manuscripta math. 2, 103-161 (1970)

DIE MONODROMIE DER ISOLIERTEN SINGULARITÄTEN VON HYPERFLÄCHEN

Egbert Brieskorn

Abstract. J. Milnor recently introduced the local Picard-Lefschetz-monodromy of an isolated singularity of a hypersurface. This is an important tool in the investigation of the topology of singularities. The monodromy is an action on a certain cohomology group and is defined in topological terms. In this paper we find an algebraic description of the monodromy. We construct by algebraic methods a regular singular ordinary linear differential operator, such that the monodromy of this singular operator coincides with the Picard-Lefschetz monodromy. As an application we prove that the eigenvalues of the monodromy are roots of unity. Our treatment is close in spirit to Grothendiecks theory of the Gauß-Manin-connection.

§ 0. Resultate

0.0. John Milnor hat in [29] gezeigt, daß man für isolierte Singularitäten von Hyperflächen topologisch eine lokale Picard-Lefschetz-Monodromiedefinieren kann und daß diese Monodromie bis zu einem gewissen Grade die Topologie der Singularität bestimmt. Andererseits gibt es für die Picard-Lefschetz-Monodromie von Familien nichtsingulärer algebraischer Mannigfaltigkeiten Untersuchungen von A. Borel, C.H. Clemens [5] Ph.A. Griffiths [12], [13], [14], A. Grothendieck [16], N.M. Katz [20], [21], A. Landman [22] und F. Pham [31], welche die klassischen Resultate von Picard [32]und Lefschetz [24] verallgemeinern. Insbesondere ist von Grothendieck und anderen hierzu eine algebraische Theorie entwickelt worden, die Theorie des Gauß-Manin-Zusammenhangs. Während diese Theorie jedoch Familien von Mannigfaltigkeiten ohne Singularitäten voraussetzt, werden in der vorliegenden Arbeit einparametrige Familien von Mannigfaltigkeiten mit isolierten Singularitäten untersucht. Es wird ein singulärer lokaler Gauß-Manin-Zusammenhang für isolierte Singularitäten von Hyperflächen eingeführt. Dieser liefert eine rein algebraische Berechnung der ursprünglich topologisch definierten lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie. Durch die Beschränkung auf den speziellen Fall isolierter Singularitäten von Hyperflächen wird die Theorie sehr einfach und explizit.

0.1. Wir erinnern zunächst an Milnors Beschreibung der lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie und ihre topologische Bedeutung. Es sei $f : Y \to T$ eine holomorphe Abbildung einer $(n + 1)$- dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit Y auf eine 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit T. Es sei $x \in Y$ ein isolierter singulärer Punkt von f. Die durch x gehende Faser $f^{-1}(f(x))$ der Abbildung f hat dann also in x eine n-dimensionale isolierte Hyperflächensingularität. Nun wähle man eine Koordinatenumgebung von x und darin eine hinreichend kleine offene Vollkugel V_x mit Zentrum x. Deren Rand ∂V_x ist eine $(2n + 1)$-dimensionale Sphäre. Es sei

$$\Sigma_{f,x} = f^{-1}(f(x)) \cap \partial V_x .$$

$\Sigma_{f,x}$ ist eine kompakte, orientierte, $(2n-1)$-dimensionale C^∞ - Mannigfaltigkeit, deren Diffeomorphietyp nur von der Singularität der Faser von f in x abhängt. Man interessiert sich für diese Mannigfaltigkeiten u.a. deswegen, weil nach [4] unter ihnen alle ungeradedimensionalen exotischen Sphären vorkommen, welche parallelisierbare Mannigfaltigkeiten beranden.

Milnor hat die folgende Methode zur Untersuchung der Mannigfaltigkeit $\Sigma_{f,x}$ entwickelt. Es sei S eine hinreichend kleine offene Kreisscheibe in T um den Bildpunkt $s = f(x)$ und es sei $X = f^{-1}(S) \cap V_x$. Die Abbildung f induziert eine Abbildung

$$f : X \to S \quad ,$$

deren Fasern wir mit $X_t = f^{-1}(t)$, $t \in S$, bezeichnen. X_s ist die singuläre Faser. $X - X_s \to S - s$ ist nach Milnor ein differenzierbares lokal-triviales Faserbündel. Seine Fasern X_t, $t \neq s$, haben den Homotopietyp einer einpunktigen Vereinigung von n - Sphären. Dabei kann die Zahl $b_{f,x}$ dieser Sphären folgendermassen berechnet werden. Bezüglich lokaler komplexer Koordinaten in X und S ist f durch eine Funktion $f(z_o,\dots,z_n)$ gegeben. Weil f in x eine isolierte Singularität hat, enthält das von den partiellen Ableitungen von f in dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ von X in x erzeugte Ideal eine Potenz des maximalen Ideals. Daher ist der Restklassenring nach diesem Ideal ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Es gilt

$$b_{f,x} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x} / (\partial f/\partial z_o,\dots,\partial f/\partial z_n) \ .$$

Für diese Formel geben wir im Anhang einen elementaren Beweis, der vielleicht einfacher ist als der von Milnor. Einen weiteren Beweis hat inzwischen der vietnamesische Mathematiker Lê Dũng Trang in [23] gegeben. - Weil $X - X_s \to S - s$ ein differenzierbares Faserbündel ist, operiert für $t \in S - s$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(S - s,t)$ auf der ganzzahligen singulären Cohomologie der Faser $H^*(X_t, \mathbb{Z})$. Es sei h das erzeugende Element mit positivem Drehsinn in der unendlich zyklischen Fundamentalgruppe $\pi_1(S-s)$. Dann gehört zu h ein Automorphismus

$$h_{f,x} : H^n(X_t,\mathbb{Z}) \to H^n(X_t,\mathbb{Z}) \ .$$

Dies ist die <u>lokale</u> <u>Picard</u>-<u>Lefschetz</u>-<u>Monodromie</u> von f in x. Es sei $\Delta_{f,x}$ das charakteristische Polynom von $h_{f,x}$.

$$\Delta_{f,x}(\lambda) = \det(\lambda \cdot 1 - h_{f,x}) \ .$$

Milnor beweist in [29]:

Satz (Milnor)

i) Für $n \neq 2$ ist $\Sigma_{f,x}$ homöomorph zu einer Sphäre genau wenn $\Delta_{f,x}(1) = \pm 1$.

ii) $\Sigma_{f,x}$ sei homöomorph zu einer $(2n-1)$-Sphäre, n ungerade, und Σ sei die $(2n-1)$-dimensionale Kervaire-Sphäre. Dann gilt $\Sigma_{f,x} = c\,\Sigma$, wobei
$c = 0$ für $\Delta_{f,x}(-1) \equiv \pm 1(8)$
$c = 1$ für $\Delta_{f,x}(-1) \equiv \pm 3(8)$.

In diesem Sinne bestimmt die lokale Picard-Lefschetz-Monodromie die Topologie von $\Sigma_{f,x}$, und Milnor hat daher die Forderung aufgestellt, einen Algorithmus zur Berechnung von $\Delta_{f,x}$ anzugeben. Genau das soll in dieser Arbeit getan werden.

0.2. Wir haben keine Methode zur Berechnung der ganzzahligen Monodromie $h_{f,x}$. Was wir berechnen können, ist die komplexe lokale Picard-Lefschetz-Monodromie

$$h_{f,x} : H^n(X_t,\mathbb{C}) \to H^n(X_t,\mathbb{C}) .$$

Deren Kenntnis genügt natürlich zur Berechnung von $\Delta_{f,x}$. Es sei $X' = X - X_s$ und $S' = S - s$. Dann ist, wie schon bemerkt, $f : X' \to S'$ ein differenzierbares Faserbündel. Deshalb sind die komplexen Vektorräume $H^n(X_t,\mathbb{C})$, $t \in S'$, die Fasern eines flachen komplexen Vektorraumbündels H^n über S'. Das heißt, daß das Vektorbündel H^n durch Bündelkarten mit konstanten Übergangsfunktionen beschrieben werden kann. Die Garbe der lokal konstanten Schnitte in H^n ist die n - te Bildgarbe

$$R^n f_* \, \mathbb{C}_{X'}$$

der auf X' konstanten Garbe $\mathbb{C}_{X'}$ der komplexen Zahlen. Weil

H^n flach und S' eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, ist H^n natürlich ein holomorphes Vektorraumbündel über S'. Die Garbe $\mathcal{H}^n$ der Keime aller holomorphen Schnitte in H^n ist kanonisch isomorph zu

$$R^n f_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathcal{O}_{S'} \quad .$$

Das flache Vektorraumbündel H^n hat einen wohlbestimmten holomorphen Zusammenhang, den wir, weil er topologisch definiert ist, den <u>lokalen transzendenten Zusammenhang</u> der Singularität von f in x nennen wollen. Zur Beschreibung des Zusammenhangs genügt die Angabe der covarianten Ableitung bezüglich der Vektorfelder auf S'. Wir wählen auf S ein für alle Mal eine komplexe Koordinate, die wir auch mit f bezeichnen, und beschreiben die Abbildung $f : X \to S$ dann durch die entsprechende holomorphe Funktion. Die Funktion f auf S' definiert ein nirgends verschwindendes Vektorfeld $\partial/\partial f$ auf S', und weil S' eindimensional ist, genügt zur Beschreibung des Zusammenhangs die covariante Ableitung ∇ bezüglich $\partial/\partial f$.

$$\nabla : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}^n$$

ist dadurch charakterisiert, dass für alle $c \in (R^n f_* \mathbb{C}_{X'})_t$ und $g \in \mathcal{O}_{S',t}$ gilt

$$\nabla(c \otimes g) = c \otimes \frac{dg}{df}$$

Es ist klar, daß man aus dem lokalen transzendenten Zusammenhang durch Integration sofort die komplexe lokale Picard-Lefschetz-Monodromie erhält. Und umgekehrt bestimmt die Monodromie im wesentlichen den Zusammenhang. Der Grund für die Einführung dieses zusätzlichen Begriffs ist, daß man für den Zusammenhang eine algebraische Beschreibung geben kann.

0.3. Die algebraische Beschreibung des lokalen Zusammenhangs geht davon aus, daß man die Cohomologie der Steinschen Mannigfaltigkeiten X_t bekanntlich mit holomorphen Differentialformen berechnen kann. Da wir dies für variables t tun wollen, betrachten wir den Komplex der relativen Differentialformen (vgl. [15] EGA IV, § 16.6)

$$\Omega^{\cdot}_{X/S} = \{\Omega^p_{X/S} , d^p\} ,$$

b.z.w. analog $\Omega^{\cdot}_{X'/S'}$. Dabei ist

$$\Omega^p_{X/S} = \Omega^p_X/df \wedge \Omega^{p-1}_X ,$$

und d^p ist von der üblichen Ableitung für die Differentialformenkeime aus Ω^p_X induziert. Man hat einen kanonischen Isomorphismus von $\mathcal{H}^n$ mit der n-ten Cohomologie des Komplexes $f_*\Omega^{\cdot}_{X'/S'}$

$$H^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X'/S'}) \cong \mathcal{H}^n .$$

Diesen Isomorphismus erhält man natürlich folgendermassen. Jeder Repräsentant eines Schnittes in $H^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X'/S'})$ ordnet jedem $t \in S'$ in seinem Definitionsgebiet eine (geschlossene) holomorphe n-Form auf X_t zu. Diese definiert eine Cohomologieklasse in $H^n(X_t,\mathbf{C})$, und damit erhält man einen Schnitt in $\mathcal{H}^n$.

Während man bei der Garbe $\mathcal{H}^n$ auf S' nicht ohne weiteres sieht, wie man sie geeignet auf S fortsetzen könnte, ist es mit $H^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X'/S'})$ ganz anders. Wir definieren nämlich eine Garbe $\mathcal{H}^n(X/S)$ auf ganz S durch

$$\mathcal{H}^n(X/S) = H^n(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S}) .$$

Analog bezeichnen* wir mit $\mathcal{H}^n(X'/S')$ die Garbe $H^n(f_* \Omega^{\cdot}_{X'/S'})$. Dies ist natürlich die Beschränkung von $\mathcal{H}^n(X/S)$ auf S'. Wir werden in § 1 beweisen, daß $\mathcal{H}^n(X/S)$ eine kohärente analytische Garbe auf S ist.

Wir werden nun auf $\mathcal{H}^n(X/S)$ in algebraischer Weise die covariante Ableitung ∇ eines "Zusammenhangs" mit einer polartigen Singularität definieren. Dies ist dann unser <u>lokaler</u> <u>Gauß-Manin-Zusammenhang</u>. Wir betrachten den relativen Differentialformenkomplex $\Omega^{\cdot}_{X/S}$ im Punkte x (ausserhalb ist er exakt), also

$$\Omega^{\cdot}_{f,x} = \{ \Omega^p_{X/S,x} \ , \ d^p \} .$$

Wir werden in § 1 sehen, daß man folgenden kanonischen Isomorphismus für den Halm von $\mathcal{H}^n(X/S)$ in s hat:

$$\mathcal{H}^n(X/S)_s = H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x}) .$$

Insbesondere ist also $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x})$ wegen der Kohärenz von $\mathcal{H}^n(X/S)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_{S,s}$- Modul. Dieser $\mathcal{O}_{S,s}$-Modul $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x})$ ist völlig invariant definiert. Er hängt per definitionem nur von der Singularität von f in x ab. Daher werden wir, da wir ja eine rein lokale Theorie für die Monodromie der Singularität entwickeln wollen, möglichst alle Aussagen für $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x})$ formulieren, und nicht für das erst nach Wahl von X und S definierte $\mathcal{H}^n(X/S)$. Man kann vermuten, daß der Modul $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x})$ frei ist, daß also die Torsion in $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x})$ verschwindet. Für den Fall, daß dies nicht so ist, definieren wir

$$H^n_{f,x} = H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x}) \ / \ \text{Torsion} .$$

---

*Für jeden aufsteigenden Komplex $K^{\cdot}$ von Garben bezeichnen wir mit $H^p(K^{\cdot})$ die p-te Cohomologie-Garbe des Komplexes. Das gleiche gilt für Komplexe von Moduln etc.

Nun definieren wir eine Ableitung $\nabla_{f,x}$ auf $H^n(\Omega^{\bullet}_{f,x})$ durch die Formel

$$\boxed{\nabla_{f,x}\,\omega = \frac{d\omega}{df}}$$

Diese Formel ist folgendermassen zu interpretieren. Es sei $\tilde{\omega} \in \Omega^n_{X,x}$ ein Repräsentant von $\omega \in H^n(\Omega^{\bullet}_{f,x})$. Dann gilt $d\tilde{\omega} = df \wedge \psi$ mit $\psi \in \Omega^n_{X,x}$. Dann ist $d\omega/df$ das durch ψ repräsentierte Element in cokern $d^{n-1} = \Omega^n_{f,x}/ d\Omega^{n-1}_{f,x}$. Dass dies wohldefiniert ist, ergibt sich aus folgendem Lemma von de Rham [7]

<u>Lemma</u> (de Rham)

<u>Es sei</u> A <u>ein kommutativer Ring, und</u> $\omega \in A^m$ <u>eine Primsequenz und</u> $\alpha \in \Lambda^p(A^m)$, $p < m$. <u>Dann existiert ein</u> $\beta \in \Lambda^{p-1}(A^m)$ <u>mit</u> $\alpha = \omega \wedge \beta$ <u>genau wenn</u> $\omega \wedge \alpha = 0$.

