die Menge der geometrischen Untergitter. Man erhält sie auf die folgende Weise. Es sei  $t \in \Delta$  irgend ein Punkt auf der Diskriminantenfläche. Die

Faser  $X_t$  hat endlich viele singuläre Punkte  $y_1, \dots, y_k$ . Wir wählen einen doppelpunktfreien Weg  $w$  in  $S$  von  $s$  nach  $t$ , der außer im Endpunkt ganz in  $S'$  verläuft.  $X_w$  sei das Urbild von  $w$  in  $X$ . Die Inklusion  $X_s \subset X_w$  induziert einen Homomorphismus

$$L = H_m(X_s, \mathbb{Z}) \rightarrow H_m(X_w, \mathbb{Z}).$$

Sein Kern zerfällt kanonisch in eine orthogonale direkte Summe von  $k$  Summanden, die isomorph zu den Milnorgittern  $M_i$  von  $(X_t, y_i)$  sind,  $i = 1, \dots, k$ . Für jede Wahl von  $t, w$  und  $i$  erhalten wir so ein Untergitter  $M \subset L$ . Die so erhaltenen primitiven Untergitter nennen wir die geometrischen Untergitter des Milnorgitters  $L$ . Die Menge  $\mathcal{L}^*$  der geometrischen Untergitter ist offenbar invariant unter der Operation von  $\Gamma$ .

Wählen wir speziell in der gerade beschriebenen Definition der geometrischen Gitter für  $t \in \Delta$  einen nicht-singulären Punkt von  $\Delta$ , dann ist  $k = 1$  und die einzige Singularität  $(X_t, y_1)$  in der Faser über  $t$  ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Die zugehörigen geometrischen Gitter  $M \subset L$  haben Rang 1. Deren erzeugende Elemente  $e$  mit  $M = \mathbb{Z}e$  nennt man auch die verschwindenden Zyklen des Milnorgitters  $L$ .

$$\Lambda^* \subset L$$

sei die Menge der verschwindenden Zyklen. Für  $e \in \Lambda^*$  gilt

$$(e, e) = (-1)^{m/2}_2.$$

Es sei

$$\Lambda_1(L) = \{e \in L \mid (e, e) = (-1)^{m/2}_2 \text{ und } (e, L) = \mathbb{Z}\}.$$

Wenn  $(X_0, x)$  nicht ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist, gilt

$$\Lambda^* \subset \Lambda_1(L).$$

$\Gamma$  operiert transitiv auf  $\Lambda^*$ . Es gilt

$$\Gamma = \langle s_{e_i} \rangle_{e_i \in \Lambda^*}.$$

Insbesondere gilt:

$$\Gamma \subset R_+(L) \quad \text{für } m \equiv 0(4)$$

$$\Gamma \subset R_-(L) \quad \text{für } m \equiv 2(4)$$

Mit Hilfe der verschwindenden Zyklen kann man nach Gabriellov [21] auf die folgende Weise eine besondere Art von Basen von  $L$  konstruieren. Es sei  $T \subset S$  eine allgemein gewählte Gerade durch  $s$  und  $t_1, \dots, t_n$  ihre Schnittpunkte mit  $\Delta$ . Wir wählen wie oben Wege  $w_i$  von  $s$  nach  $t_i$  in  $T$ . Dabei sei die Numerierung so gewählt, daß das Argument der Anfangsrichtung der  $w_i$  in  $s$  mit  $i$  monoton zunimmt. Zu  $w_i$  gehören zwei verschwindende Zykeln, von denen wir einen,  $e_i$ , beliebig auswählen. Dann gilt

$$L = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} e_i$$

$$\Gamma = \langle s_{e_i} \rangle_{i=1, \dots, n}.$$

Die so definierten Basen  $(e_1, \dots, e_n) \in \Lambda^{*n}$  von  $L$  und alle aus ihnen durch die Operation von  $\Gamma$  hervorgehenden Basen nennen wir geometrische Basen - Gabriellov nennt sie stark ausgezeichnete Basen. In einem Milnorgitter  $L$  ist also eine Menge  $\mathcal{B}^*$  von Basen ausgezeichnet:

$$\mathcal{B}^* = \{B \in \Lambda^{*n} \mid B \text{ geometrische Basis von } L\}.$$

Jede Basis  $B \in \mathcal{B}^*$  wird wie in 1.8 durch ein Diagramm  $D_B$

beschrieben, das Dynkindiagramm von  $(X_0, x)$  bezüglich  $B$ . Insgesamt ist dadurch der Singularität eine große Anzahl von Diagrammen zugeordnet:

$$\mathcal{D}^* = \{D_B \mid B \in \mathcal{B}^*\}.$$

### Zusammenfassung

Jeder isolierten gerade-dimensionalen Hyperflächen-singularität sind im wesentlichen kanonisch die folgenden Invarianten zugeordnet:

- $L$  das Milnorgitter
- $\Gamma$  die Monodromiegruppe
- $\Lambda^*$  die Menge der verschwindenden Zykeln
- $\mathcal{B}^*$  die Menge der geometrischen Basen
- $\mathcal{D}^*$  die Menge der Dynkindiagramme
- $\mathcal{L}^*$  die Menge der geometrischen Untergitter.

### 1.12. Unimodulare Singularitäten.

Wir wollen jetzt die Singularitäten einführen, von denen diese Arbeit handelt. Ich berichte hier nur das unbedingt Notwendige und verweise im übrigen auf die Arbeiten von V.I. Arnold ([3], [4]). Wir interessieren uns im folgenden nur für 0- und 1-modulare isolierte Singularitäten von Hyperflächen bzw. von Funktionen  $f \in \mathbb{C}\{x_0, \dots, x_m\}$ . Eine Funktion  $f$  mit einer solchen Singularität ist nach einem geeigneten Koordinatenwechsel von der Form

$$f(x_0, \dots, x_m) = g(x_0, x_1, x_2) + x_3^2 + \dots + x_m^2.$$

Die Geometrie der Diskriminante  $\Delta$  ist von  $m$  unabhängig, und die in 1.11 beschriebenen Invarianten hängen nur von der Parität von  $m/2$  ab. Dabei unterscheiden sich die Fälle

$m \equiv 0(4)$  und  $m \equiv 2(4)$  im wesentlichen nur durch das Vorzeichen von  $(e_1, e_1)$  für die verschwindenden Zyklen, und die quadratischen Formen der Milnorgitter unterscheiden sich bis auf Isomorphie ebenfalls nur durch ein Vorzeichen. Es ist daher keine wirkliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir uns im folgenden auf den Fall  $m = 2$  beschränken. Unsere früheren Vorzeichenwahlen sind mit dieser Einschränkung auf den Fall  $m \equiv 2(4)$  in Übereinstimmung.

Die Klassifikation der 0- und 1-modularen Singularitäten geht von der Signatur des Milnorgitters  $(n_-, n_+, n_0)$  aus.

#### 0-modulare Singularitäten.

Die 0-modularen Singularitäten - auch einfache Singularitäten genannt - sind genau die Singularitäten mit definitem Milnorgitter. Die Milnorgitter sind genau die Wurzelgitter  $A_k, D_k, E_6, E_7, E_8$ . Zu jedem Gitter gibt es bis auf analytische Isomorphie genau eine Hyperflächen-singularität und auch genau eine Funktionensingularität. Die klassischen Dynkindiagramme sind Dynkindiagramme für diese Singularitäten im Sinne von 1.11. Es gibt zahlreiche andere interessante Charakterisierungen dieser Singularitäten (vgl. z.B. [18]).

#### 1-modulare Singularitäten.

Die 1-modularen Singularitäten zerfallen in drei Klassen, die durch die Signatur der Milnorgitter charakterisiert sind.

$$(n_-, n_+, n_0) = (n-2, 0, 2)$$

Die Singularitäten in dieser Klasse sind genau die Singularitäten mit semidefinitem Milnorgitter. Sie werden deswegen von V.I. Arnold parabolische Singularitäten genannt. Die Milnorgitter  $L$  haben ein Radikal vom

Rang 2 und die reduzierten Gitter  $\bar{L}$  sind  $E_6, E_7, E_8$ . Zu jedem der drei Typen gehört eine komplex 1-parametrische Familie von Singularitäten von Hyperflächen bzw. Funktionen. Wir bezeichnen alle Singularitäten in der jeweiligen Familie mit  $\tilde{E}_6$  bzw.  $\tilde{E}_7$  bzw.  $\tilde{E}_8$ . Die exzeptionelle Kurve in der minimalen Auflösung dieser Flächensingularitäten ist eine singularitätenfreie elliptische Kurve mit Selbstschnittzahl  $-3, -2, -1$ . Deswegen werden die  $\tilde{E}_k$  auch als einfach elliptische Singularitäten bezeichnet. Die Diagramme  $D'_{333}, D'_{244}, D'_{236}$  sind Dynkindiagramme für  $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ , und daher sind  $L'_{333}, L'_{244}, L'_{236}$  mit ihren Standardbasen Milnorgitter mit einer geometrischen Basis. Wir verwenden für diese Singularitäten auch die folgenden Bezeichnungen:

$$T_{333} = \tilde{E}_6$$

$$T_{244} = \tilde{E}_7$$

$$T_{236} = \tilde{E}_8.$$

$$(n_-, n_+, n_0) = (n-2, 1, 1).$$

Die Singularitäten in dieser Klasse sind genau diejenigen, deren reduziertes Milnorgitter hyperbolisch ist. Sie werden deswegen nach V.I. Arnold hyperbolisch genannt. Sie sind die Singularitäten der Funktionen

$$x^p + y^q + z^r + cxyz \quad c \in \mathbb{C}^*$$

wobei

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

Für gleiches  $(p, q, r)$  und verschiedene Werte des komplexen Parameters  $c$  sind die zugehörigen Singularitäten von Hyperflächen isomorph, die Singularitäten der Funktionen hingegen nicht. Die Singularitäten der Funktionen sind also 1-modular. Wir bezeichnen alle Singularitäten in einer solchen 1-Parameterfamilie mit  $T_{pqr}$ . Nach Karras sind sie genau die Spitzensingularitäten, welche zugleich

Hyperflächensingularitäten sind.  $D'_{pqr}$  ist ein Dynkin-diagramm für  $T_{pqr}$ , und  $L'_{pqr}$  ist das Milnorgitter, wobei die Standardbasis von  $L'_{pqr}$  eine geometrische Basis ist.

$$(n_-, n_+, n_0) = (n-2, 2, 0)$$

Dies ist die Klasse aller übrigen 1-modularen Singularitäten. Sie werden nach V.I. Arnold die unimodularen exzeptionellen Singularitäten genannt. Das Prädikat "exzeptionell" ist wohl am ehesten aus geschichtlicher Sicht zu rechtfertigen, denn hinsichtlich ihrer Eigenschaften scheinen mir diese Singularitäten dem Allgemeinfall näher zu kommen als die einfachen Singularitäten und die in mancher Hinsicht eine Sonderrolle spielenden parabolischen und hyperbolischen Singularitäten.

Die Klasse der unimodularen exzeptionellen Singularitäten zerfällt in vierzehn 1-Parameterfamilien. V.I. Arnold bezeichnet sie mit  $E_{12}, E_{13}, E_{14}, Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, S_{11}, S_{12}, W_{12}, W_{13}$  und  $U_{12}$ .

Gabrielov hat gezeigt (vgl. [22] und [19]), daß diese Singularitäten Dynkindiagramme  $D_{pqr}$  haben, wobei  $(p, q, r)$  die folgenden 14 Tripel durchläuft:

$E_{12}$	2	3	7
$E_{13}$	2	3	8
$E_{14}$	2	3	9
$Z_{11}$	2	4	5
$Z_{12}$	2	4	6
$Z_{13}$	2	4	7
$Q_{10}$	3	3	4
$Q_{11}$	3	3	5
$Q_{12}$	3	3	6
$S_{11}$	3	4	4
$S_{12}$	3	4	5
$W_{12}$	2	5	5
$W_{13}$	2	5	6
$U_{12}$	4	4	4

Die Tripel  $(p, q, r)$  nennt man die Gabrielov-Tripel der Singularität. Wir bezeichnen in systematischer Weise eine exzeptionelle unimodulare Singularität mit Gabrielov-Tripel  $(p, q, r)$  durch  $S_{pqr}$ . Für die vierzehn  $S_{pqr}$  ist  $D_{pqr}$  ein Dynkindiagramm und  $L_{pqr}$  mit der Standardbasis ist das Milnorgitter mit geometrischer Basis.

Die gerade beschriebene Klassifikation der 1-modularen Singularitäten veranlaßt uns zur Einführung der folgenden Indexmengen  $I_h, I_e, I_p$  und  $I$ .

$$I_h = \{(p, q, r) \in \mathbb{N}^3 \mid p \leq q \leq r \text{ und } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1\}$$

$$I_e = \left\{ \begin{array}{l} (237) (238) (239) (245) (246) (247) (334) \\ (335) (336) (344) (345) (255) (256) (444) \end{array} \right\}$$

$$I_p = \{(333), (244), (236)\}$$

$$I = I_p \cup I_e.$$

### 1.13. Hyperbolische und parabolische Gitter.

Wir erinnern daran, daß wir mit class  $L$  die Klasse eines Gitters  $L$  bezeichnen. Wir führen jetzt die folgenden Mengen von Klassen von Gittern ein:

$$\mathcal{K} = \{\text{class } L'_{pqr} \mid (p,q,r) \in I_h\}$$

$$\mathcal{K}_e = \{\text{class } L'_{pqr} \mid (p,q,r) \in I_e\}$$

$$\mathcal{P} = \{\text{class } L'_{pqr} \mid (p,q,r) \in I_p\}.$$

Die Zuordnung  $(p,q,r) \rightarrow \text{class } L'_{pqr}$  definiert surjektive Abbildungen

$$I_h \rightarrow \mathcal{K}$$

$$I_e \rightarrow \mathcal{K}_e$$

$$I_p \rightarrow \mathcal{P}.$$

Die letzte Abbildung ist offensichtlich bijektiv, und man sieht ziemlich leicht, daß auch  $I_e \rightarrow \mathcal{K}_e$  bijektiv ist. Hingegen ist  $I_h \rightarrow \mathcal{K}$  nicht injektiv. Beispielsweise gilt  $\text{class } L'_{2,7,7} = \text{class } L'_{3,3,10}$ . Es wird sich jedoch ergeben, daß uns nur die Teilmenge  $\mathcal{K}_e \subset \mathcal{K}$  interessiert. Wir werden in § 3 sehen, daß das Urbild von  $\mathcal{K}_e$  in  $I_h$  gerade  $I_e$  ist, und die Abbildung  $I_e \rightarrow \mathcal{K}_e$  ist bijektiv.

#### Definition:

$L$  sei ein Gitter,  $\mathcal{L}(L)$  die Menge der primitiven Untergitter,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(L)$  eine Teilmenge.

- (i)  $M \in \mathcal{L}(L)$  heißt hyperbolisch wenn  $\text{class } L \in \mathcal{K}$
- (ii)  $M \in \mathcal{L}(L)$  heißt parabolisch wenn  $\text{class } L \in \mathcal{P}$
- (iii) Ein hyperbolisches  $M \in \mathcal{M}$  heißt maximal hyperbolisch in  $\mathcal{M}$ , wenn es in keinem hyperbolischen  $N \in \mathcal{M}$  echt enthalten ist. Analog sind die in  $\mathcal{M}$  maximal parabolischen Gitter definiert.

Damit sind die folgenden Teilmengen  $\mathcal{K}(L)$  und  $\mathcal{P}(L)$  von  $\mathcal{L}(L)$  definiert:

$$\mathcal{K}(L) = \{M \in \mathcal{L}(L) \mid M \text{ maximal hyperbolisch in } \mathcal{L}(L)\}$$

$$\mathcal{P}(L) = \{M \in \mathcal{L}(L) \mid M \text{ maximal parabolisch in } \mathcal{L}(L)\}.$$

Ist  $L$  ein Milnorgitter und  $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}(L)$  die Menge der geometrischen Untergitter, dann definieren wir außerdem die folgenden Teilmengen von  $\mathcal{L}^*$ :

$$\mathcal{K}_L^* = \{M \in \mathcal{L}^* \mid M \text{ maximal hyperbolisch in } \mathcal{L}^*\}$$

$$\mathcal{P}_L^* = \{M \in \mathcal{L}^* \mid M \text{ maximal parabolisch in } \mathcal{L}^*\}$$

Offenbar gilt:

$$\mathcal{K}(L) \supset \mathcal{K}(L) \cap \mathcal{L}^* \subset \mathcal{K}_L^*$$

$$\mathcal{P}(L) \supset \mathcal{P}(L) \cap \mathcal{L}^* \subset \mathcal{P}_L^*.$$

Es sei  $L$  ein Gitter mit  $\text{class}(\mathcal{K}(L)) \subset \mathcal{K}_e$ . Dann erhält man durch Komposition der Abbildung  $\text{class} : \mathcal{K}(L) \rightarrow \mathcal{K}_e$  mit der bijektiven Abbildung  $\mathcal{K}_e \rightarrow I_e$  eine Abbildung

$$\mathcal{K}(L) \rightarrow I_e.$$

Zusammen mit der immer definierten entsprechenden Abbildung

$$\mathcal{P}(L) \rightarrow I_p$$

erhält man dann eine Abbildung

$$\mathcal{K}(L) \cup \mathcal{P}(L) \rightarrow I_e \cup I_p = I.$$

Wir wollen diese Abbildung kurz die Typenbewertung von  $\mathcal{K}(L) \cup \mathcal{P}(L)$  nennen.

#### 1.14. Monodromiegruppen.

Eine für alles folgende fundamentale Tatsache ist der folgende Satz von H. Pinkham [49], der von W. Ebeling in [19] und [20] unter Benutzung von Eigenschaften der Dynkin-diagramme und des in 1.2 zitierten arithmetischen Resultates von M. Kneser\* bewiesen und stark verallgemeinert wurde. Für die Monodromiegruppen  $\Gamma_{pqr}$  der exzeptionellen unimodularen Singularitäten  $S_{pqr}$  gilt:

$$\Gamma_{pqr} = R_-(L_{pqr}) = \tilde{O}_-(L_{pqr}) \quad (p, q, r) \in I_e$$

Im folgenden lassen wir den Index "-" fort, wenn es sich um die Gitter  $L_{pqr}$  und andere derartige Gitter handelt, die von Minimalvektoren  $e$  mit  $(e, e) = -2$  erzeugt werden.

E. Looijenga hat mir die folgende schöne arithmetische Charakterisierung der verschwindenden Zyklen mitgeteilt.  $L$  sei das Milnorgitter einer Singularität, die weder parabolisch noch hyperbolisch ist. Es gelte für diese Singularität  $\Gamma = \tilde{O}(L)$ , eine Voraussetzung, die nach Ebeling in sehr vielen Fällen erfüllt ist. Dann folgt:

$$\hat{\Lambda} = \Lambda_1(L) .$$

Die zunächst auf geometrische Weise definierten Invarianten  $\Gamma$  und  $\hat{\Lambda}$  lassen sich also zumindest in sehr vielen Fällen mit den arithmetisch aus dem Gitter  $L$  gewonnenen Invarianten  $\tilde{O}(L)$  und  $\Lambda_1(L)$  identifizieren. Sie werden auf diese Weise einer rein algebraisch-arithmetischen Untersuchung zugänglich, wie sie in der vorliegenden Arbeit gerade vorgenommen wird. Andererseits zeigen diese

\* und der Argumente von Wall [58]

Resultate eben, daß in den Fällen, wo  $\Gamma = \tilde{O}(L)$  und  $\hat{\Lambda} = \Lambda_1(L)$  gilt, die Invarianten  $\Gamma$  und  $\hat{\Lambda}$  nicht mehr Information enthalten als das Gitter  $L$ . Und die Arbeit von Ebeling [19] zeigt, daß für höhere Singularitäten das Gitter  $L$  allein eine zu grobe Invariante ist, um Singularitäten zu klassifizieren. Ganz anders verhält es sich meiner Meinung nach mit den Invarianten  $\mathcal{B}^*$  und  $\mathcal{D}^*$ , die natürlich  $L$ ,  $\Gamma$  und  $\hat{\Lambda}$  bestimmen. Diese Invarianten enthalten anscheinend wesentlich mehr Information ([11]), aber sie sind wegen ihrer kombinatorischen Natur auch wesentlich unzugänglicher als die "arithmetischen" Invarianten  $L$ ,  $\tilde{O}(L)$ ,  $\Lambda_1(L)$ .

#### 1.15 Deformationsdiagramme.

Einen wichtigen Aspekt der Geometrie der Singularitäten bilden die zwischen ihnen bestehenden Deformationsrelationen, in der Literatur auch oft Adjazenzrelationen genannt. Die Gesamtheit solcher Relationen für eine gegebene Klasse von Singularitäten möchte ich die Hierarchie dieser Klasse nennen.

Für die Definition der Deformationsrelationen gibt es mehrere mögliche Varianten. Wir legen in Übereinstimmung mit [9] die folgende Definition zugrunde. Die Deformationsrelationen sind nicht Relationen zwischen einzelnen Singularitäten, sondern zwischen Familien von Singularitäten. Die Familien, um die es uns geht, sind diejenigen, die wir in 1.12 definiert haben, also  $\Lambda_k, D_k, E_k, \tilde{E}_k, T_{pqr}, S_{pqr}$ , wobei jeweils ein Index eine Familie definiert.

##### Definition:

$\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  seien Familien von Singularitäten wie oben. Dann deformiert  $\mathcal{X}$  in  $\mathcal{Y}$ , in Zeichen:  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , wenn folgendes gilt:

Es gibt eine Singularität  $(X_0, x)$  in der Familie  $\mathcal{X}$ , so

daß in ihrer semiuniversellen Deformation  $(X, x) \rightarrow (S, s_0)$  Fasern  $X_t$  mit Singularitäten aus der Familie  $\mathcal{Y}$  vorkommen, und zwar für  $t$  in jeder Umgebung von  $s_0$ .

Die Deformationsrelationen sind also Relationen zwischen Familien von Singularitäten. Trotzdem werden wir statt von Familien von Singularitäten einfach von Singularitäten reden, da kein Mißverständnis zu befürchten ist. Die Hierarchie der 1-modularen Singularitäten ist in [9] vollständig bestimmt worden. Insbesondere gehört zu jeder der vierzehn exceptionellen Singularitäten  $S_{pqr}$  ein Deformationsdiagramm  $\mathcal{D}(S_{pqr})$ , das die Hierarchie der unter  $S_{pqr}$  liegenden 1-modularen Singularitäten beschreibt. Die Punkte von  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  entsprechen bijektiv den unter  $S_{pqr}$  liegenden 1-modularen Singularitäten. Sie sind dementsprechend in drei Farben gefärbt und mit Tripeln  $(p, q, r) \in I$  bewertet:

- $(p, q, r)$  entspricht  $S_{pqr}$ , wobei  $(p, q, r) \in I_e$
- $(p, q, r)$  entspricht  $T_{pqr}$ , wobei  $(p, q, r) \in I_e$
- $(p, q, r)$  entspricht  $T_{pqr}$ , wobei  $(p, q, r) \in I_p$ .

Die Kanten, welche die verschiedenen Punkte von  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  miteinander verbinden, entsprechen bijektiv den Deformationsrelationen  $X \rightarrow Y$  zwischen den entsprechenden Singularitäten, für welche es keine davon verschiedene Singularität  $Z$  gibt mit  $X \rightarrow Z \rightarrow Y$ . Die Kanten sind gerichtet, weil die Deformationsrelationen gerichtet sind. In den Diagrammen bringen wir dies durch die räumliche Anordnung zum Ausdruck: Die Kanten sind von oben nach unten gerichtet. Tabelle 1 zeigt  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  für die sechs maximalen exceptionellen Singularitäten  $E_{14}, Z_{13}, Q_{12}, W_{13}, S_{12}, U_{12}$ . Die Deformationsdiagramme der übrigen acht exceptionellen Singularitäten sind einfach die entsprechenden vollen Unterdiagramme.

Zu jedem Diagramm  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  definieren wir ein vergrößertes Deformationsdiagramm  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$ . Die Eckenmenge von  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  ist eine Teilmenge der Eckenmenge von  $\mathcal{D}(S_{pqr})$ .

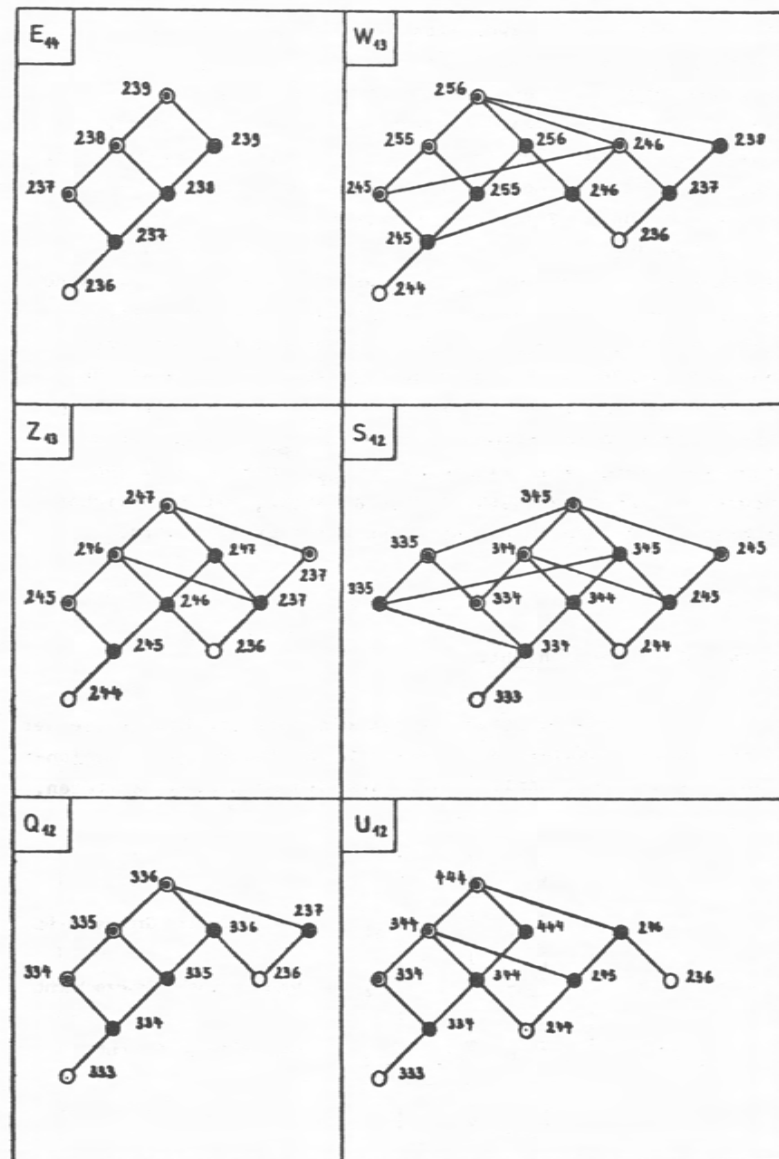


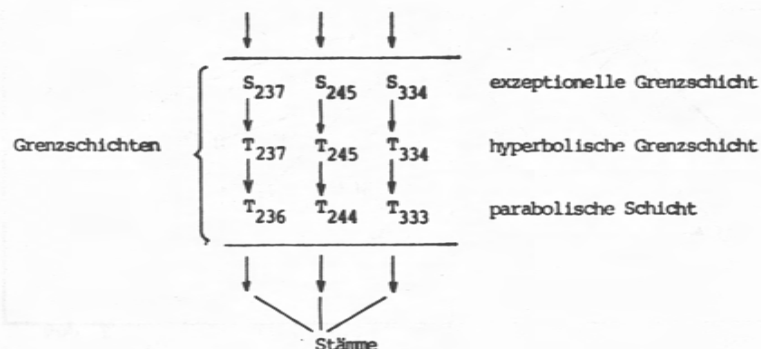
TABELLE 1



Sie besteht aus nur zwei Arten von Ecken, weißen und schwarzen. Die weißen Ecken von  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  sind die gleichen wie bei  $\mathcal{D}(S_{pqr})$ , entsprechen also den parabolischen Singularitäten. Die schwarzen Ecken von  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  sind die maximalen schwarzen Ecken von  $\mathcal{D}(S_{pqr})$ , d.h. diejenigen hyperbolischen Punkte, welche direkt mit dem maximalen exzeptionellen Punkt  $\bullet (p,q,r)$  verbunden sind. Die Typenbewertung der Ecken von  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  induziert auch eine Typenbewertung für  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$ . Zwei Ecken in  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  sind durch eine Kante miteinander verbunden, wenn die entsprechenden Ecken in  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  durch einen gerichteten Kantenzug miteinander verbunden sind. Es ist eine triviale Übung, aus den Deformationsdiagrammen  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  der Tabelle 1 die vergrößerten Deformationsdiagramme  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  abzuleiten. Tabelle 2 zeigt alle vierzehn  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  mit ihrer Typenbewertung und einer zusätzlichen Bewertung mit natürlichen Zahlen 1,2,3, die im nächsten Abschnitt erklärt wird.

### 1.16. Die Grenzschrift.

Von besonderem Interesse ist ein Teil der Hierarchie der 1-modularen Singularitäten, den ich in [10] die Grenzschriften genannt habe, nämlich die folgenden neun Singularitäten.



$E_{42}$ 237		$S_{41}$ 344	
$E_{43}$ 238		$S_{42}$ 345	
$E_{44}$ 239		$W_{42}$ 255	
$Z_{41}$ 245		$W_{43}$ 256	
$Z_{42}$ 246		$U_{42}$ 444	
$Z_{43}$ 247			
$Q_{40}$ 334			
$Q_{41}$ 335			
$Q_{42}$ 336			

TABELLE 2



Die Grenzschichten liegen in der Hierarchie zwischen den einfachen und den höheren Singularitäten. Die Grenzschichten haben eine vertikale und eine horizontale Gliederung. Horizontal zerfallen sie in eine parabolische Schicht und eine hyperbolische und eine exzeptionelle Grenzschicht. Die Singularitäten dieser drei Schichten lassen sich wie folgt charakterisieren.

- (1) Jede nicht einfache Singularität deformiert in eine Singularität der parabolischen Schicht.
- (2) Jede nicht einfache und nicht parabolische Singularität deformiert in eine Singularität der hyperbolischen Grenzschicht.
- (3) Jede nicht einfache, nicht parabolische und nicht hyperbolische Singularität deformiert in eine Singularität der exzeptionellen Grenzschicht.

Diese Einsicht verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Siersma.

Vertikal zerfällt die Grenzschicht ebenfalls in drei Teilmengen. Sie sind dadurch charakterisiert, daß zwischen zwei Singularitäten aus der gleichen Teilmenge eine Deformationsrelation besteht, zwischen Singularitäten aus verschiedenen Teilmengen aber nicht. Ich nenne diese drei Teilmengen Stämme. In der Wurzelschicht der einfachen Singularitäten haben die Stämme gemeinsame "Wurzeln". So haben z.B. alle drei Singularitäten der exzeptionellen Grenzschicht die Ikosaedersingularität  $E_8$  als Deformation. Und in den höheren Schichten durchdringen sich die "Verzweigungen" der Stämme unentwirrbar. In den Grenzschichten aber hat man drei klar getrennte Stämme.

Durch Kombination der horizontalen und der vertikalen Zerlegung der Grenzschichten erhält man Teilstämme: Läßt man in einem Stamm von oben anfangend keine, eine oder zwei Singularitäten weg, dann erhält man einen Teilstamm der Höhe 3 bzw. 2 bzw. 1.

In den Deformationsdiagrammen  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  ist zu jeder darin vorkommenden parabolischen Singularität ein maximaler Teilstamm enthalten. Seine Höhe  $r$  liefert uns für die entsprechende weiße Ecke in  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  einen Wert in  $\{1, 2, 3\}$ . Die so definierte Bewertung  $r$  der weißen Ecken von  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  nenne ich die Stammbewertung. In Tabelle 2 ist für alle vierzehn  $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  die Stammbewertung mitgegeben.

### 1.17. Liste von Symbolen

1.1.	$L$	Gitter
	$b$	Bilinearform
	$q$	quadratische Form
	class $L$	Klasse von $L$
	$\mathcal{L}(L)$	Menge der primitiven Untergitter
	$M^\perp$	orthogonales Komplement
	$L^0$	Radikal
	$\bar{L}$	reduziertes Gitter
	$i_{\mathbb{R}}(L)$	reeller Wittindex
	$(n_-, n_+, n_0)$	Signatur
	$d(L)$	Diskriminante
	$L^\#$	dualer Modul
	$G_L$	$L^\# / \text{im } L$
1.2.	$\Lambda_i(L)$	Teilmengen von $L$
	$R_i(L)$	Spiegelungsgruppen
	$\sigma_i$	Spinornormen
	$O(L)$	Einheitengruppe von $L$
	$O^+(L)$	Untergruppe von $O(L)$
	$O_i^+(L)$	"
	$\tilde{O}(L)$	"
	$\tilde{O}^+(L)$	"
1.3.	$\mathcal{I}(L)$	Menge von isotropen Untergittern
	$\mathcal{I}_\lambda(L)$	"
	$\mathcal{F}(L)$	Isotropie-Fahnenkomplex

- 1.4.  $D_L$  symmetrisches Gebiet zu  $L$
- 1.5.  $h_{k,G}(L)$  Klassenzahlen isotroper Untergitter  
 $\mathcal{G}(L)/O^*(L)$  Konfigurationsdiagramm
- 1.6.  $(D_L/\Gamma)^*$  Baily-Borel-Kompaktifizierung  
 $\Gamma_E$  Stabilisatorgruppe
- 1.7. STAB Stabilisatorbewertung  
 $s$  Spitzenbewertung
- 1.8.  $\Gamma(N)$  Kongruenzuntergruppe  
 $\Gamma_f(N)$  "  
 $\Gamma_o(N)$  "
- 1.9.  $D_{pqr}$  Dynkindiagramme  
 $D'_{pqr}$  "  
 $D''_{pqr}$  "  
 $L_{pqr}$  Gitter  
 $L'_{pqr}$  "  
 $L''_{pqr}$  "  
 $L^*_{pqr}$  Diskriminante  
 $d_{pqr}$
- 1.10.  $A_k$  Wurzelgitter  
 $D_k$  "  
 $E_k$  "  
 $\underline{M}$  von Minimalvektoren erzeugtes Untergitter  
 $\underline{M}$   $E_k$ -Komponente von  $\underline{M}$
- 1.11.  $\Gamma$  Monodromiegruppe  
 $\Lambda_f(L)$  Teilmenge von  $L$   
 $\Lambda^*$  Menge der verschwindenden Zyklen  
 $\mathcal{L}^*$  Menge der geometrischen Untergitter  
 $\mathcal{B}^*$  Menge der ausgezeichneten Basen  
 $\mathcal{D}^*$  Menge der Dynkindiagramme

- 1.12.  $\tilde{E}_k$  parabolische Singularitäten  
 $T_{pqr}$  hyperbolische Singularitäten  
 $S_{pqr}$  exzeptionelle Singularitäten  
 $I_h$  Indexmenge von  $(p,q,r)$   
 $I_e$  "  
 $I_p$  "  
 $I$  "
- 1.13.  $\mathcal{X}$  Menge von hyperbolischen Gitterklassen  
 $\mathcal{X}_e$  "  
 $\mathcal{P}$  Menge von parabolischen Gitterklassen  
 $\mathcal{X}(L)$  Menge der maximal hyperbolischen Untergitter von  $L$   
 $\mathcal{P}(L)$  Menge der maximal parabolischen Untergitter von  $L$   
 $\mathcal{X}^*_L$  Menge der geometrisch maximal hyperbolischen Gitter  
 $\mathcal{P}^*_L$  Menge der geometrisch maximal parabolischen Gitter
- 1.14.  $\Gamma_{pqr}$  Monodromiegruppe von  $S_{pqr}$
- 1.15.  $\mathcal{D}(S_{pqr})$  Deformationsdiagramm von  $S_{pqr}$   
 $\tilde{\mathcal{D}}(S_{pqr})$  vergrößertes Deformationsdiagramm.
- 1.16.  $r$  Stambbewertung

## § 2. Ergebnisse

Wir haben in § 1 die Begriffe definiert, die zur Formulierung unserer Resultate notwendig sind. Die Liste der Symbole in 1.17 erleichtert das Auffinden der Definitionen. Wir fassen jetzt unsere Ergebnisse in vier Sätzen zusammen.

### Satz 1.

Für  $L = L_{pqr}$  mit  $(p, q, r) \in I_e$  seien  $J(L)$ ,  $K(L)$ ,  $P(L)$  die Mengen der isotropen, der maximal hyperbolischen und der maximal parabolischen Untergitter. Dann gilt:

- (i)  $\text{class}(K(L)) \subset \mathcal{K}_e$
- (ii) Es gibt kanonische Bijektionen

$$\begin{array}{l} \kappa_1 : K(L) \rightarrow J_1(L) \\ \kappa_2 : P(L) \rightarrow J_2(L) \end{array}$$

Sie sind wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ll} \kappa_1(M) = M^0 & \kappa_1^{-1}(E) = E^\perp \\ \kappa_2(M) = M^0 & \kappa_2^{-1}(E) = \underline{E}^\perp \end{array}$$

Satz 1 liefert für die Eckenmenge  $J(L)$  des Isotropie-Fahnenkomplexes  $\mathcal{F}(L)$  eine bijektive Abbildung

$$J(L) \rightarrow K(L) \cup P(L) .$$

Für die Bildmenge hat man wegen (i) nach 1.13 eine Typenbewertung

$$K(L) \cup P(L) \rightarrow I .$$

Durch Komposition erhält man eine Typenbewertung

$$J(L) \rightarrow I .$$

Sie induziert Typenbewertungen der Eckenmengen von  $\mathcal{F}(L)/O(L)$  und  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$ :

$$J(L)/O(L) \rightarrow I$$

$$J(L)/O^*(L) \rightarrow I .$$

### Satz 2.

- (i) Für  $L = L_{pqr}$  mit  $(p, q, r) \in I_e$  ist der Quotient  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  des Isotropie-Fahnenkomplexes  $\mathcal{F}(L)$  ein endlicher 1-dimensionaler simplizialer Komplex mit einer Operation von  $O(L)/O^*(L)$ , und der Quotient  $\mathcal{F}(L)/O(L)$  ist ebenfalls ein simplizialer Komplex.
- (ii) Die Ecken von  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  sind durch den Rang gefärbt und haben zwei Bewertungen, die Typenbewertung und die Stabilisatorbewertung:

$$J(L)/O^*(L) \rightarrow I$$

$$J_2(L)/O^*(L) \rightarrow \{\Gamma(1), \Gamma(2), \Gamma_0(2), \Gamma_1(3)\} .$$

- (iii) Diese Bewertungen sind konstant auf den Orbits von  $O(L)/O^*(L)$  und induzieren daher entsprechende Bewertungen der Ecken von  $\mathcal{F}(L)/O(L)$ .
- (iv) Die Konfigurationsdiagramme von Tabelle 3 beschreiben  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  mit dieser Struktur.
- (v) Die Diagramme für  $\mathcal{F}(L)/O(L)$  entstehen aus denen für  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  durch Quotientenbildung und sind stets streckenförmig.









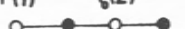
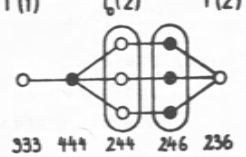


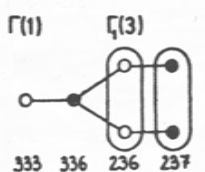

$E_{12}$ 237	$\Gamma(1)$  236 237	$S_{11}$ 344	$\Gamma(1)$ $\zeta(2)$  333 344 244 245
$E_{13}$ 238	$\Gamma(1)$  236 238	$S_{12}$ 345	$\Gamma(1)$ $\Gamma(1)$  333 345 244
$E_{14}$ 239	$\Gamma(1)$  236 239	$W_{12}$ 255	$\Gamma(1)$  244 255
$Z_{11}$ 245	$\Gamma(1)$  244 245	$W_{13}$ 256	$\Gamma(1)$ $\zeta(2)$  244 256 236 238
$Z_{12}$ 246	$\Gamma(1)$ $\zeta(2)$  244 246 236 237	$U_{12}$  444	$\Gamma(1)$ $\zeta(2)$ $\Gamma(2)$  333 444 244 246 236
$Z_{13}$ 247	$\Gamma(1)$ $\Gamma(1)$  244 247 236		
$Q_{10}$ 334	$\Gamma(1)$  333 334	$Q_{12}$  336	$\Gamma(1)$ $\zeta(3)$  333 336 236 237
$Q_{11}$ 335	$\Gamma(1)$  333 335		

TABELLE 3

Aus Satz 2 zusammen mit 1.6 bis 1.8 und 1.14 ergibt sich sofort das folgende Korollar.

Korollar.

Für  $L = L_{pqr}$  mit  $(p, q, r) \in I_e$  ist der Rand der Baily-Borel-Kompaktifizierung  $(D_L / \Gamma_{pqr})^*$  eine Vereinigung von rationalen Modulkurven. Ihre Konfiguration wird durch die Konfigurationsdiagramme der Tabelle 3 beschrieben.

Die Sätze 1 und 2 sind rein arithmetische Aussagen über die Struktur der 14 exzeptionellen Gitter  $L_{pqr}$ . Jetzt identifizieren wir diese Gitter mit den Milnorgittern der 14 unimodularen exzeptionellen Singularitäten und ziehen aus dem Vergleich der gerade formulierten arithmetischen Aussagen mit den früher bewiesenen geometrischen Aussagen über die Deformationsdiagramme Folgerungen über die Widerspiegelung der geometrischen in der arithmetischen Struktur.

Satz 3.

Für die vierzehn Milnorgitter  $L$  der exzeptionellen unimodularen Singularitäten gilt:

$$\begin{aligned} \chi(L) &= \chi_L^* \\ \varphi(L) &= \varphi_L^* \end{aligned}$$

Insbesondere sind also die maximalen hyperbolischen und parabolischen Untergitter geometrisch. Zur Warnung für Voreilige sei hinzugefügt, daß es nicht-maximale hyperbolische und parabolische Untergitter gibt, die nicht geometrisch sind. Schließlich kommen wir zu unserem letzten Satz. Er ergibt sich unmittelbar durch Vergleich der Tabellen 2 und 3 und der Tabelle mit den Spitzenzahlen der Kongruenzuntergruppen in 1.8.

Satz 4

Für alle 14 unimodularen exceptionellen Singularitäten  $S_{pqr}$  ist das vergrößerte Deformationsdiagramm  $\tilde{D}(S_{pqr})$  als 1-dimensionaler simplizialer Komplex mit Färbung und Typenbewertung der Ecken identisch mit dem Konfigurationsdiagramm für  $\mathcal{F}(L_{pqr})/O(L_{pqr})$ . Zwischen der Stammbewertung  $r$  von  $\tilde{D}(S_{pqr})$  und der Spitzenbewertung  $s$  von  $\mathcal{F}(L_{pqr})/O(L_{pqr})$  besteht die folgende Beziehung:

$$r+s = 4$$

Wir erkennen: Das Deformationsdiagramm  $\tilde{D}(S_{pqr})$  und das Konfigurationsdiagramm  $\mathcal{F}(L_{pqr})/O(L_{pqr})$  haben eine natürliche gemeinsame Vergrößerung -  $\tilde{D}(S_{pqr})$  mit der Typen- und Stammbewertung. Beide Diagramme enthalten Informationen, welche im jeweils anderen Diagramm nicht enthalten sind. So sagt  $\tilde{D}(S_{pqr})$  auch etwas über die exceptionellen Singularitäten unter  $S_{pqr}$ , und andererseits bedeutet das Vorhandensein von mehrelementigen  $O(L)/O(L)$ -Orbits in  $\mathcal{F}(L_{pqr})/O(L_{pqr})$  für  $U_{12}$  und  $Q_{12}$ , daß die entsprechenden Strata in der semiuniversellen Deformation von  $S_{pqr}$  in mehrere Komponenten zerfallen müssen. Dies ist eine Information, die aus  $\tilde{D}(S_{pqr})$  nicht unmittelbar abzulesen ist.

Das Konfigurationsdiagramm ist durch das Milnorgitter bestimmt, erst recht also durch das Dynkindiagramm. Ich vermute, daß sich auch die Deformationsdiagramme ganz allein aus den Dynkindiagrammen ableiten lassen. Aber dies ist ein Gegenstand für zukünftige Arbeiten. Der Rest der vorliegenden Arbeit dient dem Beweis der vier Sätze, die wir gerade formuliert haben.

§ 3. Diskriminantenformen3.1. Definition der Diskriminantenformen

In diesem Paragraphen definieren wir im Anschluß an V.V. Nikulin [44] die Diskriminantenform eines geraden ganzzahligen Gitters und berechnen diese Diskriminantenform für die 14 exceptionellen Gitter  $L_{pqr}$ . Die Resultate werden später zur Bestimmung der Klassen isotroper Untergitter der  $L_{pqr}$  benutzt.

Die Technik der Untersuchung von Gittern mit Hilfe ihrer Diskriminantenformen wurde von C.T.C. Wall [59], [60] und A. Durfee [17] entwickelt und von V.V. Nikulin [44] vervollkommen. Die Arbeit von V.V. Nikulin und W. Ebelings Charakterisierung der Monodromiegruppen lassen erwarten, daß die Technik der Diskriminantenformen für die Untersuchung von Milnorgittern gut geeignet ist, und dies bestätigt sich bei unserer Untersuchung der Isotropie-Fahnenkomplexe.

Wir setzen die Arbeit von V.V. Nikulin als bekannt voraus und schließen uns hinsichtlich der Definitionen und Terminologie an diese Arbeit an. In den Bezeichnungen weichen wir teilweise davon ab.

Definition

$G$  sei eine endliche abelsche Gruppe. Eine quadratische Form  $q$  auf  $G$  ist eine Abbildung  $q : G \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $q(nx) = n^2 q(x)$  für alle  $x \in G$  und  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (ii)  $q(x+y) - q(x) - q(y) \equiv 2b(x,y) \pmod{2\mathbb{Z}}$  für alle  $x, y \in G$ , wobei  $b$  eine symmetrische Bilinearform  $b : G \times G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ist.

Die Bilinearform  $b$  ist durch  $q$  eindeutig bestimmt und heißt die Bilinearform zu  $q$ . Die quadratische Form  $q$  heißt nicht entartet, wenn ihre Bilinearform  $b$  nicht entartet ist, das heißt wenn gilt:  $b(x,y) = 0$  für alle  $y$  impliziert  $x = 0$ . Nun sei  $L$  irgendein nicht entartetes gerades Gitter mit ganzzahliger Bilinearform  $b$  und quadratischer Form  $q(x) = b(x,x)$ . Dann definieren wir eine endliche abelsche Gruppe  $G_L$  durch

$$G_L = \mathbb{H}^\# / L.$$

Auf dieser Gruppe induziert die quadratische Form  $q$  des Gitters in kanonischer Weise eine quadratische Form

$$q_L : G_L \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}.$$

Wir nennen  $q_L$  die Diskriminantenform von  $L$ . Ihre zugehörige Bilinearform  $b_L$  wird von der Bilinearform  $b$  des Gitters induziert. Wir schreiben statt  $q_L$  und  $b_L$  auch einfach  $q$  und  $b$ , wenn keine Verwechslungen mit den Formen des Gitters zu befürchten sind. Für ein entartetes Gitter  $L$  definieren wir die Diskriminantenform als die Diskriminantenform des reduzierten Gitters  $\bar{L}$ .

Jede nicht entartete quadratische Form auf einer endlichen abelschen Gruppe läßt sich als Diskriminantenform eines geraden Gitters darstellen ([59], Theorem (6)).

Zu jeder nicht entarteten quadratischen Form  $q$  auf einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  gehört die endliche Gruppe der Automorphismen von  $(G,q)$ . Wir nennen sie die orthogonale Gruppe von  $q$  und bezeichnen sie mit  $O(q)$  oder auch  $O(G)$ .

### 3.2. Diskriminantenformen und Milnorgitter.

Die Bedeutung der Diskriminantenformen für die Untersuchung von Milnorgittern zeigt sich schon in dem folgenden Satz von V.V.Nikulín, dessen erster Teil im wesentlichen eine Anwendung von Resultaten von M. Kneser [25] über Geschlecht und Klasse indefiniter Formen darstellt (vgl. [44], Theorem 2.2.2).

#### Satz

- (i) Jedes Milnorgitter ist durch seine Signatur und Diskriminantenform bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
- (ii) Für jedes indefinite Milnorgitter  $L$  ist der kanonische Homomorphismus  $O(L) \rightarrow O(q_L)$  surjektiv.

Bemerkung: Wenn  $L$  ein negativ definites Milnorgitter ist, gilt, wie wir in 1.12 berichtet haben:  $L = A_k$  oder  $L = D_k$  oder  $L = E_k$ . Mit Hilfe der Tabellen in [7] überzeugt man sich leicht, daß folgendes gilt:

$L = E_k \Rightarrow O(L) \rightarrow O(q_L)$  ist surjektiv.

$L = D_k \Rightarrow O(L) \rightarrow O(q_L)$  ist surjektiv genau wenn  $k \neq 8m+4$  mit  $m > 0$ .

$L = A_k \Rightarrow O(L) \rightarrow O(q_L)$  ist surjektiv genau wenn  $k = p^f - 1$  oder  $k = 2p^f - 1$  mit  $p$  prim.

