Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich.

Von

L. E. J. Brouwer in Amsterdam.

Einer freundlichen Anregung von Herrn Hilbert folgend referiere ich hier kurz über Untersuchungen, welche ich in den Amsterdamer Berichten*) veröffentliche, und welche darauf abzielen, daß eine willkürliche eineindeutige, stetige, und ohne Verrückung der Fixpunkte stetig erreichbare Transformation einer zweiseitigen Fläche in sich in eine Translation umgesetzt wird, nachdem man die Fläche in Teilgebiete zerlegt und diese Teilgebiete nötigenfalls durch Abwickelung erweitert hat.

Die Untersuchungen stützen sich in ausgiebigster Weise auf die Schoenfliessche Theorie der Analysis Situs, erfordern aber eine eingehendere Analyse der Begriffe der *geschlossenen Kurve* und des *Kurvenbogens,* welche den eigentümlichen Gestalten, auf welche ich in meiner Note zur Analysis Situs (Math. Ann., Bd. 68, S. 422) hingewiesen habe, Rechnung trägt.

Unter einer *geschlossenen Kurve* auf einer im Sinne der Analysis Situs willkürlichen Fläche verstehen wir eine geschränkte, perfekte, zusammenhängende Menge, welche die Punkte einer sie approximierenden Umgebung so in zwei Gebiete zerlegt, daß jeder Punkt der Menge gemeinsamer Grenzpunkt dieser beiden Gebiete ist.

M. a. W. die geschlossene Kurve besitzt zwei *Konturen* von erreichbaren Punkten; auf jeder von diesen kann man den zyklischen Ordnungstypus η der erreichbaren Punkte konstruieren. Durch zwei Schnitte wird dieser Ordnungstypus in zwei Teilmengen zerlegt; die Ableitung einer solchen Teilmenge nennen wir, wenn sie nicht mit der ganzen geschlossenen Kurve identisch ist, einen *eigentlichen Kurvenbogen.*

*) Amsterdamer Berichte, holländische Ausgabe XVII 2, S. 741; XVIII 1, S. 106; englische Ausgabe XI 2, S. 788; XII 1, S. 286; und weitere demnächst erscheinende Fortsetzungen.

Ein eigentlicher Kurvenbogen, oder kurzweg Kurvenbogen, bewirkt weder für die ganze Fläche, noch für die Punkte einer sie approximierenden Umgebung eine Gebietsteilung, m. a. W. besitzt nur *eine einzige Kontur*; es fragt sich nun, wann ein geschränktes, abgeschlossenes, nirgends dichtes Kontinuum K mit einer einzigen Kontur als Kurvenbogen zu betrachten ist. Die Antwort lautet folgendermaßen:

Man konstruiere auf der Kontur den zyklischen Ordnungstypus η_e der erreichbaren Punkte. Es kann nun vorkommen, daß ein zwischen einem nach rechts und einem nach links gerichteten Schnitte enthaltenes Teilsegment von η_e die ganze Menge K als Ableitung besitzt. Ein solches Teilsegment heiße eine „*vollständige Teilkontur*". K ist nun dann und nur dann ein Kurvenbogen, wenn man in ihm zwei vollständige Teilkonturen bestimmen kann, welche entweder völlig getrennt sind, oder höchstens zwei sich unbeschränkt zusammenziehende Teilsegmente gemeinschaftlich haben.*)

Die Kurvenbogen lassen sich unterscheiden in *singuläre* und *nichtsinguläre.*

Letztere besitzen zwei *Enden* E_1 und E_2, welche voneinander getrennt sind und die Kontur außerhalb der Enden in zwei vollständige Teilkonturen zerlegen. Weiter kann man sie nach Tilgung der Enden in mannigfacher Weise zerlegen in einen Ordnungstypus $^*\omega + \omega$ von ebenfalls nichtsingulären Teilkurvenbogen, welche auf jeder Seite gegen ein Ende konvergieren, während jeder von ihnen wenigstens einen Punkt besitzt, welcher außerhalb aller der übrigen liegt.

Jede auf einer der beiden vollständigen Teilkonturen gegen ein Ende konvergierende Fundamentalreihe von erreichbaren Punkten bestimmt durch eine Teilreihe eine Fundamentalreihe von Teilkurvenbogen der eben genannten Art; jeder Teilkurvenbogen enthält sodann einen Punkt der Teilreihe, und jeder Punkt der Teilreihe liegt in einem und nur in einem der Teilkurvenbogen; weiter kann man mittels dieser Teilkurvenbogen leicht eine mit der ersten *zusammengehörige* Fundamentalreihe von erreichbaren Punkten auf der anderen vollständigen Teilkontur konstruieren.

Jede vollständige Teilkontur eines singulären Kurvenbogens enthält wenigstens einen nach rechts bzw. nach links gerichteten *singulären Schnitt,* d. h. einen Schnitt, der ein gewisses ihm beim Umlaufe rechts bzw. links herum unmittelbar vorangehendes Segment des Ordnungstypus η_e ganz enthält. Der singuläre Schnitt ist ein *spezieller singulärer Kurvenbogen* d. h. ein solcher, *der sich nicht in zwei Teilkurvenbogen zerlegen läßt.*

*) Es kommt auf dasselbe hinaus, einer gewissen vollständigen Teilkontur k die Bedingung aufzuerlegen, daß keine abgeschlossene zusammenhängende *Teil*menge von K existiert, welche von k sowohl ein Anfangs-, wie ein Endsegment besitzt.