Wenn A ein Macaulay - Ring ist, ist ω eine Primsequenz genau wenn es zu einem System von Parametern ergänzt werden kann. Insbesondere trifft dies auf den regulären lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ zu. Wir nehmen $A^m = \Omega^1_{X,x}$, und $\omega = df$. Dann erfüllt dies die Bedingung des Lemmas genau wenn f eine isolierte Singularität in x hat. Es gilt also: <u>Eine</u> p - <u>Form</u> $\alpha \in \Omega^p_{X,x}$, $p \leq n$ <u>ist genau dann von der Form</u> $\alpha = df \wedge \beta$, <u>wenn</u> $df \wedge \alpha = 0$. Diese Bemerkung wird im folgenden oft ohne besonderen Hinweis verwendet. Die Ableitung $\nabla_{f,x}$ ist keine Abbildung von $H^n(\Omega^{\bullet}_{f,x})$ auf sich, aber dafür gilt trivialerweise folgendes. Es sei

$$f^k \in (\partial f/\partial z_0, \ldots, \partial f/\partial z_n) \subset \mathcal{O}_{X,x} \quad .$$

Ein k mit dieser Eigenschaft existiert stets. Dann gilt f^k cokern $d^{n-1} \subset H^n(\Omega^{\bullet}_{f,x})$, und daher hat man eine Abbildung

$$f^k \cdot \nabla_{f,x} : H^n(\Omega^{\bullet}_{f,x}) \to H^n(\Omega^{\bullet}_{f,x}) \quad .$$

Die Ableitung $\nabla_{f,x}$ hat offensichtlich folgende Eigenschaften:

(i) $\nabla_{f,x}$ ist $\mathbb{C}$ - linear

(ii) Für $\omega \in H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x})$ und $g \in \mathcal{O}_{S,s}$ gilt:

$$\nabla_{f,x}(g\cdot\omega) = g\cdot\nabla_{f,x}(\omega) + \frac{dg}{df}\,\omega \quad .$$

Ferner bildet $\nabla_{f,x}$ offensichtlich Torsion in Torsion ab und ist damit auch auf $H^n_{f,x}$ definiert. $\nabla_{f,x}$ definiert also auf $H^n_{f,x}$ einen Keim eines singulären gewöhnlichen linearen Differentialoperators 1. Ordnung mit einem Pol der Ordnung $\leq k$.

Wegen $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x}) = \mathcal{H}^n(X/S)_s$ induziert $\nabla_{f,x}$ eine Abbildung $f^k\nabla \;:\; \mathcal{H}^n(X/S) \to \mathcal{H}^n(X/S)$. Wir werden auf einfache Weise zeigen, daß diese auf $\mathcal{H}^n(X'/S')$ bei dem Isomorphismus mit $\mathcal{H}^n$ mit dem transzendent definierten $f^k\nabla$ übereinstimmt. Wir fassen zusammen. Unter Ausnutzung der Kohärenz von $\mathcal{H}^n(X/S)$ und der Resultate von Milnor erhalten wir folgendes Ergebnis.

Satz 1.

i) $H^n_{f,x}$ ist ein freier $\mathcal{O}_{S,s}$- Modul vom Rang $b_{f,x}$.

ii) Die covariante Ableitung $\nabla_{f,x}$ des lokalen Gauß-Manin-Zusammenhangs ist durch $\nabla_{f,x}\ \omega = d\omega/df$ definiert. $\nabla_{f,x}$ ist ein singulärer gewöhnlicher Differentialoperator erster Ordnung auf $H^n_{f,x}$. Dieser identifiziert sich kanonisch mit der covarianten Ableitung des lokalen transzendenten Zusammenhangs.

iii) Die Monodromie des singulären Differentialoperators $\nabla_{f,x}$ identifiziert sich daher kanonisch mit der komplexen lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie von f in x.

0.4. Im allgemeinen gibt es keinen Algorithmus zur Berechnung der Monodromie eines singularen gewöhnlichen linearen Differentialoperators. In dem Spezialfall jedoch, wo die Singularität nur ein Pol 1. Ordnung ist, kann man Lösungen und Monodromie explizit berechnen. Dabei erhält man z.B. folgendes (vgl. etwa [6], Ch.4.4) . Es seien μ_j die Eigenwerte der den Pol beschreibenden Matrix. Dann gilt für das charakteristische Polynom Δ der Monodromie der Differentialgleichung

$$\Delta(\lambda) = \Pi\left(\lambda - e^{2\pi i \mu_j}\right) .$$

Ein singulärer gewöhnlicher linearer Differentialoperator heißt regulär singulär, wenn er durch eine lineare Transformation der abhängigen Variablen in einen Differentialoperator mit einem Pol höchstens 1. Ordnung übergeht. Die Resultate von D.A. Lutz [26] und J. Moser [3o] zeigen, daß die Transformationsmatrix dann durch Lösen endlich vieler algebraischer Gleichungen gefunden werden kann. In diesem Sinn ist also die Monodromie eines regulären singulären Operators explizit berechenbar. Daraus ergibt sich die Bedeutung des folgenden Satzes, den wir in § 2 aus einem analogen globalen Resultat von Griffiths [14] ableiten.

Satz 2.

$\nabla_{f,x}$ ist regulär singulär.

0.5. In § 3 werden wir sehen, daß $\nabla_{f,x}$ in gewissem Sinne algebraisch definiert ist. Um diese Aussage zu präzisieren, wählen wir die komplexen Koordinaten $z_o,\ldots,z_n$ in X so, daß die Potenzreihenentwicklung von f in x nach $z_o,\ldots,z_n$ ein Polynom $f \in \mathbb{C}[z_o,\ldots,z_n]$ ergibt. (Weil f in x eine isolierte Singularität hat, ist dies stets möglich (vgl.[27]

3.5 und 9.1)). Nun sei $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ irgendein Automorphismus des Körpers der komplexen Zahlen. Anwendung von ϕ auf die Koeffizienten von f gibt ein neues Polynom $f' = \phi f \in \mathbb{C}[z_o,\dots,z_n]$, das für $z = 0$ auch wieder eine isolierte Singularität hat. Ferner sei $H^{n\wedge}_{f,x}$ die Komplettierung des $\mathcal{O}_{S,s}$- Moduls $H^n_{f,x}$; analog definiert man $H^{n\wedge}_{\phi f,x}$, Wir werden sehen, daß ϕ nach Wahl der z_i kanonisch einen Isomorphismus

$$\phi : H^{n\wedge}_{f,x} \longrightarrow H^{n\wedge}_{\phi f,x}$$

induziert, der mit dem kanonisch von ϕ induzierten Isomorphismus $C[[f]] \to C[[f']]$ verträglich ist. Nun zu $\nabla_{f,x}$! Natürlich lässt sich $\nabla_{f,x}$ kanonisch auf $H^{n\wedge}_{f,x}$ fortsetzen. Wir geben nun ad hoc die folgende Definition: $\nabla_{f,x}$ ist <u>algebraisch definiert</u>, wenn für jeden Automorphismus ϕ von $\mathbb{C}$ gilt

$$\phi \circ \nabla_{f,x} = \nabla_{\phi f,x} \circ \phi \quad .$$

<u>Satz 3</u>

$\nabla_{f,x}$ <u>ist algebraisch definiert.</u>

<u>0.6.</u> Als Anwendung der Sätze 1 bis 3 beweisen wir folgenden Satz.

<u>Satz 4</u>

$\Delta_{f,x}$ <u>ist ein Produkt von zyklotomischen Polynomen.</u>

<u>Beweis:</u>

(1) $\Delta_{f,x}$ ist ein ganzzahliges Polynom, denn es ist das charakteristische Polynom eines Automorphismus einer ganzzahligen Cohomologiegruppe.

(2) $\Delta_{f,x}$ ist das charakteristische Polynom der Monodromie des Differentialoperators $\nabla_{f,x}$.

(3) $\nabla_{f,x}$ ist regulär singulär. Deswegen und wegen (2) sind die Wurzeln von $\Delta_{f,x}$ von der Form $e^{2\pi i\mu_j}$, wo μ_j die Eigenwerte der Matrix sind, die - nach geeigneter Variablentransformation - den Pol von $\nabla_{f,x}$ beschreibt.

(4) $\nabla_{f,x}$ ist algebraisch definiert. Deswegen müssen die Zahlen μ_j algebraisch sein. Wäre μ_j transzendent, so gäbe es einen Automorphismus ϕ von C, für welchen $e^{2\pi i\phi(\mu_j)}$ transzendent wäre. Aber wegen der Algebraizität von $\nabla_{f,x}$ ist $e^{2\pi i\phi(\mu_j)}$ eine Wurzel von $\Delta_{\phi f,x}$, also nach (1) algebraisch.

(5) Das 7. Hilbertsche Problem [19] ist von Gelfond [8] und Schneider [34] positiv gelöst worden. Insbesondere gilt, wie von Hilbert vermutet: Für irrational algebraisches μ ist $e^{2\pi i\mu}$ transzendent.

(6) Damit ergibt sich, daß die Wurzeln $e^{2\pi i\mu_j}$ von $\Delta_{f,x}$ Einheitswurzeln sind, denn sie sind nach (1) algebraisch, während nach (4) die μ_j algebraisch sind, also nach (5) rational sein müssen. Daher folgt wegen (1), daß $\Delta_{f,x}$ Produkt cyclotomischer Polynome ist. q.e.d.

Satz 4 war von J. Milnor vermutet worden. Dieser Satz kann auch aus den analogen globalen Sätzen über die Eigenwerte der Picard- Lefschetz- Monodromie hergeleitet werden, die von A. Grothendieck, A. Landman [22], C.H. Clemens [5], N.M. Katz und A. Borel bewiesen wurden. Umgekehrt gibt, wie mir P. Deligne erklärt hat, die obige Folge von Argumenten - Ganzzahligkeit, Regularität, Algebraizität, 7. Hilbertsches Problem - einen neuen Beweis des erwähnten Satzes im globalen algebraischen Fall.

0.7. Angesichts der Einfachheit der oben beschriebenen Resultate scheue ich mich, die Namen aller zu nennen, von denen ich mir habe helfen lassen. Ich muß aber doch

Th. Bloom, H. Grauert, Ph.A. Griffiths, H. Hironaka, R. Narasimhan und D. Mumford erwähnen. Ganz besonders aber danke ich P. Deligne für seine Hilfe. Der Kohärenzbeweis stammt von ihm - natürlich nicht etwaige Mängel der Darstellung. Das gleiche gilt für die jetzige Darstellung der Algebraizität - mein ursprüngliches Argument war nicht so einfach. - Schließlich danke ich M.F.Atiyah und B. Eckmann für zwei Gastaufenthalte am Mathematischen Institut der Universität Oxford und am Mathematischen Forschungsinstitut der ETH, während welcher ein grosser Teil dieser Arbeit entstanden ist.

§ 1. Kohärenz

1.1. Um den Kohärenzsatz von Grauert und den Regularitätssatz von Griffiths anwenden zu können, zeigen wir zunächst, daß man jede isolierte Hyperflächensingularität als Singularität einer eigentlichen holomorphen Abbildung komplexer Mannigfaltigkeiten erhalten kann.

Wie wir schon in 0.5 bemerkt haben, ist von Mather, Tougeron und anderen bewiesen worden, daß nach geeigneter Wahl der Koordinaten jede isolierte Hyperflächensingularität als Singularität eines Polynoms im Nullpunkt beschrieben werden kann. Wenn man zu diesem Polynom ein homogenes Polynom H hinreichend hohen Grades addiert, erhält man ein neues Polynom $F(z_o,\ldots,z_n)$, dessen Singularität im Nullpunkt zu der ursprünglichen Singularität analytisch äquivalent ist - weil die Singularität isoliert ist, folgt dies wieder aus den Ergebnissen von Mather. Nun sei V die projektiv algebraische Varietät in $P_{n+1} \times P_1$ mit der affinen Gleichung

$$F(z_o,\ldots,z_n) - t = 0 \quad ,$$

wo $z_o,\ldots,z_n$ und t affine Koordinaten in den projektiven Räumen P_{n+1} und P_1 sind. Es wird vorausgesetzt, daß H hinreichend allgemein gewählt ist. Dann folgt aus den Sätzen von Bertini, daß die durch die Projektion auf P_1 induzierte Abbildung $f : V \to P_1$ nur endlich viele singuläre Fasern V_t hat, und daß die Faser V_o über $t = 0$ nur einen singulären Punkt x hat. Es sei T eine Kreisscheibe in P_1 um $t = 0$ derart, daß für $t \in T$ mit $t \neq 0$ die Faser V_t nichtsingulär ist, und es sei $Y' = f^{-1}(T)$. Dann gilt:

$$f : Y' \to T$$

ist eine eigentliche holomorphe Abbildung komplexer Mannigfaltigkeiten, die außerhalb $x \in Y'$ nichtsingulär ist und in x die vorgegebene Singularität hat.

1.2. (a) Für die Abbildung $f : Y' \to T$ wählen wir die Umgebungen X von x und S von $s = f(x)$ wie in Abschnitt 0.1 und benutzen auch sonst die in der Einleitung eingeführten Bezeichnungen. Insbesondere bezeichnet $\mathcal{H}^n(X/S)$ die relative de Rhamsche Cohomologie. In diesem Abschnitt soll die Kohärenz von $\mathcal{H}^n(X/S)$ bewiesen werden.

Es sei $Y = \{y \in Y' \mid f(y) \in S\}$, ferner sei $\overline{X}$ die Abschließung von X in Y, und es sei $Z = Y - \overline{X}$. Man hat also eine eigentliche holomorphe Abbildung

$$f : Y \to S \quad ,$$

die außerhalb $x \in X$ nichtsingulär ist und deren Beschränkung

$$f : Z \to S$$

differenzierbar ein triviales Faserbündel ist. Analog zu der üblichen exakten Cohomologiesequenz des abgeschlossenen Unterraumes $\overline{X}$ von Y werden wir eine aufsteigende lange exakte Sequenz von Garben von $\mathcal{O}_S$ - Moduln konstruieren:

$$\ldots \to \mathcal{H}^p_c(Z/S) \to \mathcal{H}^p(Y/S) \to \mathcal{H}^p(X/S) \to \ldots$$

Die Kohärenz von $\mathcal{H}^p(X/S)$ wird bewiesen, indem gezeigt wird, daß die übrigen Garben in dieser Sequenz kohärent sind.

(b) Die Garben in der obigen Sequenz werden mittels des relativen Differentialformenkomplexes definiert. Zu diesem Komplex bemerken wir zunächst folgendes

Lemma 1.1.

$f : Y \to S$ sei eine holomorphe Abbildung komplexer Mannigfaltigkeiten. $\Omega^{\cdot}_{Y/S}$ sei der relative Differentialformenkomplex, und $f^* \mathcal{O}_S \subset \mathcal{O}_Y$ sei die (topologische) Urbildgarbe von $\mathcal{O}_S$. Dann gilt:
Wenn f in $y \in Y$ nichtsingulär ist, ist der folgende Komplex exakt:

$$0 \to (f^* \mathcal{O}_S)_y \to \Omega^{\cdot}_{Y/S,y} \quad .$$

Bemerkung: Wenn S eindimensional ist und y eine isolierte Singularität, gilt, wie aus Satz 1 (i) hervorgeht, auch die Umkehrung.

Beweis: Der Beweis des Lemmas ist eine triviale Modifikation des üblichen Beweises des Poincaré-Lemmas. Bezüglich geeigneter lokaler komplexer Koordinaten wird f in der Umgebung von y durch $f(z_1,\ldots,z_m) = (z_{k+1},\ldots,z_m)$ beschrieben.
Indem man die übliche Konstruktion eines Homotopieoperators nur auf die Koordinaten $z_1,\ldots,z_k$ anwendet, definiert man für $p > 0$ Abbildungen $T : \Omega^p_{Y,y} \to \Omega^{p-1}_{Y,y}$ mit $Td' + d'T = 1$, wo d' die Ableitung von Differentialformen bezüglich $z_1,\ldots,z_k$ ist. Für ein $(\alpha) \in \Omega^p_{Y/S,y}$ mit $d(\alpha) = 0$ gibt es dann einen Repräsentanten $\alpha \in \Omega^p_{Y,y}$ mit $d'\alpha = 0$, mithin

$d'T\alpha = \alpha$ und also $d(T\alpha) = (\alpha)$. Damit ist die Exaktheit bewiesen.