### 3.3. Klassifikation der Diskriminantenformen.

Für quadratische Formen auf endlichen abelschen Gruppen definiert man in kanonischer Weise orthogonale Summen  $u \perp v$  von Formen  $u, v$  und irreduzible Formen bezüglich Zerlegbarkeit in orthogonale Summanden. Jede Form  $q$  auf einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  zerfällt in eindeutiger Weise in die orthogonale Summe

$$q = \bigoplus_p q_p$$

ihrer  $p$ -primären Komponenten  $q_p : G_p \rightarrow Q/2\mathbb{Z}$ , wo  $q_p$  die Beschränkung von  $q$  auf die  $p$ -Komponente  $G_p$  von  $G$  ist. Die  $p$ -primären Komponenten kann man eventuell noch weiter in irreduzible Komponenten zerlegen, aber diese Zerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig.

Die irreduziblen nicht entarteten Formen sind genau bekannt. Es sind bis auf Isomorphie die im folgenden definierten Formen

$$w_{p,k}^\epsilon, u_k, v_k.$$

#### Definition.

(1) Es sei  $p$  eine Primzahl,  $p \neq 2$  und  $k$  eine natürliche Zahl,  $k \geq 1$ , sowie  $\epsilon = \pm 1$ . Es sei  $G = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$  und  $G^* \subset G$  die Menge der Erzeugenden. Jede nicht entartete quadratische Form  $q : G \rightarrow Q/2\mathbb{Z}$  induziert nach Multiplikation mit  $p^k$  eine Abbildung  $Q : G \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , und  $Q(G^*) \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  ist eine der beiden Nebenklassen von  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*2$ . Wir definieren daher:

#### Definition.

$w_{p,k}^\epsilon$  ist die quadratische Form  $q$  auf  $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$  mit dem Wert  $q(1) = ap^{-k} \pmod{2\mathbb{Z}}$ , wobei  $a$  die kleinste positive gerade Zahl ist, die für  $\epsilon = 1$  ein quadratischer Rest ist beziehungsweise für  $\epsilon = -1$  kein quadratischer Rest ist.

Jede nicht entartete quadratische Form auf  $G$  ist entweder isomorph zu  $w_{p,k}^1$  oder isomorph zu  $w_{p,k}^{-1}$ , je nachdem ob  $Q(G^*) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*2$  oder nicht. Die Unterscheidung zwischen beiden Fällen erfolgt durch Berechnung des Jacobi-Legendre-Symbols  $\epsilon = \left(\frac{a}{p}\right)$  aus dem Wert  $q(x) \equiv ap^{-k} \pmod{2\mathbb{Z}}$  für ein erzeugendes Element  $x \in G^*$ .

(2) Es sei  $G = \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$  und  $G^* \subset G$  die Menge der Erzeugenden. Jede nicht entartete quadratische Form  $q : G \rightarrow Q/2\mathbb{Z}$

induziert nach Multiplikation mit  $2^k$  eine Abbildung  $Q : G \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , falls  $k = 1$  und  $Q : G \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ , falls  $k > 1$ . Es gilt:  $Q(G^*)$  ist ein Element von  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{\pm 1\}$  bzw.  $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* = \{\pm 1, \pm 5\}$  für  $k > 1$ . Zwei derartige Formen sind genau dann isomorph, wenn für sie  $Q(G^*)$  gleich ist. Daher erhält man durch die folgende Definition Repräsentanten der Isomorphieklassen von quadratischen Formen auf  $G = \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ . Für  $k = 1$  und  $\epsilon = \pm 1$  ist  $w_{2,1}^\epsilon$  definiert als die Form  $q$  auf  $G$  mit  $q(1) = \frac{\epsilon}{2}$ . Für  $k > 1$  und  $\epsilon = \pm 1, \pm 5$  ist  $w_{2,k}^\epsilon$  definiert als die Form  $q$  auf  $G$  mit  $q(1) = \frac{\epsilon}{2^k}$ .

(3) Auf  $G = \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$  definieren wir zwei nicht entartete quadratische Formen  $u_k$  und  $v_k$  durch Angabe ihrer Matrizen bezüglich der Standardbasis  $e_1 = (1, 0)$  und  $e_2 = (0, 1)$ . Die Matrizen sind:

$$2^{-k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } u_k$$

$$2^{-k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{für } v_k$$

Die Werte dieser Formen für  $xe_1 + ye_2$  sind also

$$u_k(xe_1 + ye_2) = 2^{-k+1}xy \pmod{2\mathbb{Z}}$$

$$v_k(xe_1 + ye_2) = 2^{-k+1}(x^2 + xy + y^2) \pmod{2\mathbb{Z}}$$

V.V. Nikulin beweist den folgenden Satz ([44], 1.8.1 und 1.8.2).

#### Satz

(1) Die nicht trivialen, nicht entarteten irreduziblen quadratischen Formen auf endlichen abelschen Gruppen sind bis auf Isomorphie die Formen  $u_k, v_k, w_{p,k}^\epsilon$ .



- (ii) Jede nicht entartete quadratische Form auf einer endlichen abelschen Gruppe ist isomorph zu einer orthogonalen direkten Summe von Formen  $u_k, v_k, w_{p,k}^\epsilon$ .
- (iii) Die Darstellung einer quadratischen Form als orthogonale Summe irreduzibler Formen ist im allgemeinen nicht eindeutig. Es bestehen die folgenden Isomorphie-Relationen:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } w_{p,k}^\epsilon \perp w_{p,k}^\epsilon &\cong w_{p,k}^{\epsilon'} \perp w_{p,k}^{\epsilon'} && \text{für } p \neq 2 \\
 \text{b) } u_k \perp u_k &\cong v_k \perp v_k \\
 \text{c) } w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^{\epsilon'} &\cong w_{2,k}^{5\epsilon} \perp w_{2,k}^{5\epsilon'} \\
 \text{d) } v_k \perp w_{2,k}^{-5\epsilon'} &\cong w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^{\epsilon'} && \text{für } \epsilon' \equiv \epsilon(4) \\
 u_k \perp w_{2,k}^{-\epsilon'} &\cong w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k}^{\epsilon'} && \text{für } \epsilon' \equiv -\epsilon(4) \\
 \text{e) } v_k \perp w_{2,k+1}^\epsilon &\cong u_k \perp w_{2,k+1}^{5\epsilon} \\
 \text{f) } v_{k+1} \perp w_{2,k}^\epsilon &\cong u_{k+1} \perp w_{2,k}^{5\epsilon} \\
 \text{g) } w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k+1}^{\epsilon'} &\cong w_{2,k}^{\epsilon+2\epsilon'} \perp w_{2,k+1}^{5\epsilon'-2\epsilon} \\
 \text{h) } w_{2,k}^\epsilon \perp w_{2,k+2}^{\epsilon'} &\cong w_{2,k}^{5\epsilon} \perp w_{2,k+2}^{5\epsilon'}
 \end{aligned}$$

### 3.4. Beschreibung der Diskriminantenformen der $L_{pqr}$ .

Wir werden die Diskriminantenformen der exzeptionellen Gitter  $L = L_{pqr}$ ,  $(p,q,r) \in I_e$ , in zwei Schritten bestimmen. In einem ersten Schritt beschreiben wir in diesem Abschnitt die Gruppe  $G_L$  durch Erzeugende und die quadratische Form  $q_L$  durch die zugehörige Matrix bezüglich des Erzeugendensystems. Um diese Beschreibung auf elegante Weise zu gewinnen, benutzen wir das folgende, nicht schwer zu beweisende Lemma, das ich von C.T.C. Wall gelernt habe.

#### Lemma.

$N$  sei ein unimodulares ganzzahliges Gitter,  $L \subset N$  ein nicht entartetes gerades primitives Untergitter und  $M = L^\perp$  das orthogonale Komplement. Dann gilt:

- (i) Die Inklusionen  $L \perp M \subset N \subset L^\# \perp M^\#$  induzieren eine kanonische Einbettung

$$N/L \perp M \subset L^\# \perp M^\# / L \perp M \cong G_L \times G_M.$$

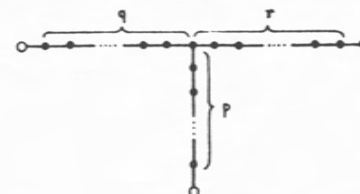
- (ii)  $N/L \perp M \subset G_L \times G_M$  ist der Graph eines Isomorphismus

$$(G_L, b_L) \cong (G_M, -b_M)$$

- (iii) Für  $z \in N \subset L^\# \perp M^\#$  sei  $z = x + y$  mit  $x \in L^\#$  sowie  $y \in M^\#$ , und  $\bar{x}$  sei die Restklasse von  $x$  in  $G_L$ . Dann gilt:

$$q_L(\bar{x}) = -(y, y) + (z, z) \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

Wir wollen die Diskriminantenform von  $L_{pqr}$  berechnen. Wegen  $L_{pqr} = L_{pqr}^\# \perp U$  hat  $L_{pqr}$  die gleiche Diskriminantenform wie  $L_{pqr}^\#$ . Die Diskriminantenform von  $L_{pqr}^\#$  werden wir mit Hilfe des gerade formulierten Lemmas berechnen, indem wir das Gitter  $L = L_{pqr}^\#$  in ein unimodulares Gitter  $N = L_{pqr}^\#$  einbetten. Dazu betten wir zunächst den Graphen  $D_{pqr}^\#$  in einen erweiterten Graphen  $D_{pqr}^\wedge$  ein:



Diesem Graphen  $D_{pqr}^\wedge$  ordnen wir ähnlich wie in 1.9 ein ganzzahliges Gitter  $L_{pqr}^\wedge$  zu, wobei aber die in 1.9



gegebene Vorschrift wie folgt modifiziert wird. Den Punkten von  $D_{pqr}^\wedge$  entsprechen Basisvektoren  $a_1, \dots, a_{p+q+r-2}, c_1, c_2, c_3$  für das Gitter  $L_{pqr}^\wedge$ , also

$$L_{pqr} = \bigoplus_{i=1}^{p+q+r-2} \mathbb{Z} a_i \oplus \bigoplus_{j=1}^3 \mathbb{Z} c_j.$$

Dabei entsprechen  $c_1, c_2, c_3$  den Endpunkten der drei Arme des Graphen, und zwar  $c_1$  dem p-Arm,  $c_2$  dem q-Arm und  $c_3$  dem r-Arm. Die  $a_i$  sind so numeriert, daß  $a_1, a_2, a_3$  den drei Punkten entsprechen, die mit den drei Endpunkten verbunden sind. Mit dieser Numerierung weichen wir von der in 1.9 beschriebenen Numerierung der Punkte von  $D_{pqr}$  ab, um die folgenden Formeln übersichtlicher zu machen. Die Diagonalelemente der Matrix von  $L_{pqr}^{\wedge}$  bezüglich der Basis  $a_i, c_i$  definieren wir wie folgt:

$$(a_i, a_i) = -2$$

$$(c_i, c_j) = -1.$$

Für die übrigen Skalarprodukte gilt die gleiche Regel wie in 1.9. Ordnet man den Basisvektoren  $a_i$  die entsprechenden Punkte von  $D_{pqr}^*$  zu und diesen wiederum die entsprechenden Basisvektoren  $e_k$  von  $L_{pqr}^*$ , dann erhält man trivialerweise einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^{p+q+r-2} \mathbb{Z} a_i \cong L_{pqr}^*.$$

Man erhält also eine Einbettung von  $L_{pqr}''$  als primitives Unterquitter:

$$L_{pqr}^{\mu} \subset L_{pqr}^{\Lambda}.$$

Das Gitter  $\hat{L}_{pqr}$  ist unimodular. Dies ist evident. Denn offenbar kann man  $\mathbb{Z}c_2$  orthogonal abspalten und es gilt

$$(\mathbb{Z}C_3)^\perp \cong L_{p,q,r-1}^\Lambda.$$

Also:

$$L_{pqr}^{\wedge} \cong L_{p,q,r-1}^{\wedge} \perp \langle -1 \rangle.$$

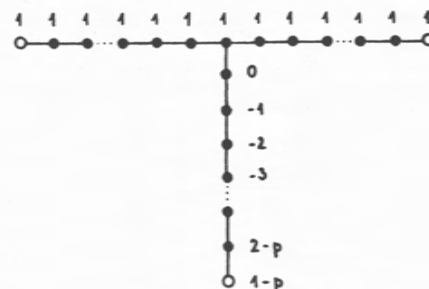
Durch Iteration ergibt sich:

$$L_{pqr} \approx \langle +1 \rangle \perp \underbrace{\langle -1 \rangle \perp \dots \perp \langle -1 \rangle}_{p+q+r}$$

Damit haben wir also  $L = L_{pqr}^*$  in das unimodulare Gitter  $N = L_{pqr}^\wedge$  eingebettet. Wir betrachten das orthogonale Komplement von  $L$  in  $N$

$$M_{pqr} = L_{pqr}^n \perp.$$

Wir beschreiben eine Basis  $b_1, b_2, b_3$  von  $M_{pqr}$  durch Bewertung der Punkte von  $\hat{D}_{pqr}$  mit den entsprechenden Koeffizienten in der Darstellung von  $b_i$  als Linearkombination der Basisvektoren von  $L_{pqr}^\wedge$ . Der Vektor  $b_1$  wird durch die folgende Bewertung beschrieben:



Die Vektoren  $b_2$  und  $b_3$  sind analog definiert, wobei natürlich die Arme des Graphen ihre Rollen tauschen. Man sieht leicht, daß  $b_1, b_2, b_3$  zusammen eine Basis von  $M_{pqr}$  bilden.  $b_1^*, b_2^*, b_3^*$  sei die duale Basis von  $M_{pqr}^\#$ , und  $a_1^*, \dots, a_{p+q+r-2}^*$  sei die duale Basis von  $L_{pqr}^\#$  bezüglich der Basis  $a_1, \dots, a_{p+q+r-2}$  von  $L_{pqr}$ .

Proposition.

$L = L_{pqr}^*$  und  $M = M_{pqr}$  seien die oben definierten Gitter mit den oben definierten Basen  $a_i$  bzw.  $b_j$ . Ferner sei  $d = d_{pqr}$ .

(i)  $M$  hat bezüglich der Basis  $b_1, b_2, b_3$  die Matrix

$$A_{pqr} = \begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{pmatrix}$$

(ii)  $M^\#$  hat bezüglich der Basis  $b_1^\vee, b_2^\vee, b_3^\vee$  die Matrix

$$A_{pqr}^{-1} = -\frac{1}{d} \begin{pmatrix} qr-q-r & r & q \\ r & pr-p-r & p \\ q & p & pq-p-q \end{pmatrix}$$

(iii) Die Elemente  $a_1^\vee, a_2^\vee, a_3^\vee$  repräsentieren ein Erzeugendensystem von  $G_L = L^\# / L$  mit der Matrix

$$((a_i^\vee, a_j^\vee)) = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} qr-q-r-d & r & q \\ r & pr-p-r-d & p \\ q & p & pq-p-q-d \end{pmatrix}$$

(iv) Es sei  $(p, q, r)$  der größte gemeinsame Teiler von  $p, q, r$ . Dann gilt:

$$G_L \cong \mathbb{Z}/(p, q, r) \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d/(p, q, r) \mathbb{Z}.$$

Beweis:

(i) Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} (b_i, c_k) &= \delta_{ik} \\ (b_i, a_j) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus und aus der Definition der  $b_i$  folgt sofort die Behauptung.

(ii) Die Behauptung folgt trivial aus (i).

(iii) Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} (c_i, a_j) &= \delta_{ij} \\ (c_i, b_k) &= \delta_{ik} \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Zerlegung von  $c_i \in N \subset L^\# \perp M^\#$

$$c_i = a_i^\vee + b_i^\vee.$$

Damit folgt die Behauptung durch Anwendung des obigen Lemmas aus (ii).

(iv) Wegen des Lemmas gilt  $G_L \cong G_M$ , und damit ergibt sich die Behauptung durch Anwendung von Elementarteilertheorie auf die Matrix  $A_{pqr}$ .

Bemerkung: Die Einbettung  $L_{pqr}^* \subset L_{pqr}^\wedge$  mit Komplement  $M_{pqr}$  hat eine geometrische Bedeutung. Zu der Singularität  $T_{pqr}$  gehört eine duale Spitzensingularität  $T_{pqr}^*$ , die im allgemeinen allerdings nicht mehr ein vollständiger Durchschnitt ist (vgl. [42]). Die Matrix  $A_{pqr}$  ist die Schnittmatrix des exzeptionellen Divisors in der minimalen guten Auflösung von  $T_{pqr}^*$  (vgl. [42], 7.7.1). Die Singularitäten  $T_{pqr}$  und  $T_{pqr}^*$  liegen zusammen auf einer hyperbolischen Inoue-Fläche  $X$  (vgl. [42] 2.3 und [39] 2.1). Es sei  $Y$  die Fläche, welche aus  $X$  durch minimale gute Auflösung von  $T_{pqr}^*$  entsteht. Nach E. Looijenga [39] 2.9 kann man  $Y$  so in eine glatte rationale Fläche  $Y'$  deformieren, daß der exzeptionelle Divisor  $D = D_1 + D_2 + D_3$  von

$T_{pqr}^*$  erhalten bleibt und  $T_{pqr}$  geglättet wird. Dann kann man die folgenden Gitter paarweise miteinander identifizieren:

$$L_{pqr}^{\wedge} = H_2(Y', \mathbb{Z})$$

$$M_{pqr} = \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}[D_i]$$

$$L_{pqr}^* = \text{kern } (H_2(Y', \mathbb{Z}) + H_2(Y, \mathbb{Z})).$$

### 3.5. Berechnung der exzeptionellen Diskriminantenformen.

In Proposition 3.4 (iii) sind die Diskriminantenformen der Gitter  $L = L_{pqr}$  durch ihre Matrizen bezüglich eines Erzeugendensystems der Gruppen  $G_L$  beschrieben worden. Dies ist jedoch nur der erste Schritt zu ihrer Berechnung. Der zweite Schritt ist die Bestimmung einer normalisierten Darstellung dieser Diskriminantenformen  $q$  als orthogonale Summe der irreduziblen Standardformen  $w_{p,k}^{\epsilon}$  bzw.  $u_k$  und  $v_k$ . Da nach 3.4 (iv) die Gruppe  $G_L$  entweder zyklisch oder direkte Summe von zwei zyklischen Gruppen ist, gibt es für jede Primzahl  $p$ , für welche die  $p$ -primäre Komponente  $q_p$  nicht Null ist, nur die folgenden Möglichkeiten:

$$q_p = \begin{cases} w_{p,k}^{\epsilon} \\ w_{p,k}^{\epsilon} \perp w_{p,m}^{\epsilon'} \\ u_k \\ v_k \end{cases}$$

Selbstverständlich hat die Primzahl  $p$  nichts mit der Zahl  $p$  in dem Tripel  $(p,q,r)$  zu tun. Es ist nicht schwer, einen Algorithmus anzugeben, der für ein gegebenes Tripel  $(p,q,r)$  aus dem in 3.4 (iii) beschriebenen Erzeugendensystem von  $G_L$  ein minimales Erzeugendensystem für alle  $p$ -primären Komponenten von  $G_L$  ausrechnet und dazu

aus 3.4 (iii) die Matrix von  $q_p$ . Der Algorithmus entscheidet dann, welcher von den oben angegebenen Fällen vorliegt, und normalisiert entsprechend den Relationen in 3.3. Die Elemente eines solchen Algorithmus sind elementar: Primzahlzerlegung, Euklidischer Algorithmus und Berechnung von Legendre-Symbolen. Herr D. Zagier und Herr G. Schneider waren so freundlich, einen solchen Algorithmus für eine kleine und eine große Rechenanlage zu programmieren. Die große, eine IBM 370/168, hat die Diskriminantenformen für alle  $(p,q,r)$  mit  $d_{pqr} \leq 500$  in 18 Sekunden berechnet. Die Tabelle 4 zeigt die Resultate für  $d = d_{pqr} \leq 21$  in codierter Form. Jede Primärkomponente  $q_p$  wird dabei wie folgt durch ein 5-Tupel von ganzen Zahlen codiert:

$$(p,m,n,r,s) \iff q_p = w_{p,m}^r \perp w_{p,n}^s$$

$$(p,0,n,0,s) \iff q_p = w_{p,n}^s$$

$$(p,m,m,0,0) \iff q_p = u_m$$

$$(p,m,m,2,2) \iff q_p = v_m$$

$$(1,0,0,0,0) \iff q = 0.$$

In Tabelle 4 zeigt Spalte 2 das Tripel  $(p,q,r)$ , Spalte 1 den Absolutbetrag  $d = d_{pqr}$  der Diskriminante und Spalte 3 den Rang  $n = p+q+r$  von  $L_{pqr}$ , und die Spalten 4 und 5 zeigen die 5-Tupel  $(p_i, m_i, n_i, r_i, s_i)$ , welche die Primärkomponenten der Diskriminantenform von  $L_{pqr}$  beschreiben.

Aus der Tabelle ergibt sich unter anderem das Folgende: Es gibt Paare von verschiedenen Tripeln  $(p,q,r)$  und  $(p',q',r')$ , für welche die Ränge und Diskriminantenformen übereinstimmen, so daß also nach dem in 3.2 zitierten Satz von Nikulin folgt:  $\text{class } L_{pqr}' = \text{class } L_{p',q',r'}'$ . Der niedrigste Wert von  $d$ , für den dies vorkommt, ist  $d = 21$ . Hierfür sind  $(2,7,7)$  und  $(3,3,10)$  Tripel dieser Art. Für  $d < 21$  hingegen zeigen

Tabelle 4

d	p q r	n	p <sub>1</sub> m <sub>1</sub> n <sub>1</sub> r <sub>1</sub> s <sub>1</sub>	p <sub>2</sub> m <sub>2</sub> n <sub>2</sub> r <sub>2</sub> s <sub>2</sub>
1	2 3 7	12	1 0 0 0 0	
2	2 3 8	13	2 0 1 0 -1	
2	2 4 5	11	2 0 1 0 1	
3	2 3 9	14	3 0 1 0 1	
3	3 3 4	10	3 0 1 0 -1	
4	2 3 10	15	2 0 2 0 5	
4	2 4 6	12	2 1 1 1 -1	
5	2 3 11	16	5 0 1 0 1	
5	2 5 5	12	5 0 1 0 -1	
6	2 3 12	17	2 0 1 0 1	3 0 1 0 -1
6	2 4 7	13	2 0 1 0 1	3 0 1 0 1
6	3 3 5	11	2 0 1 0 -1	3 0 1 0 -1
7	2 3 13	18	7 0 1 0 1	
8	2 3 14	19	2 0 3 0 1	
8	2 4 8	14	2 1 2 1 5	
8	2 5 6	13	2 0 3 0 -5	
8	3 4 4	11	2 0 3 0 5	
9	2 3 15	20	3 0 2 0 1	
9	3 3 6	12	3 1 1 -1 1	
10	2 3 16	21	2 0 1 0 -1	5 0 1 0 -1
10	2 4 9	15	2 0 1 0 1	5 0 1 0 1
11	2 3 17	22	11 0 1 0 1	
11	2 5 7	14	11 0 1 0 1	
12	2 3 18	23	2 0 2 0 -1	3 0 1 0 1
12	2 4 10	16	2 1 1 1 1	3 0 1 0 -1
12	2 6 6	14	2 1 1 0 0	3 0 1 0 1
12	3 3 7	13	2 0 2 0 5	3 0 1 0 -1
13	2 3 19	24	13 0 1 0 1	
13	3 4 5	12	13 0 1 0 -1	
14	2 3 20	25	2 0 1 0 1	7 0 1 0 1
14	2 4 11	17	2 0 1 0 1	7 0 1 0 1
14	2 5 8	15	2 0 1 0 -1	7 0 1 0 -1
15	2 3 21	26	3 0 1 0 -1	5 0 1 0 -1
15	3 3 8	14	3 0 1 0 -1	5 0 1 0 1
16	2 3 22	27	2 0 4 0 1	
16	2 4 12	18	2 1 3 1 1	
16	2 6 7	15	2 0 4 0 5	
16	4 4 4	12	2 2 2 2 2	
17	2 3 23	28	17 0 1 0 1	
17	2 5 9	16	17 0 1 0 -1	
18	2 3 24	29	2 0 1 0 -1	3 0 2 0 -1
18	2 4 13	19	2 0 1 0 1	3 0 2 0 1
18	3 3 9	15	2 0 1 0 1	3 1 1 1 1
18	3 4 6	13	2 0 1 0 -1	3 0 2 0 1
19	2 3 25	30	19 0 1 0 1	
20	2 3 26	31	2 0 2 0 1	5 0 1 0 1
20	2 4 14	20	2 1 1 1 -1	5 0 1 0 -1
20	2 5 10	17	2 0 2 0 -5	5 0 1 0 -1
20	2 6 8	16	2 1 1 1 -1	5 0 1 0 1
20	3 5 5	13	2 0 2 0 -1	5 0 1 0 -1
21	2 3 27	32	3 0 1 0 1	7 0 1 0 -1
21	2 7 7	16	3 0 1 0 -1	7 0 1 0 1
21	3 3 10	16	3 0 1 0 -1	7 0 1 0 1

bereits die ersten drei Spalten von Tabelle 4, daß es zu gegebenen Werten für  $n$  und  $d$  höchstens ein Tripel  $(p, q, r)$  mit diesen Werten von Rang und Absolutbetrag der Diskriminante gibt. Daraus ergibt sich insbesondere das folgende Ergebnis, das schon in 1.13 formuliert wurde:

Proposition.

$I_h$  und  $I_e$  seien wie in 1.13 die Mengen der hyperbolischen und der exzeptionellen Tripel, und  $\mathcal{K}$  bzw.  $\mathcal{K}_e$  die zugehörigen Mengen von Gitterklassen. Für die Zuordnung  $(p, q, r) \rightarrow \text{class } L'_{pqr}$  gelten folgende Aussagen:

- (i)  $I_h \rightarrow \mathcal{K}$  ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- (ii) Das Urbild von  $\mathcal{K}_e \subset \mathcal{K}$  in  $I_h$  ist  $I_e$ .
- (iii)  $I_e \rightarrow \mathcal{K}_e$  ist bijektiv.

3.6. Isotrope Untergruppen.

Im Abschnitt 4.1 werden wir jedem primitiven total isotropen Untergitter eines gegebenen Gitters  $L$  eine Untergruppe von  $G_L$  zuordnen, welche bezüglich der Diskriminantenform isotrop ist. Diese isotropen Untergruppen werden eine wesentliche Rolle bei der Klassifikation der isotropen Untergitter der exzeptionellen Milnorgitter spielen. Zur Vorbereitung bestimmen wir daher in Abschnitt 3.7 die isotropen Elemente und Untergruppen der Diskriminantenformen der 14 exzeptionellen  $L_{pqr}$ . In diesem Abschnitt beginnen wir mit einigen Definitionen und allgemeinen Bemerkungen, die den Charakter des Problems beleuchten sollen.

Es sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe und  $q: G \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$  eine nicht entartete quadratische Form. Ein Element  $x \in G$  heißt isotrop, wenn  $q(x) = 0$ . Eine Untergruppe  $H \subset G$  nenne ich isotrop, wenn die Beschränkung von

$q$  auf  $H$  die Nullform ist. Das orthogonale Komplement  $H^\perp$  einer Untergruppe  $H \subset G$  wird mit Hilfe der zu  $q$  gehörigen Bilinearform kanonisch wie folgt definiert:

$$H^\perp = \{x \in G \mid \forall y \in H \ b(x, y) = 0\}.$$

Daraus, daß  $q$  nicht entartet ist, folgt leicht  $H^{\perp\perp} = H$ . Daher gilt insbesondere: Ist  $H$  isotrop, dann ist die kanonisch auf  $H^\perp/H$  induzierte quadratische Form nicht entartet.

In 4.1 werden wir nach der Zahl der isotropen Elemente in  $G_L$  bezüglich der Diskriminantenform eines Gitters  $L$  fragen. Genauer gesagt interessieren uns die im folgenden definierten Zahlen.

#### Definition:

$G$  sei eine endliche abelsche Gruppe mit nicht entarteter quadratischer Form  $q$  und orthogonaler Gruppe  $O(q)$ . Die zyklische Gruppe der Ordnung zwei  $\{\pm 1\}$  operiert auf  $G$  durch  $x \rightarrow -x$ . Es sei

$i(q)$  = Zahl der isotropen Elemente von  $G$ ,

$j(q)$  = Zahl der  $\{\pm 1\}$ -Orbits isotroper Elemente von  $G$ ,

$h(q)$  = Zahl der  $O(q)$ -Orbits isotroper Elemente von  $G$ .

#### Proposition:

Für die irreduziblen quadratischen Formen  $q$  auf endlichen abelschen Gruppen sind  $i(q)$ ,  $j(q)$ ,  $h(q)$  die in Tabelle 5 angegebenen Zahlen.

$q$	$i(q)$	$j(q)$	$h(q)$
$w_{p,2m}^e$ $p \neq 2$	$p^m$	$(p^m+1)/2$	$(p^m+1)/2$
$w_{p,2m+1}^e$ $p \neq 2$	$p^m$	$(p^m+1)/2$	$(p^m+1)/2$
$w_{2,2m+2}^e$	$2^m$	$2^{m-1}+1$	$2^{m-1}+1$
$w_{2,2m+1}^b$ $m > 0$	$2^m$	$2^{m-1}+1$	$2^{m-1}+1$
$w_{2,1}^e$	1	1	1
$v_{2m}$	$2^{2m}$	$2^{2m-1}+2$	$2^m$
$v_{2m+1}$ $m > 0$	$2^{2m}$	$2^{2m-1}+2$	$2^m$
$v_1$	1	1	1
$u_{2m}$	$2^{2m}(m+1)$	$2^{2m-1}(m+1)+2$	$3 \cdot 2^m - 2$
$u_{2m+1}$ $m > 0$	$2^{2m}(2m+3)$	$2^{2m-1}(2m+3)+2$	$2^{m+2} - 2$
$u_1$	3	3	2

TABELLE 5

Korollar.

$G$  sei eine zyklische Gruppe der Ordnung  $d = 2^{k_0} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$  mit  $2 < p_1 < \dots < p_r$  und  $k_0 = 2m_0 + 2$  oder  $k_0 = 2m_0 + 1$  sowie  $k_1 = 2m_1$  oder  $k_1 = 2m_1 + 1$  für  $i = 1, \dots, r$ . Dann gilt für jede nicht entartete quadratische Form  $q$  auf  $G$

$$i(q) = 2^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$$

$$j(q) = \begin{cases} 2^{m_0-1} p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} + 1 & \text{für } m_0 > 0 \\ (p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} + 1)/2 & \text{für } m_0 = 0 \end{cases}$$

$$h(q) = \begin{cases} 2^{-r} (2^{m_0-1} + 1) (p_1^{m_1} + 1) \dots (p_r^{m_r} + 1) & \text{für } m_0 > 0 \\ 2^{-r} (p_1^{m_1} + 1) \dots (p_r^{m_r} + 1) & \text{für } m_0 = 0 \end{cases}$$

Insbesondere gilt:

$$i(q) = 1 \Leftrightarrow j(q) = 1 \Leftrightarrow h(q) = 1 \Leftrightarrow m_0 = m_1 = \dots = m_r = 0.$$

Ich verzichte darauf, einen Beweis für diese Aussagen mitzuteilen, da ich sie ohnehin nur formuliert habe, um dem Leser eine Vorstellung von der Abhängigkeit der Zahlen  $i, j, h$  von  $q$  zu vermitteln. Meines Erachtens zeigen diese Formeln in Verbindung mit Abschnitt 4.1, daß die Bestimmung der primitiven isotropen Untergitter der Gitter  $L_{pqr}$  für alle hyperbolischen Tripel  $(p, q, r)$  keine sinnvolle Aufgabe wäre. Wir beschränken uns daher im folgenden entsprechend der früher entwickelten Zielsetzung auf die Untersuchung der 14 exzeptionellen  $L_{pqr}$ .

### 3.7. Die isotropen Untergruppen der exzeptionellen Diskriminantenformen.

Die Diskriminantenformen der  $L_{pqr}$  sind für die 14 exzeptionellen Tripel  $(p, q, r) \in I_e$  in codierter Form in Tabelle 4 angegeben. In der weiter unten folgenden Propo-

sition geben wir diese 14 Diskriminantenformen der exzeptionellen Milnorgitter noch einmal explizit an und stellen dafür gleichzeitig eine Tabelle mit weiteren Informationen auf. Dazu gehört u.a. die Beschreibung aller isotropen Elemente und Untergruppen der Diskriminantenformen.

Um die isotropen Elemente  $v$  einer endlichen abelschen Gruppe  $G$  mit quadratischer Form  $q$  explizit zu beschreiben, muß man auch für  $G$  eine explizite Beschreibung wählen. In unserem Fall benutzen wir aber dazu nicht die Beschreibung als Restklassengruppe  $G_L = L^*/L$  der Gitter  $L = L_{pqr}$ , sondern wir wählen für jede der 14 Diskriminantenformen eine Darstellung als direkte Summe irreduzibler Formen  $w_{p,k}^\epsilon$  bzw.  $v_k$  im Sinne von Abschnitt 3.3 gemäß Tabelle 4. Die Formen  $w_{p,k}^\epsilon$  bzw.  $v_k$  sind in 3.3 als ganz bestimmte Formen auf zyklischen Gruppen  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  oder auf Summen von zwei solchen zyklischen Gruppen definiert worden. Damit erhalten wir auch für die 14 exzeptionellen Diskriminantenformen gemäß 3.4 und 3.5 eine bestimmte Beschreibung als Form auf  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Elemente  $v$  aus diesen Gruppen beschreiben wir dann durch eine ganze Zahl  $a$  bzw. ein Paar von ganzen Zahlen  $(a, b)$  und meinen damit die Restklasse von  $a$  modulo  $m$  bzw. das Paar der Restklassen von  $a$  und  $b$  modulo  $m$  und  $n$ .

Proposition.

Die vierzehn exzeptionellen Gitter  $L_{pqr}$  haben die in Tabelle 6 angegebenen Diskriminantenformen. Für diese Formen enthält die Tabelle die folgenden Daten:

Spalte	Datum
TYP	Typ der zugehörigen exzeptionellen Singularität
(p,q,r)	Gabrielov-Tripel $(p,q,r) \in I_e$
q	Repräsentant q der Isomorphieklasse von $G_{L_{pqr}}$
O(q)	orthogonale Gruppe von q
$v_i$	Liste der isotropen Elemente $v_i$ von q
$H_i$	Liste der isotropen Untergruppen $H_i$ von q
$H_i^1/H_i$	Repräsentant der Isomorphieklasse von $H_i^1/H_i$

Zum Beweis: Die Isomorphieklassen q der Diskriminantenformen wurden schon in Tabelle 4 angegeben. Daraus folgen alle weiteren Aussagen durch das Korollar in 3.6 oder ganz einfache Rechnungen, auf deren Wiedergabe wir verzichten.

In 3.2 haben wir bereits darauf hingewiesen, daß nach Nikulin jedes Milnorgitter durch seine Signatur und Diskriminantenform eindeutig bestimmt ist. Von gewissen später zu betrachtenden Gittern ist jedoch nicht a priori bekannt, daß sie Milnorgitter sind. Aber wir können auf diese Gitter den gleichen allgemeinen Satz aus der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen anwenden, der auf Kneser zurückgeht und Nikulins Beweis von 3.2 zugrunde liegt ([44], Satz 1.13.2). Dadurch erhalten wir das folgende Korollar.

#### Korollar

Für  $(p,q,r) \in I_e$  sind die Gitter  $L_{p,q,r}$ ,  $L_{p,q,r}^1$  und  $L_{p,q,r}^*$  durch ihre jeweilige Diskriminantenform und Signatur bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

TYP	(p,q,r)	q	O(q)	$v_i$	$H_i$	$H_i^1/H_i$
$E_{42}$	(2,3,7)	0	{1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	0
$Z_{44}$	(2,4,5)	$w_{2,4}^4$	{1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{2,4}^4$
$Q_{40}$	(3,3,4)	$w_{3,4}^{-4}$	{±1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{3,4}^{-4}$
$E_{43}$	(2,3,8)	$w_{2,4}^{-4}$	{1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{2,4}^{-4}$
$E_{44}$	(2,3,9)	$w_{3,4}^4$	{±1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{3,4}^4$
$Q_{44}$	(3,3,5)	$w_{2,4}^{-4} + w_{3,4}^{-4}$	{±1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{2,4}^{-4} + w_{3,4}^{-4}$
$Z_{43}$	(2,4,7)	$w_{2,4}^4 + w_{3,4}^4$	{±1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{2,4}^4 + w_{3,4}^4$
$w_{42}$	(2,5,5)	$w_{5,4}^{-4}$	{±1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{5,4}^{-4}$
$S_{42}$	(3,4,5)	$w_{13,4}^{-4}$	{±1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{43,4}^{-4}$
$Q_{42}$	(3,3,6)	$w_{3,4}^4 + w_{3,4}^{-4}$	{±1} × {±1}	$v_0 = (0,0)$	$H_0 = \{0\}$	$w_{3,4}^4 + w_{3,4}^{-4}$
				$v_1 = (4,1)$	$H_1 = \{0, \pm v_1\}$	0
				$v_2 = (4,2)$	$H_2 = \{0, \pm v_2\}$	0
				$v_3 = (2,1)$		
$Z_{42}$	(2,4,6)	$w_{2,4}^4 + w_{2,4}^{-4}$	{1}	$v_0 = (0,0)$	$H_0 = \{0\}$	$w_{2,4}^4 + w_{2,4}^{-4}$
				$v_1 = (4,1)$	$H_1 = \{0, v_1\}$	0
$S_{44}$	(3,4,4)	$w_{2,3}^5$	{±1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{2,3}^5$
				$v_1 = 4$	$H_1 = \{0, v_1\}$	$w_{2,4}^4$
$w_{43}$	(2,5,6)	$w_{2,3}^{-5}$	{±1}	$v_0 = 0$	$H_0 = \{0\}$	$w_{2,3}^{-5}$
				$v_1 = 4$	$H_1 = \{0, v_1\}$	$w_{2,4}^{-4}$
$U_{42}$	(4,4,4)	$v_2$	{±1} × $S_3$	$v_0 = (0,0)$	$H_0 = \{0\}$	$v_2$
				$v_1 = (2,0)$	$H_1 = \{0, v_1\}$	$w_{2,4}^4 + w_{2,4}^{-4}$
				$v_2 = (0,2)$	$H_2 = \{0, v_2\}$	$w_{2,4}^4 + w_{2,4}^{-4}$
				$v_3 = (2,2)$	$H_3 = \{0, v_3\}$	$w_{2,4}^4 + w_{2,4}^{-4}$
					$H_4 = \{0, v_1, v_2, v_3\}$	0

TABELLE 6



#### § 4. Isotrope Untergitter vom Rang 1

##### 4.1. Isotrope Untergitter und isotrope Untergruppen.

$L$  sei ein nicht entartetes ganzzahliges gerades Gitter und  $E \subset L$  ein Untergitter. Natürlich gilt für die Bildung orthogonaler Komplemente in  $L$  stets  $E \subset E_L^{\perp\perp}$ , und es gilt  $E = E_L^{\perp\perp}$  genau dann, wenn  $E$  primitiv in  $L$  ist. Ist  $L^\#$  das zu  $L$  duale Gitter, dann kann man wegen der kanonischen Einbettung  $L \subset L^\#$  das Gitter  $E$  auch als Untergitter von  $L^\#$  auffassen, und für die Bildung orthogonaler Komplemente in  $L$  gilt natürlich wieder

$$E \subset E_{L^\#}^{\perp\perp}.$$

$E$  ist primitiv in  $L^\#$  genau dann, wenn gilt:

$$E = E_{L^\#}^{\perp\perp}.$$

Auch wenn  $E$  in  $L$  primitiv ist, braucht es deswegen noch nicht in  $L^\#$  primitiv zu sein. Im allgemeinen ist vielmehr  $E$  ein echtes Untergitter des Gitters

$$E^\natural := E_{L^\#}^{\perp\perp}.$$

$E$  ist primitiv in  $L$  genau dann, wenn gilt:

$$E = E^\natural \cap L.$$

Dies veranlaßt uns zu der folgenden Definition.

##### Definition.

$L$  sei ein nicht entartetes gerades Gitter mit der Diskriminantenform  $(q_L, q_L)$  und  $E \subset L$  ein primitives Untergitter.

(i) Die zu  $E$  assoziierte Untergruppe  $H_E$  von  $G_L = L^\# / L$

ist die Gruppe

$$H_E = E^\natural / E.$$

(ii)  $E$  ist stark primitiv in  $L$  genau wenn  $E$  primitiv in  $L^\#$  ist, d.h. wenn gilt:  $H_E = 0$ .

Die Bezeichnung "stark primitiv" habe ich von E. Looijenga übernommen, der diese Terminologie für Elemente von Gittern benutzt.

Wir interessieren uns besonders für den Fall, daß  $E$  ein total isotropes Untergitter von  $L$  ist. In diesem Fall ist  $H_E$  eine isotrope Untergruppe von  $G_L$ , und  $q_L$  induziert nach 3.6 auf der endlichen abelschen Gruppe  $H_E^\perp / H_E$  eine nicht entartete quadratische Form.

##### Lemma

$L$  sei ein nicht entartetes gerades Gitter,  $E \subset L$  ein primitives total isotropes Untergitter und  $E^\perp$  das orthogonale Komplement von  $E$  in  $L$ . Ferner sei  $G_L$  die Gruppe  $L^\# / L$  mit der zu  $L$  gehörigen Diskriminantenform, und  $G_{E^\perp}$  die Gruppe  $(E^\perp / E)^\# / (E^\perp / E)$  mit der zu  $E^\perp / E$  gehörigen Diskriminantenform. Schließlich sei  $H_E \subset G_L$  die zu  $E$  assoziierte total isotrope Untergruppe, und die Gruppe  $H_E^\perp / H_E$  sei mit der nicht entarteten quadratischen Form versehen, welche durch die Diskriminantenform von  $L$  induziert wird. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus von Gruppen mit quadratischen Formen

$$G_{E^\perp} \cong H_E^\perp / H_E$$

##### Beweis:

Man hat das folgende kommutative Diagramm von kanonischen kurzen exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_L^\perp & \longrightarrow & E_{L^\#}^\perp & \longrightarrow & H_E^\perp \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L^\# & \longrightarrow & G_L \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & (E^\#)^\# & \longrightarrow & E^\# & \longrightarrow & H_E^* \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Hierin bezeichnet  $H_E^*$  die duale Gruppe  $\text{Hom}(H_E, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  zu  $H_E$ . Die Exaktheit der ersten Spalte folgt daraus, daß  $E^\#$  primitiv in  $L^\#$  ist und deswegen  $L = L^{\#\#} = (E^\#)^\#$  surjektiv. Ebenso folgt die Exaktheit der zweiten Spalte daraus, daß  $E$  primitiv in  $L$  ist. Die Exaktheit der dritten Spalte folgt daraus, daß die Diskriminantenform von  $L$  nicht entartet ist. Die Exaktheit der beiden letzten Zeilen ist trivial. Da alle anderen Zeilen und Spalten exakt sind, muß schließlich auch die erste Zeile exakt sein, und das ist die Tatsache, auf die es uns ankommt. Denn damit erhält man nun das folgende kommutative Diagramm von kurzen exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E^\# & \longrightarrow & H_E \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_L^\perp & \longrightarrow & E_{L^\#}^\perp & \longrightarrow & H_E^\perp \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E_L^\perp/E & \longrightarrow & (E_L^\perp/E)^\# & \longrightarrow & G_{E^\perp} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Die erste und dritte Zeile sind nach Definition exakt, und die Exaktheit der zweiten Zeile wurde mittels des vorhergehenden Diagramms bewiesen. Die erste Spalte ist trivialerweise exakt, und die Exaktheit der zweiten Spalte folgt man leicht daraus, daß für das primitive Untergitter  $E_L^\perp \subset L$  der kanonische Homomorphismus  $L^\# \rightarrow (E_L^\perp)^\#$  surjektiv ist. Also ist auch die letzte Spalte exakt, und damit erhält man den gesuchten Isomorphismus  $G_{E^\perp} \cong H_E^\perp/H_E$ . Man überzeugt sich leicht, daß dieser kanonische Isomorphismus mit den quadratischen Formen verträglich ist.

#### Proposition.

$L$  sei ein nicht entartetes gerades Gitter, und  $E \neq 0$  sei ein primitives total isotropes Untergitter. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i)  $E$  ist stark primitiv
- (ii)  $E$  ist in einem unimodularen Untergitter von  $L$  enthalten.

Beweis.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Es sei  $e \in E$  ein primitives Element,  $e \neq 0$ . Weil mit  $E$  auch jedes primitive Untergitter von  $E$  stark primitiv ist, ist  $\mathbb{Z}e$  stark primitiv, das heißt  $(e, L) = \mathbb{Z}$ . Daher existiert ein  $f \in L$  mit  $(e, f) = 1$ , und da man nötigenfalls  $f$  um ein Vielfaches von  $e$  ändern kann, kann man  $f$  sogar isotrop wählen.  $U = \mathbb{Z}e \oplus \mathbb{Z}f$  ist also eine unimodulare hyperbolische Ebene, und mit  $L' = U^\perp$  hat man daher  $L = L' \perp U$ . Es sei  $E' = E \cap L'$ . Dann gilt  $E = E' \perp \mathbb{Z}e$ , und  $E' \subset L'$  ist total isotrop und stark primitiv in  $L'$ . Daher folgt die Behauptung durch Induktion über Rang  $E$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Es sei  $E \subset N \subset L$  und  $N$  unimodular. Dann gilt  $L = N \perp N^\perp$ , also  $L^\# = (N^\perp)^\# \perp N$ , und  $L^\# / E = (N^\perp)^\# \oplus N / E$  ist torsionsfrei, d.h.  $E$  stark primitiv.

Der vorstehende Beweis liefert sogar die folgende, ein wenig genauer erscheinende Aussage.

Zusatz.

$L$  sei ein nichtentartetes gerades Gitter, und  $E \subset L$  ein total isotropes und stark primitives Untergitter vom Rang  $k > 0$ . Dann existieren zueinander orthogonale unimodulare hyperbolische Ebenen  $U_1, \dots, U_k \subset L$  mit isotropen Basen  $e_i, f_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , so daß  $e_1, \dots, e_k$  eine Basis von  $E$  ist. Daher gilt für  $M = (U_1 \perp \dots \perp U_k)^\perp_L$  folgendes:

$$L = M \perp U_1 \perp \dots \perp U_k$$

$$E = \oplus \mathbb{Z} e_i \subset U_1 \perp \dots \perp U_k$$

$$E^\perp = M \perp E$$

$$E^\perp / E \cong M.$$

Korollar.

$L$  sei ein nichtentartetes gerades Gitter derart, daß  $\text{class}(L)$  durch die Signatur  $(n_-, n_+)$  von  $L$  und durch die Diskriminantenform  $q_L$  eindeutig bestimmt ist. Es sei  $k \leq \min(n_-, n_+)$ . Dann gilt für die primitiven total isotropen Untergitter  $E \subset L$  folgendes:

Die Zuordnung  $E \mapsto \text{class}(E^\perp / E)$  definiert eine bijektive Korrespondenz zwischen der Menge der  $O(L)$ -Klassen stark primitiver total isotroper Untergitter vom Rang  $k$  und der Menge der Klassen von geraden nichtentarteten Gittern  $M$  mit der Signatur  $(n_- - k, n_+ - k)$  und mit Diskriminantenform  $q_M \cong q_L$ .

Beweis.

$E$  sei stark primitiv, total isotrop und vom Rang  $k$ . Es sei  $M = E^\perp / E$ . Dann hat  $M$  offenbar die Signatur  $(n_- - k, n_+ - k)$ , und wegen des obigen Lemmas gilt  $q_M \cong q_L$ . Die Zuordnung  $E \mapsto \text{class}(E^\perp / E)$  liefert also tatsächlich eine Abbildung für die fraglichen Mengen von Gitterklassen. Wir definieren folgendermaßen eine inverse Abbildung. Es sei  $N = U_1 \perp \dots \perp U_k$  Summe von  $k$  unimodularen hyperbolischen Ebenen und  $P \subset N$  ein fest gewähltes maximales total isotropes Untergitter, z.B. wie im obigen Zusatz. Ist nun  $M$  irgendein gerades Gitter mit Signatur  $(n_- - k, n_+ - k)$  und mit  $q_M \cong q_L$ , dann gibt es wegen der Voraussetzung über  $L$  einen Isomorphismus  $\phi: M \rightarrow N - L$ . Wir wählen einen solchen Isomorphismus  $\phi$  und ordnen  $\text{class}(M)$  die  $O(L)$ -Klasse von  $E = \phi(P)$  zu. Diese Abbildung ist trivialerweise wohldefiniert, und der obige Zusatz zeigt, daß sie die Inverse zu der Abbildung  $E \mapsto \text{class}(E^\perp / E)$  ist.

#### 4.2. Die Klassifikation isotroper Untergitter vom Rang 1

Für stark primitive total isotrope Untergitter eines Gitters  $L$  wurde das Klassifikationsproblem im vorigen Abschnitt auf das Problem der Klassifikation von Gittern mit gegebener Signatur und Diskriminantenform zurückgeführt. Für nicht stark primitive total isotrope Untergitter ist das Klassifikationsproblem nicht so einfach. Natürlich ist dies Problem in der Literatur über quadratische Formen mehrfach untersucht worden, insbesondere in der 1980 in Göttingen vorgelegten Dissertation von K.P. Sondergeld "Zur Klassifikation von Darstellungen durch ganzzahlige quadratische Formen" (man vergleiche z.B. dort Satz 12.2 mit dem Folgenden) und schon vorher in seiner Diplomarbeit [54], Satz 3, wo vor allem der Fall der Gitter vom Rang 1 behandelt wird. Diese Resultate habe ich zunächst bei der Klassifikation der isotropen Untergitter vom Rang 1 herangezogen. Dann hat mir jedoch E. Looijenga eine einfache und elegante Methode der Klassifikation gezeigt, die mir für unsere Zwecke sehr angemessen erscheint. Mit freundlicher Erlaubnis von Herrn Looijenga stelle ich im folgenden sein noch unveröffentlichtes Ergebnis zusammen mit dem Beweis dar, den er mir mitgeteilt hat.

