Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Das Problem der Invarianz der Dimensionenzahl, d. h. der Unmöglichkeit, zwischen einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit und einer $(m+h)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $(h > 0)$ eine eineindeutige und stetige Beziehung herzustellen, ist für den Fall $m \leqq 3$ von Lüroth gelöst worden.*) Im Folgenden soll der allgemeine Fall erledigt werden.

§ 1.

Wir denken uns in einer q-dimensionalen Mannigfaltigkeit einen q-dimensionalen Kubus K mit der Kantenlänge $2a$, welcher durch Verrückungen seiner Punkte, deren Größe ein gewisses Maximum $b < a$ nicht übersteigt, einer eindeutigen und stetigen Abbildung α unterliegt, und bezeichnen mit K_1 einen bestimmten mit K konzentrischen und homothetischen Kubus, dessen Kantenlänge $2a_1 < 2(a-b)$ ist.

Wir unterziehen K einer *simplizialen Zerlegung*, d. h. wir wählen eine willkürliche ganze Zahl n, zerlegen K zunächst in n^q mit ihm homothetische Teilkuben mit der Kantenlänge $\frac{2a}{n}$, und sodann jeden dieser Teilkuben in $q!$ Simplexe, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte der Teilkuben sind. Diese Simplexe nennen wir die *Grundsimplexe* der Zerlegung,

---

*) Vgl. „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten", Math. Annalen 63 S. 222—238. Hinsichtlich der Fehlschlüsse in den von Thomae, Netto und Cantor für den allgemeinen Fall versuchten Beweisen vgl. E. Jürgens, „Der Begriff der n-fachen stetigen Mannigfaltigkeit", Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. 7_1, S 50—55, und A. Schoenflies, Bericht über die Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Bd. II, S. 167. Über die Orientierung des Problems vgl. auch R. Baire, „Sur la nonapplicabilité de deux continus à n et $n+p$ dimensions", Comptes Rendus 144, S. 318—321; Bull. des Sc. Math. (2), 31, S. 94—99, und M. Fréchet, „Les dimensions d'un ensemble abstrait", Math. Ann. 68, S. 145—168.

ihre Eckpunkte die *Grundpunkte* der Zerlegung. Unter *Grundseiten* der Zerlegung verstehen wir die in den Grenzen der Grundsimplexe auftretenden $(q-1)$-dimensionalen Simplexe, unter *Grundkanten* der Zerlegung die in den Grenzen der Grundsimplexe auftretenden $(q-1-p)$-dimensionalen Simplexe $(p > 0)$. Diejenigen Grundseiten, welche in der Grenze von K liegen, sollen *Randseiten* heißen, die übrigen *innere Seiten.*

Wir setzen für K einen positiven Sinn der Indikatrix fest, und in jedem Grundsimplex bringen wir eine positive Indikatrix an.

Sei π eines der Grundsimplexe mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \cdots, A_{q+1}$, welche durch die Abbildung α übergehen in $B_1, B_2, \cdots, B_{q+1}$. Ein im Inneren oder auf der Grenze von π liegender Punkt P läßt sich als Schwerpunkt von gewissen in $A_1, A_2, \cdots, A_{q+1}$ konzentrierten positiven Massen auffassen. Bringen wir dieselben Massen der Reihe nach in $B_1, B_2, \cdots, B_{q+1}$ an, so bestimmen sie einen Schwerpunkt Q, den wir P entsprechen lassen. Alsdann wird, falls die Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_{q+1}$ nicht in einem ebenen $(q-1)$-dimensionalen Raume liegen, das Grundsimplex π eineindeutig und stetig abgebildet auf ein Bildsimplex ϱ, dessen Inhalt wir, je nachdem die Bildindikatrix positiv oder negativ ausfällt, positiv bzw. negativ rechnen werden. Wenn aber die Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_{q+1}$ in einem $(q-1)$-dimensionalen Raume liegen, so wird das Bildsimplex singulär, und bekommt den Inhalt Null.

Indem wir mit jedem der Grundsimplexe in analoger Weise verfahren, erhalten wir eine neue eindeutige und stetige Abbildung β von K, deren spezielle Art wir mit dem Namen *„simpliziale Abbildung"* bezeichnen wollen.