(c) In Abschnitt 0.3 wurde die relative de Rhamsche Cohomologie $\mathcal{H}^n(X/S)$ eingeführt. Allgemeiner kann man für jedes p relative de Rhamsche Cohomologiegarben definieren durch

$$\mathcal{H}^p(X/S) = H^p(f_* \Omega^{\cdot}_{X/S}) \quad .$$

Wir werden allerdings sehen, daß diese für $p \neq 0,n$ verschwinden. Daß die obige Definition die gewünschte topologische Bedeutung hat, folgt daraus, daß X Steinsch ist, und daß für Steinsche Mannigfaltigkeiten die Cohomologie mit komplexen Koeffizienten isomorph zu der de Rhamschen Cohomologie ist. Für eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit W ist die Sache komplizierter. Aus dem Poincaré - Lemma folgt die Entartung der Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^p(W, H^q(\Omega^{\cdot}_W)) \Longrightarrow \mathbb{H}^{\cdot}(W, \Omega^{\cdot}_W)$$

und damit ein kanonischer Isomorphismus

$$H^{\cdot}(W, \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^{\cdot}(W, \Omega^{\cdot}_W)$$

zwischen Cohomologie mit komplexen Koeffizienten und <u>de Rham-Hypercohomologie</u> (vgl. [15] EGAO § 12.4 und [16]). Daher definiert man für $f : Y \to S$ die <u>relative de Rhamsche Cohomologie</u> $\mathcal{H}^p(Y/S)$ als die p-te Hypercohomologie des Funktors f_* bezüglich des Komplexes $\Omega^{\cdot}_{Y/S}$ im Sinne von EGA 0 § 11.4, also

$$\mathcal{H}^p(Y/S) = \mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{Y/S}) \quad .$$

Eine analoge Definition für X stimmt mit der alten Definition überein, also

$$\mathcal{H}^p(X/S) = \mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S}) \quad ,$$

denn die erste Spektralsequenz

$$'E_2^{pq} = H^p(R^q f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S})) \Longrightarrow \mathbb{R}^{\cdot} f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S})$$

entartet, da $R^q f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S}) = 0$ für $q > 0$, weil X Steinsch ist.

Der relative Komplex $\Omega^{\cdot}_{Y/S}$ einer holomorphen Abbildung $f : Y \to S$ ist zwar kein Komplex von $\mathcal{O}_Y$ - Moduln, aber ein Komplex von $f^* \mathcal{O}_S$- Moduln. Daher kann die zur Definition der Hypercohomologie verwendete injektive Auflösung von $\Omega^{\cdot}_{Y/S}$ in der Kategorie der $f^* \mathcal{O}_S$ - Moduln gewählt werden, und die Spektralsequenzen der Hypercohomologie sind Spektralsequenzen von $\mathcal{O}_S$- Moduln. Da nun für eigentliches f nach Grauerts Endlichkeitssatz [11] der Komplex $R^q f_*(\Omega^{\cdot})$ ein Komplex von cohärenten $\mathcal{O}_S$ - Moduln ist, folgt wegen der Biregularität der ersten Spektralsequenz

<u>Lemma 1.2.</u>

<u>Für eigentliches</u> $f : Y \to S$ <u>ist</u> $\mathcal{H}^{\cdot}(Y/S)$ <u>cohärent.</u>

(d) In der üblichen exakten Cohomologiesequenz für einen Raum und einen abgeschlossenen Unterraum kommt für das offene Komplement Cohomologie mit kompaktem Träger vor. Daher führen wir die relative de Rhamsche Cohomologie mit kompaktem Träger $\mathcal{H}^p_c(Z/S)$ ein. Für $f : Z \to S$ sei $f_!$ der Funktor "<u>direktes Bild mit relativ kompakten Trägern</u>" (vgl. [37]). Wenn also G eine Garbe auf Z ist, gilt für U offen in S

$$f_!(G)(U) = \{s \in G(f^{-1}(U)) \mid f : \text{Träger}(s) \to U \text{ eigentlich}\}$$

Es sei $\mathbb{R} f_!$ die Hypercohomologie von $f_!$ und

$$\mathcal{H}^p_c(Z/S) = \mathbb{R}^p f_!(\Omega^{\cdot}_{Z/S}) \quad .$$

Lemma 1.3.

Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathbb{R}^p f_!(\Omega^\bullet_{Z/S}) \cong R^p f_!\,(\mathbb{C}_Z)\otimes_{\mathbb{C}_S}\mathcal{O}_S \quad .$$

Hieraus folgt, daß $\mathcal{H}^p_c(Z/S)$ frei von endlichem Typ, also insbesondere kohärent ist.

Beweis: Wir fassen $f^*\mathcal{O}_S$ als Komplex auf, der nur an der nullten Stelle von 0 verschieden ist. Die Abbildung $f^*\mathcal{O}_S \to \Omega^\bullet_{Z/S}$ induziert dann wegen Lemma 1.1. Isomorphismen der Cohomologie dieser Komplexe und deswegen Isomorphismen der beiden zweiten Spektralsequenzen

$$''E_2^{p,q} = R^p f_!(H^q(f^*\mathcal{O}_S)) \Longrightarrow \mathbb{R}^\bullet f_!(f^*\mathcal{O}_S)$$
$$''E_2^{pq} = R^p f_!(H^q(\Omega^\bullet_{Z/S})) \Longrightarrow \mathbb{R}^\bullet f_!(\Omega^\bullet_{Z/S}) \quad .$$

Also hat man kanonische Isomorphismen

$$\mathbb{R}^p f_!(\Omega^\bullet_{Z/S}) \cong \mathbb{R}^p f_!(f^*\mathcal{O}_S) \cong R^p f_!(f^*\mathcal{O}_S) \quad .$$

Der zu beweisende Isomorphismus folgt daher daraus, daß für jede Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathbb{C}$ - Moduln auf S gilt

$$R^p f_!(f^*\mathcal{F}) \cong R^p f_!(\mathbb{C}_Z) \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathcal{F} \quad .$$

Beweis dieses Isomorphismus: Es sei $\bar{Z}$ die Abschließung von Z in Y, so daß $\bar{f} : \bar{Z} \to S$ eigentlich ist, und es sei G die triviale Fortsetzung von $f^*\mathcal{F}$ auf Z. Aus der Leray-Spektralsequenz für $Z \to \bar{Z} \to S$ folgt $R^p f_!(f^*\mathcal{F}) \cong R^p \bar{f}_*(G)$. Ebenso gilt $R^p f_!(\mathbb{C}_Z) \cong R^p \bar{f}_*(\mathbb{C}_Z)$. Aus [1o] 4.11.1 folgt, daß die Halme dieser beiden Garben in $t \in S$ die Cohomologiegruppen mit kompaktem Träger $H^p_c(Z_t, \mathcal{F}_t)$ beziehungsweise $H^p_c(Z_t, \mathbb{C})$ sind, wo $Z_t = f^{-1}(t)$. Der natürliche Homomorphismus

$R^pf_!(\mathbb{C}_Z)\otimes\mathcal{F} \to R^pf_!(f^*\mathcal{F})$ induziert auf jedem Halm den natürlichen Homomorphismus $H^p_c(Z_t,\mathbb{C})\otimes\mathcal{F}_t \to H^p_c(Z_t,\mathcal{F}_t)$. Dies ist nach dem universellen Koeffiziententheorem ein Isomorphismus, und damit ist die Behauptung bewiesen. - Daraus, daß $Z \to S$ ein triviales Faserbündel ist, ergibt sich, daß $R^pf_!(\mathbb{C}_Z)$ eine konstante Garbe mit den Halmen $H^p_c(Z_t,\mathbb{C})$ ist (vgl. [3] IV.8.2). Also ist $R^pf_!(\mathbb{C}_Z)\otimes\mathcal{O}_S$ frei von endlichem Typ, und damit ist Lemma 1.3 bewiesen.

Bemerkung: Analog folgt aus Lemma 1.1 und der zweiten Spektralsequenz der in der Einleitung behauptete Isomorphismus $\mathcal{H}^n(X'/S') \cong \mathcal{H}^n$, und ebenso folgt, da die Cohomologiegruppen $H^p(X_t,\mathbb{C})$ für $p \neq 0,n$ nach Milnor verschwinden, $\mathcal{H}^p(X'/S') = 0$ für $p \neq 0,n$.

(e) Wir konstruieren nun die in (a) angekündigte Sequenz.

Lemma 1.4.

Es gibt eine kanonisch definierte aufsteigende exakte Sequenz von $\mathcal{O}_S$- Moduln

$$\dots \to \mathcal{H}^p_c(Z/S) \to \mathcal{H}^p(Y/S) \to \mathcal{H}^p(X/S) \to \dots$$

Beweis: Da $Z = Y - \bar{X}$, hat man für jeden Komplex $K^\bullet$ von $f^*\mathcal{O}_S$- Moduln eine exakte Sequenz von $f^*\mathcal{O}_S$- Moduln

$$0 \to K^\bullet_Z \to K^\bullet \to K^\bullet_{\bar{X}} \to 0 ,$$

wo $K^\bullet_Z$ bzw. $K^\bullet_{\bar{X}}$ die trivialen Fortsetzungen der Beschränkungen auf Z bzw. $\bar{X}$ sind. Da auf einer Kategorie von unterhalb beschränkten Komplexen die Hypercohomologie jedes Funktors ein cohomologischer Funktor ist (EGA 0, 11.5.4), erhält man eine lange exakte Sequenz von $\mathcal{O}_S$ - Moduln

$$\dots \to \mathbb{R}^pf_!(K^\bullet_Z) \to \mathbb{R}^pf_!(K^\bullet) \to \mathbb{R}^pf_!(K^\bullet_{\bar{X}}) \to \dots$$

Da $f : Y \to S$ und $f : \bar{X} \to S$ eigentlich sind, ist diese Sequenz kanonisch isomorph zu einer Sequenz

$$\ldots \to \mathbb{R}^p f_!(K^\bullet_Z) \to \mathbb{R}^p f_*(K^\bullet) \to \mathbb{R}^p f_*(K^\bullet_{\bar{X}}) \to \ldots$$

Bei Anwendung auf $K^\bullet = \Omega^\bullet_{Y/S}$ identifizieren sich per definitionem $\mathbb{R}^p f_!(K^\bullet_Z)$ mit $\mathcal{H}_c^p(Z/S)$ und $\mathbb{R}^p f_*(K^\bullet)$ mit $\mathcal{H}^p(Y/S)$.
Behauptung: Es gilt auch kanonisch

$$\mathbb{R}^p f_*(K^\bullet_{\bar{X}}) \cong \mathbb{R}^p f_*(K^\bullet_X) \qquad (*)$$

Beweis: Die Beschränkung von $\bar{X}$ auf X induziert einen Homomorphismus von der Spektralsequenz

$$''\bar{E}_2^{pq} = R^p f_*(H^q(K^\bullet_{\bar{X}})) \Longrightarrow \mathbb{R}^\bullet f_*(K^\bullet_{\bar{X}})$$

zu der Spektralsequenz

$$''E_2^{pq} = R^p f_*(H^q(K^\bullet_X)) \Longrightarrow \mathbb{R}^\bullet f_*(K^\bullet_X) .$$

Für $q > 0$ gibt dieser Homomorphismus wegen Lemma 1.1 einen Isomorphismus $''\bar{E}_2^{pq} \cong {''E}_2^{pq}$. Für $q = 0$ erhält man den Beschränkungshomomorphismus

$$R^p f_*(f^* \mathcal{O}_S|\bar{X}) \to R^p f_*(f^* \mathcal{O}_S|X) . \qquad (**)$$

Behauptung: Dieser Beschränkungshomomorphismus $''\bar{E}_2^{p,0} \to {''E}_2^{p,0}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: X ist in Y' der Durchschnitt von Y mit einer kleinen offenen Kugel um x etwa vom Radius ρ - vergleiche 0.1 und 1.2 (a). Nun sei X'' der Durchschnitt von Y mit einer abgeschlossenen Kugel vom Radius $\rho - \varepsilon$, wo $0 < \varepsilon << \rho$, und es sei $X' = \bar{X} - X''$. Dann gilt: X, X' sind offene Teilmengen von $\bar{X}$ und

$$X = X \cup X' \quad .$$

Es gibt miteinander verträgliche Homöomorphismen

$$X' \approx (\bar{X} - X) \times [0,1)$$
$$X' \cap X \approx (\bar{X} - X) \times (0,1)$$

derart, daß unter diesen Homöomorphismen $f|X'$ über die Projektion auf den ersten Faktor faktorisiert. Daraus ergibt sich:
Die Beschränkung

$$R^p f_* (f^* \mathcal{O}_S|X') \to R^p f_*(f^* \mathcal{O}_S|X' \cap X)$$

ist ein Isomorphismus. Daher folgt aus der Mayer- Victoris-Sequenz des Tripels $(\bar{X},X,X')$ - vergleiche etwa [1] p.236 -

$$\ldots \to R^p f_*(f^* \mathcal{O}_S|\bar{X}) \to R^p f_*(f^* \mathcal{O}_S|X) + R^p f_*(f^* \mathcal{O}_S|X')$$
$$\to R^p f_*(f^* \mathcal{O}_S|X' \cap X) \to \ldots ,$$

daß (**) ein Isomorphismus ist. Damit folgt der Isomorphismus (*). Also hat man einen kanonischen Isomorphismus $\mathbb{R}^p f_*(K_X^\bullet) \cong \mathcal{H}^p(X/S)$, und damit ist die Existenz der exakten Sequenz von Lemma 1.4 bewiesen.

(f) Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich trivial unser erstes Hauptresultat.

Satz 1.5.

Für die oben beschriebene holomorphe Abbildung $f : X \to S$ mit einer isolierten Singularität ist die relative de Rhamsche Cohomologie $\mathcal{H}^\bullet(X/S)$ cohärent.

Beweis: Nach Lemma 1.4 kommt $\mathcal{H}^\bullet(X/S)$ in einer exakten Sequenz von $\mathcal{O}_S$- Moduln vor, in der nach Lemma 1.2 und 1.3 die übrigen Terme cohärent sind. Daraus folgt die Cohärenz von $\mathcal{H}^\bullet(X/S)$.

1.3. Wie bereits in der Einleitung angekündigt wurde, gilt folgendes.

Proposition 1.6.

$H^p(\Omega^\bullet_{f,x}) \cong \mathcal{H}^p(X/S)_s$.

Beweis: Wir benutzen die zweite Spektralsequenz

$$''E_2^{pq} = (R^p f_*(H^q(\Omega^\bullet_{X/S})))_s \Longrightarrow (\mathbb{R}^\bullet f_*(\Omega^\bullet_{X/S}))_s \quad .$$

Wegen Lemma 1.1 ist $H^q(\Omega^\bullet_{X/S})$ für $q > 0$ auf x konzentriert, und natürlich gilt $H^q(\Omega^\bullet_{X/S})_x = H^q(\Omega^\bullet_{f,x})$. Deswegen gilt $''E_2^{pq} = 0$ für $p > 0$, $q > 0$ und $''E_2^{oq} = H^q(\Omega^\bullet_{f,x})$ für $q \geq 0$. Aus dem Isomorphismus (∗∗) in 1.2. (e) und der Tatsache, daß die singuläre Faser X_s auf den Punkt x zusammenziehbar ist, folgt wieder mittels [1o] 4.11.1

$$''E_2^{po} = (R^p f_*(f^* \mathcal{O}_S))_s \cong H^p(X_s, \mathcal{O}_{S,s}) \quad ,$$

und also $''E_2^{po} = 0$ für $p > 0$ und $''E_2^{oo} = H^o(\Omega^\bullet_{f,x})$. Also entartet die Spektralsequenz, und es folgt

$$H^p(\Omega^\bullet_{f,x}) \cong (\mathbb{R}^p f_*(\Omega^\bullet_{X/S}))_s \quad .$$

Damit ist Proposition 1.6 bewiesen.