Es sei  $L$  ein nichtentartetes gerades Gitter und  $v \in L$  ein primitives Element  $v \neq 0$ . Es sei  $n = \text{div}(v)$  der Divisor von  $v$ , das heißt die eindeutig bestimmte positive natürliche Zahl  $n$  mit

$$(v, L) = n\mathbb{Z}.$$

Wir setzen

$$v^{\sharp} = \frac{v}{n} \in L^{\sharp}.$$

Das Element  $v \in L$  heißt stark primitiv, wenn  $v^{\sharp} = v$ . Natürlich gilt für das von  $v$  erzeugte Gitter vom Rang 1

$$(\mathbb{Z}v)^{\sharp} = \mathbb{Z}v^{\sharp}.$$

Für jedes  $v$  definiert  $v^{\sharp}$  eine Restklasse

$$\bar{v} = v^{\sharp} + L^{\sharp} L^{\sharp}/L = G_L.$$

Weil  $v$  primitiv ist, ist  $\bar{v}$  ein Element der Ordnung  $o(\bar{v}) = n = \text{div}(v)$ . Natürlich ist  $\bar{v}$  ein erzeugendes Element der zu  $\mathbb{Z}v$  assoziierten zyklischen Gruppe

$$H_{\mathbb{Z}v} = \langle \bar{v} \rangle.$$

Es sei  $P(L)$  die Menge der von 0 verschiedenen primitiven Elemente von  $L$ . Auf  $P(L)$  operiert die Einheitengruppe  $O(L)$ , und damit operieren natürlich auch die in 1.2 definierten Untergruppen  $\tilde{O}(L)$  und  $\tilde{O}'(L)$ . Wir wollen für gewisse indefinite Gitter  $L$  die Orbits dieser Gruppen in  $P(L)$  bestimmen. Dazu benutzen wir spezielle Elemente in diesen Gruppen, die Eichler-Siegel-Transformationen  $\psi_{e,a} \in O(L)$ , die für jedes isotrope  $e \in L$  und jedes zu  $e$  orthogonale  $a \in L$  wie folgt definiert sind:

$$\psi_{e,a}(x) = x + (x,e)a - (x,a) + \frac{1}{2}(a,a)e.$$

In Eichlers Buch "Quadratische Formen und orthogonale Gruppen" wird in Kap. I, § 3 bewiesen:

$$\psi_{e,a} \in O(L).$$

Dabei ist  $\tilde{O}'(L)$  nach 1.2 für ein nichtentartetes reell indefinites Gitter  $L$  die folgende Gruppe:

$$O'(L) = \tilde{O}'(L) \cap O_+(L) = \tilde{O}'(L) \cap O_-(L) = O_+(L) \cap O_-(L).$$

Ferner gilt trivialerweise für  $\tilde{O}(L) = \ker(O(L) - O(G_L))$

$$\psi_{e,a} \in \tilde{O}(L).$$

Also folgt:

$$\psi_{e,a} \in O_1^*(L) = \tilde{O}(L) \cap O_1(L).$$

Wie in 1.2 vereinbart schreiben wir im folgenden  $O^*(L)$  statt  $O_1^*(L)$  oder  $O_1(L)$ .

### Proposition.

$L$  sei ein nichtentartetes gerades Gitter mit der quadratischen Form  $q$  und  $(G_L, q_L)$  sei die Diskriminantenform von  $L$ . Ferner sei  $P(L)$  die Menge der primitiven von Null verschiedenen Elemente von  $L$ . Das Gitter  $L$  spalte mindestens zwei unimodulare hyperbolische Ebenen ab. Dann induziert die kanonische Abbildung  $\chi: P(L) \rightarrow G_L \times 2\mathbb{Z}$  mit  $v \mapsto (\bar{v}, q(v))$  eine bijektive Abbildung

$$P(L)/O^*(L) \xrightarrow{\chi} \{(x, m) \in G_L \times 2\mathbb{Z} \mid q_L(x) = \frac{m}{o(x)^2} \bmod 2\mathbb{Z}\}.$$

### Beweis:

Es ist klar, daß für Elemente  $(x, m)$  aus dem Bild von  $\chi$  gelten muß

$$q_L(x) = \frac{m}{o(x)^2} \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Umgekehrt zeigen wir, daß auch jedes  $(x, m)$ , welches dieser Bedingung genügt, im Bild von  $\chi$  liegt. Wegen der Voraussetzung über  $L$  gibt es eine orthogonale Spaltung  $L = M \perp U_1 \perp U_2$  mit unimodularen hyperbolischen Ebenen  $U_1, U_2$ . Dann gilt  $L^\# = M^\# \perp U_1 \perp U_2$ . Daher kann man zu  $x \in L^\# / L = M^\# / M$  ein  $w' \in M^\#$  mit Restklasse  $x$  wählen. Dafür gilt nach Voraussetzung  $q(w') - m/o(x)^2 = 2k \in 2\mathbb{Z}$ . Wir wählen ein  $u_1 \in U_1$  mit  $q(u_1) = -2k$  und in  $U_2$  ein primitives isotropes  $u_2 \neq 0$  und setzen  $w = w' + u_1 + u_2$ . Dann gilt:  $w$  ist primitiv in  $L^\#$ , hat die Restklasse  $x$  in  $L^\# / L$  und es gilt  $q(w) = m/o(x)^2$ . Daher gilt:  $v = o(x)w$  ist ein primitives Element in  $L$  mit  $v^\# = w$ , also  $\bar{v} = x$  und  $q(v) = m$ . Damit ist die Surjektivität von  $\chi$  bewiesen. Es ist also nur noch die Injektivität zu zeigen. Da

alle Eichler-Siegel-Transformationen in  $O^*(L)$  liegen, folgt dies unmittelbar aus der folgenden Aussage.

Behauptung: Elemente  $v, w \in P(L)$  mit  $\bar{v} = \bar{w}$  und  $q(v) = q(w)$  lassen sich durch eine Folge von Eichler-Siegel-Transformationen ineinander überführen.

### Beweis.

(i) Es sei  $L = M \perp U_1 \perp U_2$ . Dann existiert zu  $v$  ein Produkt  $\psi$  von Eichler-Siegel-Transformationen mit  $\psi(v) \in M \perp U_1$ .

Beweis: Es sei  $v = v' + v''$  mit  $v' \in M$  und  $v'' \in U_1 \perp U_2$ . Dann existiert ein Produkt  $\psi$  von Eichler-Siegel-Transformationen  $\psi_{e,a}$  mit  $e \in U_1$  und  $a \in U_2$ , so daß  $\psi(v'') \in U_1$ . (Zum Beweis siehe z.B. [20], proof of theorem 3(e) oder [38], lemma 2.5 oder [57], theorem 1 zusammen mit [58], 5.2 und 5.4). Natürlich gilt  $\psi(v') = v'$ , also wie behauptet  $\psi(v) \in M \perp U_1$ . Ebenso gibt es ein  $\psi$  mit  $\psi(w) \in M \perp U_1$ . Wir nehmen daher o.B.d.A. an:  $v, w \in M \perp U_1$ .

(ii) Es sei  $e, f$  eine isotrope Basis von  $U_2$  mit  $(e, f) = 1$ . Ferner sei  $n = o(\bar{v})$  der gemeinsame Divisor von  $v$  und  $w$ , und es seien  $a, b, c \in M \perp U_1$  Elemente mit  $(v, a) = n$  sowie  $(w, c) = -n$  und  $v - w = nb$ . Solche Elemente existieren wegen der Voraussetzungen über  $v$  und  $w$ . Eine triviale Rechnung zeigt:

$$\bar{v} := \psi_{f,b} \circ \psi_{e,a}(v) = w - ne - [(v, b) - n \frac{(b, b)}{2}] f. \quad (*)$$

Die Differenz  $u = \bar{v} - w \in U_2$  ist orthogonal zu  $w$ . Also gilt  $q(\bar{v}) = q(w) + q(u)$ . Andererseits gilt  $q(\bar{v}) = q(v)$ , weil die Eichler-Siegel-Transformationen orthogonal sind, und es gilt  $q(v) = q(w)$  nach Voraussetzung. Es folgt  $q(u) = 0$ . Also ist  $u$  ein Vielfaches von  $e$  oder  $f$ , wegen (\*) also  $u = -ne$ . Daraus folgt sofort  $\psi_{e,c}(w+u) = w$ , also

$$\psi_{e,c} \circ \psi_{f,b} \circ \psi_{e,a}(v) = w.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus dieser Proposition erhält man sofort eine Reihe von interessanten Korollaren. Zunächst ergibt sich das in 1.14 angekündigte Ergebnis.

#### Korollar 1:

$L$  sei das Milnorgitter einer Singularität, die weder einfach vom Typ  $A_1$  noch parabolisch noch auch hyperbolisch ist. Für die Monodromiegruppe  $\Gamma$  gelte  $\Gamma = \mathcal{O}(L)$ . Dann gilt für die Menge  $\Lambda$  der verschwindenden Zyklen:

$$\Lambda^* = \Lambda_1(L).$$

#### Beweis.

Es sei  $e \in \Lambda^* \subset \Lambda_1(L)$ . Bekanntlich gilt  $\Lambda^* = \Gamma e$ , also  $\Lambda^* = \mathcal{O}(L)e$ . Aber nach der obigen Proposition gilt auch  $\Lambda_1(L) = \mathcal{O}(L)e$  und damit  $\Lambda^* = \Lambda_1(L)$ , sobald  $L$  zwei unimodulare hyperbolische Ebenen abspaltet. Dieses ist aber für nicht einfache, nicht parabolische und nicht hyperbolische Singularitäten stets erfüllt nach dem folgenden Lemma. Für die einfachen Singularitäten außer  $A_1$  aber ist die Aussage des Korollars ohnehin bekannt, da in diesem Fall  $\Lambda^*$  die Menge aller Minimalvektoren ist, und da diese außer für  $A_1$  stark primitiv sind.

#### Lemma.

Jedes Milnorgitter einer nicht einfachen, nicht parabolischen und nicht hyperbolischen Singularität spaltet mindestens zwei unimodulare hyperbolische Ebenen ab.

#### Beweis.

Jede derartige Singularität deformiert nach 1.16 in  $S_{237}$  oder  $S_{245}$  oder  $S_{334}$ . Ihr Milnorgitter enthält also als primitives geometrisches Untergitter  $L_{237} \cong E_8 \perp U_1 \perp U_2$

$$\text{oder } L_{245} \cong E_7 \perp U_1 \perp U_2 \quad \text{oder } L_{334} \cong E_6 \perp U_1 \perp U_2.$$

Aus der obigen Proposition folgt weiterhin trivial das folgende Korollar.

#### Korollar 2.

Es sei  $L$  ein nichtentartetes gerades Gitter, das mindestens zwei unimodulare hyperbolische Ebenen abspaltet.

$J_1(L)$  sei die Menge der primitiven isotropen Untergitter vom Rang 1. Jedem  $E = \mathbb{Z}e$  aus  $J_1(L)$  ist durch  $E \mapsto \{\pm \bar{e}\}$  ein  $\{\pm 1\}$ -Orbit isotroper Elemente aus  $G_L$  zugeordnet. Diese Zuordnung definiert eine bijektive Abbildung

$$J_1(L)/\mathcal{O}(L) \xrightarrow{x} \{x \in G_L \mid x \text{ isotrop}\}/\{\pm 1\}.$$

Ist  $\mathcal{O}(L) \rightarrow \mathcal{O}(G_L)$  surjektiv, dann induziert  $x$  eine bijektive Abbildung

$$J_1(L)/\mathcal{O}(L) \longrightarrow \{x \in G_L \mid x \text{ isotrop}\}/\mathcal{O}(G_L).$$

**Bemerkung 1:** Wegen des obigen Lemmas und des in 3.2 zitierten Satzes von Nikulin sind die Voraussetzungen in Korollar 2 insbesondere für die Milnorgitter aller nicht einfachen, nicht parabolischen und nicht hyperbolischen Singularitäten erfüllt.

**Bemerkung 2:** Ist  $E \subset L$  ein primitives isotropes Untergitter vom Rang 1, dann ist  $E^\perp/E = H_E \subset G_L$  eine zyklische isotrope Untergruppe. Die Zuordnung  $E \mapsto H_E$  induziert daher eine auf Grund des obigen Korollars surjektive Abbildung

$$J_1(L)/\mathcal{O}(L) \xrightarrow{H} \{H \subset G_L \mid H \text{ isotrop, zyklisch}\}/\mathcal{O}(G_L).$$

Diese Abbildung ist jedoch im allgemeinen nicht bijektiv. Dies folgt wiederum aus dem obigen Korollar. Denn die



Abbildung  $\tilde{\chi}$  faktorisiert über die kanonische surjektive Abbildung

$$\{x \in G_L \mid x \text{ isotrop}\} / O(G_L) \rightarrow \{H \subset G_L \mid H \text{ isotrop, zyklisch}\} / O(G_L).$$

Aber diese Abbildung ist im allgemeinen nicht injektiv. So hat z.B. die quadratische Form  $q_L = w_{5,2}^5$  genau 5 isotrope Elemente. Diese zerfallen wegen  $O(w_{5,2}^5) = \{\pm 1\}$  in drei Orbits. Hingegen hat  $G_L$  nur zwei zyklische isotrope Untergruppen. Also ist die Abbildung nicht injektiv.

Es gibt jedoch eine Situation, in der  $\tilde{\chi}$  doch bijektiv ist. Dies ist nämlich offenbar jedenfalls dann der Fall, wenn alle isotropen zyklischen Gruppen  $H$  höchstens zwei Erzeugende haben, also genau wenn  $|H| = 1, 2, 3, 4, 6$ . Damit erhalten wir das folgende Korollar.

### Korollar 3.

Es sei  $L$  ein nichtentartetes gerades Gitter, das mindestens zwei unimodulare hyperbolische Ebenen abspaltet.  $O(L) \rightarrow O(G_L)$  sei surjektiv. Die zyklischen isotropen Untergruppen  $H \subset G_L$  mögen sämtlich die Ordnungen  $|H| = 1, 2, 3, 4, 6$  haben. Dann gilt: Ordnet man jedem primitiven isotropen Untergitter  $E$  vom Rang 1 die zyklische isotrope Gruppe  $H_E = E^{\#}/E$  zu, dann induziert dies für die Menge  $J_f(L)$  aller solchen Gitter bijektive Abbildungen

$$J_f(L)/O^*(L) \rightarrow \{H \subset G_L \mid H \text{ isotrop, zyklisch}\}$$

$$J_f(L)/O(L) \rightarrow \{H \subset G_L \mid H \text{ isotrop, zyklisch}\} / O(G_L).$$

### 4.3. Isotrope Untergitter vom Rang 1 in den exzeptionellen Gittern.

Nach der bisher geleisteten Vorarbeit ist die Klassifizierung der isotropen Untergitter vom Rang 1 in den 14 exzeptionellen Gittern  $L_{pqr}$  ein Kinderspiel.

#### Satz.

- (i) Für die 14 exzeptionellen Gitter  $L = L_{pqr}$  definiert die Zuordnung  $E \rightarrow E^{\#}/E$  für 1-dimensionale primitive isotrope  $E \in J_f(L)$  bijektive Abbildungen

$$J_f(L)/O^*(L) \rightarrow \{H \subset G_L \mid H \text{ zyklisch, isotrop}\}$$

$$J_f(L)/O(L) \rightarrow \{H \subset G_L \mid H \text{ zyklisch, isotrop}\} / O(G_L).$$

- (ii) Für jedes  $E \in J_f(L)$  gilt  $E^{\perp} \cong L'_{\rho\sigma\tau}$  mit  $(\rho, \sigma, \tau) \in I_e$ .

- (iii) Die Tabelle 7 zeigt in der ersten Spalte  $(p, q, r)$ , in den weiteren Spalten daneben die Klassenzahlen  $h_{1, O^*(L)} = |J_f(L)/O^*(L)|$  und  $h_{1, O(L)} = |J_f(L)/O(L)|$ , ferner die zyklischen isotropen Untergruppen  $H_1 \subset G_L$  und schließlich neben jedem  $H_1$  das exzeptionelle Tripel  $(p_1, q_1, r_1)$ , welches nach (i) und (ii) dazu gehört.

- (iv)  $H_1$  und  $H_j$  sind konjugiert bezüglich  $O(G_L)$  genau wenn  $(p_1, q_1, r_1) = (p_j, q_j, r_j)$ .

#### Beweis.

- (i) Die Behauptung folgt aus 4.2, Korollar 3 zusammen mit Tabelle 6 in 3.7.
- (ii) Die Behauptung folgt aus dem Lemma in 4.1, der 3. und 7. Spalte von Tabelle 6 und dem Korollar am Ende von 3.7.
- (iii), (iv) Alle Aussagen folgen wegen (i) und (ii) aus dem Vergleich mit Tabelle 6.



TYP	(p,q,r)	$h_{4,0^*(L)}$	$h_{4,0(L)}$	$H_i$	(p,q,r)
$E_{42}$	(2,3,7)	1	1	$H_0$	(2,3,7)
$Z_{41}$	(2,4,5)	1	1	$H_0$	(2,4,5)
$Q_{40}$	(3,3,4)	1	1	$H_0$	(3,3,4)
$E_{43}$	(2,3,8)	1	1	$H_0$	(2,3,8)
$E_{44}$	(2,3,9)	1	1	$H_0$	(2,3,9)
$Q_{41}$	(3,3,5)	1	1	$H_0$	(3,3,5)
$Z_{43}$	(2,4,7)	1	1	$H_0$	(2,4,7)
$W_{42}$	(2,5,5)	1	1	$H_0$	(2,5,5)
$S_{42}$	(3,4,5)	1	1	$H_0$	(3,4,5)
$Q_{42}$	(3,3,6)	3	2	$H_0$	(3,3,6)
				$H_1$	(2,3,7)
				$H_2$	(2,3,7)
$Z_{42}$	(2,4,6)	2	2	$H_0$	(2,4,6)
				$H_1$	(2,3,7)
$S_{41}$	(3,4,4)	2	2	$H_0$	(3,4,4)
				$H_1$	(2,4,5)
$W_{43}$	(2,5,6)	2	2	$H_0$	(2,5,6)
				$H_1$	(2,3,8)
$U_{42}$	(4,4,4)	4	2	$H_0$	(4,4,4)
				$H_1$	(2,4,6)
				$H_2$	(2,4,6)
				$H_3$	(2,4,6)

TABELLE 7

## § 5. Isotrope Untergitter vom Rang 2

Der Paragraph 5 ist das Kernstück der vorliegenden Arbeit. In ihm bestimmen wir für alle 14 exzeptionellen Milnorgitter  $L$  die  $O(L)$ -Klassen und die  $O^*(L)$ -Klassen primitiver isotroper Untergitter  $E$  vom Rang 2 sowie die zugehörigen Typenbewertungen und Stabilisatorgruppen

$\Gamma_E \subset SL(E)$ , und wir identifizieren die Spitzen von  $\Gamma_E$  mit den  $O^*(L)$ -Klassen primitiver isotroper Untergitter vom Rang 1, die wir ja schon im Paragraphen 4 berechnet haben. Dies führt zur Bestimmung der Konfigurationsdiagramme  $\mathcal{T}(L)/O^*(L)$  und  $\mathcal{T}(L)/O(L)$  und damit zum Beweis der Sätze, die in Paragraph 2 als Hauptergebnisse der Arbeit formuliert wurden.

Die Durchführung dieses Programms erfordert einen gewissen Aufwand an elementaren Rechnungen und die Diskussion einer relativ großen Zahl von Einzelfällen. Ich habe mich bemüht, die den Rechnungen zugrunde liegenden Prinzipien als allgemeine Hilfssätze über isotrope Untergitter gerader ganzzahliger Gitter zu formulieren. Es kam mir dabei darauf an, gleichzeitig Nutzen und Grenzen einer derartigen Anwendung der Technik der Diskriminantenformen deutlich zu machen.

Wegen der vergleichsweise größeren Komplexität dieses Paragraphen habe ich ihn stärker gegliedert als die übrigen, und ich habe die Sätze sorgfältiger nummeriert als im Rest der Arbeit.

### 5.1. Exzeptionelle definite ternäre Formen

Das Ziel der ersten beiden Abschnitte 5.1 und 5.2 ist die Bestimmung der Klassen derjenigen geraden Gitter  $L$ , für welche die orthogonale Summe  $L \perp U_1 \perp U_2$  von  $L$  mit zwei unimodularen hyperbolischen Ebenen  $U_1, U_2$  isomorph zu einem der 14 exzeptionellen Milnorgitter  $L_{pqr}$  ist. Dieses Ziel läßt sich auf verschiedenen Wegen erreichen. M. Kneser und K.-P. Sondergeld haben mir dazu viele Hinweise gegeben, wie man sich dabei auf die Ergebnisse von Kneser [26], [27] und Niemeier [43] sowie die Untersuchungen von Arf [1] und Dieudonné [13] über quadratische Formen über Körpern der Charakteristik zwei stützen kann. Obwohl sich mit diesen schönen Methoden alle fraglichen Klassen quadratischer Formen bestimmen lassen, möchte ich doch hier einen etwas anderen Weg einschlagen, weil dieser eine einheitliche Behandlung aller vierzehn Fälle ermöglicht.

Das Prinzip der Methode besteht darin, die gesuchten Gitter  $L$ , die ja negativ definit sein müssen, als orthogonale Komplemente  $L = M^\perp$  geeigneter ternärer Untergitter  $M \subset N$  von definiten unimodularen Gittern  $N$  zu gewinnen. Nach Kneser [26], Abschnitt 4, ist jedes definite ganzzahlige Gitter  $L$  in ein definites unimodulares Gitter  $N$  mit  $\text{rang } N = \text{rang } L + 3$  einbettbar. Ist  $M = L^\perp$  das orthogonale Komplement, dann gilt  $L \subset M^\perp$  mit endlichem Index, und es gilt  $L = M^\perp$  genau dann, wenn  $L \subset N$  primitiv ist. Wenn man also weiß, daß eine primitive Einbettung  $L \subset N$  existiert, erhält man  $L$  als orthogonales Komplement eines geeigneten ternären Gitters  $M$ , das in  $N$  als primitives Untergitter  $M \subset N$  eingebettet ist. Der Vorteil dabei ist natürlich, daß man mit ternären Gittern gut rechnen kann. Man kann z.B. die Resultate von Eisenstein [62] über die Reduktion von ternären Gittern anwenden, und man kann für gegebenes  $M$  und  $N$  relativ leicht die primitiven Einbettungen vom  $M$  in  $N$  bestimmen. Selbstverständlich ist die Methode in dieser Form nur für kleine Ränge wirklich durchführbar, das heißt: wohl höchstens für  $\text{rang } N < 32$ .

Das folgende Lemma und die zugehörigen Korollare präzisieren diese Methode und die Bedingungen ihrer Anwendbarkeit. Es handelt sich dabei um eine leicht beweisbare Umkehrung des Lemmas in 3.4. Wir verzichten auf die Beweise und verweisen auf Nikulin [44], 1.12.2 und 1.16.8.

#### Lemma 5.1.1.

$L$  und  $M$  seien ganzzahlige nichtentartete Gitter und  $\alpha$  ein Isomorphismus  $\alpha : (G_L, b_L) \rightarrow (G_M, -b_M)$  für die Bilinearformen  $b_L$  und  $b_M$ , die auf den endlichen Gruppen  $G_L = L^\# / L$  und  $G_M = M^\# / M$  durch die Bilinearformen von  $L$  und  $M$  induziert werden. Es sei  $G_\alpha \subset G_L \times G_M$  der Graph von  $\alpha$  und  $\tau : L^\# \perp M^\# \rightarrow G_L \times G_M$  die kanonische Restklassenabbildung. Schließlich sei  $N \subset L^\# \perp M^\#$  das Untergitter  $N = \tau^{-1}(G_\alpha)$ . Dann gilt:

- (i)  $N$  ist ein unimodulares ganzzahliges Gitter.
- (ii)  $L$  und  $M$  sind primitive Untergitter von  $N$ .
- (iii)  $L$  und  $M$  sind zueinander orthogonal, und ihre orthogonale Summe ist ein Untergitter  $L \perp M \subset N$  von endlichem Index.
- (iv)  $L = M_N^\perp$  und  $M = L_N^\perp$ .

#### Zusatz:

Die Voraussetzungen seien wie in 5.1.1. Zusätzlich sei vorausgesetzt, daß  $L$  und  $M$  gerade sind und daß  $\alpha$  ein Isomorphismus  $\alpha : (G_L, q_L) \rightarrow (G_M, -q_M)$  für die Diskriminantenformen  $q_L, q_M$  ist. Dann ist auch  $N$  gerade.

Korollar 5.1.2.

Jedes gerade Gitter  $L$  vom Rang  $n$  ist als primitives Untergitter in eine orthogonale Summe  $N$  von  $n$  unimodularen hyperbolischen Ebenen einbettbar.

Beweis: Wir können o.B.d.A. das Gitter  $L$  als nichtentartet voraussetzen, da ja immer  $L \cong L^\perp$  gilt und der isotrope Kern  $L^0$  natürlich in eine Summe unimodularer hyperbolischer Ebenen mit dem doppelten Rang einbettbar ist. Die Anwendung von 5.1.1 mit seinem Zusatz auf  $L$  und  $M = -L$ , wobei der Isomorphismus  $\alpha : (G_L, q_L) \cong (G_M, -q_M)$  die Identität von  $G_L$  ist, liefert eine primitive Einbettung  $L \subset N$ , wobei  $N$  ein gerades unimodulares Gitter mit der Signatur  $(n, n)$  und daher isomorph zur Summe von  $n$  hyperbolischen Ebenen ist.

Korollar 5.1.3.

$L$  sei ein negativ definites ganzzahliges (gerades) Gitter. Notwendig und hinreichend für die Existenz einer primitiven Einbettung  $L \subset N$  in ein negativ definites unimodulares (gerades) Gitter  $N$  mit  $\text{rang } N = \text{rang } L + k$  ist die Existenz eines negativ definiten ganzzahligen (geraden) Gitters  $M$  vom Rang  $k$  mit  $b_M \cong -b_L$  (beziehungsweise  $q_M \cong -q_L$ ).

Bemerkung: Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Gitters  $M$  mit gegebener Signatur und Bilinearform  $b_M$  gibt Nikulin [44] 1.16.5 und 1.16.7.

Hinsichtlich der Einbettungen  $i : M \hookrightarrow N$  eines gegebenen Gitters  $M$  in verschiedene unimodulare Gitter  $N$  vereinbaren wir folgendes:  $M$  wird mittels  $i$  mit  $i(M)$  identifiziert. Falls mehrere Einbettungen  $i : M \hookrightarrow N$  zu betrachten

sind, unterscheiden wir die Gitter  $N$  und die Untergitter  $i(M)$  durch Indizierung mit  $i$ , also so:  $M_i \subset N_i$ . Wir nennen Einbettungen  $i : M \hookrightarrow N$  und  $i' : M \hookrightarrow N'$  äquivalent, wenn es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & N \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ M & \xrightarrow{i'} & N' \end{array}$$

gibt, in welchem die vertikalen Pfeile Isomorphismen sind.

Korollar 5.1.4

$G$  sei eine endliche abelsche Gruppe mit nichtentarteter quadratischer Form  $q$  und zugehöriger Bilinearform  $b$ , und  $n > k$  seien natürliche Zahlen.  $M$  sei ein ganzzahliges negativ definites (gerades) Gitter vom Rang  $k$  mit  $b_M \cong -b$  (beziehungsweise  $q_M \cong -q$ ).

Es sei  $M_i \subset N_i$  ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen primitiver Einbettungen  $M \hookrightarrow N$  von  $M$  in negativ definite unimodulare (gerade) Gitter  $N$  vom Rang  $n$  mit geradem orthogonalem Komplement  $L = M_N^\perp$ . Dann repräsentieren die  $L_i = M_i^\perp$  - eventuell mehrfach - alle Klassen negativer definiten gerader Gitter  $L$  vom Rang  $n-k$  mit  $b_L \cong b$  (bzw.  $q_L \cong q$ ).

Die Situation, in der wir dies Korollar anwenden wollen, ist die folgende. Es sei  $L_{pqr}$  mit  $(p, q, r) \in I_e$  eines der 14 exzeptionellen Milnorgitter und  $(n_-, n_+) = (p+q+r-2, 2)$  seine Signatur. Dann ist das  $(G, q)$  in der Anwendung von 5.1.4 die Diskriminantenform von  $L_{pqr}$ . Ferner ist  $m$  die Zahl  $m = n_- - n_+ = p+q+r-4$ . Die Zahl  $k$  schließlich soll eine möglichst kleine Zahl sein, für die

ein ganzzahliges negativ definites Gitter  $M$  von Rang  $k$  mit  $b_M \approx -b$  existiert. Nun kennen wir aber auf Grund unserer Ergebnisse aus Abschnitt 3.4 bereits ternäre definite Gitter mit der richtigen Diskriminantenform, nämlich die Gitter  $M = M_{pqr}$ . Insbesondere können wir also immer  $k \leq 3$  wählen.

In Abschnitt 3.4 haben wir die Gitter  $M_{pqr}$  bezüglich einer geeigneten Basis durch die Matrizen  $A_{pqr}$  beschrieben.  $A_{pqr}$  ist die folgende Matrix:

$$A_{pqr} = \begin{bmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-r \end{bmatrix}$$

Um bei der Bestimmung der Einbettungen von  $M$  in unimodulare Gitter möglichst effizient, d.h. mit möglichst kleinen natürlichen Zahlen, rechnen zu können, ist es zweckmäßig, von den durch die  $A_{pqr}$  beschriebenen ternären Formen zu den zugehörigen reduzierten Formen im Sinne von Eisenstein [62] überzugehen.  $A'_{pqr}$  bezeichne die zu  $A_{pqr}$  gehörige reduzierte Matrix.

Das negativ definite Gitter  $M_{pqr}$  kann bei der Zerlegung in irreduzible orthogonale Summanden unimodulare Summanden abspalten. Es sei dementsprechend

$$M_{pqr} = I_t \perp M''_{pqr}$$

wobei  $M''_{pqr}$  die Summe der nicht unimodularen irreduziblen Summanden ist und  $I_t$  die Summe der  $t$  unimodularen Summanden,  $0 \leq t \leq 3$ . Für die Matrix  $A'_{pqr}$  bedeutet dies, daß sie von der folgenden Gestalt ist:

$$A'_{pqr} = \begin{bmatrix} -E_t & 0 \\ 0 & A''_{pqr} \end{bmatrix}$$

Dabei bezeichnet für den Moment  $E_t$  die Einheitsmatrix vom Rang  $t$ . Falls  $t = 3$  ist, schreiben wir  $A''_{pqr} = 0$ , weil dann  $M''_{pqr}$  das 0-Gitter ist.

Natürlich haben  $M_{pqr}$  und  $M''_{pqr}$  kanonisch isomorphe Diskriminantenformen, so daß wir das Korollar 5.1.4 statt auf  $M_{pqr}$  auch auf das Gitter  $M = M''_{pqr}$  vom Rang  $s = 3-t \leq 3$  anwenden können, und das werden wir auch tun, weil es einfacher ist.

Wir müssen also die primitiven Einbettungen von  $M''_{pqr}$  in negativ definite ganzzahlige unimodulare Gitter  $N$  vom Rang  $n = p+q+r-4+s$  mit geradem Komplement untersuchen. Für die 14 exzeptionellen Tripel  $(p,q,r)$  gilt  $8 \leq n \leq 11$ , und in den Fällen, wo ungerade  $N$  in Betracht kommen, sogar  $10 \leq n \leq 11$ . Wegen der Klassifikation der unimodularen definiten Formen von niedrigem Rang durch Kneser [26] gibt es daher für  $N$  allenfalls zwei Möglichkeiten, nämlich:

$$N = I_n \quad \text{oder} \quad N = E_8 \perp I_{n-8}.$$

Dabei bezeichnen wir mit  $I_v$  das unimodulare ungerade negativ definite Standardgitter  $\mathbb{Z}^v$  mit quadratischer Form  $-x_1^2 - \dots - x_v^2$ , und mit  $E_8$  das unimodulare negativ definite gerade Gitter vom Rang 8

$$\{(\xi_1, \dots, \xi_8) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^8 \mid \xi_1 - \xi_j \in \mathbb{Z}, \xi_1 + \dots + \xi_8 \in 2\mathbb{Z}\}$$

mit der quadratischen Form  $-\xi_1^2 - \dots - \xi_8^2$  (vgl. Bourbaki [7], Tabelle VII).

Es ist jedoch von vornherein klar, daß eine Einbettung  $M_{pqr}'' \subset I_n$  kein gerades Komplement haben kann. Denn ein Blick auf die Matrizen  $A_{pqr}''$  in der Tabelle 8 zeigt, daß die Summe der Diagonalelemente dem Betrag nach kleiner als 10 ist, also kleiner als  $n$ . Daher würde es für eine derartige Einbettung stets eine Koordinate  $x_1$  geben, die für alle Basisvektoren von  $M_{pqr}''$  verschwinden würde, und deshalb wäre der Standard-Basisvektor  $e_1$  von  $I_n$  ein ungerader Vektor im orthogonalen Komplement. Also folgt:

$$N = E_8 \perp I_v \quad v = 0, 2, 3.$$

Wir beschreiben Elemente in  $N$  durch ihre Koordinaten  $(\xi_1, \dots, \xi_8; x_1, \dots, x_v)$ .

In  $M_{pqr}''$  wählen wir eine Basis  $\beta_1, \dots, \beta_s$  so, daß  $M_{pqr}''$  bezüglich dieser Basis durch die oben definierte Matrix  $A_{pqr}''$  beschrieben wird. Eine Einbettung  $i: M_{pqr}'' \rightarrow N$  wird dann durch Angabe der Bilder  $i(\beta_1), \dots, i(\beta_s)$  in dieser Reihenfolge mit den oben definierten Koordinaten beschrieben.

#### Proposition 5.1.5.

(i) Die primitiven Einbettungen der Gitter  $M = M_{pqr}''$ , wo  $(p, q, r) \in I_e$  eines der 14 exzeptionellen Tripel ist, in negativ definite unimodulare Gitter  $N$  vom Rang  $n = p+q+r-4 + \text{rang } M$  mit geradem Komplement  $L = M^\perp$  sind bis auf Äquivalenz genau diejenigen, die in den Zeilen der Tabelle 8 aufgeführt sind. Die Tabelle zeigt in der ersten Spalte das Tripel  $(p, q, r)$  und in der zweiten Spalte die Matrix  $A_{pqr}''$ . In der dritten Spalte ist  $N = E_8 \perp I_v$  angegeben. In der vierten Spalte ist die Einbettung  $M \subset N$  wie oben vereinbart durch die Bilder der Basisvektoren von  $M$  beschrieben. In der fünften Spalte ist  $\underline{L}$  angegeben, das von den Minimalvektoren von  $L$  erzeugte Untergitter von  $L$ .

(ii) Für alle orthogonalen Komplemente  $L$  von Tabelle 8 gilt

$$q_L \cong q_{L_{pqr}}.$$

(iii) Für alle 14 exzeptionellen Tripel  $(p, q, r)$  folgt aus (i) und (ii): Die Klassen negativ definiter gerader Gitter  $L$  mit  $q_L \cong q_{L_{pqr}}$  und mit  $\text{rang } L = \text{rang } L_{pqr} - 4$  werden bi-jektiv durch die Komplemente  $L = M^\perp$  der Einbettungen  $M \subset N$  von  $M = M_{pqr}''$  in  $N$  aus Tabelle 8 repräsentiert.

Beweis: (i) Die Berechnung der Eisenstein-reduzierten Formen  $A_{pqr}''$  ist eine Routineaufgabe, zu der man zudem die Tabellen [62] von Eisenstein heranziehen kann, so daß wir auf die Wiedergabe der Rechnungen verzichten können. Als Resultat ergibt sich die  $s \times s$ -Matrix  $A_{pqr}''$  und  $N = E_8 \perp I_v$ , also der Eintrag von Spalte 2 und 3 der Tabelle. Danach hat man  $s$ -Tupel von Elementen in  $N$  mit  $A_{pqr}''$  als Matrix der Skalarprodukte zu suchen. Wegen der Definitheit von  $N$  hat man nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht zu ziehen, und zwar nur recht wenige, da in  $A_{pqr}''$  die Diagonalelemente nur die Werte  $-2$  und  $-3$  annehmen und die anderen Elemente die Werte  $0$  und  $1$ . Berücksichtigt man zudem entsprechend 5.1.4 die Operationen der Einheitengruppen  $O(M_{pqr}'')$  sowie  $O(E_8)$  und  $O(I_v)$ , dann reduziert sich die Zahl der zu betrachtenden Fälle ganz erheblich. Von den noch zu betrachtenden Fällen scheiden die meisten aus, weil sie Einbettungen mit ungeradem Komplement liefern. Schließlich bleiben bei entsprechenden Wahlen der Repräsentanten für die Äquivalenzklassen von Einbettungen nur die 16 Einbettungen der Tabelle 8 übrig. Wir verzichten auf die Einzelheiten der völlig elementaren Falldiskussion und die ebenso elementare Bestimmung der Gitter  $\underline{L}$ .

(ii) Für alle Tripel  $(p, q, r)$  außer  $(2, 4, 7)$  und  $(3, 4, 5)$  liefert die Tabelle nur ein negativ definites gerades  $L$  mit  $b_L \cong b_{L_{pqr}}$  und  $\text{rang } L = p+q+r - 4$ . Für dieses  $L$  folgt dann notwendigerweise auch  $q_L \cong q_{L_{pqr}}$ . Denn nach dem Lemma in 4.2 wissen wir, daß jedes  $L_{pqr}$  auf mindestens eine Art zwei unimodulare hyperbolische Ebenen ab-



$(p, q, r)$	$A_{pqr}$	$N$	$M \subset N$	$\underline{L}$
(2,3,7)	0	$E_8$	$\emptyset$	$E_8$
(2,4,5)	[-2]	$E_8$	(1,1,0,0,0,0,0,0)	$E_7$
(3,3,4)	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$E_8$	(1,1,0,0,0,0,0,0) (0,-1,1,0,0,0,0,0)	$E_6$
(2,3,8)	[-2]	$E_8 \perp I_2$	(0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1)	$E_8 \perp A_1$
(2,3,9)	[-3]	$E_8 \perp I_3$	(0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1,1)	$E_8 \perp A_2$
(3,3,5)	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_2$	(1,1,0,0,0,0,0,0; 0,0) (0,-1,1,0,0,0,0,0; 0,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1)	$E_6 \perp A_1$
(2,4,7)	$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_3$	(1,1,0,0,0,0,0,0; 0,0,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1,1)	$E_7 \perp A_2$
		$E_8 \perp I_3$	(0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,-1,1)	$E_8$
(2,5,5)	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_2$	(0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1) (1,1,0,0,0,0,0,0; -1,0)	$E_7$
(3,4,5)	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_3$	(1,1,0,0,0,0,0,0; 0,0,0) (0,-1,1,0,0,0,0,0; -1,0,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1,1)	$E_6 \perp A_1$
		$E_8 \perp I_3$	(0,0,0,0,0,0,0,0; 1,-1,0) (1,1,0,0,0,0,0,0; -1,0,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1,1)	$E_7$
(3,3,6)	$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_3$	(1,1,0,0,0,0,0,0; 0,0,0) (0,-1,1,0,0,0,0,0; 0,0,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1,1)	$E_6 \perp A_2$
(2,4,6)	$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_2$	(1,1,0,0,0,0,0,0; 0,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1)	$E_7 \perp A_1$
(3,4,4)	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_2$	(1,1,0,0,0,0,0,0; 0,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1) (0,-1,1,0,0,0,0,0; -1,0)	$E_6$
(2,5,6)	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_3$	(1,1,0,0,0,0,0,0; -1,0,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1,1)	$E_7 \perp A_1$
(4,4,4)	$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$	$E_8 \perp I_3$	(1,1,0,0,0,0,0,0; -1,0,0) (0,-1,1,0,0,0,0,0; 0,-1,0) (0,0,0,0,0,0,0,0; 1,1,1)	$E_6$

TABELLE 8

spaltet, weil  $L_{pqr}$  offenbar  $L_{237} \sim E_8 \perp U_1 \perp U_2$  oder  $L_{245} \sim E_7 \perp U_1 \perp U_2$  oder  $L_{334} \sim E_6 \perp U_1 \perp U_2$  als primitives Untergitter enthält. Ist dann  $L_{pqr} = L' \perp U_1 \perp U_2$ , so gilt  $q_{L'} \cong q_{Lpqr}$  und  $\text{rang } L' = p+q+r-4$ , und daher muß nach 5.1.4 ein orthogonales Komplement der Tabelle 8 die gleiche Klasse wie  $L'$  haben. Also folgt  $\text{class } L = \text{class } L'$ , und damit folgt auch ohne weitere Rechnung  $q_L \cong q_{L'} \cong q_{Lpqr}$ .

Ein Argument vom gleichen Typ liefert auch für die Tripel (2,4,7) und (3,4,5) jeweils für beide orthogonalen Komplemente  $L$  der Tabelle 8 die Aussage  $q_L \cong q_{Lpqr}$ . Denn im Fall (2,4,7) führen die sich offensichtlich aus der Definition der  $L_{pqr}$  ergebenden primitiven Einbettungen  $L_{237} \subset L_{247}$  und  $L_{245} \subset L_{247}$  zu zwei verschiedenen Spaltungen  $L_{247} = L' \perp U_1' \perp U_2'$  und  $L_{247} = L'' \perp U_1'' \perp U_2''$  mit  $L' = E_8$  und  $L'' = E_7 \perp A_2$ . Also muß es zu (2,4,7) mindestens zwei verschiedene Komplemente  $L$  in Tabelle 8 mit  $q_L \cong q_{L_{247}}$  geben. Da die Tabelle aber gerade genau zwei Komplemente zu (2,4,7) enthält, sind diese isomorph zu  $L'$  und  $L''$ , und daher haben sie auch die richtige Diskriminantenform. Natürlich sieht man dies hier auch sofort direkt, denn es handelt sich ja um die Gitter  $L' \cong E_8 \perp \langle -6 \rangle$  und  $L'' \cong E_7 \perp A_2$ . Für das Tripel (3,4,5) ist die Aussage (ii) trivial, weil die Diskriminante 13 ungerade ist. Aber man kann auch hier mit den primitiven Einbettungen  $L_{245} \subset L_{345}$  und  $L_{334} \subset L_{345}$  argumentieren, welche Spaltungen  $L_{345} = L' \perp U_1' \perp U_2'$  und  $L_{345} = L'' \perp U_1'' \perp U_2''$  mit  $L' = E_7$  und  $L'' = E_6 \perp A_1$  liefern.

(iii) Nach 5.1.4 kommen unter den orthogonalen Komplementen  $L$  zu den Einbettungen von Tabelle 8 wegen (i) jedenfalls Repräsentanten für alle Gitter von der in (ii) betrachteten Art vor, und wegen (ii) sind auch tatsächlich alle orthogonalen Komplemente der Tabelle von dieser Art. Da sich die 16 orthogonalen Komplemente  $L$  der Tabelle untereinander durch ihren Rang, ihre Diskriminantenform und ihr Minimalgitter  $\underline{L}$  unterscheiden, sind sie paarweise verschieden. Daher repräsentieren sie bijektiv die Klassen der Gitter, die in (iii) betrachtet werden.

### 5.2. Exzeptionelle definite Formen höheren Ranges

Nach den Vorarbeiten in Abschnitt 5.1 können wir jetzt ohne weiteres alle geraden negativ definiten Gitter  $L$  bestimmen, für welche die orthogonale Summe  $L \perp U_1 \perp U_2$  mit zwei unimodularen hyperbolischen Ebenen  $U_1, U_2$  ein exzeptionelles Milnorgitter ist.

#### Satz 5.2.1.

Für die Tripel  $(d, m, q)$  in der Tabelle 9 gibt es  $h$  Klassen gerader negativ definiter Gitter  $L$  mit Diskriminante  $d$ , Rang  $m$  und Diskriminantenform  $q$ . In allen Fällen ist das Geschlecht von  $L < 0$  durch  $(m, q)$  eindeutig bestimmt, und in den Fällen, wo  $d$  quadratfrei ist, bereits durch  $(m, d)$ . In den Fällen mit  $h > 1$  unterscheiden sich die Klassen in einem Geschlecht durch die von den Minimalvektoren von  $L$  erzeugten Untergitter  $\underline{L}$ . Für die so durch  $(m, q, \underline{L})$  eindeutig definierten Klassen legt die Tabelle in der Spalte  $L$  eine Bezeichnung fest. Diese weicht genau dann von der Bezeichnung für  $\underline{L}$  ab, wenn  $L \neq \underline{L}$ . Für alle  $L$  hat die orthogonale Summe  $L \perp U_1 \perp U_2$  mit zwei unimodularen hyperbolischen Ebenen die gleiche Klasse wie ein eindeutig bestimmtes exzeptionelles Milnorgitter  $L_{pqr}$ . Das Tripel  $(p, q, r)$  und der zugehörige exzeptionelle Singularitätentyp sind in den beiden letzten Spalten der Tabelle angegeben.

N°	d	m	q	h	$\underline{L}$	L	$(p, q, r)$	Typ
i	1	8	0	1	$E_8$	$E_8$	(2,3,7)	$E_{12}$
ii	-2	7	$w_{2,1}^1$	1	$E_7$	$E_7$	(2,4,5)	$Z_{11}$
iii	3	6	$w_{3,1}^{-1}$	1	$E_6$	$E_6$	(3,3,4)	$Q_{10}$
iv	-2	9	$w_{2,1}^{-4}$	1	$E_8 \perp A_1$	$E_8 \perp A_1$	(2,3,8)	$E_{13}$
v	3	10	$w_{3,1}^4$	1	$E_8 \perp A_2$	$E_8 \perp A_2$	(2,3,9)	$E_{14}$
vi	-6	7	$w_{2,1}^{-1} \perp w_{2,1}^{-4}$	1	$E_6 \perp A_1$	$E_6 \perp A_1$	(3,3,5)	$Q_{11}$
vii	-6	9	$w_{2,1}^1 \perp w_{2,1}^1$	2	$E_7 \perp A_2$ $E_8$	$E_7 \perp A_2$ $E_8 \perp \langle -6 \rangle$	(2,4,7)	$Z_{13}$
viii	5	8	$w_{3,1}^{-1}$	1	$E_7$	$M_{3,8}$	(2,5,5)	$W_{12}$
ix	13	8	$w_{13,1}^{-1}$	2	$E_6 \perp A_1$ $E_7$	$M_{13,8}^1$ $M_{13,8}^2$	(3,4,5)	$S_{12}$
x	9	8	$w_{3,1}^1 \perp w_{3,1}^{-1}$	1	$E_6 \perp A_2$	$E_6 \perp A_2$	(3,3,6)	$Q_{12}$
xi	4	8	$w_{2,1}^1 \perp w_{2,1}^{-4}$	1	$E_7 \perp A_1$	$E_7 \perp A_1$	(2,4,6)	$Z_{12}$
xii	-8	7	$w_{2,3}^5$	1	$E_6$	$M_{8,7}$	(3,4,4)	$S_{11}$
xiii	-8	9	$w_{2,3}^{-5}$	1	$E_7 \perp A_1$	$M_{8,9}$	(2,5,6)	$W_{13}$
xiv	16	8	$v_2$	1	$E_6$	$M_{16,8}$	(4,4,4)	$U_{12}$

TABELLE 9



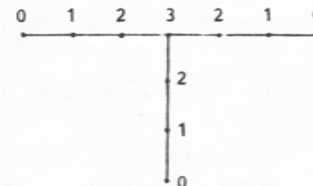
**Beweis:** Die Paare  $(m, q)$  der Tabelle 9, die als Rang und Diskriminantenform negativ definiter gerader Gitter  $L$  vorgeschrieben werden, sind genau diejenigen mit  $q \approx q_{Lpqr}$  und  $m = p+q+r - 4$ , wobei  $(p, q, r) \in I_e$  die 14 exzeptionellen Tripel durchläuft. Also werden die Klassen negativ definiter gerader Gitter  $L$  mit  $\text{rang } L = m$  und  $q_L \approx q$  nach 5.1.5 (iii) genau durch die orthogonalen Komplemente  $L$  der Einbettungen  $M_{pqr}'' \subset E_8 \perp I_v$  von Tabelle 8 repräsentiert. Daher ergeben sich aus Tabelle 8 sofort die Aussagen über die Klassenzahl  $h$  und die Unterscheidung der Klassen in einem Geschlecht durch die Minimalgitter  $\underline{L}$ . Daß das Geschlecht von  $L < 0$  durch  $(m, q)$  bestimmt ist, ist eine allgemeine Tatsache: Signatur und Diskriminantenform eines geraden nichtentarteten Gitters bestimmen sein Geschlecht (Nikulin [44], 1.9.4). Schließlich folgt die letzte Aussage über  $L \perp U_1 \perp U_2 \approx L_{pqr}$  aus den Feststellungen in 3.7 über die Diskriminantenformen der  $L_{pqr}$ , die zusammen mit der Signatur von  $L_{pqr}$  die Klasse von  $L_{pqr}$  bestimmen. Damit ist alles bewiesen.

### Proposition 5.2.2.

Für die Gitter  $L$  der Tabelle 9 ist der kanonische Homomorphismus  $\tau : O(L) \rightarrow O(G_L)$  surjektiv.