Falls es für β singuläre Bildsimplexe gibt, können wir mittels (eine beliebig klein gewählte Größe nicht übersteigender) Herabsetzungen der Verrückungen der Grundpunkte eine *„modifizierte" simpliziale Abbildung* γ, für welche es keine singulären Bildsimplexe mehr gibt, herstellen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Abbildung γ und bezeichnen mit μ die Menge derjenigen im Inneren von K_1 enthaltenen Punkte, welche *nicht* dem Bilde einer Grundkante angehören. Diese Menge μ besitzt die Eigenschaft, daß je zwei ihrer Punkte sich durch einen aus einer endlichen Zahl von Strecken bestehenden, ganz in μ verlaufenden Streckenzug verbinden lassen.

Weiter bemerken wir, daß die Bilder der Randseiten nicht in das Innere von K_1 eindringen können, und nennen diejenigen Punkte von μ, welche *nicht* dem Bilde einer inneren Seite angehören, *die gewöhnlichen Punkte von* K_1.

Seien P_1 und P_2 zwei willkürliche gewöhnliche Punkte von K_1, welche wir durch einen ganz in μ verlaufenden Streckenzug s verbinden, und sei P ein variabler gewöhnlicher Punkt von K_1. Die Zahl der positiven bzw. negativen Bildsimplexe, welche P_1 bedecken, bezeichnen wir mit p_1 bzw. p_1', die analogen Zahlen für P_2 mit p_2 und p_2', die analogen Zahlen für P mit p und p'.

Diese Zahlen p und p' können sich bei Bewegung von P an s entlang nur dann ändern, wenn das Bild σ einer inneren Seite passiert wird. Wenn die beiden Bildsimplexe, welche in σ zusammenstoßen, auf verschiedenen Seiten von σ liegen, so besitzen sie dasselbe Vorzeichen, und die Kreuzung von σ hat auf die Zahlen p und p', also auch auf die Zahl $p - p'$, keinen Einfluß. Wenn aber die beiden Bildsimplexe auf derselben Seite von σ liegen, so besitzen sie entgegengesetzte Vorzeichen, und die Kreuzung von σ führt entweder eine Zunahme von p und p' je um eins, oder eine Abnahme von p und p' je um eins herbei, läßt also wieder die Zahl $p - p'$ ungeändert. Mithin ist $p_1 - p_1' = p_2 - p_2'$, und *für die Abbildung γ ist die Zahl $p - p'$ in den gewöhnlichen Punkten von K_1 eine Konstante.*

Wenn nun für die Abbildung β, in bezug auf welche wir die gewöhnlichen Punkte von K_1 und die Zahlen p und p' in analoger Weise wie in bezug auf γ definieren, zwei gewöhnliche Punkte P_1 und P_2 existierten, für welche $p_1 - p_1'$ und $p_2 - p_2'$ verschieden wären, so könnten wir β mit solcher Genauigkeit durch eine „modifizierte" simpliziale Abbildung γ_ν approximieren, daß die Punkte P_1 und P_2 für γ_ν wieder gewöhnliche Punkte von K_1 wären und die Zahlen p_1, p_1', p_2, p_2' für γ_ν dieselben Werte wie für β besäßen, daß mithin für γ_ν die Zahl $p - p'$ keine Konstante sein könnte. Aus diesem Widerspruche folgern wir, daß *auch für die Abbildung β die Zahl $p - p'$ in den gewöhnlichen Punkten von K_1 eine Konstante c ist.*

Um den Wert dieser Konstante c zu ermitteln, bezeichnen wir den Inhalt von K_1 mit I_1 und bemerken, daß der Gesamtinhalt derjenigen Teile der Bildsimplexe, welche in K_1 enthalten sind, $c \cdot I_1$ beträgt. Wenn wir dann die der simplizialen Abbildung β zugrunde liegenden Verrückungen der Grundpunkte stetig verkleinern, bis sie alle den Wert Null erreichen, und die Abbildung β entsprechend stetig in die identische Abbildung übergehen lassen, so kann dabei der genannte Gesamtinhalt keine Sprünge erleiden, und somit die ganze Zahl c sich nicht ändern. Hieraus folgern wir, daß die Zahl c für β denselben Wert, wie für die identische Abbildung, d. h. den Wert 1, besitzt.

Dann aber können für β in keinem gewöhnlichen Punkte von K_1 die Zahlen p und p' beide Null sein, sodaß sich herausstellt, daß *die durch β erzeugte Menge der Bildsimplexe den ganzen Kubus K_1 enthält.*

Indem wir nun weiter bemerken, daß die Abbildung α sich durch eine aus hinreichend groß gewähltem n hervorgegangene simpliziale Abbildung mit jedem beliebigem Grade der Genauigkeit approximieren läßt, zeigt sich, daß auch *die durch α bestimmte Bildmenge von K den ganzen Kubus K_1 enthält.*

Mithin ist bewiesen folgender

Hilfssatz. *Wenn in einer q-dimensionalen Mannigfaltigkeit bei einer eindeutigen und stetigen Abbildung eines q-dimensionalen Kubus das Maximum der Verrückungen kleiner ist als die halbe Kantenlänge, so existiert ein konzentrischer und homothetischer Kubus, der ganz in der Bildmenge enthalten ist.*

§ 2.