1.4. In der Einleitung ist erklärt worden, warum die Konstruktion der Ableitung $\nabla_{f,x}$ auf $H^n(\Omega^\bullet_{f,x})$ das Problem löst, die Picard-Lefschetz-Monodromie zu beschreiben. Bei der praktischen Berechnung der Monodromie ist es zweckmäßig, statt $H^n_{f,x}$ gewisse andere $'H^n_{f,x}$ und $''H^n_{f,x}$ zu benutzen, die jetzt definiert werden sollen. Die Definition ist ebenfalls kanonisch, wenn auch vielleicht nicht so naheliegend wie die von $H^n_{f,x}$. Wir bemerken zunächst, daß man folgende Injektionen von $\mathcal{O}_{S,s}$ - Moduln hat:

$$H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x}) \rightarrow \Omega^n_{X,x}/df \wedge \Omega^{n-1}_{X,x} + d\Omega^{n-1}_{X,x} \rightarrow \Omega^{n+1}_{X,x}/df \wedge d\Omega^{n-1}_{X,x} \quad .$$

Die erste Injektion ist einfach die Inklusion von $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x})$ in cokern d^{n-1}. Die zweite Abbildung ist die Multiplikation von links mit df. Daß dies eine Injektion ist, folgt aus dem Lemma von de Rham. Die Cokerne beider Injektionen sind kanonisch isomorph zu dem $b_{f,x}$- dimensionalen komplexen Vektorraum $\Omega^{n+1}_{f,x}$, so daß also die obenstehenden $\mathcal{O}_{S,s}$ - Moduln den gleichen Rang haben.wie $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x})$. Man kann vermuten, daß diese Moduln frei sind. Für den Fall, daß dies nicht so ist, definieren wir

$$'H^n_{f,x} = \Omega^n_{X,x}/df \wedge \Omega^{n-1}_{X,x} + d\Omega^{n-1}_{X,x} \Big/ \text{Torsion}$$

$$''H^n_{f,x} = \Omega^{n+1}_{X,x} /df \wedge d\Omega^{n-1}_{X,x} \Big/ \text{Torsion} \quad .$$

Die obigen Injektionen ergeben kanonische Inklusionen

$$H^n_{f,x} \subset {'H^n_{f,x}} \subset {''H^n_{f,x}} \quad .$$

Die Definition von $\nabla_{f,x}$ läßt sich von $H^n_{f,x}$ auf $'H^n_{f,x}$ und $''H^n_{f,x}$ erweitern. Denn für eine geeignete natürliche Zahl k gilt $f^k \, ''H^n_{f,x} \subset H^n_{f,x}$. Will man also, daß auch die Fortsetzung ein gewöhnlicher linearer Differentialoperator 1. Ordnung ist, also (ii) in 0.3 genügt, dann hat man nur folgende Möglichkeit für die Definition von $\nabla_{f,x}$:

$$f^k \nabla_{f,x}(\omega) = \nabla_{f,x}(f^k\omega) - k\, f^{k-1}\omega \quad .$$

Für die praktische Berechnung von $\nabla_{f,x}$ ist es zweckmäßig, eine explizite Formel zur Verfügung zu haben. Diese erhält man wie folgt: Man wähle Koordinaten $z_o,\dots,z_n$ in X. Dann ist $\Omega^{n+1}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}d\underline{z}$, wo wir zur Abkürzung $d\underline{z}$ = $= dz_o \wedge \dots \wedge dz_n$ gesetzt haben. Es sei $\xi \in \Omega^n_{X,x}$ eine n-Form mit

$$f^k d\underline{z} = df \wedge \xi$$

(Ein solches ξ existiert nach Definition von k) . Dann ergibt sich aus der Definition für $\nabla_{f,x}$ auf $''H^n_{f,x}$ unmittelbar die gesuchte Formel: Für $g \in \mathcal{O}_{X,x}$ gilt

$$f^k \nabla_{f,x}(g \cdot d\underline{z}) = d(g\xi) - kf^{k-1} g\, d\underline{z} \quad .$$

1.5. Wir beweisen nun den ersten in der Einleitung angekündigten Satz.

Satz 1.

i) $H^n_{f,x}$ ist ein freier $\mathcal{O}_{S,s}$- Modul vom Rang $b_{f,x}$. Das gleiche gilt für $'H^n_{f,x}$ und $''H^n_{f,x}$.

ii) Der singuläre gewöhnliche lineare Differentialoperator erster Ordnung $\nabla_{f,x}$ auf diesen Moduln identifiziert sich kanonisch mit der covarianten Ableitung des lokalen transzendenten Zusammenhangs.

iii) Die Monodromie von $\nabla_{f,x}$ identifiziert sich kanonisch mit der komplexen lokalen Picard-Lefschetz-Monodromie.

Beweis: (i) Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem in 1.3 bewiesenen Isomorphismus $H^n(\Omega^{\cdot}_{f,x}) \cong \mathcal{H}^n(X/S)_s$, der in 1.2 bewiesenen Kohärenz von $\mathcal{H}^n(X/S)$, dem in 1.2(d) erläuterten Isomorphismus $\mathcal{H}^n(X'/S') \cong \mathcal{H}^n$ und Milnors Ergebnis, daß $\mathcal{H}^n$ lokalfrei vom Rang $b_{f,x}$ ist.

ii) In 0.3 wurde bereits erläutert, wie $\nabla_{f,x}$ eine Ableitung auf $\mathcal{H}^n$ induziert. Es ist zu zeigen, daß diese Ableitung mit der transzendent definierten übereinstimmt. Das heißt, es ist im wesentlichen folgendes zu zeigen: Es sei $[\omega] \in H^n_{f,x}$ und ω eine $[\omega]$ repräsentierende n-Form auf X. Dann gilt also $d\omega = df \wedge \psi$ mit einer n-Form ψ auf X, die wir um einer suggestiven Formel willen mit $\frac{d\omega}{dt}$ bezeichnen, wo t die Koordinate in S ist. Ferner sei $\gamma(t) \in H_n(X_t,\mathbb{C}), t \in U \subset S'$, eine Familie von Homologieklassen, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, also im Sinne des transzendenten Zusammenhangs einen horizontalen Schnitt bilden. Dann ist zu zeigen

$$\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(t)} \frac{d\omega}{dt}$$

Diese Formel beweisen wir mit Hilfe des Residuensatzes von Leray [25] p.86

$$\int_{\gamma(t)} \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta\gamma(t)} \frac{df\wedge\omega}{f-t} \quad .$$

Dabei ist $\delta : H_n(X_t,\mathbb{C}) \to H_{n+1}(X - X_t,\mathbb{C})$ der Leraysche Corand. Die Formel heißt Residuensatz, weil $\omega|X_t$ das Poincaré - Residuum von $\frac{df\wedge\omega}{f-t}$ ist. Die zu beweisende Formel folgt nun aus der folgenden Kette von Identitäten, wobei an der ersten und letzten Stelle der Residuensatz verwendet wird.

$$\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} \omega = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta\gamma(t)} \frac{df\wedge\omega}{f-t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta\gamma(t)} \frac{df\wedge\omega}{(f-t)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta\gamma(t)} \frac{d\omega}{f-t} - d\left(\frac{\omega}{f-t}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta\gamma(t)} \frac{d\omega}{f-t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta\gamma(t)} \frac{df}{f-t}\wedge\frac{d\omega}{dt} = \int_{\gamma(t)} \frac{d\omega}{dt} \quad .$$

Daß die Vertauschung von Differentiation und Integration in der zweiten Identität erlaubt ist, macht man sich leicht folgendermaßen klar. Es sei U eine Kreisscheibe in $S - s$. Dann gibt es in $H_{n+1}(X - f^{-1}(U),\mathbb{C})$ ein $\delta\gamma$, das in jedem $H_{n+1}(X - X_t,\mathbb{C})$, $t \in U$, gerade $\delta\gamma(t)$ induziert. Dann kann man das Integral über $\delta\gamma(t)$ natürlich auch durch Integration über den konstanten Zykel $\delta\gamma$ berechnen und dann einen der üblichen Vertauschungssätze anwenden.

iii) Die letzte Behauptung des Satzes folgt trivial aus ii).

<u>Bemerkung:</u> Es sei $i : S' \to S$ die Inklusion, und $i_* \mathcal{H}^n$ das direkte Bild von $\mathcal{H}^n$. Dann identifiziert sich, wie schon in der Einleitung bemerkt, $H^n_{f,x}$ kanonisch mit einem $\mathcal{O}_{S,s}$-Untermodul von $(i_* \mathcal{H}^n)_s$, welcher $(i_* \mathcal{H}^n)_s$ über $(i_* \mathcal{O}_{S'})_s$ erzeugt. Das gleiche gilt auch für $'H^n_{f,x}$ und $''H^n_{f,x}$. Für $'H^n_{f,x}$ sieht man das wie für $H^n_{f,x}$, und für $''H^n_{f,x}$ wie folgt. Ist ω eine $(n+1)$-Form auf X, die ein Element $[\omega] \in {}''H^n_{f,x}$ repräsentiert, dann ist der Wert des $[\omega]$ zugeordneten Schnittes $s_{[\omega]}$ in H^n an der Stelle $t \in S'$ die Cohomologieklasse des Poincaré-Residuums

$$s_{[\omega]}(t) = \left[\operatorname{res} \frac{\omega}{f-t}\right] .$$

<u>1.6.</u> Dieser Abschnitt handelt von der Beziehung zwischen der relativen lokalen de Rhamschen Cohomologie $H^\cdot(\Omega^\cdot_{f,x})$ und der lokalen de Rhamschen Cohomologie $H^\cdot(\Omega^\cdot_{X_s,x})$ der singulären Hyperfläche X_s.

<u>Proposition 1.7.</u>

i) $H^0(\Omega^\cdot_{f,x}) \cong \mathcal{O}_{S,s}$

ii) $H^n(\Omega^\cdot_{f,x})$ <u>ist ein endlich erzeugter</u> $\mathcal{O}_{S,s}$- <u>Modul vom Rang</u> $b_{f,x}$.

iii) $H^p(\Omega^\cdot_{f,x}) = 0$ <u>für</u> $p \neq 0,n$.

<u>Beweis:</u> (i) und (ii) folgen sofort aus Lemma 1.1 und Satz 1 (i) und sind nur der Vollständigkeit halber noch einmal aufgeführt.

iii) Für $p > n$ ist die Aussage trivial. Für $0 < p < n$ schließt man folgendermaßen:

(a) Man kann eine Ableitung

$$\nabla\colon H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x}) \to H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x}) \quad , \quad 0 < p < n$$

definieren durch $\nabla\omega = d\omega/df$, wobei diese Definition im Sinne der Bemerkungen zu dieser Formel in 0.3 zu interpretieren ist. Daß wirklich ∇ und nicht nur $f^k\nabla$ eine Abbildung von $H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x})$ auf sich selbst ist, folgt wieder aus de Rhams Lemma. Denn wenn $[\omega] \in H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x})$ und $d\omega = df \wedge \psi$, dann gilt $df \wedge d\psi = 0$, also nach dem Lemma $d\psi = df \wedge \phi$ und damit $\nabla[\omega] = [\psi] \in H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x})$. Es gilt wieder für alle $g \in \mathcal{O}_{S,s}$

$$\nabla(g\omega) = g \cdot \nabla(\omega) + \frac{dg}{df} \cdot \omega \quad .$$

(b) Wir haben damit einen Zusammenhang auf $\mathcal{H}^p(X/S)$, und es ist bekannt, daß eine cohärente Garbe mit integrablem Zusammenhang über einer nichtsingulären Mannigfaltigkeit lokalfrei ist, also hier verschwindet. Mangels Referenz geben wir hier den Beweis für unseren Spezialfall.

(c) Die $H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x})$ sind endliche Torsionsmoduln, denn $H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x}) \cong \mathcal{H}^p(X/S)_s$ nach Proposition 1.6, $\mathcal{H}^p(X/S)$ cohärent nach Satz 1.5 und nach der Bemerkung im Anschluß an Lemma 1.3 konzentriert auf s wegen der Ergebnisse von Milnor.

(d) Eine triviale Rechnung zeigt, daß ∇ injektiv ist. Dann ist aber ∇ wegen (c) auch surjektiv. Wäre $H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x}) \neq 0$, dann gäbe es ein $\psi \in H^p(\Omega^{\bullet}_{f,x})$ mit $\psi \neq 0$, aber $f\psi = 0$. Wegen der Surjektivität von ∇ gäbe es ein ω mit $\nabla(\omega) = \psi$. Für ω existierte ein minimales k mit $f^k\omega = 0$, und es wäre $k > 0$. Aber dann wäre $\nabla(f^k\omega) = f^k\nabla\omega + kf^{k-1}\omega$, und die ersten beiden Terme verschwänden, also auch $f^{k-1}\omega = 0$. Widerspruch!

Wir wollen aus Proposition 1.7. Folgerungen für die Gruppen $H^p(\Omega^{\bullet}_{X_s,x})$ ziehen. Zunächst eine Definition: Es sei

$$d_{f,x} = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^{n+1}_{f,x} - \dim_{\mathbb{C}} \Omega^{n+1}_{f,x}/f .$$

Bezüglich lokaler Koordinaten gilt also

$$d_{f,x} = \dim_{\mathbb{C}} (f,\partial f/\partial z_o,\ldots,\partial f/\partial z_n)/(\partial f/\partial z_o,\ldots,\partial f/\partial z_n) ,$$

wobei der obige Quotient der Quotient der Ideale in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist, die von f und/oder den partiellen Ableitungen erzeugt werden. Natürlich gilt stets

$$d_{f,x} < b_{f,x} .$$

<u>Proposition 1.8.</u> Sei $n > 1$

i) $H^o(\Omega^{\bullet}_{X_s,x}) \cong \mathbb{C}$

ii) $H^p(\Omega^{\bullet}_{X_s,x}) = 0$ <u>für</u> $0 < p < n-1$, $p > n$

iii) $\dim H^n(\Omega^{\bullet}_{X_s,x}) - \dim H^{n-1}(\Omega^{\bullet}_{X_s,x}) = d_{f,x}$

iv) $H^{n-1}(\Omega^{\bullet}_{X_s,x}) = 0$ <u>genau</u> <u>wenn</u> $\Omega^n_{f,x}/d\Omega^{n-1}_{f,x}$ <u>torsionsfrei</u>.