**Beweis:** In 3.7 wurden die Gruppen  $O(G_L)$  berechnet. Sie sind in Tabelle 6 angegeben. Für alle Tripel  $(p, q, r)$  mit Ausnahme von  $(3, 3, 6)$  und  $(4, 4, 4)$  gilt  $O(G_L) = O(G_{Lpqr}) = \{1\}$  oder gleich  $\{\pm 1\}$ , und daher ist  $\tau$  in diesen Fällen selbstverständlich surjektiv. Im Fall  $(3, 3, 6)$  gilt nach Tabelle 9 aber  $L = E_6 \perp A_2$ , und die bezüglich dieser orthogonalen Zerlegung durch  $x \perp y \mapsto \pm x \perp \pm y$  definierten vier Automorphismen bilden in  $O(L)$  eine Untergruppe  $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ , die von  $\tau$  isomorph auf  $O(G_L)$  abgebildet wird. Es bleibt also nur noch der Fall  $(4, 4, 4)$  zu behandeln. Dazu benutzen wir

einen isotropen Vektor  $e \in I_{444}''$ , der analog zu dem isotropen Vektor  $f_0$  vom Typ  $(3, 3, 3)$  in Abschnitt 1.9 durch die folgende Bewertung des Diagramms  $D_{444}''$  definiert ist:



Offenbar gilt  $(e, L_{4,4,4}'') = \mathbb{Z}$ . Deswegen ist das von  $e$  erzeugte isotrope Untergitter  $E$  stark primitiv, und nach dem Lemma in 4.1 gilt  $G_{E^+} \approx G_{L_{444}''}$ . Daher ist  $E^+/E$  ein gerades negativ definites Gitter vom Rang 8 mit der Diskriminantenform  $v_2$ , also nach Satz 5.2.1 von der Klasse  $M_{16,8}$ . In  $O(E^+/E)$  gilt es aber nun offensichtlich eine zu  $S_3 \times \{\pm 1\}$  isomorphe Untergruppe, die durch die Permutationen der drei Arme des Graphen  $D_{444}''$  und durch die Transformation  $x \mapsto -x$  erzeugt wird. Diese Untergruppe wird durch  $\tau : O(E^+/E) \rightarrow O(G_{E^+})$  isomorph auf  $O(G_{E^+})$  abgebildet. Damit ist die Surjektivität von  $O(L) \rightarrow O(G_L)$  auch für die Gitter  $L$  der Klasse  $M_{16,8}$ , also für den Fall des Tripels  $(4, 4, 4)$  bewiesen.

### 5.3. Binäre Null-Formen

Als Vorbereitung für den nächsten Abschnitt 5.4 stellen wir in diesem Abschnitt einige Aussagen über binäre Null-Formen zusammen, d.h. solche binäre quadratische Formen, welche die Null darstellen. Es geht dabei nicht um größtmögliche Allgemeinheit. Jedoch formulieren wir die Aussagen etwas allgemeiner als benötigt, um die Grenzen der später angewandten Methoden sichtbar zu machen. Die Beweise sind sämtlich so elementar, daß wir sie fortlassen. Wir verweisen dazu auch auf Jones: The arithmetic theory of quadratic forms, Chapter VII. Wir skizzieren außerdem eine Verallgemeinerung auf Formen höheren Ranges.

Für Formen im klassischen Sinne müssen wir zwischen zwei Äquivalenzbegriffen unterscheiden: Zwei Formen in  $n$  Variablen sind äquivalent, wenn sie durch eine Variablentransformation aus  $GL(n, \mathbb{Z})$  ineinander überführt werden können, und sie sind eigentlich äquivalent, wenn sie durch eine Transformation aus  $SL(n, \mathbb{Z})$  ineinander überführbar sind. Die zugehörigen Äquivalenzklassen nennen wir Klassen bzw. eigentliche Klassen. Die Äquivalenz für Formen entspricht dem in 1.1 eingeführten Isomorphiebegriff für Gitter, den wir ja für abstrakte Gitter ohne Orientierung definiert haben. Die Betrachtung der eigentlichen Äquivalenzklassen ist aber im folgenden auch von Nutzen.

Wir repräsentieren solche Äquivalenzklassen im folgenden durch Normalformen, die wir in Matrizenschreibweise angeben. Die Form

$$ax^2 + 2bxy + \gamma y^2$$

beschreiben wir beispielsweise durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & \gamma \end{pmatrix}$$

### Proposition 5.3.1.

(1) Die eigentlichen Klassen nichtentarteter ganzzahliger gerader binärer Null-Formen werden bijektiv durch die folgenden Normalformen repräsentiert:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 2b \end{pmatrix}.$$

Dabei sind  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen und  $0 \leq b < a$ .

(ii) Zwei Normalformen

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 2b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a' \\ a' & 2b' \end{pmatrix}$$

sind genau dann in der gleichen Klasse, wenn  $a = a'$  und wenn eine der beiden folgenden Bedingungen (A) bzw. (B) erfüllt ist:

(A)  $b = b'$

(B) Für die größten gemeinsamen Teiler gilt

$$(a, b) = (a', b') \quad \text{und für } a = \alpha(a, b),$$

$$b = \beta(a, b), \quad b' = \beta'(a, b) \quad \text{gilt } \beta\beta' = 1(a).$$

Damit sind die Klassen der geraden binären Null-Formen beschrieben. Die Beschreibung ihrer Geschlechter ist gleichbedeutend mit der Beschreibung ihrer Diskriminantenformen (Nikulín [44], 1.9.4). Aus Einfachheitsgründen berechnen wir diese zunächst nur für den Fall, wo die Diskriminantenform  $p$ -primär ist. Das heißt: Die Diskriminante ist dem Betrag nach eine Potenz einer Primzahl  $p$ .

Um bei der Angabe der Diskriminantenformen Schreibarbeit zu sparen, machen wir folgende Konventionen:

(1)  $w_{p,0}^{\pm 1} := 0$

(2)  $w_{2,1}^5 := w_{2,1}^1$  und  $w_{2,1}^{-5} := w_{2,1}^{-1}$

(3)  $\eta(\beta) = \left(\frac{-2\beta}{p}\right)$  und  $\eta'(\beta) = \left(\frac{2\beta}{p}\right)$

(4)  $\epsilon(\beta) \in \{\pm 1, \pm 5\}$  ist die Restklasse von  $-\beta$  modulo 8.

Proposition 5.3.2.

Die Diskriminantenformen der nichtentarteten geraden binären Nullformen, deren Diskriminante dem Absolutbetrag nach eine eine von 1 verschiedene Potenz einer Primzahl  $p$  ist, lassen sich folgendermaßen bestimmen. Es sei

$$\begin{pmatrix} 0 & p^k \\ p^k & 2b \end{pmatrix}$$

die Normalform einer solchen Form im Sinne von 5.3.1. Dann ist die zugehörige Diskriminantenform diejenige Form, die in Tabelle 10 in der letzten Spalte neben den entsprechenden Bedingungen für  $p$  und  $b$  angegeben ist. Dabei sind die in der Tabelle benutzten Zahlen  $m$  und  $\beta$  durch  $b = p^m \beta$  und  $(\beta, p) = 1$  definiert.

$p = 2$	$b = 0$	$u_k$
$p = 2$	$b \neq 0$	$w_{2,2k-m-1}^{\varepsilon(\beta)} \perp w_{2,m+1}^{-\varepsilon(\beta)}$
$p \equiv 1(4)$	$b = 0$	$w_{p,k}^1 \perp w_{p,k}^1$
$p \equiv 3(4)$	$b = 0$	$w_{p,k}^1 \perp w_{p,k}^{-1}$
$p \neq 2$	$b \neq 0$	$w_{p,2k-m}^{\eta(\beta)} \perp w_{p,m}^{\eta(\beta)}$

TABELLE 10

Wir bemerken, daß die Formel in der letzten Zeile von Tabelle 10 auch die Fälle mit  $p \neq 2$  und  $b = 0$  erfassen würde, wenn wir  $k = m$  setzen würden, was aber nach der in 5.3.1 erfolgten Normierung ausgeschlossen ist.

Natürlich sind im allgemeinen in einem Geschlecht mehrere Klassen enthalten. Uns interessiert hier gerade der Ausnahmefall, wo ein Geschlecht nur aus einer Klasse besteht. Wann das der Fall ist, ergibt sich durch einfache Abzählargumente aus 5.3.1 und 5.3.2.

Korollar 5.3.3.

Hinsichtlich der Aufspaltung der Geschlechter von nichtentarteten geraden binären Null-Formen in Klassen bzw. in eigentliche Klassen derartiger Formen gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Für die in Tabelle 11 unter Nummer 0 bis 12 aufgeführten quadratischen Formen  $q$  auf endlichen  $p$ -primären abelschen Gruppen gibt es nur eine eigentliche Klasse von Formen mit Diskriminantenform  $q$ . Ihre Normalform ist in der letzten Spalte angegeben.
- (ii) Für die in Tabelle 11 unter Nummer 13 bis 15 aufgeführten  $q$  gibt es nur eine Klasse mit Diskriminantenform  $q$ . Sie zerfällt in zwei eigentliche Klassen. Deren Normalformen sind in der letzten Spalte angegeben.
- (iii) Für alle anderen geraden binären Null-Formen mit  $p$ -primärer Diskriminantenform ist die Klasse durch die Diskriminantenform nicht eindeutig bestimmt.

Bei der Untersuchung des Gitters  $L_{444}$  mit der Diskriminantenform  $v_2$  werden wir später die Frage zu beantworten haben, ob es binäre gerade indefinite Gitter mit Diskriminantenform  $v_2$  gibt. Nun sieht man leicht mittels klassischer Reduktionstheorie (Jones, loc. cit., Theorem 23), daß es unter den geraden nichtentarteten binären indefiniten Gittern mit Diskriminante  $d = -16$  gar keine Gitter gibt, die nicht Null-Formen sind. Daher ergibt sich aus 5.3.1 bis 5.3.3 das folgende Ergebnis.

0	0		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
1	$u_k$	$k \geq 1$	$2^k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2	$w_{2,k}^{-1} \perp w_{2,k}^1$	$k \geq 1$	$2^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
3	$w_{2,k+1}^{-1} \perp w_{2,k-1}^1$	$k \geq 2$	$2^{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
4	$w_{2,k+1}^5 \perp w_{2,k-1}^{-5}$	$k \geq 2$	$2^{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$
5	$w_{2,k+2}^{-1} \perp w_{2,k-2}^1$	$k \geq 3$	$2^{k-3} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$
6	$w_{2,k+2}^5 \perp w_{2,k-2}^{-5}$	$k \geq 3$	$2^{k-3} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$
7	$w_{2,k+2}^{-5} \perp w_{2,k-2}^5$	$k \geq 3$	$2^{k-3} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$
8	$w_{2,k+2}^1 \perp w_{2,k-2}^{-1}$	$k \geq 3$	$2^{k-3} \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$
9	$w_{p,k}^1 \perp w_{p,k}^1$	$k \geq 1$	$p^k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad p \equiv 1(4)$
10	$w_{p,k}^1 \perp w_{p,k}^{-1}$	$k \geq 1$	$p^k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad p \equiv 3(4)$
11	$w_{3,k+1}^1 \perp w_{3,k-1}^{-1}$	$k \geq 1$	$3^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
12	$w_{3,k+1}^{-1} \perp w_{3,k-1}^1$	$k \geq 1$	$3^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
13	$w_{2,k+3}^5 \perp w_{2,k-3}^{-5}$	$k \geq 4$	$2^{k-4} \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}, 2^{k-4} \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 22 \end{bmatrix}$
14	$w_{2,k+3}^{-5} \perp w_{2,k-3}^5$	$k \geq 4$	$2^{k-4} \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}, 2^{k-4} \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 26 \end{bmatrix}$
15	$w_{5,k+1}^1 \perp w_{5,k-1}^1$	$k \geq 1$	$5^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, 5^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

TABELLE 11

Korollar 5.3.4.

Es gibt 4 eigentliche Klassen von nichtentarteten geraden indefiniten binären Formen mit Diskriminante  $-16$ . Alle sind Null-Formen. Ihre Normalformen und Diskriminantenformen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$u_2$
$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	$w_{2,3}^{-1} \perp w_{2,1}^1$
$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$	$w_{2,3}^1 \perp w_{2,1}^{-1}$
$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$w_{2,2}^1 \perp w_{2,2}^{-1}$

Insbesondere werden diese Formen durch ihre Diskriminantenform klassifiziert, und es gibt keine nichtentartete gerade indefinite binäre Form mit Diskriminantenform  $v_2$ .

Die in 5.3.2 betrachteten Diskriminantenformen lassen sich auch wie folgt charakterisieren:

Proposition 5.3.5.

- (1) Die Diskriminantenformen derjenigen nichtentarteten geraden binären Null-Formen, deren Diskriminante dem Absolutbetrag nach die Potenz einer Primzahl  $p$  ist, lassen sich bis auf Isomorphie wie folgt charakterisieren: Sie sind diejenigen  $p$ -primären abelschen Gruppen  $G$  mit nichtentarteter quadratischer Form, in

denen es eine zyklische isotrope Untergruppe  $H$  mit  $H = H^\perp$  gibt.

- (ii) Ist  $L$  ein binäres Gitter wie in (i) und  $E \subset L$  ein primitives isotropes Untergitter vom Rang 1, dann ist  $H_E \subset G_L$  eine zyklische isotrope Gruppe, für die  $H_E^\perp = H_E$  gilt.
- (iii) Die verschiedenen isotropen Untergruppen  $H$  einer Gruppe  $G$  wie in (i) sind alle durch Transformationen aus  $O(G)$  ineinander überführbar.

Beweis: (i) und (ii) folgen aus der später bewiesenen allgemeineren Aussage 5.3.8 (i) und aus 5.3.7. Die Aussage (iii) folgt z.B. leicht durch explizite Verifikation aus 5.3.2. Denn eine zyklische Untergruppe  $H \subset G$  mit  $H^\perp = H$  muß natürlich von der Ordnung  $p^k$  sein, wenn  $G$  von der Ordnung  $p^{2k}$  ist, und man verifiziert für alle Formen der Tabelle 10 leicht, daß es höchstens zwei isotrope zyklische Untergruppen der Ordnung  $p^k$  gibt, und daß diese in der gleichen  $O(G)$ -Klasse liegen.

Die gerade angegebene Charakterisierung der Diskriminantenformen binärer Null-Formen läßt sich in einem gewissen Sinne, der in 5.3.7 präzisiert wird, von binären Formen auf Formen höheren Ranges verallgemeinern. An die Stelle der binären Null-Formen treten dabei Formen vom Rang  $2k$  mit rationalem Wittindex  $k$ . Zum Beweis der entsprechenden Aussagen über Diskriminantenformen brauchen wir das folgende Ergebnis, das auch für sich genommen interessant ist.

#### Proposition 5.3.6.

Zu jeder endlichen abelschen Gruppe  $G$  mit nicht-entarteter quadratischer Form und zu jeder isotropen Untergruppe  $H \subset G$  mit minimaler Erzeugendenzahl  $\lambda$  existiert ein nichtentartetes gerades Gitter  $L$  mit einem primitiven

isotropen Untergitter  $E$  vom Rang  $\lambda$  und ein Isomorphismus von Gruppen mit Formen  $G_L \cong G$ , der  $H_E \subset G_L$  in  $H \subset G$  überführt.

Beweis: Der Beweis ist ähnlich zu einem Argument in 4.2. Es sei  $K$  ein gerades Gitter mit Diskriminantenform  $G_K$  isomorph zu  $G$ . Ein solches  $K$  existiert ja stets. Ferner sei  $L = K \perp U_1 \perp \dots \perp U_\lambda$  die orthogonale Summe von  $K$  mit  $\lambda$  unimodularen hyperbolischen Ebenen. Wir identifizieren  $G_L$  mit  $G_K$  und mit  $G$ . Wir wählen Elemente  $u_1, \dots, u_\lambda \in K^\#$ , deren Bilder  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_\lambda$  in  $G$  die Gruppe  $H$  erzeugen. Wegen der Isotropie von  $H$  ist die Matrix der Skalarprodukte  $(u_i, u_j)$  eine ganzzahlige Matrix mit geraden Diagonalkoeffizienten. Also gibt es nach 5.1.2 in  $U_1 \perp \dots \perp U_\lambda$  ein primitives Untergitter  $F'$  mit Basis  $v_1, \dots, v_\lambda$  und  $(v_i, v_j) = -(u_i, u_j)$ . Wir setzen  $w_i = u_i + v_i$  und betrachten das von  $w_1, \dots, w_\lambda$  erzeugte Untergitter  $F$  von  $L^\#$  und das Untergitter  $E = F \cap L$  von  $L$ . Dann ist  $F$  nach Konstruktion isotrop, und es ist ein primitives Untergitter vom Rang  $\lambda$  in  $L^\#$ , weil  $F'$  primitiv vom Rang  $\lambda$  in  $U_1 \perp \dots \perp U_\lambda$  ist. Daher ist  $E$  ein isotropes primitives Untergitter vom Rang  $\lambda$  in  $L$ , und es ist  $F = E^\perp$ . Also gilt  $H_E = E^\perp/E = F/E = H$ , und daher ist mit  $E$  ein Gitter von der gesuchten Art gefunden.

#### Proposition 5.3.7.

$G$  sei eine endliche abelsche Gruppe mit nichtentarteter quadratischer Form und  $H \subset G$  eine isotrope Untergruppe. Die minimale Zahl von Erzeugenden von  $H$  sei  $\lambda$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Es gibt ein nichtentartetes gerades Gitter  $N$  vom Rang  $2\lambda$  und darin ein primitives isotropes Untergitter  $E \subset N$  vom Rang  $\lambda$ , so daß es einen Isomorphismus von Gruppen mit quadratischen Formen  $G_N \cong G$  gibt, der  $H_E \subset G_N$  in  $H \subset G$  überführt.
- (ii)  $H^\perp = H$ .

Beweis:

(i)  $\rightarrow$  (ii): Aus  $\text{rang } N = 2 \text{ rang } E$  folgt  $E^\perp = E$ , also  $E^\perp = E$  und nach 4.1 daher  $0 = G_E^\perp \simeq H_E^\perp / H_E$ . Also gilt  $H_E^\perp = H_E$ .

(ii)  $\rightarrow$  (i): Es sei  $L$  ein nichtentartetes gerades Gitter und  $E$  ein primitives isotropes Untergitter vom Rang  $\lambda$  mit  $(G_L, H_E) \cong (G, H)$ . Dies existiert nach 5.3.6. Wegen 4.1 gilt nach Voraussetzung  $G_E \simeq H^\perp / H = 0$ . Also ist  $E^\perp / E$  unimodular. Daher gilt: Ist  $K \subset E^\perp \subset L$  ein Komplement von  $E$  in  $E^\perp$ , dann ist  $K$  unimodular, und es folgt  $L = K \perp N$  mit  $N = K_L^\perp$ . Dann ist aber  $N$  ein gerades nichtentartetes Gitter vom Rang  $2\lambda$  und  $E \subset N$  ein primitives isotropes Untergitter vom Rang  $\lambda$ , so daß gilt:  $(G_N, H_E) \simeq (G_L, H_E) \simeq (G, H)$ . q.e.d.

Als Korollar ergibt sich nunmehr eine Charakterisierung nicht nur der  $p$ -primären, sondern aller Diskriminantenformen von geraden binären Null-Formen.

Korollar 5.3.8.

- (i) Die Diskriminantenformen der nichtentarteten geraden binären Null-Formen sind gerade diejenigen endlichen abelschen Gruppen  $G$  mit nichtentarteter quadratischer Form  $q$ , welche eine zyklische isotrope Untergruppe  $H \subset G$  mit  $H^\perp = H$  besitzen. Diese zyklischen isotropen Untergruppen  $H$  mit  $H^\perp = H$  sind genau die isotropen Untergruppen  $H_E$  zu den primitiven isotropen Geraden  $E$ .
- (ii) Die Formen  $(G, q)$  in (i) sind gerade diejenigen, deren Primärkomponenten isomorph zu den in Tabelle 10 aufgeführten Formen sind.
- (iii) Die zyklischen Untergruppen  $H \subset G$  mit  $H^\perp = H$  liegen alle in der gleichen  $O(G)$ -Klasse.

Beweis: (i) Diese Aussage ist der Spezialfall  $\lambda = 1$  von 5.3.7.

(ii)  $G$  sei eine endliche abelsche Gruppe mit nichtentarteter quadratischer Form und  $H \subset G$  eine isotrope Untergruppe.  $G = \oplus_p G_p$  sei die orthogonale Zerlegung in die  $p$ -primären Komponenten  $G_p$  und  $H_p = H \cap G_p$  sowie  $H_p^\perp$  das orthogonale Komplement von  $H_p$  in  $G_p$ . Dann gilt  $H = \oplus_p H_p$  und  $H^\perp = \oplus_p H_p^\perp$ . Daraus folgt insbesondere:

$$H^\perp = H \iff H_p^\perp = H_p \text{ für alle } p.$$

Da  $H$  genau dann zyklisch ist, wenn alle  $H_p$  zyklisch sind, folgt (ii) aus (i) und 5.3.5. (i) zusammen mit 5.3.2.

(iii) Die Behauptung folgt mit den obigen Argumenten aus (ii) und der entsprechenden Aussage 5.3.5. (iii) für den primären Fall.

5.4. Normalformen für Klassen isotroper Untergitter

$L$  sei ein ganzzahliges gerades nichtentartetes Gitter vom Rang  $n$  mit der Signatur  $(n_-, n_+)$  und der Diskriminantenform  $(G, q)$ . Ferner sei  $H \subset G$  eine isotrope Untergruppe von  $G$  und  $\lambda(H)$  die minimale Anzahl von Erzeugenden von  $H$ . Schließlich sei  $k$  eine natürliche Zahl mit  $\lambda(H) \leq k \leq \min(n_-, n_+)$  und es sei  $m = n - 2k$ . Wenn diese Daten gegeben sind, stellen wir uns das Problem, die primitiven isotropen Untergitter  $E \subset L$  vom Rang  $k$  mit  $H_E = H$  zu bestimmen. Genauer gesagt: Wir wollen die endlich vielen  $O(L)$ -Klassen dieser isotropen Gitter  $E$  bestimmen.

Wir werden dies Problem selbstverständlich nicht in voller Allgemeinheit lösen. Wir werden uns vielmehr darauf beschränken, eine ganz einfache Methode darzustellen, mit der man in hinreichend einfachen Situationen an dieses Pro-



blem herangehen kann, und zwar im Prinzip in algorithmischer Weise. Dazu werden wir Systeme von Normalformen  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  definieren. Dabei werden die  $N_\omega$  nichtentartete gerade Gitter sein und die  $E_\omega$  isotrope Untergitter, und zu jedem isotropen Gitter  $E \subset L$  von der betrachteten Art wird es einen Isomorphismus von  $(L, E)$  mit einem  $(N_\omega, E_\omega)$  geben.

Die Gitter  $N_\omega$  werden wir mit Hilfe von Matrizen beschreiben. Tatsächlich soll die Indexmenge  $\Omega$  gerade die Menge der Matrizen  $\omega$  sein, die wir zur Definition der  $N_\omega$  brauchen. Für jede ganzzahlige  $n \times n$ -Matrix  $\omega \in M(n \times n, \mathbb{Z})$  definieren wir als  $N_\omega$  das Gitter  $\mathbb{Z}^n$  mit  $\omega = ((e_i, e_j))$  als Matrix der Skalarprodukte der Standard-Basisvektoren  $e_1, \dots, e_n$ . Wir betrachten nur Matrizen mit geraden Diagonalelementen, so daß  $N_\omega$  ein gerades Gitter ist und daher eine Diskriminantenform  $G_{N_\omega}$  besitzt. Wir definieren weiterhin als Untergitter  $E_\omega \subset N_\omega$  das von den ersten  $k$  Basisvektoren  $e_1, \dots, e_k$  aufgespannte Untergitter. Dafür, daß  $E_\omega$  isotrop ist und  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis, welche der Fahne  $E_\omega \subset E_\omega^\perp \subset N_\omega$  angepaßt ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Matrix  $\omega$  eine Blockmatrix von der folgenden Gestalt ist:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_\omega \\ 0 & B_\omega & C_\omega \\ A_\omega' & C_\omega' & D_\omega \end{pmatrix} \quad \left. \begin{matrix} \} k \\ \} m \\ \} k \end{matrix} \right\} (*)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_m \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_k$

Das isotrope Gitter  $E_\omega \subset N_\omega$  definiert dann wie in 4.1. eine isotrope Untergruppe  $H_{E_\omega} \subset G_{N_\omega}$ .

Um ein bestimmtes Normalformensystem  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  zu den Daten  $(G, H, n_-, n_+, k)$  zu definieren, gehen wir in mehreren Schritten vor: Wir schreiben zunächst einmal für die Blocks  $A_\omega, B_\omega, C_\omega, D_\omega$  successive auf bestimmte Weise Wertemengen vor. Danach geben wir eine Bedingung dafür an, welche Kombinationen der Blocks die Matrizen  $\omega \in \Omega$  bilden.

#### Definition der Wertemengen

##### (1) Wertemenge für $A_\omega$ .

Es sei  $(a_1, \dots, a_k)$  das eindeutig bestimmte  $k$ -Tupel natürlicher Zahlen, so daß gilt:  $a_i \mid a_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k-1$  und  $H \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$ . Dazu definieren wir die Matrix  $A_0$  wie folgt:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Wertemenge  $\mathcal{A}$  für die  $A_\omega$  ist  $\mathcal{A} = \{A_0\}$ .

##### (2) Wertemenge für $B_\omega$ .

Da es nur endlich viele Klassen in einem Geschlecht gibt (siehe z.B. [40], Theorem 103:4), gibt es nur endlich viele Klassen gerader nichtentarteter Formen mit Signatur  $(n_-, k, n_+ - k)$  und mit Diskriminantenform isomorph zu  $H^\perp/H$ . Jede Menge  $\mathcal{B}$  von ganzzahligen  $m \times m$ -Matrizen, welche diese Klassen biaktiv repräsentiert, bildet eine zulässige Wertemenge für  $B_\omega$ .



(3) Wertemengensystem für  $C_\omega$ .

Für jede Matrix  $B \in M(m, m; \mathbb{Z})$  vom Rang  $m$  ist die Gruppe von Restklassen von Matrizen

$$M(B) := M(m, k; \mathbb{Z}) / BM(m, k; \mathbb{Z}) + M(m, k; \mathbb{Z}) A_0$$

eine endliche abelsche Gruppe. Es sei  $\mathcal{B}$  eine zulässige Wertemenge für die  $B_\omega$ . Für jedes  $B \in \mathcal{B}$  sei  $\mathcal{C}(B) \subset M(m, k; \mathbb{Z})$  eine Menge von Matrizen, welche bi-jektiv die Elemente von  $M(B)$  repräsentieren. Das System  $\mathcal{C}$  der Mengen  $\mathcal{C}(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}$ , bildet dann ein zulässiges Wertemengensystem für die  $C_\omega$  relativ zu  $\mathcal{B}$ .

(4) Wertemenge für  $D_\omega$ .

Die Wertemenge  $\mathcal{D}$  für  $D_\omega$  ist die Menge der symmetrischen Matrizen von der folgenden Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 2d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{12} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d_{k-1,k} \\ d_{1k} & \dots & d_{k-1,k} & 2d_{kk} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die  $d_{ij}$  ganze Zahlen, die den folgenden Bedingungen genügen:  $0 \leq d_{ij} < a_{k-j+1}$  für  $i \leq j$ .

Definition:

Ein Quadrupel  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  von der oben beschriebenen Art heißt ein Wertesystem für Normalformen zu den Daten  $(G, H, n_-, n_+, k)$ . Hierin sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{D}$  eindeutig bestimmt, während für  $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  Wahlmöglichkeiten bestehen.

Definition der Normalformensysteme:

$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  sei ein Wertesystem für Normalformen zu  $(G, H, n_-, n_+, k)$ . Dann definieren wir  $\Omega$  als die von  $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  abhängende endliche Menge  $\Omega(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  von Matrizen

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_\omega \\ 0 & B_\omega & C_\omega \\ A'_\omega & C'_\omega & D_\omega \end{pmatrix},$$

welche den folgenden Bedingungen genügen:

- (1) (i)  $A_\omega \in \mathcal{A}$
- (ii)  $B_\omega \in \mathcal{B}$
- (iii)  $C_\omega \in \mathcal{C}(B_\omega)$
- (v)  $D_\omega \in \mathcal{D}$

- (2) Es existiert ein Isomorphismus von Gruppen mit quadratischen Formen und isotropen Untergruppen

$$G_{N_\omega} \cong G$$

$$U \quad U$$

$$H_{E_\omega} \cong H.$$

Das System  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  heißt das Normalformensystem für  $(G, H, n_-, n_+, k)$  zu  $(B, C)$ . Wenn  $(B, C)$  nicht interessiert, sprechen wir einfach von einem Normalformensystem für  $(G, H, n_-, n_+, k)$ . Die Angabe eines Normalformensystems  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  ist natürlich gleichbedeutend mit der Angabe seiner Matrizen  $\omega \in \Omega$ .

#### Definition:

Das Normalformensystem für  $(G, H, n_-, n_+, k)$  zu  $(B, C)$  heißt eindeutig, wenn die durch  $\omega \mapsto B_\omega$  definierte Abbildung  $\Omega \rightarrow B$  injektiv ist. Es heißt vollständig, wenn  $\Omega \rightarrow B$  surjektiv ist.

Aus den Definitionen folgt trivialerweise, daß ein Normalformensystem für  $(G, H, n_-, n_+, k)$  auch für jedes  $H' \subset G$ , welches aus  $H$  durch Transformation mit einem Element von  $O(G)$  hervorgeht, ein Normalformensystem für  $(G, H', n_-, n_+, k)$  ist. In diesem Sinne hängen die Eigenschaften der Normalformensysteme nur von der  $O(G)$ -Klasse von  $H$  ab. Diese Klasse bezeichnen wir in Zukunft mit  $[H]$ .

Im allgemeinen ist ein Normalformensystem selbstverständlich weder vollständig noch eindeutig. Das ist ein Nachteil einer derart groben Definition von Normalformen. Ein Vorteil ist, daß sich in hinreichend einfachen Fällen ein Normalformensystem durch elementare Operationen mit Matrizen schnell berechnen läßt, wenn erst einmal  $B$  bestimmt ist.

Ein besonders einfacher Extremfall liegt dann vor, wenn die Daten  $(G, H, n_-, n_+, k)$  von der Form  $(G, H, k, k, k)$  sind. In diesem Fall gibt es nur ein einziges Wertesystem  $(A, B, C, D)$  zu diesen Daten, denn  $B$  und  $C$  bestehen beide aus der  $0 \times 0$ -Matrix, das heißt  $B = \{\emptyset\}$  und  $C(\emptyset) = \{\emptyset\}$ . Daher gibt es zu  $(G, H, k, k, k)$  ein eindeutig bestimmtes Normalformensystem. Seine Matrizen  $\omega \in \Omega$

sind die Matrizen

$$\omega = \begin{array}{|cc|} \hline 0 & A_0 \\ \hline A_0' & D_\omega \\ \hline \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} k \\ k \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_k$

mit  $D_\omega \in \mathcal{D}$ , für welche ein Isomorphismus  $(G_{N_\omega}, H_{E_\omega}) \cong (G, H)$  existiert. Das Normalformensystem ist daher genau dann vollständig, wenn  $\Omega$  nicht leer ist. Aus 5.3.7 und dem noch zu beweisenden Normalformenlemma folgt dafür folgendes Kriterium:

$$\Omega \neq \emptyset \iff H^\perp = H.$$

Das Normalformensystem ist vollständig und eindeutig genau dann, wenn  $\Omega$  nur aus einem Element besteht. Für den Spezialfall  $k = 1$  und  $H$  zyklisch von der Ordnung  $p^r$  haben wir in 5.3.3. festgestellt, wann dies der Fall ist.

Der entgegengesetzte Extremfall ist der Fall  $H = \{0\}$  und  $k = 0$ . In diesem Fall ist die Menge  $\Omega$  der Matrizen eines jeden Normalformensystems für  $(G, \{0\}, m_-, m_+, 0)$  einfach eine Menge  $B$  von Matrizen, welche eindeutig die Klassen gerader Formen mit Signatur  $(m_-, m_+)$  und mit Diskriminantenform  $G$  repräsentieren.

#### Lemma 5.4.1. (Normalformen - Lemma)

$(G, q)$  sei eine endliche abelsche Gruppe mit einer nichtentarteten quadratischen Form.  $H \subset G$  sei eine isotrope Untergruppe,  $\lambda(H)$  ihre minimale Zahl von Erzeugenden, und  $n_-, n_+, k$  natürliche Zahlen mit  $\lambda(H) \leq k \leq \min(n_-, n_+)$ .

Es sei  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  ein Normalformensystem für  $(G, H, n_-, n_+, k)$ . Ferner sei  $L$  ein nichtentartetes gerades Gitter mit Signatur  $(n_-, n_+)$  und Diskriminantenform  $(G_L, q_L) = (G, q)$ . Dann gilt:

(i) Für jedes primitive isotrope Untergitter  $E \subset L$  vom Rang  $k$  mit  $[H_E] = [H]$  existiert ein  $\omega \in \Omega$  und ein Gitterisomorphismus  $(L, E) \cong (N_\omega, E_\omega)$ .

(ii) Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Klasse von  $L$  durch das Geschlecht, das heißt durch  $(n_-, n_+)$  und  $(G, q)$ , eindeutig bestimmt ist, gilt umgekehrt: Für jedes  $\omega \in \Omega$  existiert ein primitives isotropes Untergitter  $E \subset L$  vom Rang  $k$  mit  $[H_E] = [H]$  und ein Isomorphismus  $(N_\omega, E_\omega) \cong (L, E)$ .

#### Beweis:

(i) Wir wählen zunächst in  $L$  irgendeine Basis, welche der Fahne  $E \subset E^\perp \subset L$  angepaßt ist. Die Matrix  $\alpha$  der Skalarprodukte dieser Basisvektoren hat eine Blockzerlegung von der folgenden Gestalt:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & B & C \\ A' & C' & D \end{pmatrix} \quad (*)$$

Wir werden zeigen, daß man successive durch Transformationen  $\alpha \mapsto \tau' \alpha \tau$  mit Matrizen  $\tau$  der Gestalt

$$\tau = \begin{pmatrix} X & V' & W \\ 0 & Y & U \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix}$$

die Matrix  $\alpha$  in eine Matrix  $\omega \in \Omega$  überführen kann. Wenn das gezeigt ist, folgt natürlich  $(L, E) \cong (N_\omega, E_\omega)$ .

**1. Transformation:** Die gewählte Basis von  $L$  definiert eine duale Basis in  $L^\#$ . Dadurch wird  $L^\#$  mit  $\mathbb{Z}^n$  identifiziert und  $E^\perp \subset L^\#$  mit dem Untergitter  $\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{Z}^n$ , welches von den letzten  $k$  Standard-Basisvektoren erzeugt wird. Daher folgt aus der Elementarteilertheorie und aus  $E^\perp/E = H_E \cong H \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$ , daß es ganzzahlig invertierbare Matrizen  $X_1$  und  $Z_1$  gibt mit  $X_1' A Z_1 = A_0$ . Setzt man in  $\tau$  dann  $X = X_1$  und  $Z = Z_1$  und  $Y = 1$  sowie  $U = V = 0$  und  $W = 0$ , dann transformiert  $\tau$  die Matrix  $\alpha$  in eine Matrix der Gestalt  $(*)$  mit einem neuen Block  $A = A_0$ . Wir bezeichnen die transformierten Matrizen, auch nach weiteren Transformationen, wieder mit  $\alpha$  und ihre Blöcke wieder mit  $A, B, C, D$ .

**2. Transformation:** Die Matrix  $B$  beschreibt das Gitter  $E^\perp/E$ . Daher hat sie die Signatur  $(n_-, k, n_+, k)$  und die Diskriminantenform  $G_{E^\perp/E} \cong H^\perp/H$ . Daher existiert ein eindeutig bestimmtes  $B_0 \in \mathcal{B}$  mit  $\text{class } B = \text{class } B_0$ . Es sei  $Y_2 \in GL(m, \mathbb{Z})$  eine Matrix mit  $Y_2' B Y_2 = B_0$ . Setzt man in  $\tau$  dann  $Y = Y_2$  und  $X = Z = 1$  sowie  $U = V = 0$  und  $W = 0$ , so transformiert  $\tau$  die Matrix  $\alpha$  in eine Blockmatrix der Gestalt  $(*)$  mit  $A = A_0$  und  $B = B_0$ .

**3. Transformation:** Zu dem Block  $C$  der durch die ersten zwei Transformationen erhaltenen Matrix  $\alpha$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $C_0 \in \mathcal{C}(B_0)$ , welches in  $M(B_0)$  das gleiche Bild hat wie  $C$ . Es seien  $U_3, V_3 \in M(m, k; \mathbb{Z})$  Matrizen mit  $C_0 = C + B_0 U_3 + V_3 A_0$ . Setzt man in  $\tau$  dann  $U = U_3$  und  $V = V_3$  und  $W = 0$  sowie  $X = Z = 1$  und  $Y = 1$ , dann transformiert  $\tau$  die Matrix  $\alpha$  in eine Blockmatrix der Gestalt  $(*)$  mit  $A = A_0$ ,  $B = B_0$ ,  $C = C_0$ .

**4. Transformation:** Eine Transformation  $\tau$  mit  $X = Z = 1$  und  $Y = 1$  sowie  $U = V = 0$  läßt  $A, B, C$  unverändert und überführt  $D$  in  $D + W' A_0 + A_0' W$ . Die Menge der Matrizen  $W' A_0 + A_0' W$  ist gerade die Menge der ganzzahligen symmetrischen  $k \times k$ -Matrizen  $(x_{ij})$ , für welche gilt:  $x_{ii} \equiv 0(2a_{k-i+1})$

und  $x_{ij} \equiv O(a_{k-j+1})$  für  $1 < j$ . Daher ist die früher definierte Wertemenge  $\mathcal{D} \subset M(k, k; \mathbb{Z})$  gerade ein Repräsentantensystem für  $M(k, k; \mathbb{Z}) / (W'A_O + A_O'W)$ . Es sei  $D_O \in \mathcal{D}$  das eindeutig bestimmte Element mit der gleichen Restklasse wie der Block  $D$  von  $\alpha$  und  $W_4$  eine Matrix mit  $D_O = D + W_4'A_O + A_O'W_4$ . Setzt man in  $\tau$  nun  $W = W_4$  und  $U = V = O$  sowie  $X = Z = 1$  und  $Y = 1$ , dann überführt  $\tau$  die Matrix  $\alpha$  in eine Matrix  $\omega$  mit  $A_\omega = A_O$ ,  $B_\omega = B_O$ ,  $C_\omega = C_O$  und  $D_\omega = D_O$ . Diese Matrix erfüllt offenbar nach Konstruktion die Bedingungen (1) (i) bis (v) in der Definition der Normalformensysteme. Sie erfüllt aber außerdem auch die Bedingung (2), denn wegen der Voraussetzung  $[H_E] = [H]$  und der Konstruktion von  $\omega$  hat man Isomorphismen

$$\begin{aligned} G &\cong G \cong G_{N_\omega} \\ U &U \quad U \\ H &\cong H_E \cong H_{E_\omega}. \end{aligned}$$

Also folgt  $\omega \in \Omega$ , und das war zu zeigen.

(ii) Wegen der Normalformenbedingungen (1) (ii) und (2) liegt jedes  $N_\omega$  im Geschlecht von  $L$ , also nach Voraussetzung sogar in der Klasse von  $L$ . Es gibt also einen Isomorphismus  $\psi: N_\omega \rightarrow L$ . Es sei  $E = \psi(E_\omega)$ . Dann ist  $E$  ein primitives isotropes Gitter in  $L$  vom Rang  $k$ , und wegen der Normalformenbedingung (2) hat man zusammen mit der von  $\psi$  induzierten Abbildung Isomorphismen

$$\begin{aligned} G &\cong G_{N_\omega} \cong G \\ U &U \quad U \\ H_E &\cong H_{E_\omega} \cong H. \end{aligned}$$

Also gilt  $[H_E] = [H]$ , und  $\psi: (N_\omega, E_\omega) \rightarrow (L, E)$  ist der Isomorphismus, dessen Existenz zu zeigen war. q.e.d.

Aus der Definition der Normalformensysteme ergeben sich leicht die folgenden Aussagen, in denen aus zusätzlichen Voraussetzungen über die Daten  $(G, H, n_-, n_+, k)$  die Existenz von Normalformen mit zusätzlichen Eigenschaften gefolgert wird.

#### Proposition 5.4.2.

Es sei  $\lambda(H)$  die minimale Erzeugendenzahl von  $H$  und  $h = k - \lambda(H)$ . Dann existiert zu  $(G, H, n_+, n_-, k)$  ein Normalformensystem, dessen Matrizen  $\omega \in \Omega$  von der folgenden Gestalt sind:

$$\omega = \begin{array}{ccc|c} \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{array}} \right\} h \\ \hline \begin{array}{cc|c} 0 & \omega' & 0 \end{array} & & \\ \hline \begin{array}{cc|c} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & 0 & 0 \end{array} & \left. \vphantom{\begin{array}{cc|c} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & 0 & 0 \end{array}} \right\} h \end{array}$$

Dabei bildet die Menge  $\Omega'$  der Matrizen  $\omega'$  ein Normalformensystem zu  $(G, H, n_-, n_+, \lambda(H))$ .

#### Definition:

Ein Normalformensystem wie in 5.4.2. nennen wir - ad hoc - reduziert, und  $\omega'$  nennen wir den Rest von  $\omega$ .

#### Korollar 5.4.3.

$H$  sei die triviale isotrope Untergruppe  $\{0\} \subset G$ . Dann ist jedes reduzierte Normalformensystem zu  $(G, \{0\}, n_-, n_+, k)$  eindeutig und vollständig.

Beweis: Es ist  $\lambda(H) = 0$ , also  $h = k$ . Daher gilt nach 5.4.2. für die Matrizen  $\omega \in \Omega$  eines reduzierten Normalformensystems zu  $(B, C)$  offenbar  $A_\omega = 1$ ,  $C_\omega = 0$ ,  $D_\omega = 0$  und  $B_\omega \in B$ . Umgekehrt gehört jede Matrix mit diesen Eigenschaften offenbar zu  $\Omega$ , denn sie erfüllt die Bedingungen (1), (2) in der Definition der Normalformensysteme. Die Abbildung  $\Omega \rightarrow B$  ist also trivialerweise bijektiv.

Bemerkung: 5.4.3. liefert zusammen mit 5.4.1. den Zusatz zur Charakterisierung der stark primitiven isotropen Untergritter, den wir in 4.1. direkt bewiesen hatten.

Die nächste Proposition gibt unter geeigneten Voraussetzungen eine Aufspaltung des Normalformenproblems in die beiden früher erwähnten Extremfälle von Normalformenproblemen.

Proposition 5.4.4.

Die Ordnung der isotropen Untergruppe  $H$  von  $G$  sei relativ prim zu  $|G|/|H|^2$ . Es sei  $G'$  die Summe der  $p$ -primären Komponenten von  $G$  mit  $p \nmid |H|$  und  $G''$  die Summe der übrigen Komponenten. Dann gilt:

- (1) (i)  $G = G' \perp G''$   
 (ii)  $H \subset G'$  und  $H_G^\perp = H$   
 (iii)  $H_G^\perp / H \cong G''$ .
- (2) Es existiert ein Normalformensystem für  $(G, H, n_-, n_+, k)$ , dessen Matrizen  $\omega$  von der folgenden Gestalt sind:

$$\omega = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & A_O \\ \hline 0 & B_\omega & 0 \\ \hline A'_O & 0 & D_\omega \\ \hline \end{array}$$

Dabei durchläuft  $B_\omega$  die Menge  $\Omega''$  der Matrizen eines Normalformensystems zu  $(G'', \{0\}, n_-, k, n_+, -k)$ , und unabhängig davon durchlaufen die Matrizen

$$\omega' = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & A_O \\ \hline A'_O & D_\omega \\ \hline \end{array}$$

die Menge  $\Omega'$  der Matrizen eines Normalformensystems zu  $(G', H, k, k, k)$ . Man hat dadurch eine Bijektion  $\Omega \cong \Omega' \times \Omega''$ .

- (3) Jedes derartige Normalformensystem  $\Omega$  ist vollständig, und es ist eindeutig genau dann, wenn  $\Omega'' = \emptyset$  oder wenn  $|\Omega'| = 1$ , d.h. wenn das Normalformensystem zu  $(G', H, k, k, k)$  eindeutig ist.

Beweis:

- (1) (i) Die Orthogonalität folgt trivial aus der Orthogonalität der Primärzerlegung.  
 (ii)  $H \subset G'$  folgt trivial aus der Definition von  $G'$ . Daraus folgt  $H_G^\perp = H_G^\perp \perp G''$ . Mithin  $H_G^\perp / H = H_G^\perp / H \perp G''$ . Aber nach Voraussetzung sind  $|H|$  und  $|H_G^\perp / H|$  relativ prim. Daher folgt also  $H_G^\perp / H = 0$  wegen der Definition von  $G''$ .  
 (iii)  $H_G^\perp = H \perp G''$  wegen (ii), also  $H^\perp / H \cong G''$ .
- (2) Aus der Voraussetzung folgt, daß für jedes  $B \in \Omega''$  die früher definierte Restklassengruppe von Matrizen  $M(B) = 0$  ist. Wir können daher zu jedem  $B \in \Omega''$  als Wertemengensystem  $C$  für alle  $B$  wählen  $C(B) = \{0\}$ . Dann ist das Normalformensystem offensichtlich von der gewünschten Art.

- (3) Die Projektion  $\Omega' \times \Omega'' \rightarrow \Omega''$  ist immer surjektiv, da nach einer früheren Bemerkung stets  $\Omega' \neq \emptyset$  gilt. Die Projektion ist daher bijektiv, genau wenn  $\Omega'' = \emptyset$  oder  $|\Omega'| = 1$ .

#### Korollar 5.4.5.

Die isotrope Untergruppe  $H$  von  $G$  sei zyklisch von der Ordnung  $a$ , und  $a$  sei relativ prim zu  $|G|/a^2$ . Es sei  $G'$  die Summe der  $p$ -primären Komponenten von  $G$  mit  $p|a$  und  $G''$  die Summe der übrigen Komponenten. Dann gilt:

- (i) Es gibt ein reduziertes Normalformensystem für  $(G, H, n_-, n_+, k)$ , für dessen Matrizen  $\omega$  die Reste  $\omega'$  von der folgenden Gestalt sind:

$$\omega' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & B_\omega & 0 \\ a & 0 & 2b \end{bmatrix}$$

Dabei durchläuft  $B_\omega$  alle  $B \in \mathcal{B}$  eines Repräsentantensystems  $\mathcal{B}$  für Matrizen mit Signatur  $(n_-, k, n_+, k)$  und mit Diskriminantenform  $G''$ , und  $b$  durchläuft alle natürlichen Zahlen  $0 \leq b < a$ , für welche die binäre Form

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 2b \end{bmatrix}$$

die Diskriminantenform  $G'$  hat.

- (ii) Jedes derartige Normalformensystem ist vollständig.  
 (iii) Für  $a = p^r$  ist ein derartiges Normalformensystem genau dann eindeutig, wenn  $G'$  isomorph zu einer der in Tabelle 11 unter Nummern 0 bis 12 aufgeführten Formen ist.

#### Proposition 5.4.6.

$G$  sei die Gruppe  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  mit der quadratischen Form  $v_2$ . Dann hat  $G$  eine einzige isotrope Untergruppe  $H$  mit  $H^\perp = H$ , nämlich die Untergruppe aller Elemente der Ordnung  $\leq 2$ . Das Normalformensystem zu  $(G, H, 2, 2, 2)$  ist eindeutig. Seine Matrix ist

0	0	0	2
0	0	2	0
0	2	2	1
2	0	1	2

**Beweis:** In Tabelle 6 wurden u.a. auch für  $v_2$  die isotropen Untergruppen  $H$  bestimmt sowie  $H^\perp/H$ . Daraus folgt die erste Behauptung. Aus  $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  folgt:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Daher besteht die Wertemenge  $\mathcal{D}$  aus den Matrizen

$$D = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix}$$

mit  $a, b, c \in \{0, 1\}$ . Aber  $b = 0$  führt zu einer reduziblen Diskriminantenform, während  $v_2$  irreduzibel ist. Also gilt  $b = 1$ . Aber dann würde eine Matrix  $D$  mit  $a = 0$  oder  $b = 0$  unimodular sein, also abspalten, und  $v_2$  wäre die

Diskriminantenform einer binären Form im Widerspruch zu 5.3.4. Also bleibt nur eine Möglichkeit übrig:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Daß sich hiermit tatsächlich die Diskriminantenform  $v_2$  ergeben muß, folgt jetzt ohne Rechnung aus 5.3.7. und dem Normalformenlemma.

Mit diesen Vorbereitungen sind nun die meisten Fälle des Normalformenproblems für isotrope Untergitter der 14 exzeptionellen  $L_{pqr}$  tatsächlich bereits erledigt, und die wenigen übrigen Fälle werden wir ohne weitere Theorie direkt behandeln. Das Ergebnis ist der folgende Satz.

**Satz 5.4.7. (Normalformensatz)**

$L_{pqr}$  sei eines der 14 exzeptionellen Milnorgitter,  $(p,q,r) \in I_e$ . Ferner sei  $(n_-, n_+)$  die Signatur von  $L_{pqr}$ , also  $(n_-, n_+) = (p+q+r-2, 2)$ , und es sei  $G$  die Diskriminantenform von  $L_{pqr}$ . Schließlich sei  $H \subset G$  irgendeine isotrope Untergruppe von  $G$ . Dann existiert für  $(G, H, n_-, n_+, 2)$  ein eindeutiges und vollständiges Normalformensystem  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ .

**Beweis:**

In Tabelle 6 sind alle 14 Diskriminantenformen  $(G, q)$  zusammen mit ihren isotropen Untergruppen  $H$  aufgeführt. Insgesamt handelt es sich um 23 Paare  $(G, H)$ , bis auf Isomorphie jedoch nur um 20 Paare. Wir fassen diese in sechs Fallgruppen (I) bis (VI) zusammen.

**Fallgruppe I.**

Diese Fallgruppe umfaßt alle 14 Fälle mit  $H = \{0\}$ . In diesen Fällen folgt die Behauptung unmittelbar aus 5.4.2 und 5.4.3.

**Fallgruppe II.**

Diese Fallgruppe umfaßt folgende 3 Paare  $(G, H)$  von Tabelle 6:

- (i)  $(p, q, r) = (2, 4, 6)$ ,  $G \cong w_{2,1}^1 \perp w_{2,1}^{-1}$  und  $H = H_1$
- (ii)  $(p, q, r) = (3, 3, 6)$ ,  $G \cong w_{3,1}^1 \perp w_{3,1}^{-1}$  und  $H = H_1, H_2$

In diesen Fällen gilt  $H^\perp = H$ , und die Ordnung der zyklischen Gruppe  $H$  ist relativ prim zu  $|G|/|H|^2 = 1$ . Daher können wir Korollar 5.4.5 anwenden, wobei  $G' = G$  gilt. Die Form  $G'$  kommt in Tabelle 11 vor, und zwar Fall (i) unter Nummer 2 und Fall (ii) unter Nummer 10. Daher folgt die Behauptung für die Fälle dieser Gruppe aus 5.4.5.

**Fallgruppe III.**

Diese Gruppe umfaßt nur ein Paar  $(G, H)$ . Es handelt sich um den folgenden Fall:

$$(p, q, r) = (4, 4, 4), \quad G \cong v_2 \quad \text{und} \quad H = H_4.$$

Dies ist der einzige Fall, wo  $H$  nicht zyklisch ist. Diesen Fall haben wir bereits behandelt, denn es gilt  $H^\perp = H$ . Insbesondere ist  $|H|$  relativ prim zu  $|G|/|H|^2 = 1$ . Daher ist 5.4.4 anwendbar. Dabei ist  $G' = G$ , und für das Paar  $(G, H)$  wurde in 5.4.6 die Eindeutigkeit des Normalformensystems für  $(G, H, 2, 2, 2)$  bewiesen. Daher folgt die Behauptung aus 5.4.4.

Die Fallgruppen (I) bis (III) sind also durch die vorhergehenden Resultate erledigt. Die übrigen Fallgruppen (IV) bis (VI) haben einige Züge gemeinsam. Wir diskutieren diese für alle drei Fallgruppen zusammen und bringen dann für jede der drei Fallgruppen einzeln die speziellen Argumente, mit denen sie erledigt werden.



Zunächst ist diesen Fallgruppen gemeinsam, daß  $H$  eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist. Nach 5.4.2. existiert also ein reduziertes Normalformensystem, dessen Matrizen  $\omega$  Reste  $\omega'$  von der folgenden Gestalt haben:

$$\omega' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & B_\omega & C_\omega \\ \hline 2 & C'_\omega & 2b \\ \hline \end{array}$$

Dabei gilt  $b = 0$  oder  $b = 1$ , und die Matrizen  $B_\omega$  sind negativ definit vom Rang  $p+q+r - 4$  mit der Diskriminantenform  $H^+/H$ . Ein Vergleich von Tabelle 6 mit Tabelle 9 ergibt für alle drei Fallgruppen, daß es jeweils nur eine Klasse derartiger Matrizen gibt, und daß dies die Klasse ist, welche eine Summe negativ definiter Wurzelgitter  $E_s \perp A_t$  mit dem richtigen Rang  $m = s+t = p+q+r - 4$  und der richtigen Diskriminante  $\delta$  ist. Das Paar  $(s,t)$  nimmt also die Werte  $(7,0)$ ,  $(8,1)$  und  $(7,1)$  an, und  $|\delta|$  entsprechend die Werte 2, 2 und 4.

Für die zu  $B$  gehörige abelsche Gruppe von Restklassen von Matrizen  $M(B)$  gilt in allen drei Fällen:

$$M(B) \cong \mathbb{Z}^m / B\mathbb{Z}^m + 2\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^m / B\mathbb{Z}^m.$$

Daher gilt in allen drei Fällen  $|M(B)| = |\delta|$ , und wir haben daher ein Wertesystem  $\mathcal{C}(B) \subset \mathbb{Z}^m$  von  $|\delta|$  Vektoren zu wählen. In jedem Fall sind jedoch für  $C_\omega$  alle Werte aus  $\mathcal{C}(B)$  bis auf einen ausgeschlossen, weil sie offensichtlich zu reduziblen Diskriminantenformen für  $\omega$  führen würden, während die Gruppe  $G$  in allen drei Fällen eine irreduzible Diskriminantenform  $q$  hat. Für den einzigen noch übrig bleibenden Wert von  $C_\omega$  stellt sich in allen drei Fällen heraus, daß von den beiden zulässigen Werten  $b = 0$  bzw.  $b = 1$

höchstens einer zu der richtigen Diskriminantenform führt. Damit bleibt für  $\omega'$  in jedem Fall höchstens eine Matrix übrig. Daß diese tatsächlich die richtige Diskriminantenform hat, folgt wegen des Normalformenlemmas ohne Rechnung aus der Tatsache, daß es in allen Fällen tatsächlich ein primitives isotropes Gitter  $E \subset L_{pqr}$  vom Rang 2 mit  $[H_E] = [H]$  gibt. Und zwar läßt sich dies Gitter in allen Fällen auf die gleiche Weise gewinnen, nämlich als  $E = L_{p;q;r}^0 \subset L_{pqr}$ . Dabei ist  $(p;q;r')$  eines der drei parabolischen Tripel, und zwar  $(2,4,4)$  für  $s = 7$  und  $(2,3,6)$  für  $s = 8$ . Die Einbettung  $L_{p;q;r'}$  entspricht einer der möglichen Einbettungen der entsprechenden Diagramme  $D_{p;q;r'} \subset D_{pqr}$ . Daß dann tatsächlich  $[H_E] = [H]$  gilt, folgt sehr leicht aus der am Ende von 1.9 gegebenen Beschreibung von  $L_{p;q;r'}^0$  unter Benutzung des isotropen Vektors  $f_0$  und wird hier nicht weiter ausgeführt.

Wir geben nun kurz die speziellen Daten und Argumente für die Fallgruppen (IV) bis (VI) an, wobei wir uns an die gerade festgelegten Bezeichnungen halten.

#### Fallgruppe IV

$$(p,q,r) = (3,4,4).$$

$$q = w_{2,3}^5, \quad H = H_1.$$

$$(s,t) = (7,0), \quad m = 7, \quad |\delta| = 2.$$

$$\mathcal{C}(B) = \{(0,0,0,0,0,0,0), (0,0,0,0,0,0,1)\}.$$

Dies ist eine zulässige Wahl für  $\mathcal{C}(B)$  - man vergleiche dazu Bourbaki [7], Planche VI, Formel für das Fundamentalgewicht  $\bar{\omega}_7$ .

$C_\omega = (0,0,0,0,0,0,1)$  ist der einzige mögliche Wert für  $C_\omega$ .  $b = 0$  ist der einzige mögliche Wert für  $b$ .

Beweis: Angenommen, wir hätten  $b = 1$ , dann geht  $\omega'$  durch Transformation mit der Matrix

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über in die Matrix

$$\omega'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & B_\omega & C_\omega \\ 2 & C'_\omega & -2 \end{pmatrix}$$

Aber die aus  $\omega''$  durch Fortlassen der ersten Zeile und Spalte entstehende Matrix unterscheidet sich nur durch ein Vorzeichen von der Cartanmatrix vom Typ  $E_8$  und ist daher insbesondere unimodular. Daher hat  $\omega''$  die Diskriminantenform  $w_{2,3}^{-1}$  des 1-dimensionalen Gitters  $\langle 8 \rangle$ , während  $\omega'$  die Diskriminantenform  $q = w_{2,3}^5$  haben muß. Die Annahme  $b = 1$  führt also zu einem Widerspruch.

#### Fallgruppe V

$$(p, q, r) = (2, 5, 6) .$$

$$q = w_{2,3}^{-5} , \quad H = H_1 .$$

$$(s, t) = (8, 1) , \quad m = 9 , \quad |\delta| = 2 .$$

$$\mathcal{C}(B) = \{ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) , (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \} .$$

$$C_\omega = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \text{ ist der einzige mögliche Wert für } C_\omega .$$

$$b = 1 \text{ ist der einzige mögliche Wert für } b .$$

Beweis: Angenommen, es wäre  $b = 0$ . Dann hätte  $\omega'$  die gleiche Diskriminantenform wie die  $3 \times 3$ -Matrix

$$\omega'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Form spaltet aber eine unimodulare hyperbolische Ebene ab und hat deshalb die gleiche Diskriminantenform  $w_{2,3}^{-1}$  wie das 1-dimensionale Gitter  $\langle -8 \rangle$ , im Widerspruch zu  $q = w_{2,3}^{-5}$ .

#### Fallgruppe VI

$$(p, q, r) = (4, 4, 4) .$$

$$q = v_2 , \quad H = H_1, H_2, H_3 .$$

$$(s, t) = (7, 1) , \quad m = 8 , \quad |\delta| = 4 .$$

$$\mathcal{C}(B) = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) , (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) , (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \end{array} \right\}$$

$$C_\omega = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \text{ ist der einzig mögliche Wert für } C_\omega .$$

$$b = 0 \text{ ist der einzig mögliche Wert für } b .$$

Beweis: Für  $b = 1$  würde  $\omega'$  sich ähnlich wie im Fall (IV) in eine Matrix  $\omega''$  mit einer unimodularen negativ definiten Untermatrix vom Rang 8 transformieren, die man durch eine weitere Transformation abspalten könnte. Daher hätte  $\omega''$  die gleiche Diskriminantenform wie eine nichtentartete indefinite gerade binäre Form. Aber nach 5.3.4 gibt es keine derartige Form mit Diskriminantenform  $v_2$ , im Widerspruch dazu, daß  $\omega'$  die Diskriminantenform  $q = v_2$  haben muß.

Damit ist der Normalformensatz bewiesen.

### 5.5. $O(L)$ - Klassen isotroper Untergitter von $L$ .

Um uns im folgenden knapp ausdrücken zu können, führen wir zunächst Bezeichnungen für eine Reihe von Objekten ein, die wir dann im Rest der Arbeit ohne weitere Erläuterung benutzen werden.

$\text{sign}(L) = (m_-, m_+)$  bedeutet, daß  $L$  ein nichtentartetes Gitter mit der Signatur  $(m_-, m_+)$  ist, und  $G_L \cong G$  bedeutet, daß  $L$  ein ganzzahliges gerades Gitter ist, dessen Diskriminantenform  $G_L$  isomorph zu der endlichen abelschen Gruppe  $G$  mit nichtentarteter quadratischer Form  $q$  ist, wobei  $q$  in der Notation meist unterdrückt wird. Ferner sei daran erinnert, daß  $J_k(L)$  die Menge der primitiven isotropen Untergitter  $E \subset L$  vom Rang  $k$  bezeichnet, und daß für  $E \in J_k(L)$  mit  $H_E \subset G_L$  die isotrope Untergruppe  $E^\perp/E$  bezeichnet wird.

#### Definition:

- (1)  $G$  sei eine endliche abelsche Gruppe mit nichtentarteter quadratischer Form.

$$J(G) = \{H \subset G \mid H \text{ isotrope Untergruppe}\}.$$

$$\bar{J}(G) = \{[H] \mid H \in J(G)\} = J(G)/O(G).$$

$$J_{[H]}(G) = \{H' \in J(G) \mid H' \in [H]\} \quad \text{für } [H] \in \bar{J}(G).$$

$$(2) \quad J_{k,H}(L) = \{E \in J_k(L) \mid H_E = H\} \quad \text{für } H \in J(G).$$

$$J_{k,[H]}(L) = \{E \in J_k(L) \mid H_E \in [H]\} \quad \text{für } [H] \in \bar{J}(G).$$

$$(3) \quad X(G, m_-, m_+) = \{\text{class } M \mid G_M \cong G, \text{sign}(M) = (m_-, m_+)\}.$$

$$(4) \quad \theta(G, m_-, m_+) = \coprod_{H \in J(G)} \{H\} \times X(H^\perp/H, m_-, m_+).$$

$$\bar{\theta}(G, m_-, m_+) = \coprod_{[H] \in \bar{J}(G)} \{[H]\} \times X(H^\perp/H, m_-, m_+).$$

- (5) Es sei  $\text{sign}(L) = (n_-, n_+)$ . Dann sind  $\chi_L, \chi_L^*, \tilde{\chi}_L, \bar{\chi}_L$  die folgenden kanonisch definierten Abbildungen:

$$\chi_{L,k} : J_k(L) \longrightarrow \theta(G_L, n_-, n_+, -k)$$

$$\chi_{L,k}^* : J_k(L)/O^*(L) \longrightarrow \theta(G_L, n_-, n_+, -k)$$

$$\tilde{\chi}_{L,k} : J_k(L)/\bar{O}(L) \longrightarrow \theta(G_L, n_-, n_+, -k)$$

$$\bar{\chi}_{L,k} : J_k(L)/O(L) \longrightarrow \bar{\theta}(G_L, n_-, n_+, -k)$$

$$\chi_{L,k}(E) := (E^\perp/E, \text{class}(E^\perp/E))$$

$$\chi_{L,k}^*, \tilde{\chi}_{L,k}, \bar{\chi}_{L,k} \text{ sind durch } \chi_{L,k} \text{ induziert.}$$

- (6) Für jedes  $H \in J(G_L)$  hat man ein kommutatives Diagramm von kanonisch definierten Abbildungen, wobei die Abbildungen  $\chi_{L,k,H}^*, \tilde{\chi}_{L,k,H}, \bar{\chi}_{L,k,H}$  durch die Abbildungen  $\chi_{L,k}^*, \tilde{\chi}_{L,k}, \bar{\chi}_{L,k}$  induziert sind:

$$\chi_{L,k,H}^* : J_{k,[H]}(L)/O^*(L) \longrightarrow J_{[H]}(G_L) \times X(H^\perp/H, n_-, n_+, -k)$$

$$\tilde{\chi}_{L,k,H} : J_{k,[H]}(L)/\bar{O}(L) \longrightarrow J_{[H]}(G_L) \times X(H^\perp/H, n_-, n_+, -k)$$

$$\bar{\chi}_{L,k,H} : J_{k,[H]}(L)/O(L) \longrightarrow \{[H]\} \times X(H^\perp/H, n_-, n_+, -k)$$

- (7) Für  $k = \min(n_-, n_+)$  lassen wir den Index  $k$  fort und schreiben  $\chi_L, \chi_L^*, \tilde{\chi}_L, \bar{\chi}_L$  usw.

Die folgende Proposition ergibt sich unmittelbar aus dem Normalformenlemma und den Definitionen.

Proposition 5.5.1.

$L$  sei ein gerades, nichtentartetes Gitter, dessen Klasse durch seine Diskriminantenform  $G_L$  und seine Signatur  $(n_-, n_+)$  eindeutig bestimmt sei.  $H \subset G_L$  sei eine isotrope Untergruppe,  $\lambda$  ihre minimale Erzeugendenzahl und  $k$  eine natürliche Zahl mit  $\lambda \leq k \leq \min(n_-, n_+)$ . Dann gilt: Wenn es für  $(G_L, H, n_-, n_+, k)$  ein vollständiges und eindeutiges Normalformensystem gibt, ist  $\bar{\chi}_{L,k,H}$  bijektiv.

Beweis:  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  sei ein vollständiges und eindeutiges Normalformensystem für  $(G_L, H, n_-, n_+, k)$ . Wir definieren eine kanonische Abbildung

$$x_\Omega : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}(H^\perp/H, n_-, k, n_+, -k)$$

durch  $x_\Omega(\omega) = \text{class } E_\omega^\perp / E_\omega$ .

Die Abbildung  $x_\Omega$  ist bijektiv, denn die Surjektivität ist äquivalent zur Vollständigkeit und die Injektivität zur Eindeutigkeit des Normalformensystems. Daher haben wir mit  $v_\Omega := x_\Omega^{-1} \cdot \bar{\chi}_{L,k,H}$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{k,H}(L)/O(L) & \xrightarrow{\bar{\chi}_{L,k,H}} & \mathcal{X}(H^\perp/H, n_-, k, n_+, -k) \\ & \searrow v_\Omega & \nearrow x_\Omega \\ & \Omega & \end{array}$$

Die Normalformenabbildung  $v_\Omega$  läßt sich dann wegen Teil (1) des Normalformenlemmas auch wie folgt charakterisieren: Für  $E \in \mathcal{J}_{k,[H]}(L)$  mit Restklasse  $[E] \in \mathcal{J}_{k,[H]}(L)/O(L)$  ist  $\omega = v_\Omega([E])$  das eindeutig bestimmte  $\omega \in \Omega$  mit

$(N_\omega, E_\omega) \approx (L, E)$ . Insbesondere ist  $v_\Omega$  injektiv. Aber  $v_\Omega$  ist auch surjektiv. Das folgt aus Teil (ii) des Normalformenlemmas und der Voraussetzung, daß das durch  $G_L$  und  $(n_-, n_+)$  bestimmte Geschlecht nur eine Klasse hat. Also sind  $v_\Omega$  und  $x_\Omega$  und damit auch  $\bar{\chi}_{L,k,H}$  bijektiv.

Korollar 5.5.2.

$L$  sei ein gerades nichtentartetes Gitter, dessen Klasse durch seine Diskriminantenform  $G_L$  und seine Signatur  $(n_-, n_+)$  eindeutig bestimmt sei.  $\lambda$  sei das Maximum aller minimalen Erzeugendenzahlen aller isotropen Untergruppen  $H \subset G_L$  und  $k$  eine natürliche Zahl mit  $\lambda \leq k \leq \min(n_-, n_+)$ . Dann gilt:

Wenn es für alle  $H \in \mathcal{J}(G_L)$  ein vollständiges und eindeutiges Normalformensystem für  $(G_L, H, n_-, n_+, k)$  gibt, ist die kanonische Abbildung

$$\bar{\chi}_{L,k} : \mathcal{J}_k(L)/O(L) \longrightarrow \bar{\Theta}(G_L, n_-, k, n_+, -k)$$

bijektiv.

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus 5.5.1 und den disjunkten Zerlegungen, die durch das folgende kommutative Diagramm beschrieben werden:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_k(L)/O(L) & \xrightarrow{\bar{\chi}_{L,k}} & \bar{\Theta}(G_L, n_-, k, n_+, -k) \\ \parallel & & \parallel \\ \coprod_{[H] \in \mathcal{J}(G)} \mathcal{J}_{k,[H]}(L)/O(L) & \xrightarrow{\coprod_{[H] \in \mathcal{J}(G)} \bar{\chi}_{L,k,H}} & \coprod_{[H] \in \mathcal{J}(G)} \{[H]\} \times \mathcal{X}(H^\perp/H, n_-, k, n_+, -k) \end{array}$$

Der folgende Satz ergibt in Verbindung mit Proposition 3.7 und Satz 5.2.1 sowie den zugehörigen Tabellen 6 und 9 die vollständige Bestimmung der  $O(L)$ -Klassen maximaler isotroper Untergitter für alle 14 exzeptionellen Milnorgitter  $L$ .

### Satz 5.5.3.

Für alle  $(p,q,r) \in I_e$  ist die folgende kanonische Abbildung bijektiv:

$$\bar{\chi}_{L_{pqr}} : J_2(L_{pqr})/O(L_{pqr}) \longrightarrow \bar{\Theta}(G_{L_{pqr}}, p+q+r-4, 0)$$

Beweis: Der Satz folgt unmittelbar aus Korollar 5.5.2 und dem Normalformensatz 5.4.7.

### 5.6. Kongruenzuntergruppen und ihre Spitzen

Zur Vorbereitung auf die Berechnung der Stabilisatorgruppen isotroper Untergitter  $E$  eines Gitters  $L$  stellen wir in diesem Abschnitt einige elementare Aussagen über Kongruenzuntergruppen von  $SL(E)$  und ihre Spitzen zusammen, und zwar in einer invarianten Formulierung, die auf die spätere Anwendung zugeschnitten ist.

Es sei  $F$  eine freie abelsche Gruppe von endlichem positivem Rang  $k$  und  $E \subset F$  eine Untergruppe von endlichem Index. Die Quotientengruppe  $F/E$  ist also eine endliche abelsche Gruppe  $H$ . In der späteren Anwendung wird  $F = E^\perp$  sein und  $H = H_E$ .

Es sei  $E^\# = \text{Hom}(E, \mathbb{Z})$  und  $F^\# = \text{Hom}(F, \mathbb{Z})$  und es sei  $H^* = \text{Hom}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  die duale Gruppe. Wir fassen  $F^\#$  kanonisch

als Untergruppe  $F^\# \subset E^\#$  auf und identifizieren  $E^\#/F^\#$  kanonisch mit  $H^*$ .

Wir bezeichnen mit  $\text{End}(E)$ ,  $\text{End}(F)$  bzw.  $\text{End}(H)$  die Endomorphismenringe von  $E, F$  bzw.  $H$ , mit  $GL(E)$ ,  $GL(F)$  bzw.  $\text{Aut}(H)$  die entsprechenden Automorphismengruppen und mit  $SL(E)$  bzw.  $SL(F)$  die Untergruppen der orientierungserhaltenden Automorphismen. Entsprechende Notationen gelten für  $E^\#, F^\#$  und  $H^*$ .

Die Inklusion  $E \subset F$  gibt Anlaß zur Definition der folgenden Stabilisatorringe bzw. - Gruppen:

#### Definition:

$$\begin{aligned} \text{End}(F, E) &= \{ \psi \in \text{End}(F) \mid \psi(E) \subset E \} \subset \text{End}(F) \\ GL(F, E) &= GL(F) \cap \text{End}(F, E) \subset GL(F) \\ SL(F, E) &= SL(F) \cap \text{End}(F, E) \subset SL(F) \end{aligned}$$

Man hat den folgenden kanonischen surjektiven Homomorphismus:

$$\text{End}(F, E) \longrightarrow \text{End}(H).$$

Er induziert - im allgemeinen nicht surjektive - kanonische Homomorphismen

$$\begin{aligned} GL(F, E) &\longrightarrow \text{Aut}(H) \\ SL(F, E) &\longrightarrow \text{Aut}(H). \end{aligned}$$

#### Definition:

$$\begin{aligned} \text{End}(F, E)^0 &= \text{Kern}(\text{End}(F, E) \longrightarrow \text{End}(H)) \\ GL(F, E) &= \text{Kern}(GL(F, E) \longrightarrow \text{Aut}(H)) \\ SL(F, E) &= \text{Kern}(SL(F, E) \longrightarrow \text{Aut}(H)) \\ GL(F/E) &= \text{Bild}(GL(F, E) \longrightarrow \text{Aut}(H)) \\ SL(F/E) &= \text{Bild}(SL(F, E) \longrightarrow \text{Aut}(H)). \end{aligned}$$

Die Gruppen  $GL(F/E)$  und  $SL(F/E)$  hängen nicht nur von der Gruppe  $H$  ab, sondern von ihrer Darstellung als Quotient  $H = F/E$ . Ich hoffe, daß die suggestive Notation nicht mißverstanden wird.

Auf Grund der Definitionen hat man also das folgende kanonische kommutative Diagramm von kurzen exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma GL(F,E) & \longrightarrow & GL(F,E) & \longrightarrow & GL(F/E) \longrightarrow 1 \\ & & U & & U & & U \\ 1 & \longrightarrow & \Gamma SL(F,E) & \longrightarrow & SL(F,E) & \longrightarrow & SL(F/E) \longrightarrow 1 \end{array} \quad (1)$$

Nun liefert auf genau die gleiche Weise die Inklusion  $F^\# \subset E^\#$  ein zweites derartiges Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma GL(E^\#, F^\#) & \longrightarrow & GL(E^\#, F^\#) & \longrightarrow & GL(E^\# / F^\#) \longrightarrow 1 \\ & & U & & U & & U \\ 1 & \longrightarrow & \Gamma SL(E^\#, F^\#) & \longrightarrow & SL(E^\#, F^\#) & \longrightarrow & SL(E^\# / F^\#) \longrightarrow 1 \end{array} \quad (2)$$

Dabei sind die links und in der Mitte stehenden Gruppen Untergruppen von  $GL(E^\#)$ , und die rechts stehenden Gruppen sind Untergruppen der Gruppe  $\text{Aut}(E^\# / F^\#)$ , die wir kanonisch mit  $\text{Aut}(H^*)$  identifizieren. Nun definieren aber die kontragredienten Darstellungen kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \chi &: GL(E) \xrightarrow{\sim} GL(E^\#) \\ \bar{\chi} &: \text{Aut}(H) \longrightarrow \text{Aut}(H^*) . \end{aligned}$$

Dabei ist  $\chi(g) = g^* = (g^t)^{-1}$ , wobei  $g^t \in GL(E^\#)$  das zu  $g \in GL(E)$  transponierte Element ist, und  $\bar{\chi}$  ist analog definiert. Mit Hilfe dieser Isomorphismen kann man nun die Gruppen aus dem Diagramm (2) nach  $GL(E)$  bzw.  $\text{Aut}(H)$  zurückholen.

#### Definition:

$$\begin{aligned} GL(F,E)^* &= \chi^{-1}(GL(E^\#, F^\#)) \\ SL(F,E)^* &= \chi^{-1}(SL(E^\#, F^\#)) \\ \Gamma GL(F,E)^* &= \chi^{-1}(\Gamma GL(E^\#, F^\#)) \\ \Gamma SL(F,E)^* &= \chi^{-1}(\Gamma SL(E^\#, F^\#)) \\ GL(F/E)^* &= \bar{\chi}^{-1}(GL(E^\# / F^\#)) \\ SL(F/E)^* &= \bar{\chi}^{-1}(SL(E^\# / F^\#)) . \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen geht das Diagramm (2) in das folgende kanonische Diagramm von kurzen exakten Sequenzen über:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma GL(F,E)^* & \longrightarrow & GL(F,E)^* & \longrightarrow & GL(F/E)^* \longrightarrow 1 \\ & & U & & U & & U \\ 1 & \longrightarrow & \Gamma SL(F,E)^* & \longrightarrow & SL(F,E)^* & \longrightarrow & SL(F/E)^* \longrightarrow 1 \end{array} \quad (3)$$

Dabei sind die links und in der Mitte stehenden Gruppen Untergruppen von  $GL(F,E)^* \subset GL(E)$ , und die rechts stehenden Untergruppen von  $\text{Aut}(H)$ . Wir vergleichen nun dies Diagramm mit dem Diagramm (1). Dort sind die links und in der Mitte stehenden Gruppen Untergruppen von  $GL(F,E) \subset GL(F)$ , und die rechts stehenden sind wieder Untergruppen von  $\text{Aut}(H)$ . Man beweist sehr leicht die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} GL(F/E) &= GL(F/E)^* \\ SL(F/E) &= SL(F/E)^* . \end{aligned}$$

Die Beschränkungsabbildung  $\text{End}(F,E) \longrightarrow \text{End}(E)$  induziert Isomorphismen

$$\begin{aligned} GL(F,E) &\cong GL(F,E)^* \\ SL(F,E) &\cong SL(F,E)^* . \end{aligned}$$

Diese induzieren auch Isomorphismen der in den Diagrammen (1) und (3) links stehenden einander entsprechenden Gruppen. Insgesamt gilt also: Die Beschränkungsabbildung induziert einen Isomorphismus des Diagramms (1) mit dem Diagramm (3).

Insbesondere hat man den folgenden kanonischen Isomorphismus von kurzen exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma SL(F, E) & \longrightarrow & SL(F, E) & \longrightarrow & SL(F/E) \longrightarrow 1 \\ & & \cong & & \cong & & \cong \\ 1 & \longrightarrow & \Gamma SL(F, E)^* & \longrightarrow & SL(F, E)^* & \longrightarrow & SL(F/E)^* \longrightarrow 1 \end{array}$$

Trotzdem wollen wir zwischen diesen beiden Sequenzen sorgfältig unterscheiden, denn es handelt sich z.B. bei  $\Gamma SL(F, E)$  um eine Kongruenzuntergruppe von  $SL(F)$ , bei  $\Gamma SL(F, E)^*$  hingegen um eine Kongruenzuntergruppe von  $SL(E)$ , und es gibt keine kanonische Identifikation von  $SL(F)$  mit  $SL(E)$ , welche diese Gruppen ineinander überführt.

Wir wollen jetzt die oben definierten Ringe von Endomorphismen bzw. Gruppen von Automorphismen durch entsprechende Ringe bzw. Gruppen von Matrizen beschreiben. Identifiziert man sowohl  $E$  als auch  $F$  durch die Wahl einer Basis mit  $\mathbb{Z}^n$ , dann identifiziert sich die Inklusionsabbildung  $E \rightarrow F$  mit einer linearen Abbildung  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ . Diese wird durch die Matrizenmultiplikation  $z \mapsto Az$  der Spaltenvektoren  $z$  mit einer ganzzahligen Matrix  $A$  von maximalem Rang beschrieben. Die Endomorphismen von  $E$  bzw.  $F$  identifizieren sich mit ganzzahligen  $k \times k$ -Matrizen, die durch Multiplikation von links auf  $\mathbb{Z}^n$  operieren.

$M(k, \mathbb{Z})$  sei also jetzt der Ring der ganzzahligen  $k \times k$ -Matrizen, und es sei  $A \in M(k, \mathbb{Z})$  eine Matrix vom Rang  $k$ . Zu  $A$  gehören das Linksideal  $M(k, \mathbb{Z})A$  und das Rechtsideal  $AM(k, \mathbb{Z})$ . Dazu gehören entsprechende Äquivalenzrelationen in  $M(k, \mathbb{Z})$ :

$$X \equiv_1 Y(A) \iff X - Y \in M(k, \mathbb{Z})A$$

$$X \equiv_r Y(A) \iff X - Y \in AM(k, \mathbb{Z})$$

Dazu gehört ferner die folgende, von Frobenius [63] eingeführte Vertauschbarkeitsrelation für  $X, X' \in M(k, \mathbb{Z})$ :

$$AX = X'A.$$

Die dazu inverse Relation ist:

$$XA = AX'.$$

#### Definition:

$$\begin{aligned} {}^A M(k, \mathbb{Z}) &= \{X \in M(k, \mathbb{Z}) \mid \exists X' \in M(k, \mathbb{Z}) \quad AX = X'A\} \\ M(k, \mathbb{Z})^A &= \{X \in M(k, \mathbb{Z}) \mid \exists X' \in M(k, \mathbb{Z}) \quad XA = AX'\} \end{aligned}$$

In diesen Ringen sind  $M(k, \mathbb{Z})A \subset {}^A M(k, \mathbb{Z})$  und  $AM(k, \mathbb{Z}) \subset M(k, \mathbb{Z})^A$  zweiseitige Ideale, und daher kann man die folgenden Quotientenringe definieren:

$$\begin{aligned} {}^A \bar{M}(k, \mathbb{Z}) &:= {}^A M(k, \mathbb{Z}) / M(k, \mathbb{Z})A \\ \bar{M}(k, \mathbb{Z})^A &:= M(k, \mathbb{Z})^A / AM(k, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ferner definieren wir die folgenden multiplikativen Gruppen in diesen Matrizenringen.

#### Definition:

$$\begin{aligned} {}^A GL(k, \mathbb{Z}) &= GL(k, \mathbb{Z}) \cap {}^A M(k, \mathbb{Z}) \\ GL(k, \mathbb{Z})^A &= GL(k, \mathbb{Z}) \cap M(k, \mathbb{Z})^A \\ {}^A SL(k, \mathbb{Z}) &= SL(k, \mathbb{Z}) \cap {}^A M(k, \mathbb{Z}) \\ SL(k, \mathbb{Z})^A &= SL(k, \mathbb{Z}) \cap M(k, \mathbb{Z})^A \\ {}^A \Gamma SL(k, \mathbb{Z}) &= \{X \in SL(k, \mathbb{Z}) \mid X \equiv_1 1(A)\} \subset {}^A SL(k, \mathbb{Z}) \\ \Gamma SL(k, \mathbb{Z})^A &= \{X \in SL(k, \mathbb{Z}) \mid X \equiv_r 1(A)\} \subset SL(k, \mathbb{Z})^A \end{aligned}$$

Die Vielfalt der soeben definierten Ringe und Gruppen reduziert sich schnell, wenn man folgendes bemerkt:



Erstens: Die Transposition definiert einen Antiisomorphismus

$${}^A M(k, \mathbb{Z}) \cong M(k, \mathbb{Z})^A{}^t,$$

welcher die entsprechenden zweiseitigen Ideale ineinander überführt und daher einen Antiisomorphismus der Quotientenringe induziert. Er definiert auch Antiisomorphismen der entsprechenden Matrizen Gruppen.

Zweitens: Die Konjugation  $X \mapsto AXA^{-1}$  definiert einen Isomorphismus

$${}^A M(k, \mathbb{Z}) \cong M(k, \mathbb{Z})^A$$

Das Bild  $X' = AXA^{-1}$  von  $X$  ist gerade die nach der Definition von  ${}^A M(k, \mathbb{Z})$  zu  $X$  gehörige eindeutig bestimmte Matrix  $X'$  mit  $AX = X'A$ . Dieser Isomorphismus induziert Isomorphismen der zweiseitigen Ideale und der Quotientenringe sowie der entsprechenden Matrizen Gruppen. Jedoch darf man dabei nicht vergessen, daß die Konjugation  $X \mapsto AXA^{-1}$  nicht für alle  $X \in M(k, \mathbb{Z})$  wieder eine ganzzahlige Matrix  $X'$  liefert, sondern eben nur für die Matrizen  $X \in {}^A M(k, \mathbb{Z})$ .

Es ist nützlich, die Definition der obigen Matrizen Gruppen und -ringe für ein bestimmtes  $A$  von besonders einfacher Normalform zu konkretisieren. Dafür wählen wir die Normalform von Smith.  $A$  ist dann eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k \end{pmatrix}$$

Die Diagonalkoeffizienten  $a_i$  sind positive natürliche Zahlen, und es gilt  $a_i \mid a_{i+1}$ .

#### Definition:

$a_1, \dots, a_k$  seien positive natürliche Zahlen, und es gelte  $a_i \mid a_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k-1$ . Dann definieren wir dazu die folgenden Ringe, Ideale und Gruppen von Matrizen:

$$\begin{aligned} M[a_1, \dots, a_k] &= \{(x_{ij}) \in M(k, \mathbb{Z}) \mid x_{ij} = 0(a_i/a_j) \text{ für } i > j\} \\ M[a_1, \dots, a_k]' &= \{(x_{ij}) \in M(k, \mathbb{Z}) \mid x_{ij} = 0(a_j/a_i) \text{ für } i < j\} \\ {}^*M[a_1, \dots, a_k] &= \{(x_{ij}) \in M(k, \mathbb{Z}) \mid x_{ij} = 0(a_i) \text{ für alle } i, j\} \\ {}^*M[a_1, \dots, a_k]' &= \{(x_{ij}) \in M(k, \mathbb{Z}) \mid x_{ij} = 0(a_j) \text{ für alle } i, j\} \\ SL[a_1, \dots, a_k] &= \{(x_{ij}) \in SL(k, \mathbb{Z}) \mid x_{ij} = 0(a_i/a_j) \text{ für } i > j\} \\ SL[a_1, \dots, a_k]' &= \{(x_{ij}) \in SL(k, \mathbb{Z}) \mid x_{ij} = 0(a_j/a_i) \text{ für } i < j\} \\ \Gamma[a_1, \dots, a_k] &= \{(x_{ij}) \in SL(k, \mathbb{Z}) \mid x_{ij} = \delta_{ij}(a_i) \text{ für alle } i, j\} \\ \Gamma[a_1, \dots, a_k]' &= \{(x_{ij}) \in SL(k, \mathbb{Z}) \mid x_{ij} = \delta_{ij}(a_j) \text{ für alle } i, j\}. \end{aligned}$$

Analog kann man natürlich auch noch Untergruppen  $GL[a_1, \dots, a_k]$  und  $GL[a_1, \dots, a_k]'$  aus  $GL(k, \mathbb{Z})$  definieren.

Ist  $\times : SL(k, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(k, \mathbb{Z})$  der kontragrediente Automorphismus von  $SL(k, \mathbb{Z})$ , dann gilt offenbar:

$$SL[a_1, \dots, a_k]' = \times SL[a_1, \dots, a_k]$$

$$\Gamma[a_1, \dots, a_k]' = \times \Gamma[a_1, \dots, a_k].$$

Entsprechend geht bei dem durch die Transposition gegebenen Antiautomorphismus von  $M(k, \mathbb{Z})$  der Ring  $M[a_1, \dots, a_k]$  antiisomorph in  $M[a_1, \dots, a_k]'$  über.

Die bekanntesten klassischen Kongruenzuntergruppen von  $SL(2, \mathbb{Z})$ , die wir schon in 1.8 eingeführt haben, sind einfache Spezialfälle der eben definierten Gruppen:

$$\Gamma(N) = \Gamma[N, N]$$

$$\Gamma_1(N) = \Gamma[1, N]$$

$$\Gamma_2(N) := \Gamma[1, N]'$$

$$\Gamma_0(N) = SL[1, N]$$

$$\Gamma_0'(N) := SL[1, N]'.$$

Die verallgemeinerten Kongruenzuntergruppen  $SL[a_1, \dots, a_k]$  hängen natürlich nur von den  $k-1$  Zahlen  $b_i = a_{i+1}/a_i$  ab. Für den Fall, daß die  $b_i$  paarweise relativ prim sind, sind sie in einem Artikel von M. Newman und I. Reiner [64] betrachtet worden. Andere Untersuchungen speziell über diese eigentlich doch sehr kanonisch definierten Kongruenzuntergruppen sind mir zur Zeit nicht bekannt.

Die folgende Aussage ergibt sich trivial aus den Definitionen.

#### Proposition 5.6.1.

A sei die Diagonalmatrix mit den Diagonalkoeffizienten  $a_1, \dots, a_k$ . Es gelte  $a_i \mid a_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k-1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} M(k, \mathbb{Z})^A &= M[a_1, \dots, a_k] & {}^A M(k, \mathbb{Z}) &= M[a_1, \dots, a_k]^{-1} \\ AM(k, \mathbb{Z}) &= {}^A M[a_1, \dots, a_k] & M(k, \mathbb{Z})A &= {}^A M[a_1, \dots, a_k] \\ SL(k, \mathbb{Z})^A &= SL[a_1, \dots, a_k] & {}^A SL(k, \mathbb{Z}) &= SL[a_1, \dots, a_k]^* \\ \Gamma SL(k, \mathbb{Z})^A &= \Gamma[a_1, \dots, a_k] & {}^A \Gamma SL(k, \mathbb{Z}) &= \Gamma[a_1, \dots, a_k]^* \end{aligned}$$

Geht man von A mittels unimodularer Matrizen  $S, T \in SL(k, \mathbb{Z})$  zu  $B = SAT$  über, dann gilt  ${}^B M(k, \mathbb{Z}) = T^{-1} {}^A M(k, \mathbb{Z}) T$  und  $M(k, \mathbb{Z})^B = S M(k, \mathbb{Z})^A S^{-1}$ . Entsprechendes gilt für die verschiedenen Typen von Matrizen- und Automorphismengruppen. Bei Aussagen, die nur von den Konjugationsklassen abhängen, kann man sich daher auf die Betrachtung der gerade definierten Normalformen beschränken.

Der Zusammenhang zwischen den eingangs definierten Endomorphismenringen bzw. Automorphismengruppen einerseits und den danach eingeführten Ringen bzw. Gruppen von Matrizen wird durch die folgende Aussage beschrieben, die größtenteils trivial aus den Definitionen folgt.

#### Proposition 5.6.2.

Es sei F eine freie abelsche Gruppe vom Rang k und  $E \subset F$  eine Untergruppe von endlichem Index. In E und F seien Basen gegeben. Dann identifizieren sich sowohl  $\text{End}(E)$  als auch  $\text{End}(F)$  mit  $M(k, \mathbb{Z})$  und die Inklusionsabbildung  $E \rightarrow F$  identifiziert sich mit einer Matrix  $A \in M(k, \mathbb{Z})$  vom Rang k. Dadurch werden die früher definierten Ringe und Gruppen wie folgt miteinander identifiziert:

$\text{End}(F)$	$= M(k, \mathbb{Z})$	$\text{End}(E)$	$= M(k, \mathbb{Z})$
$\text{End}(F, E)$	$= M(k, \mathbb{Z})^A$		
$\text{End}(F, E)^*$	$= {}^A M(k, \mathbb{Z})$		
$\text{End}(F/E)$	$= \bar{M}(k, \mathbb{Z})^A$		
$\text{Aut}(F/E)$	$= (\bar{M}(k, \mathbb{Z})^A)^*$		
$GL(F, E)$	$= GL(k, \mathbb{Z})^A$	$GL(F, E)^*$	$= {}^A GL(k, \mathbb{Z})$
$SL(F, E)$	$= SL(k, \mathbb{Z})^A$	$SL(F, E)^*$	$= {}^A SL(k, \mathbb{Z})$
$\Gamma SL(F, E)$	$= \Gamma SL(k, \mathbb{Z})^A$	$\Gamma SL(F, E)^*$	$= \Gamma {}^A SL(k, \mathbb{Z})$

Dabei bezeichnet  $(\bar{M}(k, \mathbb{Z})^A)^*$  die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente in dem Ring  $\bar{M}(k, \mathbb{Z})^A$ .

Die gerade gegebene Beschreibung des Endomorphismenrings und der Automorphismengruppe einer endlichen abelschen Gruppe ist natürlich nicht neu. Sie wurde wohl zuerst von A. Ranum [65] angegeben, später unabhängig davon von K. Skoda [66].

Mit den nächsten drei Propositionen und den nachfolgenden Bemerkungen klären wir die Frage, wann Gruppen der oben beschriebenen Art zueinander konjugiert sind. Die Beweise für Propositionen 5.6.4 und 5.6.5 hat freundlicherweise Herr Kollege Grunewald für mich gefunden. Ich möchte ihm dafür auch an dieser Stelle noch einmal herzlich danken.

Proposition 5.6.3.

$F$  sei eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang  $k > 1$ . Ferner seien  $E$  und  $E'$  Untergruppen von endlichem Index in  $F$ . Dann gilt:

- (i)  $\Gamma SL(F, E) \subset \Gamma SL(F, E') \iff E \subset E'$   
 (ii)  $\Gamma SL(F, E) = \Gamma SL(F, E') \iff E = E'$

Beweis: (i) Es sei  $E \subset E'$  und  $\gamma$  irgendein Element  $\gamma \in \Gamma SL(F, E)$ . Dann gilt  $\gamma(E') = E'$ , weil  $\gamma(E) = E$  gilt und weil  $\gamma$  auf  $F/E$  die Identität induziert und daher  $E'/E \subset F/E$  in sich überführt. Natürlich induziert  $\gamma$  auf dem Quotienten  $F/E'$  von  $F/E$  ebenfalls die Identität. Also folgt  $\gamma \in \Gamma SL(F, E')$ . Damit ist gezeigt:  $\Gamma SL(F, E) \subset \Gamma SL(F, E')$ .

Jetzt werde umgekehrt  $\Gamma SL(F, E) \subset \Gamma SL(F, E')$  vorausgesetzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir zusätzlich voraussetzen, daß  $F = \mathbb{Z}^k$  und  $E = AZ^k$  gilt, wobei  $A$  eine Diagonalmatrix mit den Diagonalkoeffizienten  $a_1, \dots, a_k$  ist und  $a_i$  ein Teiler von  $a_{i+1}$ . Nach 5.6.1 und 5.6.2 gilt dann  $\Gamma SL(F, E) = \Gamma[a_1, \dots, a_k]$ . Für jedes  $\gamma \in \Gamma[a_1, \dots, a_k]$  gilt nach Voraussetzung  $\gamma \in \Gamma SL(F, E')$ . Für jedes  $x \in F$  gilt also  $\gamma(x) - x \in E'$ . Wir wenden dies auf den Fall an, wo  $x$  einer der Standard-Basisvektoren  $e_j$  von  $F$  ist und  $\gamma$  die wie folgt definierte Matrix  $\gamma_{ij}$  ist, wobei  $i \neq j$ . Die Matrix  $\gamma_{ij}$  unterscheidet sich von der Einheitsmatrix nur durch das Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte, und dieses Element ist gleich  $a_i$ . Wir erhalten:  $\gamma_{ij}(e_j) - e_j = a_i e_i \in E'$  für  $i = 1, \dots, k$ . Also folgt  $E \subset E'$ , und das war zu zeigen.

- (ii) Die Aussage (ii) folgt trivial aus (i).

Proposition 5.6.4.

$(a_1, \dots, a_k)$  und  $(a'_1, \dots, a'_k)$  seien  $k$ -Tupel natürlicher Zahlen derart, daß  $a_i \mid a_{i+1}$  und  $a'_i \mid a'_{i+1}$ . Dann ist  $\Gamma[a_1, \dots, a_k]$  in  $SL(k, \mathbb{Z})$  konjugiert zu  $\Gamma[a'_1, \dots, a'_k]$  genau wenn  $a_i = a'_i$  für  $i = 1, \dots, k$ .

Beweis:  $A$  und  $A'$  seien die Diagonalmatrizen mit den Diagonalkoeffizienten  $a_i$  bzw.  $a'_i$ . Ferner sei  $S \in SL(k, \mathbb{Z})$  eine Matrix mit  $\Gamma[a'_1, \dots, a'_k] = S\Gamma[a_1, \dots, a_k]S^{-1}$ . Wegen 5.6.1 und 5.6.2 ist dies gleichbedeutend mit der Aussage  $\Gamma SL(\mathbb{Z}^k, A'\mathbb{Z}^k) = S \cdot \Gamma SL(\mathbb{Z}^k, A\mathbb{Z}^k) \cdot S^{-1} = \Gamma SL(\mathbb{Z}^k, SA\mathbb{Z}^k)$ . Dies ist nun wegen 5.6.3 gleichbedeutend mit  $A'\mathbb{Z}^k = SA\mathbb{Z}^k$ . Das ist aber offenbar äquivalent dazu, daß eine Matrix  $T \in SL(k, \mathbb{Z})$  existiert, so daß  $A' = SAT$ . Letzteres bedeutet aber bekanntlich, daß  $A'$  und  $A$  die gleiche Smith'sche Normalform haben. Das heißt aber gerade  $A = A'$ .

Für die Gruppen  $SL(F, E)$  gibt es kein einfaches Analogon zu 5.6.3. So existieren z.B. Gitter  $E, E' \subset F$  mit  $F/E \cong F/E'$  und  $SL(F, E) = SL(F, E')$ , aber  $E \neq E'$ . Jedoch können wir die folgende Proposition beweisen, die man als Analogon zu 5.6.4 interpretieren kann.

Proposition 5.6.5.

$(a_1, \dots, a_k)$  und  $(a'_1, \dots, a'_k)$  seien  $k$ -Tupel natürlicher Zahlen derart, daß  $a_i \mid a_{i+1}$  und  $a'_i \mid a'_{i+1}$ . Dann ist  $SL[a_1, \dots, a_k]$  in  $SL(k, \mathbb{Z})$  konjugiert zu  $SL[a'_1, \dots, a'_k]$  genau wenn  $a_{i+1}/a_i = a'_{i+1}/a'_i$  für  $i = 1, \dots, k-1$ .

Beweis:  $A$  und  $A'$  seien wieder die Diagonalmatrizen mit den Diagonalkoeffizienten  $a_i$  bzw.  $a'_i$ . Es sei  $S \in SL(k, \mathbb{Z})$  eine Matrix mit  $SL[a'_1, \dots, a'_k] = S \cdot SL[a_1, \dots, a_k] \cdot S^{-1}$ . Wegen 5.6.1 und 5.6.2 gilt also  $SL[a_1, \dots, a_k] = SL(F, E)$ , wenn

wir  $F = \mathbb{Z}^k$  und  $E = SA'\mathbb{Z}^k$  setzen. Wir wählen eine Matrix  $T \in SL(k, \mathbb{Z})$ , so daß  $B = SA'T$  eine untere Dreiecksmatrix ist. Dies ist bekanntlich stets möglich. Wir bezeichnen die Elemente der Matrix  $B$  mit  $b_{ij}$  und die Diagonalelemente  $b_{ii}$  mit  $b_i$ . Nach Konstruktion gilt  $b_{ij} = 0$  für  $i < j$ . Natürlich gilt ferner nach Konstruktion  $E = B\mathbb{Z}^k$ , also  $SL[a_1, \dots, a_k] = SL(\mathbb{Z}^k, B\mathbb{Z}^k)$ . Für jeden Spaltenvektor  $v_j$  von  $B$  und jede Matrix  $\gamma \in SL[a_1, \dots, a_k]$  gilt daher  $\gamma(v_j) - v_j \in B\mathbb{Z}^k$ . Wir wenden dies insbesondere auf die wie folgt für  $i \neq j$  definierten Matrizen  $\gamma_{ij} \in SL[a_1, \dots, a_k]$  an. Die Matrix  $\gamma_{ij}$  unterscheidet sich von der Einheitsmatrix nur durch das Element in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte, und dies Element ist gleich  $a_i/a_j$  für  $i > j$  und gleich 1 für  $i < j$ .

Behauptung (1): Für  $i \leq j \leq k$  gilt  $b_i \mid b_{xj}$ .

Beweis: Für  $i = j = k$  ist die Behauptung trivial. Sei also  $i < k$ , und  $e_i$  der  $i$ -te Standard-Basisvektor von  $\mathbb{Z}^k$ . Aus  $\gamma_{ik}(v_j) - v_j = b_{xj}e_i \in B\mathbb{Z}^k$  und der Dreiecksgestalt von  $B$  folgt  $b_i \mid b_{xj}$ .