Auf der Kontur eines *speziellen singulären Kurvenbogens* kann es mehr als zwei voneinander getrennte vollständige Teilkonturen geben. In meiner Note zur Analysis Situs finden sich Beispiele mit drei und mit vier vollständigen Teilkonturen. Eine solche vollständige Teilkontur enthält sodann immer einen Schnitt, welcher mit dem ganzen Kurvenbogen identisch ist.

Zu einer Fundamentalreihe von erreichbaren Punkten, welche auf einer vollständigen Teilkontur gegen einen singulären Schnitt konvergieren, gibt es niemals eine mit ihr zusammengehörige Fundamentalreihe von erreichbaren Punkten auf einer anderen vollständigen Teilkontur.

Diese vorangehenden Begriffe werden benutzt bei der Untersuchung der eineindeutigen, stetigen, und ohne Verrückung der Fixpunkte stetig erreichbaren Transformationen einer zweiseitigen Fläche in sich; mit ihrer Hilfe wird nämlich zunächst folgender Hilfssatz bewiesen:

„*Tritt bei einer Transformation der genannten Art ein invariantes Kontinuum mit einer einzigen Kontur auf, so enthält es dann wenigstens einen invarianten Punkt, wenn es entweder in einer Kreisfläche enthalten, oder nirgends dicht und in einer Parabelfläche enthalten ist.*“*)

Sodann konstruieren wir zu einem willkürlichen nicht invarianten Punkt der Fläche ein diesen Punkt enthaltendes *Transformationsfeld D*, d. h. ein Gebiet, das ganz außerhalb seines Bildgebietes liegt, aber diese Eigenschaft verliert durch jede Ausdehnung, welche entweder direkt oder nach unendlich kleiner Abänderung der Grenze mit ihm vorgenommen wird.

Wenn wir nun unter einer *J-Menge* eine nur invariante Punkte enthaltende Kontur verstehen (welche sich auch auf einen einzigen Punkt zusammenziehen kann), so ist unser wieder mittels der Theorie des Kurvenbogens erreichtes Endresultat, daß wir das Transformationsfeld immer in einer der folgenden Gestalten erhalten können:

Erster Fall. Es bestimmt ein Restgebiet *R*, welches den Zusammenhang des Restgebietes eines Loches besitzt.**)

Ist dann die Grenze von *R* die volle Grenze von *D*, so wird diese gebildet von zwei, zwischen denselben beiden *J*-Mengen als Enden oder zwischen einer und derselben *J*-Menge als Ende und einem und demselben Rande verlaufenden, außerhalb dieser Enden einfachen Kurvenbogen, deren einer das Bild des anderen ist.

Ist aber die Grenze von *R* nicht die volle Grenze von *D*, so wird

*) Die Forderung, daß die Transformation ohne Verrückung der Fixpunkte stetig erreichbar sein muß, ist übrigens für diesen Satz nicht notwendig.

**) Das Loch kann auch an einen Rand grenzen, und dementsprechend das Restgebiet den Zusammenhang der Fläche selbst besitzen.

diese gebildet entweder von zwei zusammenziehbaren, einfachen, geschlossenen Kurven, deren eine das Bild der anderen ist, oder von zwei sich schließenden einfachen Kurvenbogen, deren einer das Bild des anderen ist.

Diese beiden sich schließenden Kurvenbogen verlaufen entweder zwischen denselben beiden miteinander zusammenhängenden J-Mengen als Enden, oder zwischen demselben Rande und derselben mit diesem Rande zusammenhängenden J-Menge, oder schließlich rücken beide auf beiden Seiten in einen und denselben Rand. Ihre Konturen sind zusammenziehbar.

Zweiter Fall. Es bestimmt kein Restgebiet, welches den Zusammenhang des Restgebietes eines Loches besitzt. Es besitzt also wenigstens eine nicht zusammenziehbare Kontur.

Die Grenze von D wird dann gebildet entweder von zwei nicht zusammenziehbaren, einfachen, geschlossenen Kurven, deren eine das Bild der anderen ist, oder wieder von zwei sich schließenden einfachen Kurvenbogen, deren einer das Bild des anderen ist.

Diese beiden sich schließenden Kurvenbogen verlaufen hier entweder zwischen denselben beiden miteinander zusammenhängenden J-Mengen, oder zwischen demselben Rande und derselben mit einem Rande zusammenhängenden J-Menge, oder schließlich zwischen denselben beiden Rändern (welche auch identisch sein können). Ihre Konturen sind nicht zusammenziehbar.

Unterziehen wir nun das Feld D unbeschränkt immer wieder der Transformation selbst, sowie ihrer inversen, so konstruieren wir, indem wir eventuell die Fläche durch Abwickelung erweitern, einen Ordnungstypus $^*\omega + \omega$ von Bildern von D, welche außerhalb voneinander liegen, und zusammen ein Gebiet B ausfüllen, in dem außerhalb der Grenze die Transformation eineindeutiges und für jede abgeschlossene Teilmenge gleichmäßig stetiges Bild ist einer *Translation* der Cartesischen Ebene in sich oder des Kreiszylinders in sich.

Und die ganze Fläche läßt sich in solche Gebiete zerlegen.

Als Nebenresultate kommen bei dieser Analyse folgende, in meiner zweiten Mitteilung über endliche kontinuierliche Gruppen*) zur Anwendung gelangende Sätze heraus:

„*Jede eineindeutige, stetige Transformation der Cartesischen Ebene in sich, welche den Umlaufssinn nicht ändert, ist entweder über die ganze*

*) Dieser Band, nächster Aufsatz.