<u>Beweis:</u> Wir setzen zur Abkürzung $\Omega^{\bullet}_f = \Omega^{\bullet}_{f,x}$ und $\Omega^{\bullet}_f/f^k = \Omega^{\bullet}_f/f^k\,\Omega^{\bullet}_f$. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \to f^k\Omega^{\bullet}_f \to \Omega^{\bullet}_f \to \Omega^{\bullet}_f/f^k \to 0 . \tag{1}$$

Natürlich hat man für $k = 1$ gerade $\Omega^{\bullet}_f/f = \Omega^{\bullet}_{X_s,x}$. Aus dem Lemma von de Rham folgert man leicht, daß für $p \leq n$ die Multiplikation mit f^k ein Isomorphismus ist:

$$\cdot f^k : \Omega^p_f \cong f^k\,\Omega^p_f .$$

Damit erhält man aus der Cohomologiesequenz zu der Sequenz (1) für $p < n - 1$ eine exakte Sequenz

$$\ldots \to H^p(\Omega_f^\cdot) \xrightarrow{\cdot f^k} H^p(\Omega_f^\cdot) \to H^p(\Omega_f^\cdot/f^k) \to H^{p+1}(\Omega_f^\cdot) \to$$

Damit folgen (i) und (ii) aus Proposition 1.7.
Nun zu (iii)! Für hinreichend grosses $k \geq K$ ist $f^k\Omega_f^{n+1} = 0$, also $H^n(f^k\Omega_f^\cdot) \cong$ cokern $d^{n-1} = \Omega_f^n/d\Omega_f^{n-1}$. Damit erhält man aus der Cohomologiesequenz zu (1) für $k \geq K$ die exakte Sequenz

$$0 \to H^{n-1}(\Omega_f^\cdot/f^k) \to \text{cokern } d^{n-1} \xrightarrow{\cdot f^k} H^n(\Omega_f^\cdot) \to H^n(\Omega_f^\cdot/f^k) \to 0$$

Hieraus folgt zweierlei:
(a) Für hinreichend grosses k ist $H^{n-1}(\Omega_f^\cdot/f^k)$ die Torsion von cokern d^{n-1} und also insbesondere die Dimension dieser Gruppe unabhängig von k.
(b) Für hinreichend grosses k ist $\dim H^n(\Omega_f^\cdot/f^{k+1}) - \dim H^n(\Omega_f/f^k) = b_{f,x}$, denn $\mathrm{im}(\cdot f^k)$ ist ein freier $\mathcal{O}_{S,s}$-Modul vom Rang $b_{f,x}$ und $\mathrm{im}(\cdot f^{k+1}) = f\cdot \mathrm{im}(f^k)$.
Nun betrachte man die exakte Sequenz

$$0 \to f^k\Omega_f^\cdot/f^{k+1}\Omega_f^\cdot \to \Omega_f^\cdot/f^{k+1} \to \Omega_f^\cdot/f^k \to 0 \qquad (2)$$

Mit Hilfe des de Rhamschen Lemmas überzeugt man sich wiederum leicht, daß die Multiplikation mit f^k für $p \leq n$ einen Isomorphismus definiert:

$$\Omega_f^p/f\Omega_f^p \cong f^k\Omega_f^p/f^{k+1}\Omega_f^p \,. \qquad (3)$$

Damit erhält man unter Berücksichtigung der bereits bewiesenen Aussage (ii) das folgende Stück aus der exakten Cohomologiesequenz zu (2):

$$0 \to H^{n-1}(\Omega_f^\cdot/f) \to H^{n-1}(\Omega_f^\cdot/f^{k+1}) \to H^{n-1}(\Omega_f^\cdot/f^k) \to$$
$$\to H^n(f^k\Omega_f^\cdot/f^{k+1}\Omega_f^\cdot) \to H^n(\Omega_f^\cdot/f^{k+1}) \to H^n(\Omega_f^\cdot/f^k) \to 0$$

Daraus folgt für hinreichend grosses k unter Benutzung von

(a) und (b)

$$\dim H^{n-1}(\Omega_f^\cdot/f) = \dim H^n(f^k\Omega_f^\cdot/f^{k+1}\Omega_f^\cdot) - b_{f,x} \quad . \qquad (4)$$

Aber wegen des Isomorphismus (3) und $f^k\Omega_f^{n+1} = 0$ für $k \geq K$ hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to H^n(\Omega_f^\cdot/f\Omega_f^\cdot) \to H^n(f^k\Omega_f^\cdot/f^{k+1}\Omega_f^\cdot) \to \Omega_f^{n+1}/f \to 0 \;. \qquad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt unmittelbar (iii) .

(iv) Die Behauptung folgt daraus, daß kanonisch $\Omega_f^n/d\Omega_f^{n-1}/f \cong \Omega^n_{X_{s,x}}/d\Omega^{n-1}_{X_{s,x}}$. Die Dimension des Vektorraumes links ist nach dem Nakayama-Lemma die minimale Erzeugendenzahl von $\Omega_f^n/d\Omega_f^{n-1}$, die Dimension rechts ist gleich $\dim H^n(\Omega^\cdot_{X_{s,x}}) + \dim \Omega^{n+1}_{f,x}/f$. Diese Zahl ist gleich $b_{f,x}$ genau wenn $H^{n-1}(\Omega^\cdot_{X_{s,x}}) = 0$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1(i) .

Bemerkungen:

1) Wir haben der Einfachheit halber in Proposition 1.8 den Fall der Kurven $n = 1$ ausgeschlossen. Mit den entsprechenden Modifikationen ergibt der obige Beweis sofort:

Zusatz:

X_s sei eine 1-dimensionale in x irreduzible Hyperfläche. Dann gilt

$$H^0(\Omega^\cdot_{X_{s,x}}) = \mathbb{C} \;\; ; \;\; H^1(\Omega^\cdot_{X_{s,x}}) = \mathbb{C}^{d_{f,x}} \;\; ; \;\; H^p(\Omega^\cdot_{X_{s,x}}) = 0, \; p > 1.$$

Dieses hier mit topologischen Methoden bewiesene Ergebnis kann auch rein algebraisch bewiesen werden, wie Mumford gezeigt hat (unveröffentlicht) .

2) Wenn $H^{n-1}(\Omega^{\bullet}_{X_{s,x}}) = 0$, ist natürlich wegen (iv) auch $H^n(\Omega^{\bullet}_{f,x})$ frei, also dann

$$H^n_{f,x} = H^n(\Omega^{\bullet}_{f,x}) .$$

3) Vermutung: Für eine isolierte n-dimensionale Hyperflächensingularität (X_s,x) mit $n>1$ gilt stets $H^{n-1}(\Omega^{\bullet}_{X_s,x}) = 0$

Falls diese Vermutung zutrifft, ist damit die Struktur des Poincarékomplexes $\Omega^{\bullet}_{X_s,x}$ für isolierte Hyperflächensingularitäten (X_s,x) vollständig aufgeklärt. Insbesondere gilt unter dieser Voraussetzung folgendes. Die Hyperflächensingularität sei durch $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ gegeben. Dann gilt das Poincarélemma, d.h. $0 \to \mathbf{C} \to \Omega^{\bullet}_{X_s,x}$ ist exakt, genau wenn $f \in (\partial f/\partial z_0,\ldots,\partial f/\partial z_n)$.

4) Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Poincaré-Lemmas für beliebige komplexe Räume, nämlich holomorphe Kontraktibilität, ist von Reiffen in [33] angegeben worden. Bemerkenswerterweise sind fast alle reduzierten Gegenbeispiele von Reiffen zum Poincaré-Lemma Hyperflächen. Über den Poincarékomplex beliebiger komplexer Räume weiß man nichts, außer daß für eine isolierte Singularität (Y,y) der komplexe Vektorraum $H^p(\Omega^{\bullet}_{Y,y})$ nach [2] endlichdimensional ist.

§ 2. Regularität

2.1. Es sei A eine quadratische Matrix von meromorphen Funktionen einer komplexen Variablen t in der Umgebung des Nullpunktes. Für das System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dw}{dt} = Aw$$

sind sämtliche Fundamentalmatrizen ϕ von der Form

$$\phi = St^M .$$

Dabei ist M eine konstante Matrix und S eine Matrix von Funktionen, die in einer punktierten Umgebung des Nullpunkts holomorph sind. Wenn die Koeffizienten von S im Nullpunkt sogar meromorph sind, ist die Differentialgleichung dort <u>regulär singulär</u>. Diese Bedingung ist offensichtlich äquivalent dazu, daß die Lösungen ϕ der Differentialgleichung im folgenden Sinne für $t \to 0$ nicht schneller als Potenzen von t wachsen. Es gibt eine Kreisscheibe U um den Null punkt, so daß für jeden Sektor K von U und jeden Zweigvon ϕ auf K gilt

$$\| \phi(t) \| \leq c \, |t|^{-N}$$

mit geeigneten Konstanten c und N. Dabei hängt c von K und dem Zweig von ϕ ab.N kann vom Zweige unabhängig gewählt werden, weil die Zweige von ϕ als Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems einem endlich-dimensionalen Vektorraum angehören.

<u>2.2.</u> Wir beweisen jetzt das zweite wichtige Resultat über die Ableitung $\nabla_{f,x}$.

<u>Satz 2.</u>

$\nabla_{f,x}$ <u>ist regulär singulär</u>.

<u>Beweis:</u> (a) Zunächst zeigen wir, daß es genügt, folgendes zu beweisen. Es sei ω eine holomorphe n-Form auf X, ferner $\gamma(t) \in H_n(X_t,\mathbb{C})$ eine Familie von Homologieklassen, die durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen, und $J_{\gamma\omega}$ die holomorphe Funktion auf der universellen Überlagerung von S - s, die durch

$$J_{\gamma,\omega}(t) = \int_{\gamma(t)} \omega$$

definiert wird. Dann wächst $J_{\gamma\omega}$ nicht schneller als Potenzen von t. Beweis der Reduktion: Es seien $\omega_1,\ldots,\omega_b$ holomorphe n-Formen auf X, die eine Basis von $'H^n_{f,x}$ repräsentieren, $b = b_{f,x}$. Ferner seien $\gamma_i(t) \in H_n(X_t,\mathbb{C})$, $i = 1,\ldots,b$, horizontale Familien von Basen von $H_n(X_t,\mathbb{C})$. Schließlich sei J die $b \times b$- Matrix mit den Koeffizienten J_{ik}, wo

$$J_{ik}(t) = \int_{\gamma_i(t)} \omega_k \quad .$$

Nun sei $\omega = \sum \phi_k\omega_k$ eine Lösung von $\nabla_{f,x}(\omega) = 0$. Dann ist

$$\int_{\gamma_i(t)} \omega = c_i \text{ konstant.}$$

Mithin gilt für die Spaltenvektoren $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_b)$ und $c = (c_1,\ldots,c_b)$

$$\phi = J^{-1} c \quad .$$

Wenn daher die Koeffizienten von J nicht schneller als Potenzen von t wachsen, gilt das gleiche für ϕ. Also genügt es in der Tat, das Wachstum der Funktionen $J_{\gamma\omega}$ abzuschätzen.

(b) Die gewünschte Abschätzung ergibt sich aus einem entsprechenden Resultat von Ph.A. Griffiths für meromorphe Differentialformen auf Familien algebraischer Varietäten. Um dies zu sehen, benutzen wir die in 1.1 konstruierte Familie von algebraischen Varietäten $f : V \to P_1$ mit der gegebenen Singularität in $x \in V$.

Wir werden in § 3 sehen, daß für eine geeignete Potenz des maximalen Ideals $m \subset \mathcal{O}_{V,x}$ gilt

$m^K \Omega^n_{V,x} \subset f\Omega^n_{V,x} + df \wedge \Omega^{n-1}_{V,x} + d\Omega^{n-1}_{V,x}$.

Das heißt: Repräsentieren $\omega_1,\ldots,\omega_b \in \Omega^n_{V,x}$ eine Basis von $'H^n_{f,x}$, so auch alle $\omega'_1,\ldots,\omega'_b$, welche sich von den ω_i nur um Elemente aus $m^K\Omega^n_{V,x}$ unterscheiden. Mit Hilfe dieser Tatsache verschaffen wir uns folgendermaßen eine Basis von $'H^n_{f,x}$, die von meromorphen Formen auf V repräsentiert wird. Bezüglich der Einbettungen $V \subset P_{n+1} \times P_1 \subset P_{2n+3}$ sei V^∞ der Schnitt von V mit einer hinreichend allgemeinen Hyperebene E. Dann ist $P_{n+1} \times P_1 - E - P_{n+1} \times \{\infty\}$ isomorph zu $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^1$. Auf $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^1$ können wir nach dem oben Gesagten n-Formen ω_i mit polynomialen Koeffizienten finden, in denen t und dt nicht vorkommen und die eine Basis von $'H^n_{f,x}$ repräsentieren. Diese ω_i setzen sich zu meromorphen Formen auf $P_{n+1} \times P_1$ fort und ergeben bei Beschränkung meromorphe n-Formen auf V.

Für die so erhaltenen Differentialformen ω auf V sind die Bedingungen des in [14] 2o.3 bewiesenen Regularitätssatzes von Griffiths erfüllt: Die holomorphe Abbildung $f : V \to P_1$ ist eine eigentliche Abbildung algebraischer Varietäten der von Griffiths betrachteten Art. f ist höchstens über endlich vielen Punkten von P_1 singulär. ω ist eine meromorphe n-Form auf V mit Pol längs V^∞, und die $\omega|V_t$ sind geschlossen. Dann gilt für jede horizontale Familie von Homologieklassen $\gamma(t) \in H_n(V_t - V_t \cap V^\infty)$: Die Funktion

$$\int_{\gamma(t)} \omega$$

wächst für $t \to t_o$ höchstens wie Potenzen von $t - t_o$.

Wenden wir dies auf die Familien von Zykeln in $H_n(X_t)$ an, genauer: auf deren Bilder in $H_n(V_t - V_t \cap V^\infty)$, dann erhalten wir für die Funktionen $J_{\gamma\omega_i}$ das gewünschte Wachstumsverhalten. Weil die ω_i eine Basis von $'H^n_{f,x}$ bilden, folgt, daß $J_{\gamma\omega}$ höchstens wie Potenzen von t wächst. Damit ist die Regularität bewiesen.

Bemerkung: Griffiths Beweis des Regularitätssatzes ist ein relativ komplizierter Induktionsbeweis mit Benutzung von Lefschetz' Theorie der Homologie algebraischer Varietäten. P. Deligne hat kürzlich auf der mathematischen Arbeitstagung in Bonn einen sehr kurzen direkten Beweis skizziert. Hierbei wird zunächst durch Auflösen der Singularitäten auf den Fall reduziert, wo Polstellendivisor und singuläre Faser nur transversale Schnitte haben, und dann wird in dieser relativ einfachen Situation das Wachstum der Differentialform und des Volumens des Zykels, über den zu integrieren ist, direkt abgeschätzt.

2.3. Eine reguläre singuläre Differentialgleichung wie in 2.1 mit der Fundamentalmatrix $S\cdot t^R$ geht durch die Transformation $w = Sv$ offensichtlich in die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = t^{-1} Rv$$

mit einem Pol 1. Ordnung über. Da umgekehrt jedes System mit einem Pol erster Ordnung nach einem klassischen Satz von Sauvage regulär singulär ist, ist ein Differentialgleichungssystem genau dann regulär singulär, wenn es mittels einer meromorphen Matrix T auf ein System mit einem Pol 1. Ordnung transformiert werden kann. Nach einem klassischen Satz von Horn genügt dazu eine Matrix mit endlich vielen Termen

$$T = \sum_{\nu=0}^{N} T_\nu t^\nu .$$

Lutz [26] und, entgegen Lutz' Behauptung, auch Moser [30] haben Abschätzungen für N angegeben. Benutzt man Lutz'

Resultat, daß für eine reguläre singuläre Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dt} = t^{-k} \left(\sum_{i=o}^{\infty} A_i t^i \right) w \qquad (*)$$

mit $k > 1$ die Matrix A_o nilpotent ist, dann kann man unter Benutzung von Mosers Theorem 2 in [30] die Abschätzung geringfügig verbessern und erhält folgendes:

<u>Proposition 2.1</u>

<u>Ein regulär singuläres System von</u> b <u>Differentialgleichungen</u> (*) <u>mit einem Pol der Ordnung</u> k <u>und mit einer Matrix</u> A_o <u>vom Rang</u> r <u>als erstem Koeffizienten kann durch eine Matrix</u>

$$T = \sum_{\nu=o}^{N} T_\nu t^\nu$$

<u>auf ein System mit einem Pol</u> 1. <u>Ordnung transformiert werden, wobei</u> $N \leq 2\,((k-2)(b-1)+r)$.

Die Matrix T kann im Prinzip durch Lösen endlich vieler algebraischer Gleichungen für die Koeffizienten der T_ν gefunden werden, nämlich der Gleichungen, die ausdrücken, daß

$$T^{-1} AT - T^{-1} T'$$

nur einen Pol 1. Ordnung hat. Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind Linearkombinationen der Koeffizienten endlich vieler A_i, deren Zahl wegen Proposition 2.1 in Abhängigkeit von b und k abgeschätzt werden kann. -
Für Systeme mit einem Pol erster Ordnung hat man einen Algorithmus zur Berechnung der Lösungen (vgl.z.B. [6] Ch.iv.4 und p.137). Insbesondere gilt: Ist B_o die polare Matrix, so hat $e^{2\pi i B_o}$ das gleiche charakteristische Polynom wie die Monodromie der Differentialgleichung. Wir

fassen zusammen:

Bemerkung 2.2. Die Monodromie und insbesondere ihr charakteristisches Polynom können für ein regulär singuläres System von b Differentialgleichungen

$$\frac{dw}{dt} = t^{-k} \left(\sum_{i=o}^{\infty} A_i t^i \right) w$$

aus endlich vielen A_i, deren Zahl durch b und k abschätzbar ist, in der oben beschriebenen Weise berechnet werden.

§ 3. Algebraizität

3.1. Der Beweis des folgenden Satzes stammt von Thomas Bloom.

Proposition 3.1.