Behauptung (2):  $b_i = a'_i$

Beweis: Aus (1) folgt zunächst  $b_i \mid b_{i+1}$ . Weiterhin folgt daher aus (1) und der Dreiecksgestalt von  $B$ , daß die Smith'sche Normalform von  $B$  die Diagonalmatrix mit den Diagonalkoeffizienten  $b_1, \dots, b_k$  ist. Andererseits ist  $A'$  die Smith'sche Normalform von  $B = SA'T$ . Also folgt  $a'_i = b_i$ .

Behauptung (3):  $a'_{i+1}/a'_i$  teilt  $a_{i+1}/a_i$ .

Beweis: Aus  $\gamma_{i+1,i}(v_1) - v_1 = b_i(a_{i+1}/a_i)e_{i+1} \in B\mathbb{Z}^k$  und der Dreiecksgestalt von  $B$  folgt:  $b_{i+1}$  teilt  $b_i a_{i+1}/a_i$ . Also folgt:  $b_{i+1}/b_i$  teilt  $a_{i+1}/a_i$ . Daraus folgt wegen (2) die Behauptung.

Behauptung (4):  $a'_{i+1}/a'_i = a_{i+1}/a_i$ .

Beweis: Die Behauptung folgt aus (3), denn durch Vertauschung

der Rollen von  $A$  und  $A'$  ergibt sich auch:  $a'_{i+1}/a'_i$  teilt  $a_{i+1}/a_i$ .

Die gerade bewiesenen Aussagen gestatten uns, durch einige Bemerkungen zu verdeutlichen, warum wir zwischen den Gruppen  $SL(F, E)$  und  $\Gamma SL(F, E)$  einerseits und  $SL(F, E)^*$  bzw.  $\Gamma SL(F, E)^*$  andererseits sorgfältig unterscheiden haben.

(1) Wie bereits früher bemerkt, liefert der kontragrediente Automorphismus von  $SL(k, \mathbb{Z})$  Gruppenisomorphismen

$$\begin{aligned} SL[a_1, \dots, a_k]^* &\cong SL[a_1, \dots, a_k] \\ \Gamma[a_1, \dots, a_k]^* &\cong \Gamma[a_1, \dots, a_k]. \end{aligned}$$

Die folgenden Bemerkungen zeigen jedoch, daß es im allgemeinen keine Isomorphismen zwischen diesen Gruppen gibt, welche durch innere Automorphismen von  $SL(k, \mathbb{Z})$  induziert werden.

(2) Die Konjugation mit der speziellen Permutationsmatrix

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

überführt die Gruppe  $SL[a_1, \dots, a_k]^*$  in  $SL[a_k/a_k, \dots, a_k/a_1]$ . Man hat also die Konjugationsrelation

$$SL[a_1, \dots, a_k]^* \sim SL[a_k/a_k, \dots, a_k/a_1].$$

(3) Für  $k = 2$  liefert die Konjugation in (2) die folgenden Konjugationsrelationen:

$$\begin{aligned} SL[a_1, a_2]^* &\sim SL[a_1, a_2] \\ \Gamma[a_1, a_2]^* &\sim \Gamma[a_1, a_2]. \end{aligned}$$

(4) Für  $k > 2$  zeigt aber (2) in Verbindung mit 5.6.5, daß  $SL[a_1, \dots, a_k]^*$  dann und nur dann zu  $SL[a_1, \dots, a_k]$  konjugiert ist, wenn  $a_1 \cdot a_k = a_1 \cdot a_{k-i+1}$  für  $i = 1, \dots, k$  gilt.

(5) Noch deutlicher tritt der Unterschied zwischen den beiden Arten von Gruppen bei den Gruppen  $\Gamma[a_1, \dots, a_k]^*$  und  $\Gamma[a_1, \dots, a_k]$  hervor. Für  $k > 2$  gibt es nämlich  $k$ -Tupel  $(a_1, \dots, a_k)$  derart, daß  $\Gamma[a_1, \dots, a_k]^*$  zu keinem  $\Gamma[b_1, \dots, b_k]$  konjugiert ist.

Beispiel:  $\Gamma[1, \dots, 1, 2]^*$  ist für  $k > 2$  zu keinem  $\Gamma[b_1, \dots, b_k]$  konjugiert.

Beweis: Angenommen  $\Gamma[1, \dots, 1, 2]^* = \Gamma SL(F, E)$ , wo  $F = \mathbb{Z}^k$  und  $E \subset F$  von endlichem Index. Für alle  $\gamma \in \Gamma[1, \dots, 1, 2]^*$  und alle Standard-Basisvektoren  $e_i \in F$  gilt dann  $\gamma(e_i) - e_i \in E$ . Durch Wahl geeigneter  $\gamma$  folgert man daraus leicht  $e_i \in E$  für  $i = 1, \dots, k$ , also  $E = F$  und daher  $\Gamma SL(F, E) = SL(k, \mathbb{Z})$  im Widerspruch zur Annahme und zu  $\Gamma[1, \dots, 1, 2]^* \neq SL(k, \mathbb{Z})$ .

Mit 5.6.1 und 5.6.2 sind die zunächst invariant und abstrakt beschriebenen Gruppen  $SL(F, E)$ ,  $\Gamma SL(F, E)$  und  $SL(F, E)^*$  so konkret wie nur möglich beschrieben worden. Was noch fehlt, ist eine entsprechend konkrete Beschreibung von  $\text{Aut}(F/E)$  und von den darin enthaltenen Untergruppen  $GL(F/E)$  und  $SL(F/E)$ . Diese ergibt sich aus einer Arbeit von H. Liebeck. Wir referieren die diesbezüglichen Ergebnisse von Liebeck, wobei wir die Formulierung unserer Situation anpassen.

Für eine Matrix  $X \in M(k, \mathbb{Z})$  und  $i = 1, \dots, k$  bezeichne  $X^{[i]}$  die Matrix, die aus  $X$  durch Fortlassen der ersten  $i-1$  Zeilen und Spalten entsteht. Ferner bezeichnen wir für zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  den größten gemeinsamen Teiler mit  $(a, b)$ .

#### Definition:

$a_1, \dots, a_k$  seien positive natürliche Zahlen,  $a_0 = 1$ . Es gelte  $a_{i-1} \mid a_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Es sei  $A$  die Diagonalmatrix

mit den Diagonalkoeffizienten  $a_1, \dots, a_k$ .

$$M(k, \mathbb{Z})_A^* = \{X \in M(k, \mathbb{Z})^A \mid (\det X^{[i]}, a_i/a_{i-1}) = 1 \text{ für } i = 1, \dots, k\}.$$

Liebeck beweist, daß die Elemente von  $M(k, \mathbb{Z})_A^*$  genau diejenigen Matrizen  $X \in M(k, \mathbb{Z})^A$  sind, welche bei der Restklassenabbildung  $M(k, \mathbb{Z})^A \rightarrow \bar{M}(k, \mathbb{Z})^A$  eine Einheit geben, also nach 5.6.2 einen Automorphismus von  $\mathbb{Z}^k/A\mathbb{Z}^k$  definieren. Damit erhält man also die folgende ganz konkrete Beschreibung von  $\text{Aut}(F/E)$ .

#### Proposition 5.6.6.

$A \in M(k, \mathbb{Z})$  sei wie oben eine Matrix in der Normalform von Smith. Dann gibt es kanonische Isomorphismen

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}^k/A\mathbb{Z}^k) \cong (\bar{M}(k, \mathbb{Z})^A)^* \cong M(k, \mathbb{Z})_A^* / AM(k, \mathbb{Z}) \cap M(k, \mathbb{Z})_A^*$$

Für den  $p$ -primären Fall wurde dies Ergebnis schon von Ranum und von Shioda erzielt. Das entscheidende Hilfsmittel von Liebeck, aus dem die weiteren Ergebnisse relativ schnell folgen, ist der folgende Satz.

#### Proposition 5.6.7.

$A$  sei eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalkoeffizienten  $a_1, \dots, a_k$  derart, daß  $a_i \mid a_{i+1}$ . Gegeben sei eine Matrix  $X \in M(k, \mathbb{Z})_A^*$  und eine ganze Zahl  $d$  mit  $\det X \equiv d \pmod{a_1}$ . Dann existiert eine Matrix  $Y \in M(k, \mathbb{Z})_A^*$  mit  $Y \equiv X(A)$  und  $\det Y = d$ .

Hieraus ergibt sich leicht die folgende Charakterisierung der Untergruppen  $SL(F/E)$  und  $GL(F/E)$  von  $\text{Aut}(F/E)$ .

Proposition 5.6.8.

$F$  sei eine freie abelsche Gruppe vom Rang  $k$  und  $E \subset F$  eine Untergruppe von endlichem Index. Es sei  $(a_1, \dots, a_k)$  das eindeutig bestimmte  $k$ -Tupel positiver natürlicher Zahlen derart, daß  $a_i \mid a_{i+1}$  und  $F/E \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$ . Dann gilt:

- (1) Die Zuordnung  $X \mapsto \det X$  für  $X \in \text{End}(F)$  induziert einen wohldefinierten surjektiven Homomorphismus

$$\delta : \text{Aut}(F/E) \rightarrow (\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z})^*$$

auf die Einheitengruppe  $(\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z})^*$  von  $\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z}$ .

$$(11) \quad \begin{aligned} \text{GL}(F/E) &= \{x \in \text{Aut}(F/E) \mid \delta(x) = \pm 1\} \\ \text{SL}(F/E) &= \{x \in \text{Aut}(F/E) \mid \delta(x) = 1\} \end{aligned}$$

Korollar 5.6.9.

Mit den Voraussetzungen von 5.6.8 gilt:

$$\begin{aligned} \text{GL}(F/E) &= \text{Aut}(F/E) = a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 6\} \\ \text{SL}(F/E) &= \text{Aut}(F/E) = a_1 \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

Eine weitere Folgerung aus 5.6.8 ist, daß die Definition von  $\text{SL}(F/E)$  in einem gleich noch zu erläuternden Sinne mit der Primärzerlegung der endlichen abelschen Gruppe  $H = F/E$  verträglich ist.  $H = \bigoplus_p H_p$  sei die Primärzerlegung von  $H$  in die Sylowuntergruppen  $H_p$ . Ferner sei  $H'_p$  die Gruppe

$$H'_p = H / \bigoplus_{q \neq p} H_q$$

Natürlich definieren die Restklassenabbildungen einen kanonischen Isomorphismus  $H \rightarrow H' = \bigoplus_p H'_p$ . Dem entsprechen kanonische Homomorphismen  $\text{Aut}(H) \rightarrow \text{Aut}(H'_p)$  und ein kanonischer

## Isomorphismus

$$\text{Aut } H \xrightarrow{\cong} \prod_p \text{Aut}(H'_p)$$

Nun betrachten wir  $H$  als Restklassengruppe  $H = F/E$ . Für jede Primzahl  $p$  definieren wir wie folgt eine Untergruppe  $E_p$  von  $F$ :

$$E_p = \{x \in F \mid \exists \lambda \in \mathbb{Z} \quad (p, \lambda) = 1, \lambda x \in E\}$$

$E$  ist gerade der Kern der Restklassenabbildung  $F \rightarrow H'_p \cong F/E_p$ . Offenbar gilt  $E = \bigcap_p E_p$  und

$$\text{SL}(F, E) = \bigcap_p \text{SL}(F, E_p)$$

Daher hat man das folgende kanonische kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \text{SL}(F, E) & \longrightarrow & \text{SL}(F/E) & \subset & \text{Aut}(H) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ \bigcap_p \text{SL}(F, E_p) & \longrightarrow & \prod_p \text{SL}(F/E_p) & \subset & \prod_p \text{Aut}(H'_p) \end{array}$$

Aus der Charakterisierung der Gruppen  $\text{SL}(F/E)$  bzw.  $\text{SL}(F/E_p)$  in 5.6.8 folgt nun leicht, daß auch der mittlere Homomorphismus in diesem Diagramm ein Isomorphismus ist. Damit hat man folgendes Ergebnis.

Korollar 5.6.10.

Es gibt kanonische miteinander verträgliche Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \text{SL}(F/E) & \subset & \text{Aut}(H) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \prod_p \text{SL}(F/E_p) & \subset & \prod_p \text{Aut}(H'_p) \end{array}$$

Der erste Teil des Abschnitts 5.6 bis zu diesem Punkt diente der Einführung der Kongruenzuntergruppen von  $SL(E)$  die uns interessieren. Nunmehr wollen wir in einem zweiten Teil die "Spitzen" dieser Gruppen studieren.

Definition:

$E$  sei eine freie abelsche Gruppe vom Rang  $k$ . Dann sind  $\mathcal{P}_m(E)$ ,  $m=1, \dots, k$  und  $P(E)$  die folgenden Mengen von Untergruppen  $D \subset E$  bzw. Elementen  $v \in E$ :

$$\mathcal{P}_m(E) := \{D \subset E \mid \text{Rang}(D) = m, D \text{ primitiv}\}$$

$$P(E) := \{v \in E \mid v \neq 0 \text{ primitiv}\}.$$

Nun sei wieder  $F$  frei abelsch vom Rang  $k$  und  $E \subset F$  eine Untergruppe von endlichem Index. Dann können wir ähnlich wie in 4.1 in der gleich noch näher erklärten Weise die folgenden kanonischen Bijektionen definieren:

$$\mathcal{P}_m(E) \longleftrightarrow \mathcal{P}_m(F)$$

$$P(E) \longleftrightarrow P(F).$$

Für  $v \in P(E)$  sei  $\text{div}(v) = \max\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid v/\lambda \in F\}$ .

Für  $w \in P(F)$  sei  $o(w) = \min\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \lambda > 0, \lambda w \in E\}$ .

Natürlich ist  $o(w)$  die Ordnung der Restklasse  $\bar{w}$  von  $w$  in  $H = F/E$ .

Definition:

Für  $v \in P(E)$  ist  $v^{\frac{1}{\text{div}(v)}} \in P(F)$  das Element

$$v^{\frac{1}{\text{div}(v)}} := \frac{v}{\text{div}(v)}.$$

Offenbar gilt  $o(v^{\frac{1}{\text{div}(v)}}) = \text{div}(v)$ , und die beiden Zuordnungen

$$v \longmapsto v^{\frac{1}{\text{div}(v)}}$$

$$o(w)w \longleftarrow w$$

definieren zueinander inverse bijektive Abbildungen.

Ordnet man einem primitiven Element  $v$  die davon erzeugte unendlich zyklische Untergruppe  $\mathbb{Z}v$  zu, dann induziert diese Zuordnung bijektive Abbildungen  $P(E)/(\pm 1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_1(E)$  und  $P(F)/(\pm 1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_1(F)$ . Wir haben daher mit den weiter oben definierten Bijektionen auch bijektive Abbildungen

$$\mathcal{P}_1(E) \longleftrightarrow \mathcal{P}_1(F).$$

Allgemeiner definieren wir jetzt für primitive Untergitter  $D \in \mathcal{P}_m(E)$  auf die folgende Weise ein primitives Untergitter  $D^{\frac{1}{m}} \in \mathcal{P}_m(F)$ . Ist  $L$  irgendeine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang,  $L^{\#} = \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$  und  $K \subset L$  eine Untergruppe, dann definieren wir das duale Komplement  $K_L^{\perp}$  wie folgt:

$$K_L^{\perp} = \{h \in L^{\#} \mid h(K) = 0\}.$$

Definition:

Für  $D \in \mathcal{P}_m(E)$  ist  $D^{\frac{1}{m}} \in \mathcal{P}_m(F)$  definiert durch

$$D^{\frac{1}{m}} := (D_F^{\perp})_{F^{\#}}^{\perp}.$$

Diese Definition ist natürlich so zu verstehen, daß dabei  $F^{\#}$  kanonisch mit  $F$  identifiziert wird. Offenbar gilt: Die beiden Zuordnungen

$$D \longmapsto D^{\frac{1}{m}}$$

$$D' \cap E \longleftarrow D'$$

definieren zueinander inverse bijektive Abbildungen

$$\mathcal{P}_m(E) \longleftrightarrow \mathcal{P}_m(F).$$

Für  $m=1$  sind diese mit den weiter oben definierten Abbildungen identisch.



Auf  $P(E)$  und auf  $\mathcal{P}_m(E)$  operieren kanonisch die Gruppen  $\Gamma SL(F,E)^*$  und auch  $SL(F,E)^*$ . Entsprechend operieren auf  $P(F)$  und  $\mathcal{P}_m(F)$  die Gruppen  $\Gamma SL(F,E)$  sowie  $SL(F,E)$ . Diese Operationen sind bezüglich der oben definierten bijektiven Abbildungen und bezüglich des Beschränkungsisomorphismus  $SL(F,E) \cong SL(F,E)^*$  miteinander verträglich. Insbesondere erhält man daraus kanonische Bijektionen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m(E) / \Gamma SL(F,E)^* &\approx \mathcal{P}_m(F) / \Gamma SL(F,E) \\ \mathcal{P}_m(E) / SL(F,E)^* &\approx \mathcal{P}_m(F) / SL(F,E) . \end{aligned}$$

Später wird uns in dieser Hinsicht besonders der Fall  $k=2$  und  $m=1$  interessieren. Dann sind die fraglichen Gruppen im wesentlichen Kongruenzuntergruppen von  $SL(2, \mathbb{Z})$ , und die gerade betrachteten Orbiträume sind dann die Mengen der Spitzen dieser Kongruenzuntergruppen. Wir können also dann die Spitzen von  $\Gamma SL(F,E)^*$  bzw.  $SL(F,E)^*$  kanonisch mit denen von  $\Gamma SL(F,E)$  bzw.  $SL(F,E)$  identifizieren.

Da die Kongruenzuntergruppen von endlichem Index in  $SL(E)$  bzw.  $SL(F)$  sind und  $SL(E)$  bzw.  $SL(F)$  natürlich transitiv auf  $\mathcal{P}_m(E)$  bzw.  $\mathcal{P}_m(F)$  operieren, sind die oben eingeführten Orbiträume endlich. Es liegt nahe, zu versuchen, die Orbits durch Invarianten zu charakterisieren, welche mit Hilfe der endlichen abelschen Gruppe  $H = F/E$  gewonnen werden. Für eine Untergruppe  $H'$  von  $H$  sei  $\lambda(H')$  die minimale Erzeugendenanzahl. Es sei

$$\mathcal{U}_m(H) = \{H' \subset H \mid \lambda(H') \leq m\} .$$

Wir definieren nun die folgenden fünf kommutativen Diagramme von Abbildungen.

$$\begin{array}{ccc} P(E) & \approx & P(F) \\ x^* \searrow & & \swarrow x \\ & H & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_1(E) / \Gamma SL(F,E)^* & \approx & \mathcal{P}_1(F) / \Gamma SL(F,E) \\ \bar{f}^* \searrow & & \swarrow \bar{f} \\ & H / \{\pm 1\} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_1(E) / SL(F,E)^* & \approx & \mathcal{P}_1(F) / SL(F,E) \\ \bar{f}^* \searrow & & \swarrow \bar{f} \\ & H / SL(F/E) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_m(E) / \Gamma SL(F,E)^* & \approx & \mathcal{P}_m(F) / \Gamma SL(F,E) \\ \phi_m^* \searrow & & \swarrow \phi_m \\ & \mathcal{U}_m(H) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_m(E) / SL(F,E)^* & \approx & \mathcal{P}_m(F) / SL(F,E) \\ \bar{\phi}_m^* \searrow & & \swarrow \bar{\phi}_m \\ & \mathcal{U}_m(H) / SL(F/E) & \end{array}$$

Die in diesem Diagramm auftretenden Abbildungen sind wie folgt definiert.

$$x(w) = \bar{w} := w + E$$

$$x^*(v) = \bar{v}^{\dagger} := v^{\dagger} + E$$

$$\phi_m(D') = H_{D'} := D' / D' \cap E$$

$$\phi_m^*(D) = H_D := D^{\dagger} / D$$

Die Abbildungen  $\bar{f}, \bar{f}^*, \bar{f}, \bar{f}^*$  sind durch  $x$  bzw.  $x^*$  induziert, und  $\bar{\phi}_m$  bzw.  $\bar{\phi}_m^*$  sind durch  $\phi_m$  bzw.  $\phi_m^*$  induziert. Natürlich sind  $\bar{f}$  und  $\bar{\phi}_1$  miteinander verträglich, wenn man  $H / \{\pm 1\}$  kanonisch auf  $\mathcal{U}_1(H)$  abbildet.

Wir wollen zunächst das Bild von  $x$  bzw.  $\bar{f}$  und  $\phi_1$  bestimmen und dann nach der Injektivität dieser Abbildungen fragen, wobei wir uns auf den Fall  $m=1$  beschränken.

Um das Bild von  $x$  charakterisieren zu können, erinnern wir an den von Prüfer eingeführten Begriff der Höhe  $h(a)$  eines Elementes  $a \in G$  in einer  $p$ -Gruppe  $G$ . Es ist

$$h(a) = \sup \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in G \quad a = p^n x\} .$$

Insbesondere definieren wir für jede  $p$ -Gruppe  $G$  die Teilmenge

$$h_0(G) = \{a \in G \mid h(a) = 0\}.$$

Definition:

$F$  sei eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang  $k > 0$ . Es sei  $E \subset F$  eine Untergruppe von endlichem Index,  $H = F/E$  die Quotientengruppe und  $H_p$  die  $p$ -Sylowgruppe von  $H$ . Wir identifizieren  $H$  mit dem cartesischen Produkt  $H = \prod_p H_p$  und definieren dann folgende Teilmengen von  $H_p$  bzw.  $H$ :

$$P_p(F/E) := \begin{cases} H_p & \text{wenn } \lambda(H_p) < k \\ h_0(H_p) & \text{wenn } \lambda(H_p) = k. \end{cases}$$

$$P(F/E) := \prod_p P_p(F/E) \subset \prod_p H_p = H$$

Proposition 5.6.11.

$F$  sei eine freie abelsche Gruppe vom Rang  $k > 1$  und  $E \subset F$  eine Untergruppe von endlichem Index. Dann gilt:

$$\text{Bild}(\chi: P(F) \rightarrow F/E) = P(F/E)$$

Beweis: O.B.d.A. sei  $F = \mathbb{Z}^k$  und  $E = A\mathbb{Z}^k$  und  $A$  eine Diagonalmatrix mit den Diagonalkoeffizienten  $a_1, \dots, a_k$  mit  $a_1 \mid a_{i+1}$ . Es sei

$$a_i = \prod_p p^{n_{p,i}}.$$

Ferner sei  $A_p$  die Diagonalmatrix mit den Diagonalkoeffizienten

$$p^{n_{p,1}}, \dots, p^{n_{p,k}}.$$

Dann ist  $E_p = A_p \mathbb{Z}^k$ . Wir identifizieren kanonisch  $H_p$  mit  $H'_p = F/E_p$ . Nach Definition gilt dann:

$$P_p(F/E) = \begin{cases} F/E_p & \text{wenn } n_{p,1} = 0 \\ h_0(F/E_p) & \text{wenn } n_{p,1} \neq 0 \end{cases}$$

Wir beschreiben Elemente  $\bar{x} \in F/E$  als  $k$ -Tupel  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$  von Restklassen  $\bar{x}_i \in \mathbb{Z}/a_i \mathbb{Z}$ . Entsprechend beschreiben wir Elemente  $\bar{x}$  aus  $F/E_p$  als  $k$ -Tupel  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$  von Restklassen  $\bar{x}_i \in \mathbb{Z}/p^{n_{p,i}} \mathbb{Z}$ .

Wir zeigen zunächst:  $\text{Bild } \chi \subset P(F/E)$ . Dazu ist zu zeigen: Wenn  $x = (x_1, \dots, x_k) \in P(F)$ , das heißt wenn  $\text{ggT}(x_1, \dots, x_k) = 1$ , dann liegt die Restklasse  $\bar{x}_p$  von  $x$  modulo  $E_p$  in  $P_p(F/E)$ . Wenn  $n_{p,1} = 0$ , ist nichts zu zeigen. Sei also  $n_{p,1} \neq 0$ . Dann bedeutet  $\bar{x}_p \notin h_0(F/E_p)$ , daß alle Komponenten  $x_i$  modulo  $p^{n_{p,i}}$  durch  $p$  teilbar sind, also  $x_i \equiv 0(p)$  für  $i=1, \dots, k$  im Widerspruch zur Voraussetzung  $\text{ggT}(x_1, \dots, x_k) = 1$ .

Wir zeigen jetzt die schwieriger zu beweisende Inklusion  $P(F/E) \subset \text{Bild } \chi$ . Wir zerlegen den Beweis in die Beweise von drei Behauptungen.

Behauptung (1):

Jedes Element  $\bar{x} \in P_p(F/E)$  läßt sich durch eine Transformation aus  $SL(F/E_p)$  in ein Element  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$  mit  $\bar{z}_1 = 1$  überführen.

Beweis: Wir setzen  $n_{p,1} \neq 0$  voraus, denn sonst ist nichts zu zeigen. Wir benutzen Argumente von G. Birkhoff [68]. In der zitierten Arbeit zeigt Birkhoff in Theorem 9.1, daß sich jedes Element in einer endlichen abelschen  $p$ -Gruppe  $\mathbb{Z}^k/A_p \mathbb{Z}^k$  durch Automorphismen in eine eindeutig bestimmte Normalform überführen läßt. Dazu benutzt er gewisse spezielle Automorphismen. In unserer Notation können diese mutatis mutandis

durch die im folgenden definierten Matrizen  $\alpha_{ij}$  und  $\beta_{i,c}$  beschrieben werden.

$$\alpha_{ij} \in SL(p^{n_{p,1}}, \dots, p^{n_{p,k}}) \quad i \neq j$$

$$\beta_{i,c} \in M(p^{n_{p,1}}, \dots, p^{n_{p,k}})$$

$\alpha_{ij}$  ist für  $i < j$  die unipotente obere Dreiecksmatrix, die außerhalb der Diagonale nur ein von Null verschiedenes Element hat, nämlich 1 in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte. Entsprechend ist  $\alpha_{ij}$  für  $i > j$  die unipotente untere Dreiecksmatrix, die außerhalb der Diagonale nur ein von 0 verschiedenes Element hat, nämlich  $p^{n_{p,i}-n_{p,j}}$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte.  $\beta_{i,c}$  ist eine Diagonalmatrix, deren  $i$ -ter Diagonalkoeffizient eine Zahl  $c$  mit  $(c,p) = 1$  ist, während alle anderen Diagonalkoeffizienten gleich 1 sind. Die  $\alpha_{ij}$  und  $\beta_{i,c}$  repräsentieren ein Erzeugendensystem von  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^k/A_p \mathbb{Z}^k)$ . Birkhoff zeigt zunächst, daß sich jedes  $\bar{x} \in \mathbb{Z}^k/A_p \mathbb{Z}^k$  durch Anwendung einer Folge von  $\alpha_{ij}$  in ein  $\bar{y}$  der folgenden Form transformieren läßt:

$$\bar{y} = (p^{\lambda_1-1} \bar{\eta}_1, \dots, p^{\lambda_k-1} \bar{\eta}_k)$$

mit  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$  und  $\lambda_{i+1} \leq \lambda_i + n_{p,i+1} - n_{p,i}$ , wobei die  $\bar{\eta}_i$  nicht durch  $p$  teilbar sind. Die Voraussetzung  $\bar{x} \in P_p(F/E)$ , d.h.  $h(\bar{x}) = 0$  und daher  $h(\bar{y}) = 0$ , ist gleichbedeutend mit  $\lambda_1 = 0$ . Wir wählen Zahlen  $c, c' \in \mathbb{Z}$ , so

daß  $c'$  die Restklasse  $\bar{\eta}_1$  modulo  $p^{n_{p,1}}$  hat und  $cc' \equiv 1(p^{n_{p,1}})$ . Dann überführt  $\gamma = \beta_{1,c} \beta_{2,c'}$  das Element  $\bar{y}$  in ein  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$  mit  $\bar{z}_1 = 1$ , und wegen 5.6.8 repräsentiert  $\gamma$  ein Element aus  $SL(F/E_p)$ . Da das gleiche für die  $\alpha_{ij}$  gilt, ist  $\bar{x}$  durch eine Folge von Transformationen aus  $SL(F/E_p)$  in ein  $\bar{z}$  mit  $\bar{z}_1 = 1$  überführt worden. Wir mer-

ken an, daß wir bei der Definition von  $\gamma$  die Voraussetzung  $k > 1$  benutzt haben. Für  $k = 1$  gilt im allgemeinen nicht  $\text{Bild } \chi = P(F/E)$ .

Behauptung (2):

Jedes Element aus  $P(F/E)$  läßt sich durch eine Transformation aus  $SL(F/E)$  in ein Element  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$  mit  $\bar{z}_1 = 1$  überführen.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Behauptung 1, Proposition 5.6.10 und der Definition von  $P(F/E)$ .

Behauptung (3):

Für jedes Element  $\bar{x} \in P(F/E)$  existiert ein  $x \in P(F)$  mit  $\chi(x) = \bar{x}$ .

Beweis: Nach Behauptung (2) existiert ein  $\gamma \in SL(F,E)$  mit  $\text{Bild } \bar{\gamma} \in SL(F/E)$  und  $\bar{z} = \bar{\gamma}(\bar{x})$ , so daß  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k)$  mit  $\bar{z}_1 = 1$ . Man wähle  $z = (1, z_2, \dots, z_k) \in \mathbb{Z}^k$  mit den Restklassen  $\bar{z}_i$  von  $z_i$ . Dann ist  $z \in P(F)$  mit  $\chi(z) = \bar{z}$ . Daher ist  $x = \gamma^{-1}(z)$  ein Element aus  $P(F)$  mit  $\chi(x) = \bar{x}$ . q.e.d.

Der folgende Zusatz zu 5.6.11 zeigt, daß 5.6.11 eine ganz explizite Bestimmung des Bildes von  $\chi$  ist.

Zusatz zu 5.6.11.

Es sei  $F = \mathbb{Z}^k$  sowie  $E = A\mathbb{Z}^k$  und  $A$  eine Diagonalmatrix mit Diagonalkoeffizienten  $a_1, \dots, a_k$ , so daß  $a_i \nmid a_{i+1}$ . Dann gilt:

$$P(F/E) = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k/A\mathbb{Z}^k \mid \text{ggT}(a_1, x_1, \dots, x_k) = 1\}.$$

Korollar 5.6.12.

$F$  sei frei abelsch vom Rang  $k$  und  $E \subset F$  von endlichem Index. Die minimale Erzeugendenzahl von  $H = F/E$  sei  $\lambda(H)$ .

Dann gilt:  $\chi : P(F) \rightarrow H$  ist surjektiv genau wenn  $\lambda(H) < k$ .

Mit 5.6.11 wird natürlich auch die Frage nach dem Bild von  $\phi_1$  beantwortet (vgl. auch Birkhoff [68], Corollary 9.4).

#### Definition:

Die primitiven Untergruppen von  $F/E$  sind die Elemente von

$$\mathcal{P}\mathcal{U}_m(F/E) = \text{Bild } \phi_m \subset \mathcal{U}_m(F/E).$$

#### Korollar 5.6.13.

Die Elemente von  $\mathcal{P}\mathcal{U}_1(F/E)$  sind die zyklischen primitiven Untergruppen von  $F/E$ . Sie sind die zyklischen Gruppen, die von den Elementen aus  $P(F/E)$  erzeugt werden. Insbesondere gibt es genau

$$\prod_p \prod_{i=1}^{k-1} (n_{p,i+1} - n_{p,i} + 1)$$

abstrakte Isomorphietypen primitiver zyklischer Untergruppen. Dabei ist mit "abstrakter Isomorphie" die Isomorphie von Untergruppen ohne Berücksichtigung ihrer Einbettung in  $F/E$  gemeint.

Wir stellen uns jetzt die Frage, unter welchen Voraussetzungen die oben definierten Abbildungen  $\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{f}}, \phi_1, \bar{\phi}_1$  injektiv sind. Den Index 1 lassen wir fort, weil wir uns im folgenden ausschließlich mit dem Fall  $m=1$  befassen. Ferner beschränkten wir uns aus Einfachheitsgründen auf den Fall  $k = \text{rang } F=2$ , der uns später in den Anwendungen allein interessiert. Wir studieren also Spitzen von Kongruenzuntergruppen von  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

#### Proposition 5.6.14.

$F$  sei eine freie abelsche Gruppe vom Rang 2 und  $E \subset F$  eine Untergruppe von endlichem Index. Es seien  $a$  und  $b$  die positiven Zahlen mit  $a|b$  und  $F/E \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ . Die Zerlegung von  $a$  und  $b$  in Primfaktoren sei

$$a = \prod p^m \quad b = \prod p^n \quad m_p \leq n_p.$$

Es seien  $\mathfrak{f}, \phi, \bar{\mathfrak{f}}, \bar{\phi}$  die oben definierten surjektiven Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} : \mathcal{P}_1(F)/\Gamma SL(F,E) &\rightarrow P(F/E) / \{\pm 1\} \\ \phi : \mathcal{P}_1(F)/\Gamma SL(F,E) &\rightarrow \mathcal{P}\mathcal{U}_1(F/E) \\ \bar{\mathfrak{f}} : \mathcal{P}_1(F)/SL(F,E) &\rightarrow P(F/E) / SL(F/E) \\ \bar{\phi} : \mathcal{P}_1(F)/SL(F,E) &\rightarrow \mathcal{P}\mathcal{U}_1(F/E) / SL(F/E). \end{aligned}$$

Dann gilt:

(a)  $\mathfrak{f}$  ist bijektiv genau dann, wenn eine der drei folgenden Bedingungen (i), (ii) oder (iii) erfüllt ist:

- (i)  $b = a$
- (ii)  $b = 2a$  und  $2 \nmid a$
- (iii)  $b = 1, 2, 3, 4, 6$

(b)  $\phi$  ist genau dann bijektiv wenn gilt:

$$b = 1, 2, 3, 4, 6$$

(c)  $\bar{\mathfrak{f}}$  ist bijektiv genau dann wenn gilt:

$$\begin{aligned} n_p &\leq 3m_p + 1 \quad \text{für } p \neq 2 \\ n_2 &\leq \max(3, 3m_2 + 1) \end{aligned}$$

(d)  $\bar{\phi}$  ist bijektiv genau dann wenn gilt:

$$\begin{aligned} n_p &\leq m_p + 1 \quad \text{für } p \neq 2, 3 \\ n_3 &\leq \min(3m_3 + 1, m_3 + 2) \\ n_2 &\leq \min((\max(3, 3m_2 + 1), m_2 + 6)). \end{aligned}$$

Beweis:

O.B.d.A. setzen wir  $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  und  $E = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$  sowie  $H = F/E = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ . Elemente aus  $F$  bzw.  $H$  werden durch Paare  $(x, y)$  von Zahlen bzw. Restklassen beschrieben. Wir setzen auch  $N = b/a$  und wir bezeichnen allgemein mit  $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^*$  die Einheitengruppe von  $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$  und mit  $\varphi(c)$  deren Ordnung. Wir beweisen nun nacheinander die Behauptungen (a) bis (d).

(a) Es ist wohlbekannt, daß Bedingung (i) für die Bijektivität von  $\pi$  hinreichend ist (vg. z.B. Ogg [45], p.222). Da die Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma[b, b] \triangleleft \Gamma[a, b]$  als normale Untergruppe in  $\Gamma[a, b]$  liegt, können wir den Quotienten  $\bar{\Gamma}[a, b] = \Gamma[a, b]/\Gamma[b, b]$  bilden. Wir identifizieren  $SL(2, \mathbb{Z})/\Gamma[b, b]$  mit  $SL(2, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$  und erhalten:

$$\bar{\Gamma}[a, b] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) \mid \beta \equiv 0(a) \right\}.$$

Die Gruppe operiert auf

$$P(F/bF) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \mid (b, x, y) = 1\}.$$

Wegen der Bijektivität von  $\pi$  im Fall (i) identifiziert sich  $\mathcal{P}_1(F)/\Gamma SL(F, bF)$  kanonisch mit  $P(F/bF)/\{\pm 1\}$ . Daher identifiziert man schließlich die Abbildung  $\pi : \mathcal{P}_1(F)/\Gamma SL(F, E) \rightarrow P(F/E)/\{\pm 1\}$  mit der kanonischen Abbildung

$$P(F/bF)/\bar{\Gamma}[a, b] \times \{\pm 1\} \rightarrow P(F/E)/\{\pm 1\}.$$

Der Orbit von  $(x, y) \in P(F/bF)$  bezüglich  $\bar{\Gamma}[a, b] \times \{\pm 1\}$  ist

$$\{\pm(x + \beta y, y) \mid \beta \equiv 0(a)\}.$$

Daher induziert die Projektion auf den zweiten Faktor eine wohldefinierte Abbildung des Orbit-Raumes und man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P(F/bF)/\bar{\Gamma}[a, b] \times \{\pm 1\} & \xrightarrow{\psi} & P(F/E)/\{\pm 1\} \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})/\{\pm 1\} & \end{array}$$

Die Fasern von  $\pi$  werden auf die von  $\pi'$  abgebildet, und  $\psi$  ist injektiv genau dann, wenn es faserweise injektiv ist. Die Abbildung der Fasern über 0 identifiziert man leicht mit der Restklassenabbildung

$$(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*/\{\pm 1\} \rightarrow (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^*/\{\pm 1\}.$$

Man prüft leicht nach, daß diese Abbildung genau dann bijektiv ist, wenn eine der drei Bedingungen (i), (ii) oder (iii) erfüllt ist. Man sieht dann leicht, daß diese Bedingungen auch die Bijektivität der Beschränkung von  $\pi$  auf die Fasern über  $\pm y$  für alle  $y \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  implizieren. Denn für  $y \neq 0$ ,  $y \neq b/2$  identifiziert man diese Abbildung der Fasern mit der Restklassenabbildung

$$\{x \in \mathbb{Z}/a \cdot (N, y)\mathbb{Z} \mid (x, y, b) = 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \mid (x, y, b) = 1\},$$

und für  $y = b/2$  mit der Restklassenabbildung

$$\{x \in \mathbb{Z}/b/2 \cdot (2, a)\mathbb{Z} \mid (x, b/2) = 1\}/\{\pm 1\} \rightarrow \{x \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \mid (x, b/2) = 1\}/\{\pm 1\}.$$

Es ist trivial, nachzuprüfen, daß (i), (ii) oder (iii) diese Abbildungen bijektiv machen.

(b) Die Abbildung  $\phi$  ist genau dann bijektiv, wenn  $\gamma$  bijektiv ist und wenn zusätzlich die kanonische surjektive Abbildung

$$P(F/E) / \{\pm 1\} \longrightarrow \mathcal{P}_1(F/E)$$

bijektiv ist. Die Faser dieser Abbildung über einer zyklischen primitiven Gruppe  $C \in \mathcal{P}_1(F/E)$  besteht, wie man leicht sieht, aus den  $\{\pm 1\}$ -Orbits aller Erzeugenden von  $C$ . Damit die Faser nur aus einem Element besteht, ist notwendig und hinreichend, daß  $C$  nur höchstens zwei Erzeugende hat, d.h.  $|C| = 1, 2, 3, 4, 6$  gilt. Die maximale Ordnung von Elementen aus  $P(F/E) \subset F/E$  ist aber  $b$  - beispielsweise hat jedes Element  $(x, 1)$  diese Ordnung. Daher folgt  $b=1, 2, 3, 4, 6$  als notwendige und offenbar auch hinreichende Bedingung für die Bijektivität von  $\phi$ .

(c) Es gilt  $SL(F, E) = \Gamma_0(N)$ . Wir erinnern zunächst an eine von Ogg [45], Proposition 2, gegebene Beschreibung eines eindeutigen Repräsentantensystems für die Spitzen von  $\Gamma_0(N)$ . Es sei  $d$  irgendein Teiler von  $N$ , und  $\delta$  der größte gemeinsame Teiler  $\delta = (d, N/d)$ . Man wähle  $\varphi(\delta)$  Zahlen  $x$  relativ prim zu  $\delta$ , welche die Elemente von  $(\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z})^*$  repräsentieren. Dann sind die Elemente  $(x, d) \in P(F)$ , wo  $d$  alle Teiler von  $N$  und  $x$  dann die  $\varphi(\delta)$  gewählten Zahlen durchläuft, ein Repräsentantensystem für die Spitzen von  $\Gamma_0(N)$ , d.h. die Elemente von  $\mathcal{P}(F)/SL(F, E)$ . Damit ist der Definitionsbereich der Abbildung

$$\bar{\gamma} : \mathcal{P}(F) / SL(F, E) \longrightarrow P(F/E) / SL(F/E)$$

beschrieben, denn er läßt sich wie folgt identifizieren:

$$\mathcal{P}(F) / SL(F, E) = \coprod_{d|N} (\mathbb{Z} / (d, N/d)\mathbb{Z})^* .$$

Wir brauchen nun eine entsprechend konkrete Beschreibung des Wertebereichs der Abbildung. Dies ist der Raum der Orbits von

$SL(F/E)$  in  $P(F/E)$ . Wegen 5.6.10 und 5.6.11 können wir diesen Orbitraum wie folgt beschreiben:

$$P(F/E) / SL(F/E) = \prod_p P(F/E_p) / SL(F/E_p) .$$

Für  $P(F/E_p) / SL(F/E_p)$  ergibt sich aus den Definitionen leicht die folgende konkrete Beschreibung. Wir identifizieren zunächst  $F/E_p$  sowie  $P(F/E_p)$ :

$$F/E_p = \mathbb{Z} / p^m \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z} .$$

$$P(F/E_p) = \begin{cases} \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z} & \text{für } m=0 \\ h_0(\mathbb{Z} / p^m \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}) & \text{für } m>0 \end{cases} .$$

Hieraus und aus der Definition von  $SL(F/E_p)$  ergibt sich nun leicht die folgende Beschreibung der Orbits von  $SL(F/E_p)$  in  $P(F/E_p)$ . Jedes  $(x, y) \in P(F/E_p) \subset \mathbb{Z} / p^m \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}$  läßt sich durch Transformationen aus  $SL(F/E_p)$  in ein Element von der Form

$$(x, y) = (1, p^k \eta)$$

überführen, wobei  $\text{ggT}(\eta, p) = 1$  gilt und wobei  $k$  noch der Bedingung  $k \leq n-m$  genügt. Die Zahl  $k$  ist durch den  $SL(F/E_p)$ -Orbit von  $(x, y)$  eindeutig bestimmt, denn  $n-k$  ist die Ordnung von  $(x, y)$  in  $F/E_p$ . Zwei Elemente  $(1, p^k \eta)$  und  $(1, p^k \eta')$  liegen genau dann im gleichen  $SL(F/E_p)$ -Orbit, wenn gilt:

$$\eta \equiv \eta' \pmod{p^{\mu_k}} \quad \text{mit} \quad \mu_k = \min(k, m, n-m-k) .$$

Wir können also  $P(F/E_p) / SL(F/E_p)$  wie folgt identifizieren:

$$P(F/E_p) / SL(F/E_p) = \coprod_{0 \leq k \leq n-m} (\mathbb{Z} / p^k \mathbb{Z})^* .$$

Aus dieser Beschreibung der "Primärkomponenten" des Orbit-  
raumes ergibt sich schließlich für den Orbitraum selbst die  
folgende Beschreibung:

$$P(F/E) / SL(F/E) = \coprod_{d|N} (\mathbb{Z} / (d, N/d, a)\mathbb{Z})^*,$$

wobei  $(d, N/d, a)$  den größten gemeinsamen Teiler von  $d, N/d, a$   
bezeichnet. Dabei läßt sich diese Identifikation des Orbit-  
raumes mit der disjunkten Vereinigung von Einheitengruppen  
so durchführen, daß sie mit der oben entwickelten entspre-  
chenden Beschreibung von  $P(F)/SL(F, E)$  als disjunkte Ver-  
einigung von Einheitengruppen verträglich ist. Dies bedeu-  
tet, daß die Beschränkung von  $\bar{f}$  auf die Einheitengruppen  
zu dem Teiler  $d$  von  $N$  sich identifiziert mit der Rest-  
klassenabbildung

$$\bar{f}_d : (\mathbb{Z} / (d, N/d)\mathbb{Z})^* \longrightarrow (\mathbb{Z} / (d, N/d, a)\mathbb{Z})^*.$$

Die Abbildung  $\bar{f}$  ist also genau dann bijektiv, wenn  $\bar{f}_d$   
für alle Teiler  $d$  von  $N$  bijektiv ist, d.h. wenn  
 $\varphi((d, N/d)) = \varphi((d, N/d, a))$  gilt. Weil die Eulersche  $\varphi$ -Funk-  
tion multiplikativ ist, ist dies eine Bedingung für die ein-  
zelnen Primteiler von  $d$ . Setzt man

$$d = \prod p^{k_p},$$

dann muß für alle  $p \neq 2$  gelten:

$$\min \{k_p, n_p - m_p - k_p\} \leq m_p.$$

Für  $p = 2$  lautet die Bedingung:

$$\min \{k_2, n_2 - m_2 - k_2\} \leq \max \{m_2, 1\}.$$

Die Zusammenfassung dieser Bedingungen für alle  $k_p$  mit  
 $0 \leq k_p \leq n_p - m_p$  ist offenbar äquivalent zu der in Behaup-  
tung (c) angegebenen Bedingung, und damit ist (c) bewiesen.

(d) Die Abbildung  $\bar{f}$  ist bijektiv genau dann, wenn die  
Abbildung  $\bar{f}$  bijektiv ist und außerdem auch die kanonische  
Abbildung

$$P(F/E) / SL(F/E) \longrightarrow \mathcal{PU}_1(F/E) / SL(F/E)$$

bijektiv ist. Auf  $P(F/E)$  operiert die Gruppe  $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$   
durch  $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$  für alle  $\alpha \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ . Dies in-  
duziert eine Operation von  $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$  auf  $P(F/E) / SL(F/E)$ ,  
und für den Quotientenraum hat man die kanonische Identifi-  
kation

$$P(F/E) / SL(F/E) \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* = \mathcal{PU}_1(F/E) / SL(F/E).$$

Da man  $(\alpha x, \alpha y)$  durch das Element

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \in SL(F/E)$$

in  $(\alpha^2 x, y)$  überführen kann, ergibt sich aus der unter (c)  
entwickelten Beschreibung von  $P(F/E) / SL(F/E)$  die folgende  
Beschreibung von  $\mathcal{PU}_1(F/E) / SL(F/E)$ , wenn wir die Bijek-  
tivität von  $\bar{f}$  voraussetzen:

$$\mathcal{PU}_1(F/E) = \coprod_{d|N} [\mathbb{Z} / (d, N/d)\mathbb{Z}]^* / [\mathbb{Z} / (d, N/d)\mathbb{Z}]^{*2}.$$

Es folgt:  $\bar{f}$  ist bijektiv, wenn  $\bar{f}$  bijektiv ist, und wenn  
für alle Teiler  $d$  von  $N$  gilt:

$$(d, N/d) = 2^r 3^s \quad \text{mit } 0 \leq r \leq 3, 0 \leq s \leq 1.$$

Die Zusammenfassung dieser Bedingungen für alle Teiler  $d$   
von  $N$  ist trivialerweise äquivalent zu den folgenden Be-  
dingungen:



$$n_p \leq m_p + 1 \quad \text{für } p \neq 2, 3$$

$$n_3 \leq m_3 + 2$$

$$n_2 \leq m_2 + 6.$$

Die Zusammenfassung dieser Bedingungen mit den in Aussage (c) angegebenen Bedingungen für die Bijektivität von  $\bar{\Gamma}$  ist äquivalent zu der in (d) angegebenen Bedingung für die Bijektivität von  $\bar{\Phi}$ , und damit ist auch (d) bewiesen.

Es zeigt sich also, daß die Bijektivität von  $\Phi$  die folgenreichste Bedingung ist. Wir stellen die Aussagen über Kongruenzuntergruppen mit dieser Eigenschaft, die uns bei den späteren Anwendungen interessieren, noch einmal übersichtlich in einem Korollar zusammen. In diesen Anwendungen interessieren uns dabei nur vier Fälle der Tabelle 12, nämlich die, wo  $(a,b)$  eines der folgenden vier Paare ist:  $(1,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,3)$ ,  $(2,2)$ . Selbstverständlich hätten wir die fraglichen Aussagen für diese vier Fälle direkt auf wenigen Seiten verifizieren können. Die allgemeineren Untersuchungen dieses Abschnitts haben nicht zum Hauptzweck, diese vier Fälle zu behandeln. Sie sollen vielmehr die Grenzen der Methode zeigen, mit der hier Spitzen einer gewissen natürlich definierten Klasse von Kongruenzuntergruppen beschrieben werden. In den nächsten Abschnitten wird sich zeigen, daß diese Methode sich besonders gut in die Methode der Untersuchung von quadratischen Formen mit Hilfe ihrer Diskriminantenform einfügt.

#### Korollar 5.6.15.

Es seien  $a$  und  $b$  positive natürliche Zahlen und  $a$  ein Teiler von  $b$ . Es sei  $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $E = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$  und  $H = F/E = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ . Dann gilt:

(i) Die kanonischen Abbildungen

$$\Phi : \mathcal{P}_1(F) / \text{SL}(F, E) \longrightarrow \mathcal{PU}_1(F/E)$$

$$\Phi^* : \mathcal{P}_1(E) / \text{SL}(F, E)^* \longrightarrow \mathcal{PU}_1(F/E)$$

sind bijektiv genau wenn  $b = 1, 2, 3, 4, 6$ .