Wir nehmen nun an, daß in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit das eineindeutige und stetige Bild eines m-dimensionalen Bereiches in einer gewissen Umgebung eines seiner Punkte nirgends dicht liegt. Alsdann existiert eine eineindeutige und stetige Beziehung ϑ zwischen einem m-dimensionalen Kubus K und einer in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit liegenden, nirgends dichten, zusammenhängenden perfekten Menge C.

Wir schließen C in einen m-dimensionalen Kubus k ein, den wir einer simplizialen Zerlegung ζ unterziehen, und heben aus den in dieser Weise bestimmten Grundsimplexen diejenigen heraus, welche jedes wenigstens einen Punkt von C in ihrem Inneren oder auf ihrer Grenze enthalten. Die in dieser Weise bestimmte Simplexmenge bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}$ und bestimmen in folgender Weise eine eindeutige und stetige Abbildung η von C auf eine nirgends dichte Teilmenge von K:

Jedem zu $\mathfrak{f}$ gehörigen Grundpunkte E der Zerlegung von k lassen wir einen solchen Punkt von K entsprechen, dessen Bildpunkt für die Beziehung ϑ in einem der Grundsimplexe, welche E zum Eckpunkte besitzen, enthalten ist. Wenn dann ein Punkt P von C dem Grundsimplexe $A_1 A_2 \cdots A_{m+1}$ angehört, dessen Eckpunkten die Punkte $B_1, B_2, \cdots, B_{m+1}$ von K entsprechen, so läßt er sich als Schwerpunkt von gewissen in $A_1, A_2, \cdots, A_{m+1}$ konzentrierten positiven Massen auffassen. Dieselben Massen bringen wir der Reihe nach in $B_1, B_2, \cdots, B_{m+1}$ an, und lassen ihren Schwerpunkt Q für die Abbildung η dem Punkte P entsprechen.

Sei R derjenige Punkt von K, der für die Beziehung ϑ dem Punkte P entspricht, so können wir, indem wir die Zahl der Grundsimplexe der simplizialen Zerlegung ζ hinreichend groß wählen, das Maximum der Abstände QR unter jede Grenze, a fortiori also unter die halbe Kantenlänge von K herabsinken lassen. Die Beziehung zwischen den Punkten R und den Punkten Q wird dann aber *eine solche eindeutige und stetige Ab-*

bildung des Kubus K auf eine nirgends dichte Teilmenge von sich, bei der das Maximum der Verrückungen kleiner ist als die halbe Kantenlänge, was nach dem Resultate des § 1 ein Widerspruch ist.

Die versuchte Annahme hat sich mithin als unstatthaft erwiesen, und wir haben gezeigt:

Satz 1. *In einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit enthält das eineindeutige und stetige Abbild eines m-dimensionalen Bereiches in beliebiger Nähe eines beliebigen seiner Punkte einen Bereich.*

Wir nehmen weiter an, daß eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit R_m von einem $(m+h)$-dimensionalen Bereiche B_{m+h} $(h>0)$ ein eineindeutiges und stetiges Bild B'_{m+h} enthält. Dann würde von einem in B_{m+h} nirgends dicht liegenden m-dimensionalen Bereiche B_m die Bildmenge B'_m in B'_{m+h}, also auch in R_m nirgends dicht liegen, was wider Satz 1 verstoßen würde. Mithin gilt:

Satz 2. *Eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit kann nicht das eineindeutige und stetige Abbild eines Bereiches höherer Dimensionenzahl enthalten.*

Schließlich nehmen wir an, daß in einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit das eineindeutige und stetige Bild eines $(m-h)$-dimensionalen Bereiches B_{m-h} $(h>0)$ einen gewissen Bereich B_m enthält. Dann aber würde B_{m-h} ein eineindeutiges und stetiges Bild von B_m enthalten, was nach Satz 2 ausgeschlossen ist, sodaß wir bewiesen haben:

Satz 3. *In einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist das eineindeutige und stetige Abbild eines Bereiches geringerer Dimensionenzahl eine nirgends dichte Punktmenge.*

Die Sätze 2 und 3 enthalten beide die Invarianz der Dimensionenzahl als unmittelbare Folgerung.