Es sei w ein isolierter singulärer Punkt eines komplexen Raumes W. Es sei $\Omega^{\cdot}_{W,w}$ der Differentialformenkomplex von W in w und $\hat{\Omega}^{\cdot}_{W,w}$ dessen Komplettierung. Dann induziert die Inklusion dieser Komplexe einen Isomorphismus endlichdimensionaler komplexer Vektorräume

$$H^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{W,w}) \cong H^{\cdot}(\hat{\Omega}^{\cdot}_{W,w}) \ .$$

Beweis: (a) Es sei $g : V \to W$ eine Auflösung der Singularitäten im Sinne von Hironaka, und $A = g^{-1}(w)$ die reduzierte exzeptionelle Faser über w. Die Auflösung sei so gewählt, daß A lokal bezüglich geeigneter Koordinaten $z_1,\dots,z_n$ durch $z_1\cdot\ldots\cdot z_r = 0$ beschrieben wird. Es sei

$\Omega^{\cdot}_V$ der Differentialformenkomplex von V und $\tilde{\Omega}^{\cdot}_V$ seine Beschränkung auf A. Es sei m die Idealgarbe von w in W, und es sei $\hat{\Omega}^{\cdot}_{W,w}$ die m_w- adische Komplettierung von $\Omega^{\cdot}_{W,w}$. Schließlich sei

$$\hat{\Omega}^{\cdot}_V = \varprojlim_k \Omega^{\cdot}_V/m^k \Omega^{\cdot}_V .$$

Man hat offensichtlich ein kommutatives Diagramm von Komplexen

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{\cdot}_{W,w} & \xrightarrow{g^*} & H^0(A,\tilde{\Omega}^{\cdot}_V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{\Omega}^{\cdot}_{W,w} & \xrightarrow[\hat{g}^*]{} & H^0(A,\hat{\Omega}^{\cdot}_V) \end{array}$$

Hierin sind kern (g^*) und cokern (g^*) endlich-dimensional, denn nach Grauerts Endlichkeitssatz ist $g_*\Omega^{\cdot}_V$ cohärent, und Kern und Cokern von $\Omega^{\cdot}_W \to g_*\Omega^{\cdot}_V$ sind in einer Umgebung von w auf w konzentriert und gerade gleich kern (g^*) und cokern (g^*). Der Homomorphismus $\hat{g}^*$ ist die Komplettierung des $\mathcal{O}_{W,w}$ - Modulhomomorphismus g^*, denn aus Grauerts Hauptsatz II a in [11] zusammen mit EGA 0, 3.2.6 und [10] 4.11.1 folgt

$$H^0(A,\hat{\Omega}^{\cdot}_V) \cong \varprojlim_k H^0(A,\Omega^{\cdot}_V/m^k\Omega^{\cdot}_V) \cong \lim_k H^0(A,\tilde{\Omega}^{\cdot}_V)/m^k H^0(A,\tilde{\Omega}^{\cdot}_V) .$$

Da die Komplettierung ein exakter Funktor ist und kern (g^*) und cokern (g^*) wegen Endlichdimensionalität schon komplett sind, folgt

$$\text{kern } (\hat{g}^*) \cong \text{kern } (g^*) \text{ und cokern } (\hat{g}^*) \cong \text{cokern } (g^*).$$

Daher erhalten wir aus dem obigen Diagramm sofort den gewünschten Isomorphismus $H^{\cdot}(\Omega^{\cdot}_{W,w}) \cong H^{\cdot}(\hat{\Omega}^{\cdot}_{W,w})$, wenn wir zeigen können, daß die Komplettierung einen Isomorphismus

$$H^\bullet(H^0(A,\tilde{\Omega}^\bullet_V)) \cong H^\bullet(H^0(A,\hat{\Omega}^\bullet_V))$$

induziert. Dieser Isomorphismus wird in (b) - (d) bewiesen.

(b) Es sei J die Idealgarbe von A, es sei A^k der komplexe Raum $(A, \mathcal{O}_V/J^k)$ und $\Omega^\bullet_{A^k}$ dessen Differentialformenkomplex, schließlich

$$\Omega^\bullet_{A^\infty} = \varprojlim_k \Omega^\bullet_{A^k} \quad .$$

Für $\mathcal{K}^k = \text{kern } (\Omega^\bullet_V \to \Omega^\bullet_{A^k})$ folgt aus der Definition von $\Omega^\bullet_{A^k}$ trivialerweise

$$J^k\, \Omega^\bullet_V \subset \mathcal{K}^k \subset J^{k-1}\, \Omega^\bullet_V \;.$$

Also folgt ein kanonischer Isomorphismus

$$\Omega^\bullet_{A^\infty} \cong \hat{\Omega}^\bullet_V \quad .$$

Die Annahme über A impliziert, daß A^k lokal holomorph contrahierbar ist. Also ist nach Hilfssatz 2 in [33] für die konstante komplexe Garbe $\mathbb{C}$ auf A

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^\bullet_{A^k}$$

eine Auflösung. Nach EGA 0, 13.2.3 folgt daraus, daß auch

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^\bullet_{A^\infty}$$

oder, was wegen des obigen Isomorphismus das Gleiche ist,

$$0 \to \mathbb{C} \to \hat{\Omega}^\bullet_V$$

eine Auflösung ist. Natürlich ist wegen des klassischen Poincaré-Lemmas auch

$$0 \to \mathbb{C} \to \tilde{\Omega}^\bullet_V$$

eine Auflösung.

(c) Aus EGA 0, 13.3.1 folgt

$$H^q(A,\hat{\Omega}^{\cdot}_V) \cong \varprojlim_k H^q(A,\Omega^{\cdot}_V/m^k\,\Omega^{\cdot}_V) \quad \text{für } q > 0 \;.$$

Aus Grauerts Hauptsatz IIa in [11] folgt

$$\varprojlim_k H^q(A,\Omega^{\cdot}_V/m^k\,\Omega^{\cdot}_V) \cong H^q(A,\tilde{\Omega}^{\cdot}_V) \quad \text{für } q > 0 \;.$$

Insgesamt also

$$H^q(A,\tilde{\Omega}^{\cdot}_V) \cong H^q(A,\hat{\Omega}^{\cdot}_V) \quad \text{für } q > 0 \;.$$

(d) Weil die Komplexe $\tilde{\Omega}^{\cdot}_V$ und $\hat{\Omega}^{\cdot}_V$ nach (b) Auflösungen von C sind, konvergieren die zugehörigen zweiten Spektralsequenzen gegen $H^{\cdot}(A,\mathbb{C})$, also (vgl. [10], 4.5)

$$E_2^{pq} = H^p(H^q(A,\tilde{\Omega}^{\cdot}_V)) \Longrightarrow H^{\cdot}(A,\mathbb{C})$$
$$\hat{E}_2^{pq} = H^p(H^q(A,\hat{\Omega}^{\cdot}_V)) \Longrightarrow H^{\cdot}(A,\mathbb{C}) \;.$$

Die Inklusion $\tilde{\Omega}^{\cdot}_V \to \hat{\Omega}^{\cdot}_V$ induziert einen Homomorphismus von Spektralsequenzen $E \to \hat{E}$. Für diesen gilt offenbar: (i) $E_\infty \cong \hat{E}_\infty$ und wegen (c) auch (ii) $E_2^{pq} \cong \hat{E}_2^{pq}$ für $q > 0$. Für Spektralsequenzen mit nur endlich vielen nichtverschwindenden $E_2^{p,q}$ folgt aus (i) und (ii) leicht die Isomorphie der Spektralsequenzen, das heißt also $E_2^{po} \cong \hat{E}_2^{po}$, und das ist gerade der Isomorphismus $H^p(H^o(A,\tilde{\Omega}^{\cdot}_V)) \cong H^p(H^o(A,\hat{\Omega}^{\cdot}_V))$. Daraus folgt nach (a) der gewünschte Isomorphismus. Da die Endlichdimensionalität bereits in [2], 3.17 gezeigt wurde, ist damit Proposition 3.1 bewiesen.

<u>3.2.</u> Dieser Abschnitt handelt von der Komplettierung der relativen de Rhamschen Cohomologie der Abbildung $f : X \to S$. Es sei $\hat{\Omega}^{\cdot}_{X,x}$ die Komplettierung von $\Omega^{\cdot}_{X,x}$ bezüglich der durch das maximale Ideal m von $\mathcal{O}_{X,x}$ definier-

ten m-adischen Topologie. Dann definieren wir:

$$\hat{\Omega}^{\cdot}_{f,x} = \hat{\Omega}^{\cdot}_{X,x} / df \wedge \hat{\Omega}^{\cdot}_{X,x}$$

$$\hat{H}^{n}_{f,x} = H^{n}(\hat{\Omega}^{\cdot}_{f,x}) \;/\; \text{Torsion}$$

$${}'\hat{H}^{n}_{f,x} = \hat{\Omega}^{n}_{f,x} \;/\; d\hat{\Omega}^{n-1}_{f,x} \;/\; \text{Torsion}$$

$${}''H^{n}_{f,x} = \hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} \;/\; df \wedge d\hat{\Omega}^{n-1}_{X,x} \;/\; \text{Torsion}$$

Für $\mathcal{O}_{S,s}$- Moduln H sei die Komplettierung bezüglich der durch das maximale Ideal (f) von $\mathcal{O}_{S,s}$ definierten (f)-adischen Topologie mit $H^{\wedge}$ bezeichnet.

Proposition 3.2.

Es gibt kanonische Isomorphismen

$$\hat{H}^{n}_{f,x} \cong H^{n\wedge}_{f,x}$$

$${}'\hat{H}^{n}_{f,x} \cong {}'H^{n\wedge}_{f,x}$$

$${}''\hat{H}^{n}_{f,x} \cong {}''H^{n\wedge}_{f,x}$$

Beweis: Man betrachtet wie im Beweis zu Proposition 1.8 die langen exakten Cohomologiesequenzen zu den kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & f^{k}\Omega^{\cdot}_{f}/f^{k+1}\Omega^{\cdot}_{f} & \to & \Omega^{\cdot}_{f}/f^{k+1} & \to & \Omega^{\cdot}_{f}/f^{k} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & f^{k}\hat{\Omega}^{\cdot}_{f}/f^{k+1}\hat{\Omega}^{\cdot}_{f} & \to & \hat{\Omega}^{\cdot}_{f}/f^{k+1} & \to & \hat{\Omega}^{\cdot}_{f}/f^{k} & \to & 0
\end{array}$$

Da das Lemma von de Rham auch auf den formellen Fall anwendbar ist, lassen sich die fraglichen Überlegungen von 1.6 ebenfalls auf diesen Fall übertragen. Durch Vergleich der beiden exakten Cohomologiesequenzen folgt mittels Fünferlemma durch Induktion über k

$$H^{\cdot}(\Omega_f^{\cdot}/f^k) \cong H^{\cdot}(\hat{\Omega}_f^{\cdot}/f^k) .$$

Dabei ist der Induktionsanfang gerade Proposition 3.1. Aus dem obigen Isomorphismus folgt insbesondere trivialerweise

$$\Omega_f^n/f^k\Omega_f^n + d\Omega_f^{n-1} \cong \hat{\Omega}_f^n/f^k\hat{\Omega}_f^n + d\hat{\Omega}_f^{n-1} .$$

Also gilt beim Übergang zum inversen Limes für $k \to \infty$

$$(\Omega_f^n/d\Omega_f^{n-1})\hat{} \cong (\hat{\Omega}_f^n/d\hat{\Omega}_f^{n-1})\hat{} \cong \hat{\Omega}_f^n/d\hat{\Omega}_f^{n-1} .$$

Hieraus folgt sofort $'H_{f,x}^{n\hat{}} \cong {}'\hat{H}_{f,x}^n$. Damit folgen die übrigen beiden Isomorphismen aus den Inklusionen $H_{f,x}^n \subset {}'H_{f,x}^n \subset {}''H_{f,x}^n$ beziehungsweise $\hat{H}_{f,x}^n \subset {}'\hat{H}_{f,x}^n \subseteq {}''\hat{H}_{f,x}^n$, deren cokerne alle isomorph zu $\Omega_{f,x}^{n+1}$ sind. Wir bemerken noch, daß natürlich auch gilt

$$H^n(\hat{\Omega}_{f,x}^{\cdot}) \cong H^n(\Omega_{f,x}^{\cdot})\hat{}.$$

<u>3.3.</u> In diesem Abschnitt wird die Algebraizität von $\nabla_{f,x}$ bewiesen. Natürlich läßt sich genau nach der gleichen Methode wie in 0.3 ein $\nabla_{f,x}$ auf $\hat{H}_{f,x}^n$ definieren, und dieses identifiziert sich trivialerweise vermöge der Isomorphismen von Proposition 3.2 mit dem auf $H_{f,x}^{n\hat{}}$ definierten $\nabla_{f,x}$.

Nun wähle man wie in 0.5 komplexe Koordinaten $z_o,\ldots,z_n$ in X, so daß $f(z_o,\ldots,z_n)$ ein Polynom ist. Durch die Koordinatenwahl erhält man einen Isomorphismus

$$\hat{\Omega}_{X,x}^{\cdot} \cong \Lambda^{\cdot}\left(\bigoplus_{i=o}^{n} \mathbb{C}\,[[z_o,\ldots,z_n]]\,dz_i \right) .$$

Wenn nun ϕ irgendein Automorphismus des Körpers der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist, dann operiert ϕ auf den Koeffizienten der formellen Potenzreihen und definiert so einen Isomorphismus

$$\phi : \hat{\Omega}^{\bullet}_{X,x} \to \hat{\Omega}^{\bullet}_{X,x} .$$

Dieser induziert offensichtlich Isomorphismen

$$\phi : \hat{\Omega}^{\bullet}_{f,x} \to \hat{\Omega}^{\bullet}_{\phi f,x}$$

$$\phi : H^n(\hat{\Omega}^{\bullet}_{f,x}) \to H^n(\hat{\Omega}^{\bullet}_{\phi f,x}) .$$

Dieses sind Modulhomomorphismen über dem Ringhomomorphismus

$$\mathbb{C}[[f]] \to \mathbb{C}[[\phi f]] ,$$

welcher f in ϕf abbildet und auf $\mathbb{C}$ gerade ϕ ist. Also erhält man einen Isomorphismus mit der gleichen Eigenschaft

$$\phi : \hat{H}^n_{f,x} \to \hat{H}^n_{\phi f,x} .$$

Damit erhält man schließlich mittels der Isomorphismen von Proposition 3.2 den in der Einleitung angekündigten Isomorphismus

$$\phi : H^{n\wedge}_{f,x} \to H^{n\wedge}_{\phi f,x} .$$

Für diesen gilt:

<u>Satz 3</u>

$$\phi \circ \nabla_{f,x} = \nabla_{\phi f,x} \circ \phi$$

<u>Beweis:</u> Wegen Proposition 3.2 genügt es, die entsprechende Formel für $\hat{H}^n_{f,x}$ zu beweisen. Aber diese ist trivialerweise richtig, denn für $[\omega] \in \hat{H}_{f,x}$ mit $d\omega = df \wedge \upsilon$ gilt

trivialerweise

$$\phi \circ \nabla_{f,x}[\omega] = \phi[\upsilon] = [\phi\upsilon] = \nabla_{\phi f,x}[d(\phi f)\wedge\phi(\upsilon)] =$$

$$= \nabla_{\phi f,x}[\phi(df\wedge\upsilon)] = \nabla_{\phi f,x}\circ\phi\,[\omega] .$$

3.4. Die folgende Proposition führt zu der Möglichkeit, die Monodromie in endlich vielen Schritten zu berechnen.

Proposition 3.3.

Die Restklassenabbildungen

$$\hat{\Omega}^n_{X,x} \to {}'\hat{H}^n_{f,x}$$

$$\hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} \to {}''\hat{H}^n_{f,x}$$

sind stetig bezüglich der adischen Topologien, die durch die maximalen Ideale von $\hat{O}_{X,x}$ bziehungsweise $\hat{O}_{S,s}$ definiert werden.