(ii) Für  $b = 1, 2, 3, 4, 6$  sind auch die in 5.6.14 betrachteten Abbildungen  $\bar{\Gamma}, \bar{\Phi}, \bar{\Gamma}^*$  und die entsprechend definierten Abbildungen  $\bar{\Gamma}^*, \bar{\Phi}^*, \bar{\Gamma}^*$  bijektiv. Ferner sind die folgenden kanonischen Abbildungen bijektiv:

$$\mathcal{P}_1(E) / \text{SL}(F, E)^* \longrightarrow \mathcal{PU}_1(F/E) / \text{Aut}(F/E)$$

$$\mathcal{P}_1(F) / \text{SL}(F, E) \longrightarrow \mathcal{PU}_1(F/E) / \text{Aut}(F/E).$$

(iii)  $\Gamma \text{SL}(F, E) = \Gamma[a, b]$  und  $\Gamma \text{SL}(F, E)^* = \Gamma[a, b]^*$  sind konjugiert, ebenso  $\text{SL}(F, E) = \Gamma_0(b/a)$  und  $\text{SL}(F, E)^* = \Gamma^0(b/a)$ . Es gilt  $\text{SL}(F/E) = \text{Aut}(F/E)$  genau wenn  $a = 1, 2$ .

(iv) In den Zeilen der Tabelle 12 sind für alle Paare  $(a, b)$  mit  $a \mid b$  und  $b = 1, 2, 3, 4, 6$  die folgenden Daten angegebenen: In Spalte 1 das Paar  $(a, b)$ , in Spalte 2 die Gruppe  $H$ , in Spalte 3 und 4 die Kongruenzuntergruppen  $\Gamma \text{SL}(F, E)$  bzw.  $\text{SL}(F, E)$  und in den Spalten 5 und 6 die Zahlen  $s$  bzw.  $\bar{s}$  ihrer Spitzen. Die Spalte 7 gibt die Ordnungen  $\sigma$  der primitiven zyklischen Untergruppen von  $H$ , d.h. der Elemente von  $\mathcal{PU}_1(F/E)$ . Außer im Fall  $(a, b) = (2, 4)$  sind alle zyklischen Untergruppen dieser Ordnungen primitiv. Elemente von  $\mathcal{PU}_1(F/E)$  mit gleicher Ordnung liegen im gleichen  $\text{Aut}(F/E)$ -Orbit.

(v) Die Hauptkongruenzgruppe  $\Gamma(6)$  hat Geschlecht 1. Alle anderen Kongruenzuntergruppen in Tabelle 12 haben das Geschlecht 0.

(a,b)	H	$\Gamma_{SL}(F,E)$	$SL(F,E)$	s	S	o
(1,1)	Z/Z	$\Gamma(1)$	$\Gamma(1)$	1	1	1
(1,2)	Z/2Z	$\Gamma_1(2)$	$\Gamma_0(2)$	2	2	1,2
(1,3)	Z/3Z	$\Gamma_1(3)$	$\Gamma_0(3)$	2	2	1,3
(1,4)	Z/4Z	$\Gamma_1(4)$	$\Gamma_0(4)$	3	3	1,2,4
(1,6)	Z/6Z	$\Gamma_1(6)$	$\Gamma_0(6)$	4	4	1,2,3,6
(2,2)	Z/2Z + Z/2Z	$\Gamma(2)$	$\Gamma(4)$	3	4	2
(2,4)	Z/2Z + Z/4Z	$\Gamma[2,4]$	$\Gamma_0(2)$	4	2	2,4
(2,6)	Z/2Z + Z/6Z	$\Gamma[2,6]$	$\Gamma_0(3)$	6	2	3,6
(3,3)	Z/3Z + Z/3Z	$\Gamma(3)$	$\Gamma(4)$	4	4	3
(3,6)	Z/3Z + Z/6Z	$\Gamma[3,6]$	$\Gamma_0(2)$	8	2	3,6
(4,4)	Z/4Z + Z/4Z	$\Gamma(4)$	$\Gamma(4)$	6	4	4
(6,6)	Z/6Z + Z/6Z	$\Gamma(6)$	$\Gamma(6)$	12	4	6

TABELLE 12

## 5.7. Stabilisatorgruppen isotroper Untergitter

In diesem Abschnitt berechnen wir für die exceptionellen unimodularen Milnorgitter  $L = L_{pqr}$  und für ihre maximalen isotrophen Untergitter  $E$  die Stabilisatorgruppen  $\Gamma_E \subset SL(E)$ .

Wir legen folgende Bezeichnungen fest: Ist  $X$  irgendeine Menge,  $Y$  eine Teilmenge und  $O$  eine Gruppe, die auf  $X$  operiert, dann definieren wir wie folgt zwei Untergruppen von  $O$ :

$$STAB_O(Y) = \{g \in O \mid \forall y \in Y \quad g(y) \in Y\},$$

$$FIX_O(Y) = \{g \in O \mid \forall y \in Y \quad g(y) = y\}.$$

Diese Gruppen betrachten wir in den folgenden Situationen:

(1)  $X$  ist ein nichtentartetes ganzzahliges gerades Gitter  $L$  und  $Y \subset X$  ein primitives isotropes Untergitter  $E \subset L$ . Ferner ist  $O$  die Einheitengruppe  $O(L)$  oder eine der in 1.2 definierten Untergruppen von  $O(L)$  von endlichem Index, also der Kern der Spinornorm

$$O_+(L) = \ker \delta_+$$

$$O_-(L) = \ker \delta_- ,$$

bzw. der Kern der kanonischen Abbildung  $\tau: O(L) \rightarrow O(G_L)$

$$\bar{O}(L) = \ker \tau,$$

bzw. der Kern von  $\delta_{\pm}|_{\bar{O}(L)}$ , also

$$O_+^*(L) = \bar{O}(L) \cap O_+(L)$$

$$O_-^*(L) = \bar{O}(L) \cap O_-(L) .$$

(2)  $X$  ist die Gruppe  $G_L = L^\# / L$  mit der Diskriminantenform, und  $O$  ist die orthogonale Gruppe  $O(G_L)$  der Diskriminantenform.  $Y \subset X$  ist die isotrope Untergruppe  $H_E = E^4/E$

in  $G_L$ , die wir in Abschnitt 4.1 jedem primitiven isotropen Untergitter  $E$  von  $L$  zugeordnet haben.

Lemma 5.7.1.

$L$  sei ein nichtentartetes indefinites ganzzahliges Gitter mit der Signatur  $(n_-, n_+)$ . Es sei  $n_\epsilon = \max\{n_-, n_+\}$ ,  $\epsilon = \pm$ . Ferner sei  $E \subset L$  ein maximales isotropes Untergitter, das heißt hier:  $\text{Rang } E = n_{-\epsilon}$ . Dann ist das folgende Diagramm von Homomorphismen kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \text{STAB}_{O(L)}(E) & \xrightarrow{\rho} & \text{GL}(E) \\ \sigma_\epsilon \searrow & & \nearrow \delta \\ & \{\pm 1\} & \end{array}$$

Dabei ist  $\sigma_\epsilon$  die Spinornorm,  $\rho$  der Beschränkungshomomorphismus und  $\delta$  die Determinante.

Beweis: O.B.d.A. sei  $\epsilon = -$ . Das obige Diagramm ist eingebettet in das entsprechende reelle Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{STAB}_{O(L_{\mathbb{R}})}(E_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\rho} & \text{GL}(E_{\mathbb{R}}) \\ \sigma_- \searrow & & \nearrow \delta \\ & \{\pm 1\} & \end{array}$$

wo  $\delta$  das Signum der Determinante ist. Es genügt daher, die Kommutativität dieses reellen Diagramms zu beweisen.

Man hat eine kanonische exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \text{FIX}_{O(L_{\mathbb{R}})}(E_{\mathbb{R}}) \rightarrow \text{STAB}_{O(L_{\mathbb{R}})}(E_{\mathbb{R}}) \rightarrow \text{GL}(E_{\mathbb{R}}) \rightarrow 1.$$

Behauptung:  $\sigma_- \equiv 1$  auf  $\text{FIX}_{O(L_{\mathbb{R}})}(E_{\mathbb{R}})$ .

Beweis: Man wähle eine Spaltung  $E_{\mathbb{R}}^\perp = E_{\mathbb{R}} \perp E_{\mathbb{R}}^\perp/E_{\mathbb{R}}$  und zerlege  $L_{\mathbb{R}}$  in  $E_{\mathbb{R}}^\perp/E_{\mathbb{R}}$  und sein orthogonales Komplement. Dies liefert eine Einbettung  $O(E_{\mathbb{R}}^\perp/E_{\mathbb{R}}) \subset \text{FIX}_{O(L_{\mathbb{R}})}(E_{\mathbb{R}})$ , die den kanonischen Homomorphismus

$$\text{FIX}_{O(L_{\mathbb{R}})}(E_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} O(E_{\mathbb{R}}^\perp/E_{\mathbb{R}})$$

spaltet. Der Kern dieses Homomorphismus ist, wie man bei seiner Beschreibung durch Matrizen leicht sieht, zusammenhängend. Daher ist die Beschränkung von  $\sigma_-$  auf den Kern wegen der Stetigkeit von  $\sigma_-$  identisch 1. Aber die Beschränkung von  $\sigma_-$  auf  $O(E_{\mathbb{R}}^\perp/E_{\mathbb{R}})$  ist ebenfalls identisch 1, weil  $E_{\mathbb{R}}^\perp/E_{\mathbb{R}}$  nach Voraussetzung negativ definit ist. Also ist die Beschränkung von  $\sigma_-$  auf  $\text{FIX}_{O(L_{\mathbb{R}})}(E_{\mathbb{R}})$  identisch 1. Daher faktorisiert  $\sigma_-$  über  $\rho$ . Der durch  $\sigma_-$  induzierte Homomorphismus  $\text{GL}(E_{\mathbb{R}}) \rightarrow \{\pm 1\}$  ist stetig. Es ist also identisch 1 oder gleich  $\delta$ . Aber er ist nicht identisch 1. Denn wenn  $e, f \in (E_{\mathbb{R}}^\perp/E_{\mathbb{R}})^\perp$  ein Paar von isotropen Vektoren ungleich 0 mit  $e \in E_{\mathbb{R}}$  und  $(e, f) \neq 0$ , dann ist das Produkt  $\gamma$  der Spiegelungen an  $e+f$  und  $e-f$  ein Element mit  $\gamma(E_{\mathbb{R}}) = E_{\mathbb{R}}$  und  $\sigma_+(\gamma) = \sigma_-(\gamma) = -1$ . Also folgt  $\sigma_- = \delta \cdot \rho$ .

Wegen des gerade bewiesenen Lemmas hat man für maximale primitive isotrope Untergitter das folgende kommutative Diagramm von Inklusionen und Beschränkungshomomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \text{STAB}_{O(L)}(E) & \longrightarrow & \text{GL}(E) \\ \cup & & \cup \\ \text{STAB}_{O_\epsilon(L)}(E) & \longrightarrow & \text{SL}(E) \end{array}$$

Es geht uns darum, die Bilder dieser Beschränkungshomomorphismen zu identifizieren. Dazu bemerken wir, daß das nicht-entartete ganzzahlige Gitter  $L$  kanonisch in sein duales Gitter  $L^\#$  eingebettet ist, und daß die kontragrediente Darstellung

$$O(L) \xrightarrow{\cong} O(L^\#)$$

ein Isomorphismus ist, dessen Umkehrabbildung gerade der Beschränkungshomomorphismus zu  $L \subset L^\#$  ist. Diese Isomorphismen induzieren offenbar auch einen Isomorphismus

$$\text{STAB}_{O(L)}(E) \cong \text{STAB}_{O(L^\#)}(E^\sharp).$$

Daher liegen die Bilder dieser Stabilisatorgruppen unter den Beschränkungshomomorphismen bezüglich  $E \subset L$  und  $E^\sharp \subset L^\#$  in den Untergruppen von  $GL(E)$  bzw.  $GL(E^\sharp)$ , welche in Abschnitt 5.6 eingeführt wurden. Man hat also das folgende kanonische kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{STAB}_{O(L)}(E) & \longrightarrow & GL(E^\sharp, E)^* \\ \cong & & \cong \\ \text{STAB}_{O(L^\#)}(E^\sharp) & \longrightarrow & GL(E^\sharp, E) \end{array}$$

Uns interessiert vor allem der obere dieser beiden Beschränkungshomomorphismen, denn es geht uns um die Bestimmung der folgenden Gruppe:

$$\Gamma_E := \text{Bild}(\text{STAB}_{O_c^*}(L)(E) \longrightarrow GL(E^\sharp, E^*)) .$$

Zu diesem Zweck definieren wir im folgenden zwei Diagramme von Stabilisatorgruppen. Wenn diese "Stabilisatordiagramme" exakt sind, ergibt sich daraus unter anderem sofort die Bestimmung von  $\Gamma_E$ , und deswegen besteht unsere Aufgabe dann im Nachweis der Exaktheit. Auf Grund des bisher Gesagten ist bereits klar, daß wir das folgende kanonische Diagramm haben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{O(L)}(E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(L)}(E) & \xrightarrow{\rho'} & \Gamma_{GL(E^\sharp, E)}^* \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{O(L)}(E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(L)}(E) & \xrightarrow{\rho} & GL(E^\sharp, E)^* \\ & & \downarrow \tau' & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau'' \\ 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{O(G_L)}(E^\sharp/E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(G_L)}(E^\sharp/E) & \longrightarrow & GL(E^\sharp/E) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

Hierin sind  $\rho'$  und  $\rho$  durch Beschränkung definiert,  $\tau', \tau, \tau''$ , durch Induktion auf Restklassengruppen und alle übrigen Homomorphismen durch Inklusion. Alle Zeilen und Spalten sind auf Grund der Definitionen offenbar exakt. Wir würden dies Diagramm gern zu einem Diagramm von drei kurzen exakten Zeilen und drei kurzen exakten Spalten ergänzen. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht möglich, weil das Bild des Beschränkungshomomorphismus

$$\text{STAB}_{O(G_L)}(E^\sharp/E) \longrightarrow \text{Aut}(E^\sharp/E)$$

im allgemeinen nicht in  $GL(E^\sharp/E)$  enthalten ist. Wenn dies aber doch der Fall ist, z.B. wenn  $GL(E^\sharp/E) = \text{Aut}(E^\sharp/E)$  gilt, dann ist in der Tat kanonisch das folgende Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{\tilde{O}(L)}(E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{\tilde{O}(L)}(E) & \xrightarrow{\rho'} & \Gamma_{GL(E^{\frac{1}{2}}, E)}^* & \longrightarrow & 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{O(L)}(E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(L)}(E) & \xrightarrow{\rho} & GL(E^{\frac{1}{2}}, E)^* & \longrightarrow & 1 \\
 & \downarrow \tau' & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau'' \\
 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{O(G_L)}(E^{\frac{1}{2}}/E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(G_L)}(E^{\frac{1}{2}}/E) & \xrightarrow{\rho''} & GL(E^{\frac{1}{2}}/E) & \longrightarrow & 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Wir nennen dies Diagramm das Stabilisatordiagramm für  $L$  und  $E$ , und wir sagen, daß das Stabilisatordiagramm exakt ist, wenn es definiert ist und wenn alle Zeilen und Spalten exakt sind.

Liegt das Bild von  $\rho''$  sogar in  $SL(E^{\frac{1}{2}}/E)$ , dann kann man für maximale isotrope  $E$  wegen Lemma 5.7.1 von dem Stabilisatordiagramm zu dem folgenden Diagramm von Untergruppen des Stabilisatordiagramms übergehen:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{O_E^*}(L)(E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O_E^*}(L)(E) & \xrightarrow{\rho_+^*} & \Gamma_{SL(E^{\frac{1}{2}}, E)}^* & \longrightarrow & 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{O_E(L)}(E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O_E(L)}(E) & \xrightarrow{\rho_+} & SL(E^{\frac{1}{2}}, E)^* & \longrightarrow & 1 \\
 & \downarrow \tau_+^* & & \downarrow \tau_+ & & \downarrow \tau_+'' \\
 1 & \longrightarrow & \text{FIX}_{O(G_L)}(E^{\frac{1}{2}}/E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(G_L)}(E^{\frac{1}{2}}/E) & \xrightarrow{\rho_+''} & SL(E^{\frac{1}{2}}/E) & \longrightarrow & 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

Wir nennen dies Diagramm das eigentliche Stabilisatordiagramm für  $L$  und  $E$  und sagen, daß es exakt ist, wenn es definiert ist und wenn alle Zeilen und Spalten exakt sind.

Aus der Exaktheit dieses Diagramms ergibt sich trivialerweise die Bestimmung von  $\Gamma_E$ .

### Proposition 5.7.2.

Wenn das eigentliche Stabilisatordiagramm exakt ist, gilt:

$$\Gamma_E = \Gamma_{SL(E^{\frac{1}{2}}/E)}^*$$

Als Kriterium für die Exaktheit der Stabilisatordiagramme ergibt sich durch einfache Diagramm - Jagd:

## Lemma 5.7.3.

- (i) Das Stabilisatordiagramm sei definiert. Dann ist es exakt genau wenn  $\tau'$  und  $\rho$  surjektiv sind.
- (ii) Das eigentliche Stabilisatordiagramm sei definiert. Dann ist es exakt genau wenn  $\tau'_+$  und  $\rho_+$  surjektiv sind.

## Lemma 5.7.4.

Das Stabilisatordiagramm sei exakt. Wenn dann das eigentliche Stabilisatordiagramm definiert ist, ist es auch exakt.

Beweis: Aus 5.7.1 folgt  $\text{FIX}_{O(L)}(E) = \text{FIX}_{O_e(L)}(E)$  und  $\tau' = \tau'_+$  sowie  $\text{STAB}_{O_e(L)}(E) = \rho^{-1}(\text{SL}(E^{\frac{1}{2}}, E)^*)$ . Daher folgt die Behauptung aus 5.7.3.

Das nächste Lemma gibt ein Kriterium für die Surjektivität von  $\rho$  mit Hilfe der im Abschnitt 5.4 eingeführten Normalformensysteme. Wir setzen zur Abkürzung  $k := n_-$  und  $m := n_+ - n_-$ . Es sei wieder wie in 5.4

$$H = \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z} \quad a_1 \mid a_{i+1}.$$

A sei wie in 5.4 die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

Für  $B \in M(m, m; \mathbb{Z})$  vom Rang  $m$  sei  $M(B)$  wie in 5.4 die endliche abelsche Gruppe

$$M(B) := M(m, k; \mathbb{Z}) / BM(m, k; \mathbb{Z}) + M(m, k; \mathbb{Z}) A.$$

Ferner sei  ${}^A\text{GL}(k, \mathbb{Z})$  die in 5.6 eingeführte Matrizen Gruppe

$${}^A\text{GL}(k, \mathbb{Z}) = \{Z \in \text{GL}(k, \mathbb{Z}) \mid AZA^{-1} \in \text{GL}(k, \mathbb{Z})\}.$$

Diese Gruppe operiert auf  $M(m, k; \mathbb{Z})$  durch Matrizenmultiplikation von rechts, und dies induziert für jedes  $B$  eine Operation von  ${}^A\text{GL}(k, \mathbb{Z})$  auf  $M(B)$ . Nach diesen Vorbemerkungen können wir unser Kriterium für die Surjektivität von  $\rho$  formulieren.

## Lemma 5.7.5.

$G$  sei eine endliche abelsche Gruppe mit einer nichtentarteten quadratischen Form und  $H$  eine isotrope Untergruppe mit minimaler Erzeugendenzahl  $\lambda$ . Ferner seien  $n_-, n_+$  und  $k$  natürliche Zahlen mit  $\lambda \leq k \leq \min\{n_-, n_+\}$ . Es seien  $a_1, \dots, a_k$  die natürlichen Zahlen mit  $H \approx \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$  und  $a_i \mid a_{i+1}$ , und es sei  $A$  die Antidiagonalmatrix mit den Koeffizienten  $a_1, \dots, a_k$ . Wir setzen voraus, daß zu den Daten  $(G, H, n_-, n_+, k)$  ein eindeutiges Normalformensystem  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  existiert, und zwar derart, daß die Gruppe  ${}^A\text{GL}(k, \mathbb{Z})$  für alle  $\omega \in \Omega$  die Restklasse von  $C_\omega$  in  $M(E_\omega)$  fest läßt. Dann gilt:

Für jedes nichtentartete ganzzahlige gerade Gitter  $L$  mit Diskriminantenform  $G$  und mit Signatur  $(n_-, n_+)$  und für jedes primitive isotrope Untergitter  $E \subset L$  vom Rang  $k$  mit  $[E^{\frac{1}{2}}/E] = [H]$  ist der Beschränkungshomomorphismus

$$\rho : \text{STAB}_{O(L)}(E) \longrightarrow \text{GL}(E^{\frac{1}{2}}/E)^*$$

surjektiv.

Beweis:  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$  sei ein Normalformensystem, das der Voraussetzung des Lemmas genügt. Wegen des Normalformenlemmas 5.4.1 können wir dann  $(L, E)$  mit einem  $(N_\omega, E_\omega)$  identifizieren.

Dadurch ist insbesondere in  $L$  eine der Fahne  $E \subset E^\perp \subset L$  angepaßte Basis ausgezeichnet, und in  $L^\#$  die duale Basis. Dies liefert, mit der induzierten Ordnung der Basisvektoren, auch Basen von  $E \subset L$  und  $E^\perp \subset L^\#$ . Bezüglich dieser Basen wird die Einbettung  $E \subset E^\perp$  durch die zu  $A$  transponierte Matrix  $A'$  beschrieben. Daher gilt nach 5.6.2:

$$GL(E^\perp, E)^* = A' GL(k, \mathbb{Z}).$$

Diese Gruppe ist isomorph zur Gruppe  ${}^A GL(k, \mathbb{Z})$ . Wir definieren einen Isomorphismus

$$\kappa : {}^A GL(k, \mathbb{Z}) \longrightarrow {}^A GL(k, \mathbb{Z})$$

durch  $\kappa(X) = Z$ , wo  $Z$  die Matrix ist, für die gilt:

$$AZ = X^* A.$$

Dabei ist  $X^*$  die zu  $X$  kontragrediente Matrix  $(X')^{-1}$ . Betrachten wir nun die Gruppe  $STAB_{O(L)}(E)$ . Da in  $L$  eine Basis gewählt ist, identifiziert sich  $O(L)$  mit einer Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{Z})$ , wobei  $n = n_- + n_+$  gesetzt wird.  $STAB_{O(L)}(E)$  ist dann die Untergruppe derjenigen Elemente von  $O(L)$ , die als Blockmatrizen von der folgenden Form sind:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline X & V' & W \\ \hline O & Y & U \\ \hline O & O & Z \\ \hline \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} k$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_k$

Dabei gilt offenbar notwendigerweise  $X \in {}^A GL(k, \mathbb{Z})$  und  $Z = \kappa(X) \in {}^A GL(k, \mathbb{Z})$ . Der Beschränkungshomomorphismus  $\rho$

ordnet  $T$  gerade  $\rho(T) = X$  zu. Wir wollen zeigen, daß  $\rho$  surjektiv ist. Es sei also ein  $X \in {}^A GL(k, \mathbb{Z})$  gegeben. Wir konstruieren ein  $T$  mit  $\rho(T) = X$ . Nach Voraussetzung gilt für  $Z = \kappa(X) \in {}^A GL(k, \mathbb{Z})$ , daß  $C_\omega$  und  $C_\omega Z$  in  $M(B_\omega)$  die gleiche Restklasse haben. Wir können also Matrizen  $U, V \in M(m, k; \mathbb{Z})$  wählen, so daß gilt:

$$C_\omega - C_\omega Z = B_\omega U + \tilde{V} A.$$

Setzen wir  $\tilde{V} = VX^*$  und benutzen die Relation  $AZ = X^* A$ , dann wird daraus die Gleichung

$$C_\omega = C_\omega Z + B_\omega U + VAZ.$$

Daraus folgt nun durch triviale Rechnung:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline X' & O & O \\ \hline V & 1 & O \\ \hline O & U' & Z' \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline O & O & A \\ \hline O & B_\omega & C_\omega \\ \hline A' & C'_\omega & D_\omega \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline X & V' & O \\ \hline O & 1 & U \\ \hline O & O & Z \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline O & O & A \\ \hline O & B_\omega & C_\omega \\ \hline A' & C'_\omega & D \\ \hline \end{array}$$

mit einer gewissen Matrix  $D$ . Diese Matrix  $D$  kann man durch eine weitere Transformation mit einer Matrix

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & O & W \\ \hline O & 1 & O \\ \hline O & O & 1 \\ \hline \end{array}$$

in  $D + W'A + A'W$  überführen. Bei geeigneter Wahl von  $W$  wird  $D$  dadurch in eine Matrix  $D_\omega$ , aus der in 5.4 definierten zulässigen Wertemenge  $\mathcal{D}$  überführt. Aber dann folgt aus der vorausgesetzten Eindeutigkeit des Normalformensystems  $\omega' = \omega$ .



Daher ist

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline X & V' & O \\ \hline O & 1 & U \\ \hline O & O & Z \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & O & W \\ \hline O & 1 & O \\ \hline O & O & 1 \\ \hline \end{array}$$

eine Matrix aus  $\text{STAB}_{O(L)}(E)$  mit  $\rho(T) = X$ . q.e.d.

### Proposition 5.7.6.

Für alle vierzehn exzeptionellen Milnorgitter  $L = L_{pqr}$ ,  $(p, q, r) \in I_e$ , und für alle primitiven isotropen Untergitter  $E \subset L$  vom Rang 2 gilt: Der Beschränkungshomomorphismus

$$\rho : \text{STAB}_{O(L)}(E) \longrightarrow \text{GL}(E^\# / E)^*$$

ist surjektiv.

**Beweis:**  $G$  sei die Diskriminantenform eines der vierzehn exzeptionellen Gitter,  $(n_-, n_+)$  seine Signatur und  $H$  irgendeine isotrope Untergruppe. Nach dem Normalformensatz 5.4.7 existiert zu  $(G, H, n_-, n_+, 2)$  ein eindeutiges und vollständiges Normalformensystem  $(N_\omega, E_\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ . Der Beweis des Normalformensatzes hat ferner gezeigt, daß für die Matrizen  $\omega \in \Omega$  mit Ausnahme eines einzigen Falles stets  $M(B_\omega) = \{0\}$  oder  $M(B_\omega) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  gilt. Daher ist in allen diesen Fällen die Operation von  ${}^A\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  auf  $M(B_\omega)$  trivial und die Voraussetzung von 5.7.5 automatisch erfüllt. Der einzige Ausnahmefall ist der Fall  $L = L_{444}$ , bei dem  $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  mit der quadratischen Form  $v_2$  ist und  $H$  eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2. Dies ist der Fall (vi) des Beweises von 5.4.7. In diesem Fall ist  $M(B) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  ${}^A\text{GL}(2, \mathbb{Z}) = \Gamma_O(2)$ . Die Matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_O(2)$$

operiert auf  $M(B)$  durch Multiplikation mit  $a$ . Das heißt: Sie operiert trivial. Also ist auch in diesem Fall die Voraussetzung von 5.7.5 gegeben, und daher ist  $\rho$  in allen Fällen surjektiv.

### Proposition 5.7.7.

Für alle vierzehn exzeptionellen Gitter  $L = L_{pqr}$  und für alle primitiven isotropen Untergitter  $E \subset L$  vom Rang 2 ist der kanonische Homomorphismus

$$\tau' : \text{FIX}_{O(L)}(E) \longrightarrow \text{FIX}_{O(G_L)}(E^\# / E)$$

surjektiv.

**Beweis:** Die Surjektivität von  $\tau'$  hängt selbstverständlich nur von der  $O(L)$ -Klasse von  $E$  ab. Die  $O(L)$ -Klassen entsprechen nach Satz 5.5.3 bijektiv den Elementen von  $\bar{\theta}(G, m, 0)$  wo  $G = G_L$  und  $m = p+q+r - 4$ . Wir erinnern an die Definition von  $\bar{\theta}$  am Anfang von Abschnitt 5.5:

$$\bar{\theta}(G, m, 0) = \coprod_{[H] \in \bar{J}(G)} \{[H]\} \times \mathcal{K}(H^\perp / H, m, 0).$$

Die isotropen Untergruppen  $H \in J(G)$  sind in Tabelle 6 aufgezählt, und die Klassen definiter Formen in  $\mathcal{K}(H^\perp / H, m, 0)$  in Tabelle 9. Wir beweisen die Surjektivität von  $\tau'$  durch eine Diskussion der einzelnen Fälle, wobei wir diese in sechs Fallgruppen zusammenfassen, und zwar in der gleichen Weise wie beim Beweis des Normalformensatzes 5.4.7.

**Fallgruppe I:**  $H = \{0\}$ ,  $(p, q, r) \in I_e$

Nach 5.4.3 gilt in diesen Fällen  $L = K \perp U$ , wobei  $U$  die orthogonale Summe von zwei unimodularen hyperbolischen Ebenen mit  $E \subset U$  ist und  $K$  ein Repräsentantensystem von  $\mathcal{K}(G_L, m, 0)$

durchläuft. Nach 5.2.2 ist  $O(K) \rightarrow O(G_L)$  surjektiv. Jedes Element von  $O(K)$  läßt sich durch triviale Fortsetzung auf  $U$  zu einem Element von  $\text{FIX}_{O(L)}^{(E)}$  erweitern. Also ist  $\tau' : \text{FIX}_{O(L)}^{(E)} \rightarrow O(G_L)$  surjektiv.

Fallgruppe II:  $(p,q,r) = (3,3,6)$ ,  $(2,4,6)$  und  $H \neq \{0\}$ . In diesen gilt  $\text{FIX}_{O(G)}(H) = \{1\}$  und die Surjektivität ist daher trivial.

Fallgruppe III:  $(p,q,r) = (4,4,4)$  und  $H$  maximal isotrop. Nach 5.4.7 (iii) und 5.4.4, 5.4.6 gilt in diesem Fall  $L = E_8 \perp L'$  mit  $E \subset L'$  und mit der folgenden Normalform für  $E \subset L'$ :

0	0	0	2
0	0	2	0
0	2	2	1
2	0	1	2

Man prüft leicht nach, daß die Matrix

1	0	1	0
0	1	0	-1
0	0	1	0
0	0	0	1

ein Element aus  $\text{FIX}_{O(L)}^{(E)}$  mit Bild  $-1$  in  $\text{FIX}_{O(G)}(H) = \{\pm 1\}$  ist. Triviale Fortsetzung auf  $E_8$  liefert ein entsprechendes Element in  $\text{FIX}_{O(L)}^{(E)}$ .

Mit den Fallgruppen I - III sind alle diejenigen Fälle erledigt, in denen  $E$  in einem orthogonalen Summanden vom Rang 4 enthalten ist. In den nächsten Fallgruppen IV und VI

nutzen wir die schon im Beweis von 5.4.7 mit bewiesene Tatsache, daß wir o.B.d.A. das isotrope Gitter  $E$  in der Form

$$E = L_{p',q',r'}^0 \subset L_{pqr}$$

mit einem parabolischen Tripel  $(p',q',r')$  beschreiben können.

Fallgruppe IV:  $(p,q,r) = (3,4,4)$  und  $H \neq \{0\}$ .

Für  $E = L_{244}^0$  definiert die Vertauschung der zwei Arme gleicher Länge des Diagramms  $D_{344}$  eine Einheit aus  $\text{FIX}_{O(L)}^{(E)}$  mit Bild  $-1$  in  $O(G) = \{\pm 1\}$ .

Fallgruppe V:  $(p,q,r) = (2,5,6)$  und  $H \neq \{0\}$ .

In diesem Fall hat man nach dem Beweis von 5.4.7. (V) eine orthogonale Zerlegung  $L = L' \perp L''$  und  $E = E' \perp E''$  mit  $E' \subset L'$  und  $E'' \subset L''$ , wobei  $L''$  unimodular vom Rang 10 ist und wobei  $L'$  vom Rang 3 und  $E'$  vom Rang 1 sind und  $(L', E')$  die folgende Normalform hat:

0	0	2
0	-2	1
2	1	2

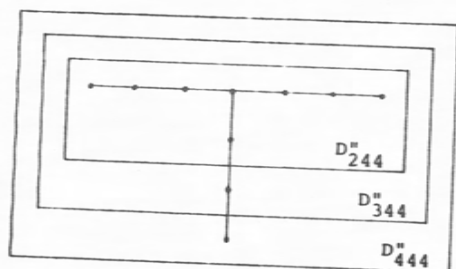
Man prüft leicht nach, daß die Matrix

1	1	0
0	1	1
0	0	1

eine Einheit in  $\text{FIX}_{O(L)}(E')$  mit Bild  $-1$  in  $O(G) = \{\pm 1\}$  ist. Die triviale Fortsetzung auf  $L''$  liefert dann eine entsprechende Einheit in  $\text{FIX}_{O(L)}(E)$ .

Fallgruppe VI:  $(p, q, r) = (4, 4, 4)$  und  $H \neq \{0\}$  nicht maximal isotrop.

O.B.d.A. können wir nach 5.4.7 (VI) in diesem Fall  $E = L_{244}^O \subset L_{444}$  annehmen, wobei die Einbettung  $L_{244} \subset L_{444}$  einer Einbettung der Diagramme  $D_{244}'' \subset D_{444}''$  vom folgenden Typ entspricht:



Die Vertauschung der Arme von  $D_{444}$ , welche  $D_{244}$  in sich überführt, definiert ein Element  $v \in \text{FIX}_{O(L)}(E)$ . Es sei  $\bar{v} \in O(G_L)$  das Bild von  $v$ . Man prüft leicht nach, daß gilt:

$$\text{FIX}_{O(G_L)}(H) = \{\pm 1, \pm \bar{v}\}.$$

Um die Surjektivität von  $\tau'$  zu beweisen, brauchen wir also nur ein Element  $w \in \text{FIX}_{O(L)}(E)$  mit Bild  $-1$  in  $O(G_L)$  zu konstruieren. Um möglichst wenig zu rechnen, tun wir dies mit Hilfe eines Tricks. Wir benutzen nämlich die Einbettung

$$E \subset L_{344} \subset L_{444},$$

welche zu der oben angedeuteten Einbettung von Diagrammen  $D_{344}'' \subset D_{444}''$  gehört. Dafür wissen wir nach der Behandlung von Fallgruppe (IV) bereits folgendes: Es gibt ein

$\tilde{w} \in \text{FIX}_{O(L_{344})}(E)$  mit Bild  $-1 \in O(G_{L_{344}})$ . Wir multiplizieren mit  $-1 \in O(L_{344})$  und erhalten ein Element  $-\tilde{w}$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$-\tilde{w} \in \text{STAB}_{O(L_{344})}(E), \quad (1)$$

$$-\tilde{w}|_E = -\text{id}_E \in \text{SL}(E). \quad (2)$$

Aus (2) folgt nach 5.7.1 aber:

$$-\tilde{w} \in O_-(L_{344}). \quad (3)$$

(1) zusammen mit (3) ergibt:

$$-\tilde{w} \in O_-^*(L_{344}). \quad (4)$$

Wegen des in 1.14 zitierten Satzes von Ebeling ist (4) aber gleichbedeutend mit

$$-\tilde{w} \in R_-(L_{344}). \quad (5)$$

Nun definiert aber die Einbettung  $L_{344} \subset L_{444}$  eine kanonische Einbettung

$$R_-(L_{344}) \subset R_-(L_{444}). \quad (6)$$

Wir fassen also wegen (5) und (6) ab jetzt  $-\tilde{w}$  als Element von  $R_-(L_{444}) \subset O(L_{444})$  auf. Dies Element können wir mit  $-1 \in O(L_{444})$  multiplizieren. In diesem Sinne definieren wir:

$$w = -(-\tilde{w}). \quad (7)$$

Aus (2) und (7) folgt:

$$w \in \text{FIX}_{O(L_{444})}(E). \quad (8)$$

Aus (5), (6), (7) folgt:

$$\tau'(w) = -1 \in O(G_{L_{444}}) \quad (9)$$

Wegen (8) und (9) ist mit  $w$  eine Einheit von  $L_{444}$  mit den gesuchten Eigenschaften gefunden. q.e.d.

### Satz 5.7.8.

Für alle vierzehn exzeptionellen Milnorgitter  $L = L_{pqr}$ ,  $(p,q,r) \in I_e$ , und für alle primitiven isotropen Untergitter  $E \subset L$  vom Rang 2 sind das Stabilisatordiagramm und das eigentliche Stabilisatordiagramm exakt. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_E &= \text{Bild}(\text{STAB}_{O^*(L)}(E) \rightarrow \text{SL}(E)) = \Gamma(\text{SL}(E^{\frac{1}{2}}, E)^* \\ &\quad \text{Bild}(\text{STAB}_{O_-(L)}(E) \rightarrow \text{SL}(E)) = \text{SL}(E^{\frac{1}{2}}, E)^* \end{aligned}$$

**Beweis:** Daß beide Stabilisatordiagramme definiert sind, folgt aus  $\text{SL}(E^{\frac{1}{2}}/E) = \text{Aut}(E^{\frac{1}{2}}/E)$ , und dies folgt seinerseits aus 5.6.9 und Tabelle 6. Die Exaktheit der Stabilisatordiagramme und die Beschreibung von  $\Gamma_E$  folgen nun unmittelbar aus 5.7.2 bis 5.7.7.

### 5.8. $O^*(L)$ - Klassen isotroper Untergitter von $L$

Im Abschnitt 5.5 haben wir eine Methode entwickelt, die unter geeigneten Voraussetzungen eine Klassifikation isotroper Untergitter von  $L$  vom Rang  $k$  bis auf  $O(L)$  - Äquivalenz liefert. Und zwar liefert sie genau dann eine Klassifikation, wenn die dort eingeführte Abbildung

$$\bar{x}_{L,k} : J_k(L)/O(L) \rightarrow \bar{\theta}(G_L, n_-, k, n_+ - k)$$

bijektiv ist. In diesem Abschnitt zeigen wir nun mit Hilfe der in 5.7 eingeführten Stabilisatordiagramme, daß die in 5.5 entwickelte Methode unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen sogar eine Klassifikation isotroper Untergitter von  $L$  vom Rang  $k$  bis auf  $O^*(L)$  - Äquivalenz liefert. Sie tut dies gerade dann, wenn die in 5.5 eingeführte Abbildung

$$x_{L,k}^* : J_k(L)/O^*(L) \rightarrow \theta(G_L, n_-, k, n_+ - k)$$

bijektiv ist. Wie im Fall der Abbildung  $\bar{x}_{L,k}$  kann man auch für  $x_{L,k}^*$  die Frage nach der Bijektivität in entsprechende Probleme für die durch Beschränkung entstehenden Abbildungen  $x_{L,k,H}^*$  aufspalten, wobei  $H$  die isotropen Untergruppen von  $G_L$  durchläuft.

### Proposition 5.8.1.

$L$  sei ein nichtentartetes gerades indefinites Gitter mit Diskriminantenform  $G_L$  und Signatur  $(n_-, n_+)$ . Es sei  $k = n_- = \min(n_-, n_+)$  der reelle Wittindex.  $H \subset G_L$  sei eine isotrope Untergruppe. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

- (1)  $\tau : O(L) \rightarrow O(G_L)$  ist surjektiv.
- (2) Für alle  $E \in J_{k,[H]}(L)$  sind beide Stabilisatordiagramme exakt.
- (3)  $\bar{x}_{L,k,H} : J_{k,[H]}(L)/O(L) \rightarrow \{[H]\} \times \mathcal{K}(H^{\frac{1}{2}}/H, n_-, k, n_+ - k)$  ist bijektiv.

Dann ist auch die folgende Abbildung bijektiv:

$$x_{L,k,H}^* : J_{k,[H]}(L)/O_c^*(L) \rightarrow J_{[H]}(G_L) \times \mathcal{K}(H^{\frac{1}{2}}/H, n_-, k, n_+ - k).$$

### Zusatz:

Unter den Voraussetzungen (1) und (2) sind die kanonischen Abbildungen

$$\mathcal{J}_{k,[H]}(L)/O_{\epsilon}^*(L) \longrightarrow \mathcal{J}_{k,[H]}(L)/\tilde{O}(L)$$

$$\mathcal{J}_{k,[H]}(L)/O_{\epsilon}(L) \longrightarrow \mathcal{J}_{k,[H]}(L)/O(L)$$

bijektiv.

Beweis: Wir setzen voraus, daß  $\mathcal{J}_{k,[H]}(L)$  nicht leer ist, denn sonst ist nichts zu beweisen. Wir betrachten die folgenden kommutativen Diagramme  $D$  sowie  $D(E)$  für  $E \in \mathcal{J}_{k,[H]}(L)$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & \longrightarrow & O_{\epsilon}^*(L) & \longrightarrow & \tilde{O}(L) & \xrightarrow{\sigma_{\epsilon}'} & \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & O_{\epsilon}(L) & \longrightarrow & O(L) & \xrightarrow{\sigma_{\epsilon}} & \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \quad (D) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & O(G_L) & \longrightarrow & O(G_L) & \longrightarrow & \{1\} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 1 & \longrightarrow & \text{STAB}_{O_{\epsilon}^*(L)}(E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{\tilde{O}(L)}(E) & \xrightarrow{\sigma_{\epsilon}} & \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{STAB}_{O_{\epsilon}(L)}(E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(L)}(E) & \xrightarrow{\sigma_{\epsilon}} & \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(G_L)}(E^{\sharp}/E) & \longrightarrow & \text{STAB}_{O(G_L)}(E^{\sharp}/E) & \longrightarrow & \{1\} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

$D(E)$

Behauptung: Zeilen und Spalten der Diagramme  $D$  und  $D(E)$  sind exakt.

Beweis: Wir zeigen dies zunächst für  $D(E)$ . Die letzte Spalte und Zeile sind trivialerweise exakt. Die Exaktheit der ersten und zweiten Spalte folgt unmittelbar aus der Voraussetzung (2). Aus der Voraussetzung (2) folgt weiterhin  $SL(E^{\sharp}/E) = GL(E^{\sharp}/E)$ . Andererseits gilt offenbar  $SL(E^{\sharp}, E)^* \subseteq GL(E^{\sharp}, E)^*$ . Daher folgt aus dem exakten Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \Gamma SL(E^{\sharp}, E)^* & \longrightarrow & SL(E^{\sharp}, E)^* & \longrightarrow & SL(E^{\sharp}/E) \longrightarrow 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 1 & \longrightarrow & \Gamma GL(E^{\sharp}, E)^* & \longrightarrow & GL(E^{\sharp}, E)^* & \longrightarrow & GL(E^{\sharp}/E) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

auch  $\Gamma_{SL(E^4, E)}^* \subseteq \Gamma_{GL(E^4, E)}^*$ . Deswegen und wegen Voraussetzung (2) folgt aus der Surjektivität der Abbildungen  $\rho$  und  $\rho'$  des Stabilisatordiagramms von  $E$ , daß  $STAB_{Q(L)}(E) \subseteq STAB_{O(L)}(E)$  und  $STAB_{O_\epsilon(L)}^*(E) \subseteq STAB_{O(L)}(E)$ . Daher sind  $\sigma_\epsilon$  und  $\sigma'_\epsilon$  surjektiv, und die ersten beiden Zeilen von  $D(E)$  sind auch exakt.

Aus dem gerade Bewiesenen ergibt sich erst recht die Surjektivität von  $\sigma_\epsilon$  und  $\sigma'_\epsilon$  im Diagramm  $D$ . Die Zeilen von  $D$  sind also exakt, ebenso trivialerweise die letzte Spalte. Die mittlere Spalte ist exakt wegen Voraussetzung (1). Die Exaktheit der ersten Spalte folgt nun durch einfache Diagrammjagd. Damit ist die Exaktheit von  $D$  und  $D(E)$  bewiesen.

Zum Diagramm  $D$  gehört das folgende kommutative Diagramm  $D'$  von kanonischen Abbildungen von Orbiträumen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{J}_{k, [H]}(L)/O_\epsilon^*(L) & \longrightarrow & \mathbb{J}_{k, [H]}(L)/\bar{O}(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{J}_{k, [H]}(L)/O_\epsilon(L) & \longrightarrow & \mathbb{J}_{k, [H]}(L)/O(L) \end{array} \quad (D')$$

Die Abbildungen im Diagramm  $D'$  sind natürlich alle surjektiv, und ihre Fasern lassen sich wie folgt identifizieren. Allgemein gilt: Operiert eine Gruppe  $O$  mit einer normalen Untergruppe  $O' \triangleleft O$  auf einen Raum  $X$ , dann identifiziert sich für die Abbildung  $X/O' \rightarrow X/O$  die Faser über der Restklasse von  $x \in X$  mit

$$O/O' / STAB_{O'}(\{x\}) / STAB_O(\{x\})$$

Anwendung dieses Prinzips auf die vier Abbildungen des Diagramms  $D'$  liefert für die Pfeile in horizontaler Richtung wegen der Exaktheit der Zeilen von  $D$  und  $D(E)$  die Fasern  $\{1\} / \{1\} = \{1\}$ . Damit ist der Zusatz zu 5.8.1 schon bewiesen. Für die Fasern der beiden Pfeile in vertikaler Rich-

tung liefert das gleiche Prinzip wegen der Exaktheit der Spalten der Diagramme  $D$  und  $D'$  eine Identifikation mit

$$O(G_L) / STAB_{O(G_L)}\{E^4/E\} = J_{[H]}(G_L).$$

Daher hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{J}_{k, [H]}(L)/O_\epsilon^*(L) & \xrightarrow{\chi_{L,k,H}^*} & J_{[H]}(G_L) \times \chi_{(H^4/H, n_-, k, n_+ - k)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{J}_{k, [H]}(L)/O(L) & \xrightarrow{\bar{\chi}_{L,k,H}} & \{[H]\} \times \chi_{(H^4/H, n_-, k, n_+ - k)} \end{array}$$

in dem die Beschränkung von  $\chi_{L,k,H}^*$  auf die Fasern der vertikalen Abbildungen bijektiv ist. Da außerdem nach Voraussetzung  $\bar{\chi}_{L,k,H}$  bijektiv ist, folgt:  $\chi_{L,k,H}^*$  ist bijektiv. q.e.d.

#### Korollar 5.8.2.

$L$  sei ein nichtentartetes gerades indefinites Gitter mit Diskriminantenform  $G_L$  und Signatur  $(n_-, n_+)$ . Es sei  $k = n_-$  der reelle Wittindex. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

- (1)  $\tau : O(L) \rightarrow O(G_L)$  ist surjektiv.
- (2) Für alle  $E \in \mathbb{J}_k(L)$  sind beide Stabilisatordiagramme exakt.
- (3)  $\bar{\chi}_{L,k} : \mathbb{J}_k(L)/O(L) \rightarrow \bar{\theta}(G, n_-, k, n_+ - k)$  ist bijektiv.

Dann ist auch die folgende Abbildung bijektiv:

$$\chi_{L,k}^* : \mathbb{J}_k(L)/O_\epsilon^*(L) \rightarrow \theta(G, n_-, k, n_+ - k).$$

Damit erhalten wir schließlich die Klassifikation der maximalen isotropen Untergitter der exceptionellen Milnorgitter bis auf  $O^*(L)$ -Äquivalenz.

### Satz 5.8.3.

Für alle  $(p,q,r) \in I_e$  ist die folgende kanonische Abbildung bijektiv:

$$x_{L_{pqr}}^* : J_2(L_{pqr}) / O^*(L_{pqr}) \longrightarrow \theta(G_{L_{pqr}}, p+q+r-4, 0)$$

Beweis: 5.2.2, 5.5.3, 5.7.8, 5.8.2.

### 5.9. Die Isotropie - Fahnenkomplexe der exceptionellen Milnorgitter

Mit den bisher bewiesenen Ergebnissen sind im Grunde die Isotropie - Fahnenkomplexe der exceptionellen Milnorgitter bereits bestimmt worden. Um das einzusehen, braucht man lediglich diese Ergebnisse zusammenzufügen. Das geschieht in dem folgenden Theorem 5.9.1, das in technischer Hinsicht das Hauptergebnis dieser Arbeit darstellt. Um die Ergebnisse knapp zu formulieren, benutzen wir die früher eingeführten Notationen. Im Interesse einer besseren Lesbarkeit stellen wir die im Satz verwendeten Symbole mit kurzer Erläuterung oder Verweis auf die frühere Definition noch einmal zusammen.

### Liste der Bezeichnungen in Theorem 5.9.1.

- $I_e$  = Menge der 14 exceptionellen Tripel (1.12)
- $I_h$  = Menge der hyperbolischen Tripel (1.12)
- $I_p$  = Menge der 3 parabolischen Tripel (1.12)
- $L_{pqr}$  = exceptionelles Milnorgitter (1.9)
- $L'_{pqr}$  = parabolisches bzw. hyperbolisches Gitter (1.9)
- $L^\#$  = duales Gitter zu  $L$
- $J_k(L)$  = Menge der primitiven isotropen  $E \subset L$  vom Rang  $k$  (1.3)
- $\mathcal{F}(L)$  = Isotropie - Fahnenkomplex von  $L$  (1.3)
- $O(L)$  = orthogonale Gruppe von  $L$
- $O^*(L)$  = Untergruppe der Elemente mit Spinornorm 1 im Kern von  $O(L) \rightarrow O(G_L)$  (1.2)
- $E_k^\perp$  =  $E_k$  - Komponente des von den Minimalvektoren von  $E^\perp$  erzeugten Gitters (1.10)
- $E_k^\perp = E_{L^\#}^{\perp k}$  für  $E \subset L$  primitiv, isotrop (4.1)
- $[E^\perp/E] = \text{class } (E^\perp/E)$  (5.5)
- $[\text{SL}(E_k^\perp/E)]$  eine gewisse Kongruenzuntergruppe von  $\text{SL}(E)$  (5.6)
- $\Gamma[a,b]^*$  eine gewisse Kongruenzuntergruppe von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  (5.6)
- $\mathcal{C}(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$  = Menge der Konjugationsklassen von Kongruenzuntergruppen von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ .
- $G_L = L^\# / L$  Diskriminantenform (3.1)
- $H_E = E_k^\perp / E \subset G_L$  für  $E \subset L$  primitiv isotrop (4.1)
- $O(G)$  = orthogonale Gruppe von  $G$  (3.2)
- $J(G)$  = Menge der isotropen Untergruppen von  $G$  (3.6, 5.5)
- $J_1(G)$  = Menge der zyklischen isotropen Untergruppen
- $\bar{J}(G) = J(G)/O(G)$  (5.5)
- $\bar{J}_1(G) = J_1(G)/O(G)$  (5.5)
- $[H] = O(G)$  - Klasse von  $H \in J(G)$  (5.5)



$\mathcal{PU}_1(H)$  = Menge der primitiven zyklischen Untergruppen  
von  $H = E^4/E \in J(G)$  (5.6)

$[\mathcal{PU}_1(H)] \subset \bar{J}_1(G)$  Bild von  $\mathcal{PU}_1(H)$  in  $\bar{J}_1(G)$ .

$$\mathcal{K}(G, m_-, m_+) = \{\text{class}(M) \mid G_M \cong G, \text{sign}(M) = (m_-, m_+)\} \quad (5.5)$$

$$\theta(G, m_-, m_+) = \coprod_{H \in J(G)} \{H\} \times \mathcal{K}(H^\perp/H, m_-, m_+) \quad (5.5)$$

$$\bar{\theta}(G, m_-, m_+) = \coprod_{[H] \in \bar{J}(G)} \{[H]\} \times \mathcal{K}(H^\perp/H, m_-, m_+) \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} x_1^* : J_1(L) / O^*(L) &\rightarrow J_1(G) \quad \text{definiert durch} \\ x_1^*(E) &= E^4/E \quad (4.2, 4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 : J_1(L) / O(L) &\rightarrow \bar{J}_1(G) \quad \text{definiert durch} \\ \bar{x}_1([E]) &= [E^4/E] \quad (4.2., 4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2^* : J_2(L) / O^*(L) &\rightarrow \theta(G_L, n-4, 0) \quad \text{definiert durch} \\ x_2^*(E) &= (E^4/E, [E^\perp/E]) \quad (5.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 : J_2(L) / O(L) &\rightarrow \bar{\theta}(G_L, n-4, 0) \quad \text{definiert durch} \\ \bar{x}_2([E]) &= ([E^4/E], [E^\perp/E]) \quad (5.5) \end{aligned}$$

### Theorem 5.9.1.

Für alle  $L = L_{pqr}$  mit  $(p, q, r) \in I_e$  gelten folgende Aussagen:

- (i) Die Abbildungen  $x_1$  und  $\bar{x}_1$  sowie  $x_2$  und  $\bar{x}_2$  in den beiden folgenden kanonischen kommutativen Diagrammen sind bijektiv.

$$\begin{array}{ccc} J_1(L) / O^*(L) & \xrightarrow{x_1^*} & J_1(G_L) & J_2(L) / O^*(L) & \xrightarrow{x_2^*} & \theta(G_L, m, 0) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ J_1(L) / O(L) & \xrightarrow{\bar{x}_1} & \bar{J}_1(G_L) & J_2(L) / O(L) & \xrightarrow{\bar{x}_2} & \bar{\theta}(G_L, m, 0) \end{array}$$

Hierbei ist  $m = \text{Rang } L - 4$ .

- (ii) Die Konfigurationsdiagramme  $\mathcal{F}(L) / O^*(L)$  bzw.  $\mathcal{F}(L) / O(L)$  sind 1-dimensionale simpliciale Komplexe. Die Abbildungen  $x_1^*$  bzw.  $\bar{x}_1$  identifizieren die Mengen ihrer 0-simplices mit den disjunkten Vereinigungen

$$J_1(G_L) \sqcup \theta(G_L, m, 0)$$

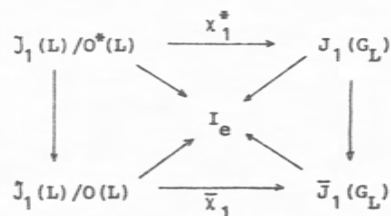
$$\bar{J}_1(G_L) \sqcup \bar{\theta}(G_L, m, 0).$$

Dabei entsprechen die Mengen der 1-simplices bijektiv den folgenden Teilmengen von  $J_1(G_L) \times \theta(G_L, m, 0)$  bzw.  $\bar{J}_1(G_L) \times \bar{\theta}(G_L, m, 0)$ :

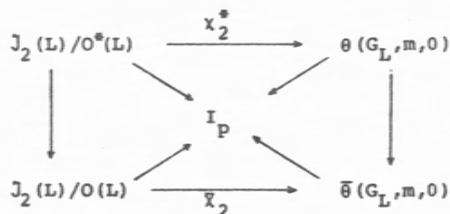
$$\{(H'; H, [M]) \in J_1(G_L) \times \theta(G_L, m, 0) \mid H' \in \mathcal{PU}_1(H)\}$$

$$\{([H']; [H], [M]) \in \bar{J}_1(G_L) \times \bar{\theta}(G_L, m, 0) \mid [H'] \in [\mathcal{PU}_1(H)]\}.$$

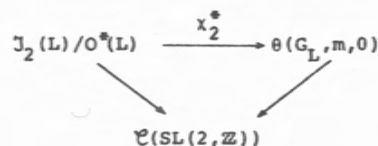
- (iii) Für jedes  $E \in J_1(L)$  existiert genau ein  $(p', q', r') \in I_h$  mit  $E^\perp \cong L_{p'; q'; r'}^*$ .  
Für jedes  $H \in J_1(G_L)$  existiert genau ein  $(p', q', r') \in I_h$  mit  $\text{rang } L_{p'; q'; r'}^* = \text{rang } L - 1$  und  $G_L^* \cong H^\perp/H$ .  
Dadurch werden Typenbewertungen mit Werten in  $I_e$  definiert, so daß das Diagramm kommutiert



- (iv) Für jedes  $E \in J_2(L)$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $(p', q', r') \in I_p$  mit  $E^\perp \cong L_{p', q', r'}$ . Für jedes  $(H, [M]) \in \theta(G_L, m, 0)$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $(p', q', r') \in I_p$  mit  $M \cong \bar{L}_{p', q', r'}$ . Dadurch werden Typenbewertungen mit Werten in  $I_p$  definiert, so daß das folgende Diagramm kommutiert:



- (v) Jedem  $E \in J_2(L)$  ist die Kongruenzuntergruppe  $\Gamma_E = \text{Bild}(\text{STAB}_{O^*(L)}(E) \rightarrow \text{SL}(E))$  zugeordnet. Es gilt  $\Gamma_E = \Gamma_{\text{SL}(E^4/E)^*}$ . Die Spitzen von  $\Gamma_E$  entsprechen bijektiv den Elementen von  $\mathcal{PU}_1(E^4/E)$ . Jedem  $H \in J(G)$  mit  $H \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$  und  $a|b$  ist die Kongruenzuntergruppe  $\Gamma[a, b]^* \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  zugeordnet. Dies definiert ein kommutatives Diagramm von Stabilisatorbewertungen



- (vi) Durch die obigen Aussagen sind die Konfigurationsdiagramme  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  und  $\mathcal{F}(L)/O(L)$  mit Typenbewertung und Stabilisatorbewertung vollständig bestimmt. Die einzelnen Bestimmungsstücke sind in den folgenden Tabellen aufgeführt:

Tabelle 6 :  $G_L, O(G_L), J(G_L)$  und  $H^\perp/H$  für  $H \in J(G_L)$

Tabelle 7 :  $J_1(G_L), \bar{J}_1(G_L)$  mit Typenbewertung

Tabelle 9 :  $\mathcal{X}(H^\perp/H, m, 0)$  für alle  $H \in J(G_L)$

Tabelle 12 :  $\Gamma[a, b]$  und  $\mathcal{PU}(H)$  für alle  $H \in J(G_L)$

Tabelle 13 :  $\theta(G_L, m, 0), \bar{\theta}(G_L, m, 0)$  mit Typenbewertung, Stabilisatorbewertung und  $\mathcal{PU}(H)$  für alle  $(H, [M]) \in \theta(G_L, m, 0)$ .

Im einzelnen zeigt Tabelle 13 folgende Daten:

Spalte	Daten
1	Typ
2	$(p, q, r) \in I_e$
3	Klassenzahl $h_{2, O^*(L)} =  J_2(L)/O^*(L) $
4	Klassenzahl $h_{2, O(L)} =  J_2(L)/O(L) $
5	alle Paare $(H_1, M_1) \in \theta(G_L, m, 0) \subset J(G) \times \mathcal{X}(H^\perp/H, m, 0)$
6	Typenbewertung
7	Stabilisatorbewertung
8	alle $H_{1k} \in \mathcal{PU}_1(H_1)$

- (vii)  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  mit Typenbewertung und Stabilisatorbewertung und Operation von  $O(G_L)$  wird durch die Diagramme von Tabelle 3 beschrieben.

#### Beweis:

- (i) Dies ist Satz 4.3 (i), Satz 5.5.3 und Satz 5.8.3.  
(ii) Für  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  folgt die Behauptung aus (i) mit Proposition 3.7, Proposition 5.6.15 (i) und Satz 5.7.8. Für  $\mathcal{F}(L)/O(L)$  folgt die Behauptung aus (i) mit Proposition 5.6.15 (ii) und Satz 5.7.8 und Proposition 3.7

unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $\text{STAB}_{O(G_L^H)}(H) \rightarrow \text{Aut}(H)$  nach 5.7.8 und 5.6.15. (iii) surjektiv ist, daß die Restklassenabbildung  $\mathcal{P}U_1(H) \rightarrow [\mathcal{P}U_1(H)]$  daher eine Abbildung

$$\mathcal{P}U_1(H) / \text{Aut}(H) \rightarrow [\mathcal{P}U_1(H)]$$

induziert und daß diese Abbildung sogar bijektiv ist, wie man in allen Fällen leicht mit Hilfe von Tabelle 6 verifiziert.

- (iii) Die Behauptung folgt aus Lemma 4.1, Satz 4.3 (ii) - (iv) und Proposition 3.5.
- (iv) Die Behauptung folgt aus (i) und Satz 5.2.1.
- (v) Die Behauptung folgt aus Proposition 3.7, Proposition 5.6.12 und Satz 5.7.8.
- (vi) Es ist evident, daß  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  und  $\mathcal{F}(L)/O(L)$  mit Typen- und Stabilisatorbewertung nach (i) - (v) durch die explizit aufgeführten Bestimmungsstücke vollständig bestimmt sind.  
Die Daten von Tabelle 13 ergeben sich aus den Definitionen und den Daten der anderen Tabellen: Die Spalten 3 und 4 ergeben sich aus Spalte 5, Spalte 5 ergibt sich aus den Tabellen 6 und 9, Spalte 6 aus Tabelle 9 und die Spalten 7 und 8 aus Tabelle 6 und 12.
- (vii) Die Behauptung folgt trivial aus (i) - (vi). q.e.d.

Aus der präzisen Beschreibung der Konfigurationsdiagramme in Theorem 5.9.1 ergeben sich insbesondere die früher in Paragraph 2 als Hauptergebnisse dieser Arbeit formulierten Sätze 1 und 2.

#### Beweis von Satz 2.1.

- (i) Für  $L' \in \mathcal{K}(L)$  gilt trivialerweise  $(L'^O)^\perp = L'$ . Daher folgt die Behauptung aus 5.9.1 (iii).
- (ii) Für  $\kappa_1 : \mathcal{K}(L) \rightarrow \mathcal{J}_1(L)$  wird wegen (i) tatsächlich durch

$\kappa_1^{-1}(E) = E^\perp$  eine inverse Abbildung definiert. Für  $\kappa_2 : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{J}_2(L)$  wird wegen 5.9.1 (iv) tatsächlich durch  $\kappa_2^{-1}(E) = E^\perp$  eine inverse Abbildung definiert.

#### Beweis von Satz 2.2.

- (i) Dies folgt aus 5.9.1 (ii).
- (ii) Dies folgt aus 5.9.1 (i), (iii), (iv), (v).
- (iii) Dies ist trivial.
- (iv) Dies ist 5.9.1 (vii).
- (v) Dies folgt trivial aus (iv).

Damit ist die arithmetische Untersuchung der vierzehn exceptionellen unimodularen Milnorgitter abgeschlossen.

TYP	$(p, q, r)$	$h_{2,0}(n)$	$h_{2,0}(L)$	$(H_i, M_j)$	$(p_j, q_j, r_j)$	$\Gamma_j$	$H_i, h$
$E_{42}$	(2,3,7)	1	1	$(H_0, E_8)$	(2,3,6)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$Z_{41}$	(2,4,5)	1	1	$(H_0, E_7)$	(2,4,4)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$Q_{40}$	(3,3,4)	1	1	$(H_0, E_6)$	(3,3,3)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$E_{43}$	(2,3,8)	1	1	$(H_0, E_8 \perp A_4)$	(2,3,6)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$E_{44}$	(2,3,9)	1	1	$(H_0, E_8 \perp A_2)$	(2,3,6)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$Q_{41}$	(3,3,5)	1	1	$(H_0, E_6 \perp A_4)$	(3,3,3)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$Z_{43}$	(2,4,7)	2	2	$(H_0, E_7 \perp A_2)$	(2,4,4)	$\Gamma(4)$	$H_0$
				$(H_0, E_8 \perp \langle -6 \rangle)$	(2,3,6)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$W_{42}$	(2,5,5)	1	1	$(H_0, M_{5,8})$	(2,4,4)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$S_{42}$	(3,4,5)	2	2	$(H_0, M'_{43,8})$	(3,3,3)	$\Gamma(4)$	$H_0$
				$(H_0, M''_{43,8})$	(2,4,4)	$\Gamma(4)$	$H_0$
$Q_{42}$	(3,3,6)	3	2	$(H_0, E_6 \perp A_2)$	(3,3,3)	$\Gamma(4)$	$H_0$
				$(H_4, E_8)$	(2,3,6)	$\Gamma_4(3)$	$H_0, H_4$
				$(H_2, E_8)$	(2,3,6)	$\Gamma_4(3)$	$H_0, H_2$
$Z_{42}$	(2,4,6)	2	2	$(H_0, E_7 \perp A_4)$	(2,4,4)	$\Gamma(4)$	$H_0$
				$(H_4, E_8)$	(2,3,6)	$\Gamma_0(2)$	$H_0, H_4$
$S_{41}$	(3,4,4)	2	2	$(H_0, M_{8,7})$	(3,3,3)	$\Gamma(4)$	$H_0$
				$(H_4, E_7)$	(2,4,4)	$\Gamma_0(2)$	$H_0, H_4$
$W_{43}$	(2,5,6)	2	2	$(H_0, M_{8,9})$	(2,4,4)	$\Gamma(4)$	$H_0$
				$(H_4, E_8 \perp A_4)$	(2,3,6)	$\Gamma_0(2)$	$H_0, H_4$
$U_{42}$	(4,4,4)	5	3	$(H_0, M_{46,8})$	(3,3,3)	$\Gamma(4)$	$H_0$
				$(H_4, E_7 \perp A_4)$	(2,4,4)	$\Gamma_0(2)$	$H_0, H_4$
				$(H_2, E_7 \perp A_4)$	(2,4,4)	$\Gamma_0(2)$	$H_0, H_2$
				$(H_3, E_7 \perp A_4)$	(2,4,4)	$\Gamma_0(2)$	$H_0, H_3$
				$(H_4, E_8)$	(2,3,6)	$\Gamma(2)$	$H_4, H_2, H_3$

TABELLE 13

## § 6. Geometrische Untergitter

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von Satz 3 aus Paragraph 2. In Abschnitt 1.11 haben wir für ein Milnorgitter  $L$  die Menge  $\mathcal{L}^*(L)$  der geometrischen Untergitter definiert. Die dort gegebene Definition bedarf insofern der Präzisierung, als sie - zumindest a priori - von der Wahl des Repräsentanten  $X \rightarrow S$  der semiuniversellen Deformation der betrachteten Singularität abhängig ist. Ferner ist es - zumindest a priori - denkbar, daß innerhalb einer stetigen Familie von Singularitäten, bei der sich die Topologie der Milnorfaser und mithin die Klasse des Milnorgitters  $L$  und sogar  $\mathcal{D}^*$  nicht ändert, die Menge  $\mathcal{L}^*(L)$ , bezogen auf hinreichend "kleine" gute Repräsentanten der semiuniversellen Deformation, doch veränderlich ist. Für die 14 einparametrischen Familien der 1-modularen exzeptionellen Singularitäten kann dies jedoch nicht geschehen. Das folgt aus den Resultaten von Looijenga und Wirthmüller, die gezeigt haben, daß die semiuniverselle Deformation der quasihomogenen unimodularen exzeptionellen Singularität längs des exzeptionellen Stratum topologisch trivial ist. Alle 1-modularen exzeptionellen Singularitäten eines gegebenen Typs haben also die gleiche Menge  $\mathcal{L}^*(L)$  wie die einzige quasihomogene Singularität dieses Typs. Daher können wir uns im folgenden auf quasihomogene Flächensingularitäten beschränken.

Für quasihomogene Singularitäten hat man ausgezeichnete Repräsentanten  $X \rightarrow S$  für die semiuniverselle Deformation. Es ist  $X = \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^k$  und  $S = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$ , und  $X \rightarrow S$  ist eine Abbildung

$$\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$$

von der folgenden Form:

$$(x, y, z, t_1, \dots, t_k) \longrightarrow (t_0, t_1, \dots, t_k)$$

$$t_0 = f(x, y, z) + \sum_{m=1}^k t_m g_m(x, y, z).$$

Dabei sind  $g_1, \dots, g_k$  Monome, die zusammen mit  $g_0 = 1$  eine Basis von  $\mathbb{C}\{x, y, z\} / (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$  repräsentieren. Wir beziehen unsere Definition von  $\mathcal{L}^*(L)$  auf einen solchen Repräsentanten  $X \rightarrow S$  der semiuniversellen Deformation, wobei wir als Basispunkt  $s \in S$  etwa  $s = (1, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$  wählen. Wir beziehen uns im folgenden stets auf diese Situation.  $L$  bezeichne das Milnorgitter  $L = H_2(X_s, \mathbb{Z})$ .

#### Lemma 1.

Es sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\psi} & S \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit biholomorphen Abbildungen  $\varphi, \psi$ , so daß  $\psi(s) = s$ . Dann induziert die Beschränkung  $\varphi: X_s \rightarrow X_s$  eine Einheit des Milnorgitters  $\varphi_* \in O(L)$  und es gilt  $\varphi_*(\mathcal{L}^*(L)) = \mathcal{L}^*(L)$ .

**Beweis:** Wir benutzen die Definitionen und Notationen von Abschnitt 1.11. Es sei  $w$  irgendein doppelpunktfreier Weg in  $S'$  von  $s$  zu einem Punkt der Diskriminante. Dann ist  $\psi(w)$  ein ebensolcher Weg, und  $\varphi$  induziert zusammen mit den Inklusionen  $X_s \subset X_w$  und  $X_s \subset X_{\psi(w)}$  ein kommutatives Diagramm von Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} H_2(X_s) & \longrightarrow & H_2(X_w) \\ \varphi_* \downarrow \cong & & \cong \downarrow \\ H_2(X_s) & \longrightarrow & H_2(X_{\psi(w)}) \end{array}$$

Der Automorphismus  $\varphi_*$  überführt also die Kerne der vertikalen Homomorphismen ineinander, und er respektiert auch die in 1.11 eingeführte Zerlegung dieser Kerne in orthogonale Summanden. Diese Summanden sind aber gerade typische Elemente von  $\mathcal{L}^*(L)$ . Also gilt  $\varphi_*(\mathcal{L}^*(L)) \subset \mathcal{L}^*(L)$ .

Es ist im allgemeinen ein nicht triviales Problem, für eine Abbildung  $\varphi$  wie in Lemma 1 die Einheit  $\varphi_* \in O(L)$  explizit zu berechnen. Es kommt uns aber später auch gar nicht auf die genaue Kenntnis von  $\varphi_*$  an. Uns interessiert nur das Bild  $\bar{\varphi}_* \in O(G_L)$  von  $\varphi_*$  bezüglich der kanonischen Abbildung  $O(L) \rightarrow O(G_L)$ . Aber die durch das Milnorgitter  $L$  definierte Gruppe  $G_L = L^\# / L$  zusammen mit der Diskriminantenbilinearform können wir mit einer anderen, leichter zu berechnenden Diskriminantenbilinearform identifizieren.

#### Lemma 2.

Das Milnorgitter  $L$  sei nichtentartet.  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  sei eine Auflösung der Singularitäten der quasihomogenen singulären Faser  $X_0$ , und  $L_0$  sei das negativ definite Homologiegitter  $L_0 = H_2(\tilde{X}_0, \mathbb{Z})$ . Dann sind die Gruppen  $G_{L_0}$  und  $G_L$  kanonisch isomorph.

**Beweis:** Wir benutzen ohne Kommentar bekannte Ergebnisse von Milnor [41]. Es sei  $\delta > 0$  fest gewählt mit  $\delta > 1 = \|s\|$ . Es sei  $B \subset \mathbb{C}^3$  eine Kugel um den Nullpunkt vom Radius  $\rho$

und  $X'_t = X_t \cap B$ . Wenn  $\rho$  hinreichend groß gewählt ist, bilden die Ränder  $\partial X'_t$  mit  $|t| < \delta$  ein differenzierbares lokal triviales Faserbündel über der zusammenziehbaren Kreisscheibe  $\{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \delta\}$ . Daher hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$H_1(\partial X'_0) \cong H_1(\partial X'_s). \quad (1)$$

Außerdem hat man für hinreichend großes  $\rho$  durch die Inklusion einen kanonischen Isomorphismus von Homologiegittern

$$H_2(X'_s) \cong H_2(X_s).$$

Daher liefert die exakte Homologiesequenz

$$0 \rightarrow H_2(X'_s) \rightarrow H_2(X'_s, \partial X'_s) \rightarrow H_1(\partial X'_s) \rightarrow 0$$

zusammen mit dem Poincaré - Isomorphismus

$$H_2(X'_s, \partial X'_s) \cong H^2(X'_s) \cong \text{Hom}(H_2(X'_s), \mathbb{Z})$$

einen kanonischen Isomorphismus

$$H_1(\partial X'_s) \cong G_L. \quad (2)$$

In ähnlicher Weise erhält man, indem man  $\tilde{X}_0$  durch das Urbild  $\tilde{X}'_0$  von  $X'_0$  in  $\tilde{X}_0$  ersetzt, einen kanonischen Isomorphismus

$$H_1(\partial X'_0) \cong G_{L_0}. \quad (3)$$

Aus (1) - (3) ergibt sich der behauptete kanonische Isomorphismus  $G_{L_0} \cong G_L$ .

**Bemerkung:** Man kann zeigen, daß der Isomorphismus von Lemma 2 mit den Diskriminantenbilinearformen verträglich ist, weil diese Bilinearformen mit den topologisch definierten Ver-

schlingungsformen auf den dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten  $\partial X'_s$  und  $\partial X'_0$  identifiziert werden können.

Das folgende Lemma ist trivial, aber nützlich.

### Lemma 3.

$X \rightarrow S$  sei wie oben und  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  die minimale Auflösung.  $L$  und  $L_0$  seien wie oben definiert, und  $G_L, G_{L_0}$  seien mittels des kanonischen Isomorphismus von Lemma 2 identifiziert.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\psi} & S \end{array}$$

sei ein kommutatives Diagramm mit biholomorphen Abbildungen  $\psi, \psi$  mit  $\psi(s) = s$  und  $\psi_0 : X_0 \rightarrow X_0$  sei die Beschränkung. Diese liftet sich eindeutig zu einer biholomorphen Abbildung  $\tilde{\psi}_0 : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_0$  der minimalen Auflösung.  $\tilde{\psi}_0$  induziert eine Einheit  $\tilde{\psi}_{0*} \in O(L_0)$ , und dazu gehört ein Automorphismus  $\tilde{\psi}_{0*}$  von  $G_{L_0}$ . Dafür gilt:

$$\tilde{\psi}_{0*} = \tilde{\psi}_*$$

Damit ist die Berechnung von  $\tilde{\psi}_*$  auf die von  $\tilde{\psi}_{0*}$  reduziert, und letzteres hängt nur von  $\psi_0$  ab. Die Fortsetzung von  $\psi_0 : X_0 \rightarrow X_0$  zu  $\psi : X \rightarrow X$  interessiert uns nur insofern, als wir für gewisse  $\psi_0$  wissen müssen, daß eine solche Fortsetzung existiert. In den uns interessierenden Fällen läßt sich aber die Existenz einer solchen Fortsetzung sehr leicht direkt einsehen.

## Lemma 4.

$X_0$  sei eine quasihomogene Flächensingularität mit der quasihomogenen Gleichung  $f(x,y,z) = 0$ . Es seien  $\alpha, \beta, \gamma$  rationale Zahlen, so daß in  $f$  nur Monome  $x^i y^j z^k$  mit  $\alpha i + \beta j + \gamma k = 1$  vorkommen. Dann wird durch

$$\varphi_0(x,y,z) = (e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha} x, e^{2\pi\sqrt{-1}\beta} y, e^{2\pi\sqrt{-1}\gamma} z)$$

eine biholomorphe Abbildung  $\varphi_0 : X_0 \rightarrow X_0$  definiert, die sich zu einem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\psi} & S \end{array}$$

mit biholomorphen Abbildungen  $\psi, \varphi$  mit  $\psi(s) = s$  erweitern läßt. Dabei ist  $X \rightarrow S$  wie oben ein Repräsentant der semiuniversellen Deformation von  $(X_0, 0)$ .

**Beweis:** Wir definieren  $\varphi$  und  $\psi$  so, daß bei diesen Abbildungen jede Koordinate mit einer geeigneten Einheitswurzel multipliziert wird. Für die Koordinaten  $x, y, z$  ist dies schon durch die Definition von  $\varphi_0$  geschehen. Die Koordinate  $t_m$  zum Monom  $g_m = x^{i_m} y^{j_m} z^{k_m}$  wird multipliziert mit

$$e^{-2\pi\sqrt{-1}(\alpha i_m + \beta j_m + \gamma k_m)}.$$

## Lemma 5.

Es sei  $L = L_{pqr}$ ,  $(p,q,r) \in I_e$  ein exceptionelles 1-modulares Milnorgitter und  $\mathcal{L}^*(L)$  die oben definierte Menge der geometrischen Untergitter. Dann gilt: Zu jedem  $\bar{\gamma} \in O(G_L)$  existiert ein  $\gamma \in O(L)$  mit  $\tau(\gamma) = \bar{\gamma}$  und  $\gamma(\mathcal{L}^*(L)) = \mathcal{L}^*(L)$ .

**Beweis:** Nach Tabelle 6 gilt für 12 der 14 exceptionellen Tripel  $O(G_L) = \{1\}$  oder  $O(G_L) = \{\pm 1\}$ . Da die Einheit  $-1 \in O(L)$  natürlich  $\mathcal{L}^*(L)$  in sich überführt, ist in diesen 12 Fällen die Behauptung schon bewiesen. Es bleiben nur noch die Fälle  $(p,q,r) = (3,3,6)$  und  $(p,q,r) = (4,4,4)$  übrig. Im Fall  $(3,3,6)$  ist  $O(G_L)$  das cartesische Produkt von  $\{\pm 1\}$  und von einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2, welche die beiden isotropen Untergruppen der Ordnung 3 in  $G_L$  vertauscht. Im Fall  $(4,4,4)$  ist  $O(G_L)$  das cartesische Produkt von  $\{\pm 1\}$  und einer symmetrischen Gruppe  $S_3$ , welche die drei isotropen Untergruppen der Ordnung 2 in  $G_L$  permutiert. Da  $-1 \in O(L)$  wieder  $\mathcal{L}^*(L)$  invariant läßt, genügt es, die Existenz von Elementen  $\gamma \in O(L)$  mit  $\gamma(\mathcal{L}^*(L)) = \mathcal{L}^*(L)$  zu beweisen, so daß ihre Bilder  $\tau(\gamma) \in O(G_L)$  die fraglichen Permutationen von isotropen Untergruppen bewirken. Dazu genügt es nach Lemma 1 bis 4, die abelsche Gruppe  $G_L$  gemäß Lemma 2 mit  $G_{L_0}$  zu identifizieren und nach der Methode von Lemma 4 Abbildungen  $\varphi_0 : X_0 \rightarrow X_0$  zu definieren, so daß die induzierten Automorphismen  $\varphi_{0*}$  von  $G_{L_0}$  die fragliche Permutation von Untergruppen bewirken. Die Gitter  $L_0$  sind dabei leicht berechenbar, denn die Homologieklassen der exceptionellen Kurven der Auflösung  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  bilden eine Basis von  $L_0$ , und die Matrix der Skalarprodukte ist die Schnittmatrix der exceptionellen Kurven. Es ist leicht, für ein konkret gegebenes  $\varphi_0$  die Wirkung von  $\varphi_{0*}$  auf dieser Basis explizit zu berechnen. Wir geben nur die Ergebnisse an.



Der Fall  $(p, q, r) = (3, 3, 6)$ .

$X_0$  hat die Gleichung  $x^3 + yz^2 + y^5 = 0$ . Wir definieren  $\varphi_0$  durch  $\varphi_0(x, y, z) = (x, y, -z)$ . Der exzeptionelle Divisor der minimalen Auflösung  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  besteht aus drei singularitätenfreien rationalen Kurven  $C_1, C_2, C_3$  mit den Selbstschnittzahlen  $-2, -2, -5$ , welche sich in einem Punkte paarweise transversal schneiden. Ihre Schnittmatrix ist also

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Die durch  $\varphi_0$  induzierte Abbildung  $\varphi_0: \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_0$  vertauscht  $C_1$  und  $C_2$  und läßt  $C_3$  fest. Entsprechend vertauscht  $\varphi_{0*}$  die Elemente  $[C_1]$  und  $[C_2]$  der Basis  $[C_1], [C_2], [C_3]$  von  $L_0$ . Ist  $[C_1]^\vee, [C_2]^\vee, [C_3]^\vee$  die duale Basis von  $L_0^\#$ , dann repräsentieren  $[C_1]^\vee$  und  $[C_2]^\vee$  Erzeugende der beiden isotropen zyklischen Untergruppen von  $G_{L_0} = L_0^\# / L_0$ , und diese werden daher durch  $\tilde{\varphi}_{0*}$  miteinander vertauscht.

Der Fall  $(p, q, r) = (4, 4, 4)$ .

$X_0$  hat die Gleichung  $x^3 + y^3 + z^4 = 0$ . Wir definieren zwei biholomorphe Abbildungen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  von  $X_0$  auf sich selbst, und zwar wie folgt:

$$\varphi_0(x, y, z) = (e^{2\pi\sqrt{-1}/3} x, y, z)$$

$$\varphi_1(x, y, z) = (y, x, z).$$

Die Abbildung  $\varphi_0$  ist von der in Lemma 4 betrachteten Art und setzt sich daher wie dort zu einer Abbildung  $\varphi: X \rightarrow X$  für die semiuniverselle Deformation  $X \rightarrow S$  fort.

Eine solche Fortsetzung existiert aber auch für  $\varphi_1$ . Denn die zur Beschreibung von  $X \rightarrow S$  benutzten Basismonome  $1, g_1, \dots, g_{11}$  sind notwendigerweise die Monome  $x^i y^j z^k$  mit  $i, j \leq 1$  und  $k \leq 3$ . Der Vertauschung von  $x$  und  $y$  entspricht daher eine Permutation dieser Monome  $g_m$ . Die entsprechende Permutation der Koordinaten  $t_m$  liefert dann die Fortsetzung von  $\varphi_1$  auf die semiuniverselle Deformation. Daher ist unsere Methode, die Kombination von Lemma 1 bis 3, auch auf  $\varphi_1$  anwendbar.

Der exzeptionelle Divisor der minimalen Auflösung  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  besteht aus drei singularitätenfreien rationalen Kurven  $C_1, C_2, C_3$  mit Selbstschnitt  $-3$ , die sich in einem Punkte paarweise transversal schneiden. Sie entsprechen den drei Ebenen des Tangentialkegels  $x^3 + y^3 = 0$ . Ihre Schnittmatrix ist die folgende Matrix:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Bei geeigneter Numerierung der Kurven gilt für die durch  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$  induzierten Abbildungen  $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1: \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_0$  offenbar:

$\tilde{\varphi}_0$  permutiert  $C_1, C_2, C_3$  zyklisch.

$\tilde{\varphi}_1$  vertauscht  $C_1$  und  $C_2$ .

Sind  $[C_1]^\vee, [C_2]^\vee, [C_3]^\vee$  die dualen Basisvektoren von  $L_0^\#$  zur Basis  $[C_1], [C_2], [C_3]$  von  $L_0$ , dann repräsentieren  $2[C_1]^\vee, 2[C_2]^\vee, 2[C_3]^\vee$  Erzeugende der drei zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 in  $G_{L_0} = L_0^\# / L_0$ . Die von  $\tilde{\varphi}_0$  und  $\tilde{\varphi}_1$  induzierten Automorphismen  $\tilde{\varphi}_{0*}$  und  $\tilde{\varphi}_{1*}$  von  $G_{L_0}$  erzeugen offenbar die symmetrische Gruppe  $S_3$  der Permutationen dieser drei zyklischen Untergruppen. Damit ist Lemma 5 bewiesen.

Definition:

Es sei  $L = L_{pqr}$ ,  $(p, q, r) \in I_e$  ein exceptionelles 1-modulares Milnorgitter, und  $\mathcal{L}^*(L)$  die Menge der geometrischen Untergitter. Wir nennen  $E \in \mathcal{J}_1(L)$  geometrisch, wenn  $E^\perp \in \mathcal{L}^*(L)$ . Wir nennen  $E \in \mathcal{J}_2(L)$  geometrisch, wenn  $E^\perp \in \mathcal{L}^*(L)$ . Mit  $\mathcal{J}^*(L)$  bezeichnen wir die Menge der geometrischen Elemente von  $\mathcal{J}(L)$ .

Satz 6

Für alle  $L = L_{pqr}$ ,  $(p, q, r) \in I_e$ , gilt  $\mathcal{J}^*(L) = \mathcal{J}(L)$ .

Beweis: Natürlich läßt die Operation von  $O^*(L)$ , das ja nach dem Satz von Ebeling mit der Monodromiegruppe identisch ist, in  $\mathcal{L}(L)$  die Menge  $\mathcal{L}^*(L)$  und daher in  $\mathcal{J}(L)$  die Menge  $\mathcal{J}^*(L)$  invariant. Man hat also eine Inklusion

$$\mathcal{J}^*(L) / O^*(L) \subset \mathcal{J}(L) / O^*(L),$$

und es ist zu zeigen, daß diese Mengen sogar gleich sind.  $\mathcal{J}(L)/O^*(L)$  ist die Eckenmenge von  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$ . Auf  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  operiert die Gruppe  $O(L)/O^*(L)$ , und der Quotient ist  $\mathcal{F}(L)/O(L)$ . Der Hauptsatz 2.4, also die Synthese aus der vorliegenden arithmetischen Untersuchung der Gitter  $L_{pqr}$  und aus meiner früheren geometrischen Untersuchung der Singularitäten  $S_{pqr}$ , identifiziert  $\mathcal{F}(L)/O(L)$  mit dem groben Deformationsdiagramm:

$$\mathcal{F}(L_{pqr}) / O(L_{pqr}) = \mathcal{D}(S_{pqr}).$$

Daher enthält jede  $O(L)$ -Klasse in  $\mathcal{J}(L)$  geometrische Repräsentanten, und es folgt:

$$O(L)/O^*(L) \cdot [\mathcal{J}^*(L)/O^*(L)] = \mathcal{J}(L)/O^*(L).$$

Für die endliche Gruppe  $O(L)/O^*(L)$  hat man die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \bar{O}(L)/O^*(L) \longrightarrow O(L)/O^*(L) \longrightarrow O(L)/\bar{O}(L) \longrightarrow 1.$$

Die Gruppe  $\bar{O}(L)/O^*(L)$  operiert nach den Ergebnissen von Abschnitt 5.8. trivial auf  $\mathcal{J}_2(L)/O^*(L)$ . Ein Blick auf Tabelle 3 zeigt, daß sie dann auch trivial auf  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  und insbesondere auf  $\mathcal{J}_1(L)/O^*(L)$  operieren muß. Daher faktorisiert die Operation von  $O(L)/O^*(L)$  auf  $\mathcal{J}(L)$  über eine Operation von  $O(L)/\bar{O}(L) = O(G_L)$ , und es gilt dafür

$$O(G_L) \cdot [\mathcal{J}^*(L)/O^*(L)] = \mathcal{J}(L)/O^*(L).$$

Es ist also zu zeigen:

$$O(G_L) \cdot [\mathcal{J}^*(L)/O^*(L)] = \mathcal{J}^*(L)/O^*(L).$$

Dies folgt aber sofort aus Lemma 5. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Aus Satz 6 ergibt sich nun auch leicht der Beweis des letzten noch nicht bewiesenen in §2 angekündigten Ergebnisses.

Beweis von Satz 2.3.

Wie bereits in 1.13 bemerkt, gilt trivialerweise

$$\mathcal{K}(L) \supset \mathcal{K}(L) \cap \mathcal{L}^*(L) \subset \mathcal{K}_L^*$$

$$\mathcal{P}(L) \supset \mathcal{P}(L) \cap \mathcal{L}^*(L) \subset \mathcal{P}_L^*.$$

Aus 2.1 in Verbindung mit Satz 6 folgt:

$$\mathcal{K}(L) \subset \mathcal{L}^*,$$

$$\mathcal{P}(L) \subset \mathcal{L}^*.$$

Also folgt:

$$\mathcal{H}(L) \subset \mathcal{H}_L^*,$$

$$\mathcal{P}(L) \subset \mathcal{P}_L^*.$$

Aber es gelten auch die umgekehrten Inklusionen. Denn für  $N \in \mathcal{H}_L^*$  gilt  $N^0 \in \mathcal{J}_1(L)$ , also  $N \subset (N^0)^\perp \in \mathcal{H}(L) \subset \mathcal{H}_L^*$ . Da aber  $N$  maximal hyperbolisch in  $\mathcal{L}^*(L)$  ist, folgt  $N = (N^0)^\perp \in \mathcal{H}(L)$ . Entsprechend argumentiert man für  $N \in \mathcal{P}_L^*$  unter Benutzung von  $N \subset (\underline{N^0})^\perp \in \mathcal{P}(L) \subset \mathcal{P}_L^*$ . Also folgt:

$$\mathcal{H}(L) = \mathcal{H}_L^*,$$

$$\mathcal{P}(L) = \mathcal{P}_L^*.$$

Damit sind alle in §2 angekündigten Sätze bewiesen. Eine Frage, die offen bleibt, ist ob alle geometrischen parabolischen Untergitter maximal parabolisch sind,  $\mathcal{P}(L) = \mathcal{P}_L^*$  also einfach die Menge der geometrischen parabolischen Untergitter ist. Ich vermute, daß dies der Fall ist. Eine Antwort auf diese Frage könnte man von einer genaueren Untersuchung der parabolischen Strata in der semiuniversellen Deformation erhoffen. Ich vermute, daß die Zahl der Komponenten des Stratum eines gegebenen Typs gleich der Zahl der Punkte des entsprechenden Typs im Konfigurationsdiagramm  $\mathcal{F}(L)/O^*(L)$  ist. Ich vermute auch, daß die Art und Zahl der rationalen Doppelpunkte, die in einer Faser über speziellen Punkten eines parabolischen Stratum zusätzlich zu der parabolischen Singularität auftreten können, gerade durch die Wurzelgitter in der Spalte  $\underline{L}$  von Tabelle 9 in Verbindung mit dem Hauptsatz Theorem 5.9.1 beschrieben wird. Ich hoffe, daß sich jemand findet, der diese Vermutungen beweist. Die Widerspiegelung der Geometrie der Singularitäten in der Arithmetik ihrer quadratischen Formen würde dadurch noch schöner.

### Literatur

- [1] ARF, C.: Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2 (Teil I). Jour. f.d. reine u. angew. Math. 183, 148-167 (1941)
- [2] ARNOLD, V.I.: Classification of unimodal critical points of functions. Engl. Übersetzung in: Funct. Anal. Appl. 7, 230-231 (1973)
- [3] ARNOLD, V.I.: Critical points of smooth functions. Proceedings of the International Congress of Math. Vancouver, 19-39 (1974)
- [4] ARNOLD, V.I.: Local normal forms of functions. Invent. Math. 35, 87-109 (1976)
- [5] BAILY, W.L., BOREL, A.: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. of Math. 84, 442-528 (1966)
- [6] BOREL, A.: Introduction aux groupes arithmétiques. Hermann, Paris 1969
- [7] BOURBAKI, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6. Hermann, Paris 1968
- [8] BRIESKORN, E.: Singular elements of semisimple algebraic groups. Congrès international des mathématiciens à Nice 1971, Tome 2, 279-284
- [9] BRIESKORN, E.: Die Hierarchie der 1-modularen Singularitäten. Manuscripta math. 27, 183-219 (1979)
- [10] BRIESKORN, E.: The unfolding of exceptional singularities. Nova acta Leopoldina NF 52, Nr. 240 (1980)
- [11] BRIESKORN, E.: Milnor lattices and Dynkin diagrams. Erscheint in Proceedings of Symposia in Pure Math.
- [12] DICKSON, L.E.: Linear groups. Leipzig, B.G. Teubner, (1901)
- [13] DIEUDONNÉ, J.: La géométrie des groupes classiques. Ergebnisse der Math., N.F. Bd. 5, 2. Aufl. Springer, Berlin 1963
- [14] DOLGACEV, I.V.: Quotient-conic singularities of complex spaces. Engl. Übersetzung in Funct. Anal. Appl. 8, 75-76 (1974)
- [15] DOLGACEV, I.V.: Automorphic forms and quasihomogeneous singularities. Funct. Anal. Appl. 9, 67-68 (1975)

- [16] DOLGACEV, I.V., NIKULIN, V.V.: The exceptional singularities of V.I. Arnold, and K3-surfaces. Seventh All-Union Topology Conf. Abstracts of Lectures and Communications, Inst. Mat. Acad. Nauk BSSR, Minsk (1977)
- [17] DURFEE, A.H.: Bilinear and quadratic forms on torsion modules. *Advances in Math.* 25, 133-164 (1977)
- [18] DURFEE, A.: Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. *Extrait de L'Enseignement mathématique*, T. XXV, fasc. 1-2, 131-163 (1979)
- [19] EBELING, W.: Quadratische Formen und Monodromiegruppen von Singularitäten. *Math. Ann.* 255, 463-498 (1981)
- [20] EBELING, W.: On the monodromy groups of singularities. *Erscheint in Proc. of Symposia in Pure Math.*
- [21] GABRIELOW, A.M.: Intersection matrices for certain singularities. *Engl. Übersetzung in Funct. Anal. Appl.* 7, 182-193 (1973)
- [22] GABRIELOW, A.M.: Dynkin diagrams for unimodal singularities. *Engl. Übersetzung in Funct. Anal. Appl.* 8, Heft 3, 192-196 (1975)
- [23] GIBLIN, P.J., GIBSON, C.G.: On regularity conditions over exceptional unimodular families of singularities. *Quart. J. Math. Oxford* (2), 32, 23-43 (1981)
- [24] FRICKE, R.: *Lehrbuch der Algebra*, 3. Band. Vieweg, Braunschweig (1928)
- [25] KNESER, M.: Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen. *Archiv der Math.* 7, 323-332 (1956)
- [26] KNESER, M.: Klassenzahlen definiter quadratischer Formen. *Archiv der Math.* 8, 241-250 (1957)
- [27] KNESER, M.: Lineare Relationen zwischen Darstellungszahlen quadratischer Formen. *Math. Ann.* 168, 31-39 (1967)
- [28] KNESER, M.: Witts Satz für quadratische Formen über lokalen Ringen. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.* 195-203 (1972)
- [29] KNESER, M.: Quadratische Formen. *Vorlesungsaussarbeitung Göttingen* 1973/74
- [30] KNESER, M.: Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen. *Math. Ann.* 255, 453-462 (1981)
- [31] KLEIN, F., FRICKE, R.: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*. 2. Band, 1. Auflage 1892, Neudruck bei B.G. Teubner, Stuttgart 1966
- [32] KULIKOV, V.S.: Degenerate elliptic curves and resolution of uni- and bimodal singularities. *Funkt. Analiz i ego Prilozheniya*, 9:1, 72-73 (1975). *Engl. Übersetzung in: Funct. Anal. Appl.*, 9:1, 69-70 (1975)
- [33] LAMOTKE, K.: Die Homologie isolierter Singularitäten. *Math. Z.* 143, 27-44 (1975)
- [34] LOOIJENGA, E.: Root systems and elliptic curves. *Invent. math.* 38, 17-32 (1976)
- [35] LOOIJENGA, E.: On the semi-universal deformation of a simple-elliptic hypersurface singularity II, *Topology* 17, 23-40 (1977)
- [36] LOOIJENGA, E.: Homogeneous spaces associated to certain semi-universal deformations. *Proc. Int. Congress of Math. Helsinki* 1978, 529-536
- [37] LOOIJENGA, E.: Invariant theory for generalized root systems. *Invent. math.* 61, 1-32 (1980)
- [38] LOOIJENGA, E., PETERS, Ch.: Torelli theorems for Kähler K3 surfaces. *Compositio Math.* 42, 145-168, 1981
- [39] LOOIJENGA, E.: Rational surfaces with an anti-canonical cycle. *Erscheint in Ann. of Math.*
- [40] O'MEARA, O.T.: *Introduction to quadratic forms*. 3. Auflage, Springer, Berlin (1973)
- [41] MILNOR, J.: Singular points of complex hypersurfaces. *Ann. of Math. Studies* 61, Princeton Univ. Press, 1968.
- [42] NAKAMURA, I.: Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities, I. *Math. Ann.* 252, 221-235 (1980)
- [43] NIEMEIER, H.V.: Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1. *Jour. of Number Theory* 5, 142-178 (1973)
- [44] NIKULIN, V.V.: Integral symmetric bilinear forms and some of their applications. *Math. USSR Izvestija* 14 103-166 (1980)
- [45] OGG, A.P.: Rational points on certain elliptic modular curves. *Proc. Symposia in Pure Math.* 24, AMS Providence, 221-231 (1973)

- [46] OGG, A.P.: Hyperelliptic modular curves. Bull. Soc. Math. France 102, 449-462 (1974)
- [47] PINKHAM, H.C.: Simple elliptic singularities, Del Pezzo surfaces and Cremona transformations. Proc. of Symposia in Pure Math. Vol. 30, 69-71 (1977)
- [48] PINKHAM, H.C.: Singularités exceptionnelles, la dualité étrange d'Arnold et les surfaces K-3. C.R. Acad. Sc. Paris, 284, 615-618 (1977)
- [49] PINKHAM, H.C.: Groupe de monodromie des singularités unimodulaires exceptionnelles. C.R. Acad. Sc. Paris, 284, 1515-1518 (1977)
- [50] SERRE, J.-P.: Cours d'Arithmétique, Presses Universitaires de France, Paris 1970
- [51] SHIMURA, G.: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Publ. Math. Soc. Japan, No. 11, Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press 1971
- [52] SLODOWY, P.: Simple singularities and simple algebraic groups. Lecture Notes in Math. 815, Springer, Berlin (1980)
- [53] SLODOWY, P.: Chevalley groups over  $C((t))$  and deformations of simply elliptic singularities. RIMS Kokyuroku Nr. 415, Kyoto University 1981
- [54] SONDERGELD, K.-P.: Ein eindimensionaler Wittscher Satz für total indefinite  $Z$ -Gitter mit quadratfreier Diskriminante. Diplomarbeit, Math. Inst. Göttingen 1975/76
- [55] TITS, J.: Buildings of spherical type and finite BN-pairs. Lecture Notes in Math. 386, Springer, Berlin 1974.
- [56] WAHL, J.: Elliptic deformations of minimally elliptic singularities. Math. Ann. 253, 241-262 (1980)
- [57] WALL, C.T.C.: On the orthogonal groups of unimodular quadratic forms. Math. Ann. 147, 328-338 (1962)
- [58] WALL, C.T.C.: On the orthogonal groups of unimodular quadratic forms. II, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 213, 122-136 (1963)
- [59] WALL, C.T.C.: Quadratic forms on finite groups, and related topics. Topology 2, 281-298 (1964)
- [60] WALL, C.T.C.: Quadratic forms on finite groups II Bull. London Math. Soc., 4, 156-160 (1972)
- [61] WOLF, J.A.: Fine structure of Hermitian symmetric spaces. In: Symmetric spaces, Marcel Dekker, New York 1972.
- [62] EISENSTEIN, G.: Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung. Reimer, Berlin 1851.
- [63] FROBENIUS, G.: Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen. Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. zu Berlin, 1910
- [64] NEWMAN, M. - REINER, I.: Inclusion theorems for congruence subgroups. Trans. Amer. Math. Soc. 91, 369-379 (1959).
- [65] RANUM, A.: The groups of classes of congruent matrices, with application to the group of isomorphisms of any abelian group. Trans. Amer. Math. Soc. 8, 71-91 (1907).
- [66] SHODA, K.: Über die Automorphismen einer endlichen abelschen Gruppe. Math. Ann. 100, 674-686 (1928).
- [67] LIEBECK, H.: Concerning automorphisms in finitely generated Abelian groups. Proc. Camb. Phil. Soc. 59, 25-31 (1963)
- [68] BIRKHOFF, G.: Subgroups of Abelian Groups. Proc. of the London Math. Soc., Second Series, 38, 385-401 (1935).

Prof. Dr. E. Brieskorn  
 Mathematisches Institut  
 der Universität Bonn  
 Wegelerstr. 10  
 5300 Bonn