Beweis: Wir zeigen Stetigkeit von $\hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} \to \hat{\Omega}^{n+1}_{X,x}/df\wedge d\hat{\Omega}^{n-1}_{X,x}$. Daraus folgt sofort die Stetigkeit der zweiten Abbildung in Proposition 3.3. Die Stetigkeit der anderen Abbildung wird völlig analog bewiesen. Es ist also zu zeigen: Für jedes k existiert ein N(k) mit

$$m^{N(k)}\,\hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} \subset f^k\hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} + df\wedge d\hat{\Omega}^{n-1}_{X,x} \qquad (+)$$

Die $\hat{\Omega}^p_{X,x}$ sind nach Wahl von Koordinaten isomorph zu direkten Summen von $\mathbb{C}[[z_o,\ldots,z_n]]$ und werden daher mit der Topologie der einfachen Konvergenz auf den Koeffizienten der Potenzreihen zu Fréchetträumen. Die Abbildung

$$\hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} \oplus \hat{\Omega}^{n-1}_{X,x} \to \hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} ,$$

welche $\phi \oplus \psi$ die Differentialform $f^k\phi + df\wedge d\psi$ zuordnet, ist offensichtlich eine stetige lineare Abbildung von Frécheträumen und hat einen endlichdimensionalen Cokern, weil $''\hat{H}^n_{f,x}/f^k \cong ''H^{n\wedge}_{f,x}/f^k$ nach Proposition 3.2 und weil $''H^{n\wedge}_{f,x}$ ein endlich erzeugter $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$- Modul ist. Aus dem Corollar zu Theorem 2 in [35] folgt allgemein, daß eine stetige lineare Abbildung von Frécheträumen mit endlichdimensionalen Cokern ein abgeschlossenes Bild hat. Ein abgeschlossener endlich-codimensionaler Unterraum V von $\mathbb{C}[[z_o,\dots,z_n]]$ enthält aber stets eine Potenz des maximalen Ideals.

Beweis: Es sei $W = \mathbb{C}[[z_o,\dots,z_n]]$, W^* der Dualraum der stetigen linearen Funktionale auf W und

$$V^\perp = \{ l \in W^* \mid l|V = 0 \}$$

$$V^{\perp\perp} = \{ w \in W \mid l(w) = 0 \text{ für } l \in V^\perp \} .$$

Wegen der Abgeschlossenheit von V gilt $V = V^{\perp\perp}$. Wegen der Endlichdimensionalität von W/V ist $V^\perp$ endlichdimensional. Jedes Element aus W^* ist aber offensichtlich nur auf endlich vielen Monomen von Null verschieden. Daher folgt $m^N \subset V$ für ein hinreichend großes N. Damit ist Proposition 3.3 bewiesen.

Bemerkungen: (1) Aus Proposition 3.3 folgt mittels Proposition 3.2 natürlich auch sofort, daß

$$\Omega^n_{X,x} \to {}'H^n_{f,x}$$

$$\Omega^{n+1}_{X,x} \to {}''H^n_{f,x}$$

stetig bezüglich der adischen Topologien sind.

(2) Der Beweis von Proposition 3.3 sagt nichts über das minimale N(k), für das die Inklusion (+) gilt. Die Kenntnis dieses Minimums $N_f(k)$ wäre für die praktische Berechnung der Monodromie wünschenswert. Beispiele zeigen, daß

für gewisse f die Funktion $N_f(k)$ eine lineare Funktion von k ist (oder wenigstens durch eine solche abschätzbar).

3.5. Die bisher bewiesenen Resultate ermöglichen es, in gewissem Sinne $\Delta_{f,x}$ in endlich vielen Schritten zu berechnen. Dazu genügt es nach Satz 1, Satz 2 und Proposition 3.3, die Selbstabbildung $f^k \nabla_{f,x}$ des endlichen $\mathbb{C}[[f]]$ - Torsionsmoduls

$$H_K = \hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} \,/\, m^{N_f(K)}\, \hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} + f^K \hat{\Omega}^{n+1}_{X,x} + df \wedge d\hat{\Omega}^{n-1}_{X,x}$$

zu bestimmen und dann die in 2.3 beschriebenen Rechnungen auszuführen. Dabei ist $k = k_{f,x}$ die Polordnung von $\nabla_{f,x}$ und K eine nach 2.3 in Abhängigkeit von $b_{f,x}$ und $k_{f,x}$ abzuschätzende Zahl, während $N_f(K)$ die in 3.4 definierte Zahl ist.

Wir setzen voraus, daß f ein Polynom $f(z_0,\dots,z_n)$ ist. Der Grad von f sei g. Dann lassen sich $b_{f,x}$ und $k_{f,x}$ und damit auch K in Abhängigkeit von g und n mittels der Resultate von Grete Hermann [18] abschätzen. Allerdings dürften die so erhaltenen Abschätzungen für die praktische Berechnung von $\Delta_{f,x}$ nicht sehr gut brauchbar sein.

Im folgenden wird - nur zur Vereinfachung der Diskussion angenommen, daß $\Omega^{n+1}_{X,x}/df \wedge d\Omega^{n-1}_{X,x}$ keine Torsion hat und also gleich $''H^n_{f,x}$ ist. Vermutlich ist dies ohnehin stets der Fall. Dann ergibt sich etwa folgendes

Programm zur Berechnung von $\Delta_{f,x}$

(1) Berechnung des Ranges $b_{f,x}$.
(2) Berechnung einer Basis von $''H^n_{f,x}$.
(3) Abschätzung der Polordnung $k_{f,x}$.
(4) Berechnung von $\nabla_{f,x}$ bis zu hinreichend hoher Ordnung.
(5) Berechnung der Transformation T auf einen Pol 1. Ordnung.

(6) Berechnung von $\Delta_{f,x}$ aus der Pol-Matrix der transformierten Differentialgleichung.

<u>Erläuterungen:</u> (1) Für eine geeignete Potenz des maximalen Ideals $m \subset \mathbb{C}[[z_o,\ldots,z_n]] = \mathbb{C}[[\underline{z}]]$ gilt

$$m^r \subset (\partial f/\partial z_o,\ldots,\partial f/\partial z_n) = (\partial f/\partial \underline{z})$$

Wenn r bekannt ist, ist $b_{f,x}$ als Codimension des Unterraumes $(\partial f/\partial \underline{z})/m^r$ in dem endlich-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{C}[[\underline{z}]]/m^r$ mittels linearer Algebra berechenbar. Die Zahl r kann nach [18] theoretisch in Abhängigkeit von g und n abgeschätzt werden. Praktisch ermittelt man sie besser als minimales r, für welches alle Monome vom Grad r in $(\partial f/\partial \underline{z})$ liegen. Ob ein Polynom $P \in \mathbb{C}[[\underline{z}]]$ in $(\partial f/\partial \underline{z}) \subset \mathbb{C}[[\underline{z}]]$ liegt, kann mittels linearer Algebra festgestellt werden. Denn nach GAGA [36] ist für jeden lokalen Ring R mit Komplettierung $\hat{R}$ das Paar $(R,\hat{R})$ platt. Angewandt auf den lokalen Ring von $\mathbb{C}[z_o,\ldots,z_n]$ in $(z_o,\ldots,z_n)$ ergibt dies:

$$P \in (\partial f/\partial \underline{z}) \iff P = \Sigma\, P_i/Q_i\ \partial f/\partial z_i \quad \text{mit}$$
$$P_i, Q_i \in \mathbb{C}[z_o,\ldots,z_n],\ Q_i(0) \neq 0\ .$$

Der Grad von P_i, Q_i ist nach [18] durch g und n und den Grad von P abschätzbar.

(2) Man findet mittels linearer Algebra ein minimales s mit

$$\dim \Omega^{n+1}_{X,x} / m^s\, \Omega^{n+1}_{X,x} + f\Omega^{n+1}_{X,x} + df \wedge d\Omega^{n-1}_{X,x} = b_{f,x}\ .$$

Jedes System von Formen $\omega_i = z_o^{i_o} \cdot \ldots \cdot z_n^{i_n}\ dz_o \wedge \ldots \wedge dz_n$, deren Restklassen in diesem Vektorraum eine Basis bilden, repräsentiert eine Basis von $''H^n_{f,x}$.

(3) Nach den Bemerkungen in (1) findet man mittels linearer Algebra ein minimales $\varkappa = \varkappa_{f,x}$ und eine n-Form ξ mit rationalen Koeffizienten, so daß

$$f^{\varkappa}\, d\underline{z} = df \wedge \xi \; .$$

Nach 0.3 gilt $k_{f,x} \leq \varkappa_{f,x}$. Man beweist übrigens leicht die Abschätzung $\varkappa_{f,x} \leq d_{f,x} + 1$.

(4) Die Zahl $N_f(K)$ wird mittels linearer Algebra als die minimale Zahl bestimmt, so daß $\dim H_K = K \cdot b_{f,x}$. Dann berechnet man die Matrix, welche $f^{\varkappa}\nabla$ auf H_K bezüglich der Basis ω_i beschreibt, mittels der Formel am Ende von 1.4 unter Benutzung der in (3) bestimmten Form ξ.

(5) Die Berechnung von T ist in 2.3 erklärt.

(6) Die Berechnung von $\Delta_{f,x}$ aus den in (4) und (5) erhaltenen Daten ist in 2.3 erklärt. Übrigens genügt es, die Koeffizienten von $\Delta_{f,x}$ mit einem Fehler $< \frac{1}{2}$ zu berechnen. $\Delta_{f,x}$ ist nämlich ganzzahlig.

Wir fassen zusammen. Falls man als Schritte zur Berechnung von $\Delta_{f,x}$ außer den rationalen Rechenoperationen für komplexe Zahlen auch das Lösen endlicher Systeme algebraischer Gleichungen zuläßt, gilt

<u>Proposition 3.4.</u>

$\Delta_{f,x}$ <u>ist als charakteristisches Polynom der Monodromie von</u> $\nabla_{f,x}$ <u>in endlichen vielen Schritten berechenbar</u>.

<u>3.6.</u> Als einfache Anwendung geben wir einen Algorithmus zur Berechnung von $\Delta_{f,x}$ für <u>quasihomogene</u> Polynome f an. Eine andere und sehr interessante Lösung findet man bei Milnor in [28], § 9.

Die Nullstellenfläche eines quasihomogenen Polynoms kann offensichtlich holomorph auf den Nullpunkt contrahiert werden. Also ist die Poincaré-Sequenz exakt, und es gilt "$H^n_{f,x}/f \cong \Omega^{n+1}_{X,x}/df \wedge \Omega^n_{X,x}$. Die Polordnung ist $k_{f,x} = 1$, was man auch aus der verallgemeinerten Leibniz-Formel sieht. Mithin genügt es, den durch $\nabla_{f,x}$ induzierten Endomorphismus von "$H^n_{f,x}/f$ zu berechnen. Offenbar erhält man also folgenden Algorithmus zur Berechnung von $\Delta_{f,x}$ durch lineare Algebra.

Proposition 3.5.

$$f = \Sigma\ c_{i_o \ldots i_n} z_o^{i_o} \ldots z_n^{i_n}$$

$$w_o i_o + \ldots + w_n i_n = q$$

mit natürlichen Zahlen $w_o, \ldots, w_n$ und q sei ein quasihomogenes Polynom mit einer isolierten Singularität im Nullpunkt x. Es existieren $b_{f,x}$ Monome $z_o^{j_{o\beta}} \ldots z_n^{j_{n\beta}}$, die in $\mathbb{C}[[z_o, \ldots, z_n]]/(\partial f/\partial z_o, \ldots, \partial f/\partial z_n)$ eine Basis repräsentieren. Es gilt

$$\Delta_{f,x}(\lambda) = \prod_{\beta=1}^{b_{f,x}} \left(\lambda - e^{2\pi i \sum_{\alpha=o}^{n} (j_{\alpha\beta}+1) w_\alpha / q}\right).$$

Beispiel: $f = z_o^{a_o} + \ldots + z_n^{a_n}$.

Monomiale Basis: $z_o^{i_o} \ldots z_n^{i_n}$ mit $0 \leq i_k \leq a_k - 2$

$$\Delta_{f,x}(\lambda) = \prod_{0<j_k<a_k} \left(\lambda - e^{2\pi i \sum j_k/a_k}\right).$$

Diese Formel war in [4] mit Hilfe von [31] abgeleitet worden.

37. Zum Abschluß erwähnen wir einige offene Probleme.

(1) Ein Problem, das in natürlicher Weise durch diese Arbeit aufgeworfen wird, ist die Entscheidung der Vermutung in 1.6. Ist der Differentialformenkomplex einer isolierten n-dimensionalen Hyperflächensingularität an der (n-1)-ten Stelle exakt? Das heißt: Ist die relative de Rhamsche Cohomologie einer isolierten Hyperflächensingularität torsionsfrei?

(2) Die Berechnung der Monodromie gestattet die Bestimmung der differenzierbaren Struktur sphärischer Umgebungsränder von n-dimensionalen Hyperflächensingularitäten für ungerades n. Für gerades n wäre dazu die Kenntnis der Signatur der Mannigfaltigkeit X_t erforderlich. Gibt es eine algebraische Beschreibung der Signatur?

(3) H.Hamm hat vor kurzem gezeigt ([17]), daß auch für isolierte Singularitäten von vollständigen Durchschnitten beliebiger komplexer Einbettungscodimension k die Umgebungsränder Σ Sphären sein können. A. Durfee hat bemerkt, daß wegen der Resultate von J.Levine im Fall k>1 nicht nur die differenzierbare Struktur von Σ, sondern sogar der Knoten $(S^{2(n+k)-1}, \Sigma^{2n-1})$ durch eine Signatur beziehungsweise Arf-Invariante bestimmt werden. Ist es möglich, auch für vollständige Durchschnitte die fraglichen Invarianten algebraisch zu berechnen?

(4) Die Berechnung von $\Delta_{f,x}$ gestattet die Entscheidung darüber, ob die (n-2)-fach zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\Sigma^{2n-1}_{f,x}$ eine Sphäre ist. Allgemeiner kann man versuchen, Σ entsprechend bekannten Klassifikationsresultaten für hochzusammenhängende Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren. In [9] ist das beispielsweise für Smales Klassifikation der einfach-zusammenhängenden 5-dimensionalen Mannigfaltigkeiten und sehr spezielle f geschehen. Gibt es

algebraische Invarianten für diese differentialtopologische Klassifikation der Umgebungsränder?

(5) Sphärische Umgebungsränder vollständiger Durchschnitte sind nie sehr exotisch, das heißt: beranden stets parallelisierbare Mannigfaltigkeiten. Gibt es unter den Umgebungsrändern isolierter Singularitäten komplexer Räume sehr exotische Sphären?

Appendix

Wir haben in Satz 1 bewiesen, daß der Rang der relativen de Rhamschen Cohomologie einer isolierten Singularität von f in x gleich $b_{f,x}$ ist. Dabei haben wir Milnors Satz benutzt, daß dieses $b_{f,x}$ gleich einer gewissen Bettizahl ist. Für diesen Satz geben wir hier einen einfachen Beweis. Dieser Beweis erklärt besonders anschaulich das Auftreten der Zahl $b_{f,x}$. Da es uns nur hierauf ankommt, werden wir gewisse andere Resultate von Milnor einfach übernehmen.

Es sei $f : (\mathbb{C}^{n+1},0) \to (\mathbb{C},0)$ eine holomorphe Abbildung und $x = 0$ ein isolierter singulärer Punkt von f. Es seien ε und η positive reelle Zahlen und

$$F = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid F(z) = \eta \quad , \quad \|z\| < \varepsilon \}.$$

Für hinreichend kleines ε und im Vergleich dazu hinreichend kleines η ist F nach Milnor [29] eine n-dimensionale parallelisierbare Steinsche Mannigfaltigkeit vom Homotopietyp eines Buketts von n-Sphären, und es gilt:

<u>Satz.</u> $\qquad \operatorname{rang} H_n(F) = b_{f,x}$

Beweis: Die Idee des Beweises ist wie bei Lê Dũng Trang, die Singularität im Sinne von Thom zu entfalten, das heißt, die Abbildung f in eine Abbildung f_a zu deformieren, die nur noch generische Singularitäten hat. Diese lassen sich dann sehr einfach studieren.

Es sei $\partial f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ die Abbildung, welche jedem z den Gradienten von f in z zuordnet. Ihre Faser über 0 ist der Nullpunkt mit dem $b_{f,x}$- dimensionalen Vektorraum $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}/(\partial f)$ als Strukturgarbe. Daher ist ∂f bei 0 eine analytisch verzweigte Überlagerung mit Überlagerungsgrad $b_{f,x}$. Deswegen gibt es für hinreichend allgemeines a = $= (a_0,\dots,a_n)$ bei 0 genau $b = b_{f,x}$ Punkte x_r in der Umgebung des Nullpunktes mit $\partial f(x_r) = a$. Letztere Gleichung bedeutet aber gerade, daß die Abbildung f_a mit

$$f_a(z) = f(z) - \sum_{i=0}^{n} a_i z_i$$

genau in den Punkten x_r singulär ist. Weil ∂f in x_r biholomorph ist, hat f_a in x_r einen gewöhnlichen Doppelpunkt, denn die Matrix $(\partial^2 f_a/\partial z_i\, \partial z_k)$ hat in x_r Maximalrang, und es ist wohlbekannt, daß dann für geeignete Koordinaten $y_0,\dots,y_n$ in der Umgebung von x_r gilt

$$(0) \qquad f(y_0,\dots,y_n) = f(x_r) + y_0^2 + \dots + y_n^2 \ .$$

Nun sei

$$\begin{aligned} S &= \{ t \in \mathbb{C} \mid \|t\| < \eta \} \\ V &= \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| < \varepsilon \} \\ X &= \{ z \in V \mid f(z) \in S \} \\ X^a &= \{ z \in V \mid f_a(z) \in S \} \ . \end{aligned}$$

Wenn a hinreichend allgemein und hinreichend dicht am Nullpunkt gewählt ist, ist aus Transversalitätsgründen und wegen des oben Gesagten folgendes klar:

(1) X^a ist homöomorph zu X.

(2) $f_a : X^a \to S$ ist genau in x_r, $r = 1,\dots,b = b_{f,x}$ singulär. Es hat in diesen Punkten gewöhnliche Doppelpunkte. Außerhalb der Fasern durch diese Punkte ist die Abbildung ein differenzierbares lokal-triviales Faserbündel.

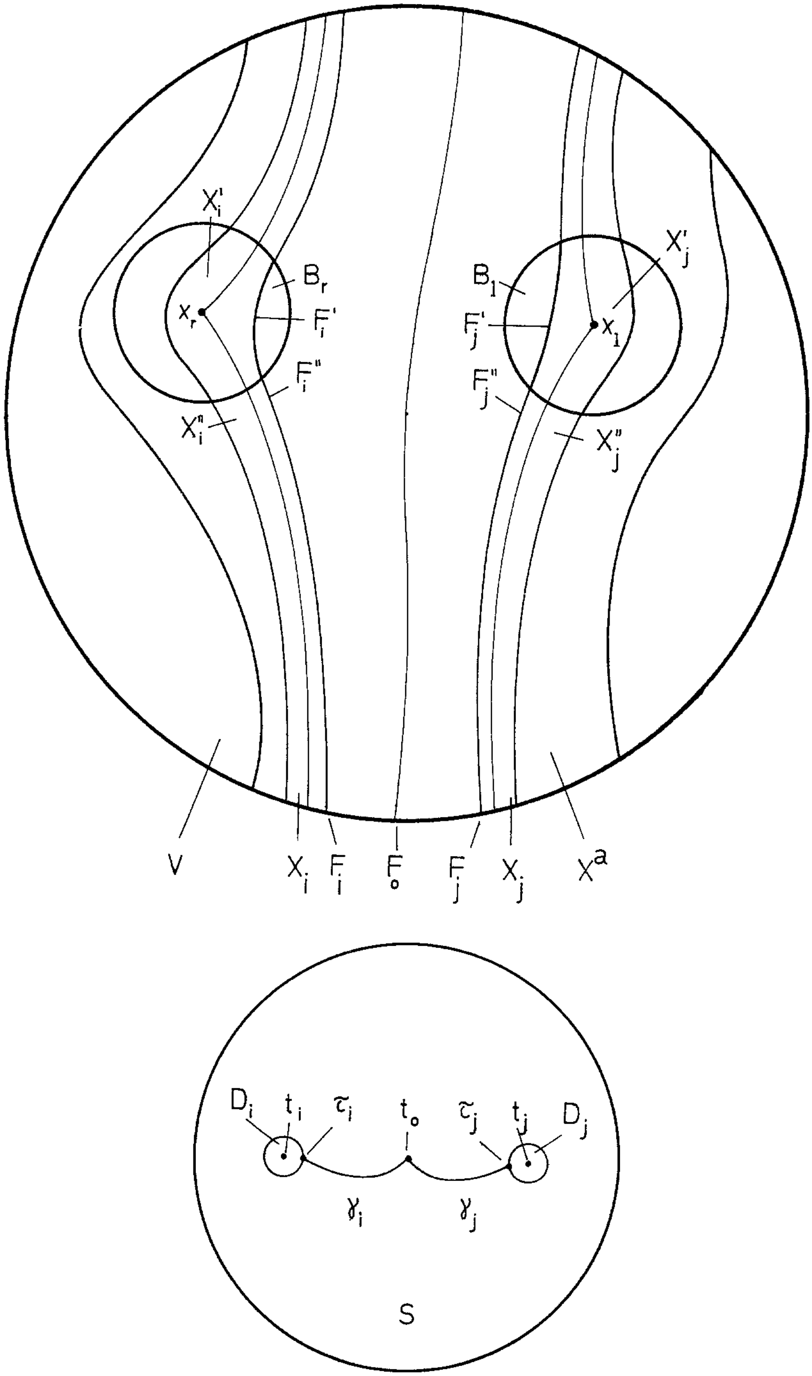
Es sei $B_r = \{ z \in X^a \mid \| z - x_r \| \leq \rho \}$, wobei $\rho > 0$ so klein gewählt ist, daß die B_r disjunkt sind und die Kugel B_r in einer Umgebung von x_r liegt, wo für f eine Darstellung (0) gilt. Nun seien $t_1,\dots,t_k \in S$ die kritischen Werte von f, also $\{t_1,\dots,t_k\} = f(\{x_1,\dots,x_b\})$. Es seien D_j die Kreisscheiben $D_j = \{t \in S \mid \| t - t_j \| \leq \delta \}$, wobei δ hinreichend klein im Vergleich zu ρ gewählt ist. Man wähle Punkte $\tau_j \in \partial D_j$, etwa $\tau_j = t_j + \delta$ und ferner ein $t_o \in S - \{t_1,\dots,t_k\}$. Schließlich wähle man in $S - \cup(D_j - \tau_j)$ Wege γ_j von t_o nach τ_j derart, daß $\cup D_j \cup \cup_{\gamma_j}$ Deformationsretrakt von S ist. Dann kann man folgende Teilmengen von X^a definieren:

$$X_j = f_a^{-1}\ (D_j)$$
$$F_j = f_a^{-1}\ (\tau_j)\ ,\ F_o = f_a^{-1}(t_o)$$
$$X^1 = f_a^{-1}\ (\cup D_j) = \cup X_j$$
$$X^2 = f_a^{-1}\ (\cup_{\gamma_j})$$

$X^1 \cup X^2$ ist wegen (2) homotopieäquivalent zu X^a, also nach (1) auch zu X, das auf einen Punkt zusammenziehbar ist (vgl. etwa [28]). Daher ergibt die Mayer-Victoris-Sequenz für $(X^1 \cup X^2, X^1, X^2)$ Isomorphismen

$$H_p(X^1) + H_p(X^2) \cong H_p(X^1 \cap X^2)\ .$$

Aber X^2 ist wegen (2) homotopieäquivalent zu F_o, und $X^1 \cap X^2 = F_1 \cup\dots\cup F_k$, wobei die Fasern F_j diffeomorph zu F sind. Daher gilt


X_i'
B_r
x_r
F_i'
F_i''
X_i''
B_l
X_j'
F_j'
x_l
F_j''
X_j''
V
X_i
F_i
F_o
F_j
X_j
X^a
D_i
t_i
τ_i
t_o
τ_j
t_j
D_j
γ_i
γ_j
S

(3) $\sum_{j=1}^{k} H_p(X_j) + H_p(F_o) \cong \sum_{j=1}^{k} H_p(F_j)$ und $H(F_j) \cong H(F)$.

Nun gibt es nach Milnor eine Homotopieäquivalenz

(4) $F \sim S^n \vee \ldots \vee S^n$.

Aus (3) und (4) folgt

(5) $H_p(X_j) = 0$ für $p \neq 0,n$.

Die Homologiegruppe $H_n(X_j)$ bestimmt man wie folgt. Es seien

$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_b \;,$$
$$X_j' = X_j \cap B \;, \quad X_j'' = X_j - \mathring{B} \;,$$
$$F_j' = F_j \cap B \;, \quad F_j'' = F_j - \mathring{B} \;.$$

Dann ist die Inklusion $F_j'' \subset X_j''$ eine Homotopieäquivalenz. X_j' ist die disjunkte Vereinigung von b_j zusammenziehbaren Räumen, wobei b_j die Zahl der Doppelpunkte x_r über t_j ist. Behauptung: F_j' hat den Homotopietyp einer disjunkten Vereinigung von b_j n-Sphären. Beweis:
Für $x_r \in F_j'$ hat $F_j' \cap B_r$ wegen (0) eine Deformationsretraktion auf die n-Sphäre

$$S_r^n = \{ y \mid y \text{ reell}, \; y_o^2 + \ldots + y_n^2 = \delta \} \;.$$

Daraus folgt die Behauptung. Daher erhält man unter Benutzung von (5) durch Vergleich der Mayer-Vietoris-Sequenzen für (X_j, X_j', X_j'') und $F_j, F_j', F_j'')$

(6) $\quad \operatorname{rang} H_n(X_j) = \operatorname{rang} H_n(F_j) - b_j$

Aus (3) und (6) folgt

$$\operatorname{rang} H_n(F) = \sum_{j=1}^{k} b_j = b_{f,x} \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>Bemerkung:</u> $S_r^n \subset F_j$ definiert eine Homologieklasse $d_r \in H_n(F_j, \mathbb{Z})$. Diese d_r sind gerade die schon von Lefschetz betrachteten "<u>verschwindenden</u> <u>Zyklen</u>". Durch Transport von d_r längs γ_j erhält man eine Homologieklasse $e_r \in H_n(F_o, \mathbb{Z})$. Mit im wesentlichen den gleichen Argumenten wie oben kann man zeigen:

<u>Zusatz:</u> $H_n(F_o, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} e_1 + \dots + \mathbb{Z} e_b$.

Literatur

[1] Andreotti,A.- Grauert,H: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull.Soc.math. France 9o, 193-259 (1962)

[2] Bloom,T.- Herrera,M.: De Rham Cohomology of an Analytic Space. Inventiones Math.7, 275-296 (1969)

[3] Bredon,G.: Sheaf Theory. 1. Aufl. New York: McGraw Hill 1967.

[4] Brieskorn,E.: Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. Inventiones Math.2, 1- 14 (1966)

[5] Clemens,C.H.: Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities. Trans.Amer.Math.Soc.136, 93-1o8 (1969)

[6] Coddington,E.-Levison,N.: Theory of Ordinary Differential Equations. 1. Aufl. New York-Toronto-London: McGraw-Hill 1955.

[7] De Rham,G.: Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire. Comment.math.Helv. 28, 346 - 352 (1954)

[8] Gelfond,A.: Sur le septième problème de D. Hilbert. Doklady Akad.Nauk. SSSR 2, 4-6 (1934)

[9] Giblin,P.J.: Topology of Double Points of Rank Zero on Threefolds in C^4. J.London Math.Soc. 44, 523 - 53o (1969)

[10] Godement,R.: Théorie des faisceaux. 1. Aufl.Paris: Hermann 1958

[11] Grauert,H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Inst. Hautes Etudes Sci.Publ.Math.No.5 (1960)

[12] Griffiths,Ph.A.: The Residue Calculus and some Transcendental Results in Algebraic Geometry I Proc.Nat.Acad.Sci. USA 55, 1303 - 1309 (1966)

[13] Griffiths,Ph.A.: Periods of Integrals on Algebraic Manifolds, I und II. Amer. J.Math. 90, 568 - 626 und 805 - 865 (1968)

[14] Griffiths,Ph.A.: Some Results on Moduli and Periods of Integrals on Algebraic Manifolds, III. Vervielfältigtes Manuskript.

[15] Grothendieck,A.: Eléments de Géométrie Algébrique. Inst.Hautes Etudes Sci. Publ. Math.No. 1,11,32.

[16] Grothendieck,A.: Crystals and the De Rham Cohomology of schemes. In: Dix exposés sur la conomologie des schemas. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1968 .

[17] Hamm,H.: Die Topologie isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten komplexer Hyperflächen. Dissertation Univ. Bonn (1969)

[18] Hermann,G.: Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale. Math.Ann. 95, 736 - 788 (1925)

[19] Hilbert,D.: Mathematische Probleme. Nachr. Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1900, p. 251 - 297

[20] Katz,M.- Tadao Oda: On the differentiation of De Rham cohomology classes with respect to parameters. J.Math.Kyoto Univ. 8, 199 - 213 (1968)

[21] Katz,M.: On the Differential Equations satisfied by Period Matrices. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.No. 35, 71 - 106 (1968)

[22] Landman,A.: On the Picard-Lefschetz Formula for Algebraic Manifolds Acquiring General Singularities. Thesis, Berkeley 1967 (?), unveröffentlicht.

[23] Le Dung Trang: Singularités isolées des hypersurfaces complexes.Preprint.Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris 1969

[24] Lefschetz,S.: L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique. Paris, Gauthier-Villars, 1924

[25] Leray,J.: Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy,III). Bull.Soc.Math.France 87, 81-18o (1959)

[26] Lutz,D.: Some Characterizations of Systems of Linear Differential Equations Having Regular Singular Solutions. Trans.Amer.Math.Soc. 126, 427-441 (1967)

[27] Mather,J.N.: Stability of C^∞ Mappings,III: Finitely Determined Map-Germs. Inst.Hautes Études Sci. Publ. Math.No.35, 127 - 156 (1968)

[28] Milnor,J.: On isolated singularities of hypersurfaces. Vervielfältigtes Manuskript (1966)

[29] Milnor,J.: Singular points of complex hypersurfaces. Ann.of Math. Studies Number 61 , Princeton: Princeton University Press 1968

[3o] Moser,J.: The order of a singularity in Fuchs' theory. Math.Z. 72, 379 - 398 (196o)

[31] Pham,F.: Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. Bull.Soc.Math. France 93, 333 - 367 (1965)

[32] Picard,E.-Simart,G.: Théorie des fonctions algébrique de deux variables indépendantes I, Chapitre IV. Paris: Gauthier-Villars 1897.

[33] Reiffen,H.-J.: Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen. Math.Z.1o1, 269 - 284 (1967)

[34] Schneider,Th.: Transzendenzuntersuchung periodischer Funktionen I. Transzendenz von Potenzen. J. Reine Angew. Math. 172, 65 - 69 (1934)

[35] Schwartz,L.: Homomorphismes et applications complètement continues. C.R.Acad.Sci.Paris 236, 2472-2473 (1953)

[36] Serre,J.-P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann.Inst. Fourier 6, 1 - 42 (1956)

[37] Verdier,J.-L.: Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. Sém. Bourbaki 1965/66, Exposé 3oo.

Egbert Brieskorn
Mathematisches Institut
der Universität Göttingen,
34 Göttingen, Bunsenstr. 3/5

(Eingegangen am 5. September 1969)

Zusatz bei der Korrektur: Die Vermutung über die Torsionsfreiheit der relativen de Rhamschen Cohomologie, das heißt die am Ende von 1.6 aufgestellte Vermutung, ist inzwischen von M.Sebastiani bewiesen worden. Der Beweis erscheint in den manuscripta mathematica, Band 2, Heft 3 unter dem Titel "Preuve d'une conjecture de Brieskorn".