ELSEVIER

Expo. Math. 22 (2004): 55–82
http://www.elsevier-deutschland.de/expomath

EXPOSITIONES MATHEMATICAE

La double origine du groupe symplectique

Robert Brouzet

I3M UMR CNRS 5149, Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, F-34095 Montpellier cedex 5, France, et EMIAN, Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Nîmes, Site des Carmes, Place Gabriel Péri, 30021 Nîmes cedex 1, France

Résumé : Ce texte a pour but de décrire les contextes mathématiques qui permirent l'émergence d'un des groupes dits classiques, à savoir le groupe symplectique, par lequel le terme même de "symplectique", fit son apparition en mathématiques sous la plume d'Hermann Weyl. Nous montrerons plus précisément, que ce groupe possède une double origine, l'une dans le cadre de la géométrie projective avec l'étude des complexes de droites, et l'autre dans des questions relatives aux transformations des intégrales abéliennes.

Abstract : The goal of this paper is the description of the mathematical contexts which allowed the emergence of one of the so called classical groups, namely the symplectic group, by which the word "symplectic" appeared in mathematics. We show that it has a double origin, one in the line complexes of the projective geometry and the other one, in some questions about transformations of abelian integrals.

Mots clés : histoire du groupe symplectique, complexes de droites, intégrales abéliennes.

Introduction

Le terme "symplectique" fit son apparition, dans le champ mathématique, à l'initiative d'Hermann Weyl, pour qualifier l'un des sous-groupes du groupe linéaire. Précisément, dans son ouvrage consacré aux groupes classiques [We], dont la première édition date de 1938, Hermann Weyl écrit dans une note de bas de page du chapitre consacré au groupe symplectique (cf. p 165 de l'édition de 1946) :

« The name "complex group" formerly advocated by me in allusion to line complexes, as these are defined by the vanishing of antisymmetric bilinear forms, has become more and more embarrassing through collision with the word "complex" in the connotation of complex number. I therefore propose to replace it by the corresponding Greek adjective "symplectic." Dickson calls the group the "Abelian linear group" in homage to Abel who first studied it. »

C'est ainsi que le terme *symplectique* fait son entrée en mathématiques. Cette "création" de l'adjectif ne coïncide cependant pas avec celle de l'objet qu'il qualifie puisque, comme le laisse entendre cette note même, celui-ci semble étudié depuis Abel.

Le but de ce travail est d'essayer de remonter aux sources du groupe symplectique, qui est, rappelons le, constitué des automorphismes linéaires de $\mathbb{K}^{2n}$ qui préservent la forme bilinéaire antisymétrique

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i,$$

MSC 2000 Mathematics Subject Classification: 01A55, 01A60, 11E57, 51N15, 33E05
E-mail address: brouzet@math.univ-montp2.fr

0732-0869/04/22/01-055 $30.00/0

et ce grâce aux indications contenues dans cette note de bas de page laissée par Weyl. Précisément, nous nous proposons d'exposer, dans une perspective historique, les éléments de mathématiques qui sont évoqués par Weyl dans sa note et qui ont joué un rôle central dans l'émergence et la désignation de ce groupe.

Il appert à la lecture de cette note qui est notre point de départ, que pour suivre la génèse de ce groupe classique depuis sa première apparition, jusqu'à sa désignation par H. Weyl, nous allons devoir suivre deux pistes distinctes, celle d'abord de la géométrie des *complexes de droites*, qui suggéra à Weyl le terme de "symplectique" par hellénisation du latin "complexus" puis une autre, issue d'Abel et passant par Dickson. Comme nous allons le voir, si Weyl choisit de nommer ce groupe relativement à la première d'entre elles, c'est pourtant la seconde qui semble vraiment être celle qui a initié et développé le futur groupe symplectique ; en outre Abel et Dickson n'y jouent pas les rôles que leur assigne Weyl. En effet, si on lit Dickson ([Dic1], [Dic4]), on se rend compte qu'il renvoie lui-même à Jordan [Jo] pour l'appellation "groupe abélien" et en consultant alors le *Traité des substitutions* [Jo], on constate qu'effectivement, c'est Jordan qui introduit cette terminologie relative à Abel et ce parce qu'il voit la première apparition de ce groupe dans les travaux d'Hermite relatifs à la théorie des transformations des intégrales abéliennes ! Ce groupe aurait donc pu tout aussi bien s'appeler initialement le "groupe hermitien". En fait, ce qui se dégage de l'examen de cette double origine du groupe symplectique, c'est que dans les années 1830, d'abord dans le cadre de transformations de la géométrie projective, puis vingt ans plus tard, de manière complètement indépendante, à propos de transformations d'intégrales abéliennes, apparaissent des quadruplets de nombres complexes[1], orthogonaux relativement à une *forme symplectique* sur $\mathbb{C}^4$. Dans le premier cas, seule la forme bilinéaire antisymétrique associée au complexe linéaire apparaît, mais il ne semble pas que les géomètres de l'époque aient étudié les transformations qui la laisseraient invariante[2]. En revanche, dans le second cas, Hermite s'intéresse au groupe des automorphismes de cette forme et en ce sens, il est le premier à faire apparaître et à utiliser ce qui va devenir le futur groupe symplectique. Il est à noter que dans les deux cas, comme nous le verrons, les transformations qui apparurent naturellement furent, non pas celles qui laissaient la forme symplectique invariante mais plutôt celles qui conservaient l'orthogonalité de ces quadruplets et donc consistaient en des transformations multipliant la forme symplectique par un facteur conforme. Il y a dans cette double origine, la confluence de deux traditions, de deux écoles mathématiques, l'une française issue des travaux de Galois et se développant dans le*Traité des substitutions* de Jordan [Jo] et axée essentiellement sur l'étude des groupes finis et l'autre, allemande qui par les travaux de Möbius, Plücker, Clebsch, Klein et Lie (que l'on associera abusivement à l'école mathématique allemande) sur la géométrie projective et les complexes de droites en particulier, conduira aux groupes continus. Ainsi, le choix terminologique de Weyl, qui s'est imposé depuis lors à l'ensemble des mathémati-

[1]On a ici un bel exemple de l'ambiguïté du terme *complexe*, soulevée par Weyl, puisque les nombres complexes apparaissent aussi bien dans le cadre des complexes de droites que dans celui des intégrales abéliennes.

[2]Comme nous le préciserons un peu plus tard, il faudra attendre S. Lie vers 1870 pour que ce groupe fasse son apparition dans le contexte des complexes linéaires.

ciens, à la place de celui plus ancien de "groupe abélien", se comprend aisément par la tradition et la culture dont hérite Hermann Weyl. Il est toutefois amusant de noter que les deux plus grands mathématiciens norvégiens connus, N. Abel et S. Lie interviennent chacun à des titres divers dans cette histoire du groupe symplectique.

Dans une première petite partie nous allons tout d'abord faire un peu d'étymologie du mot "symplectique" car en fait le terme existe bien avant son introduction dans le champ mathématique et il est intéressant et amusant de savoir ce qu'il désigne. Dans une deuxième partie, nous étudierons l'origine "complexe" de ce groupe, en liaison avec la géométrie des complexes de droites, c'est-à-dire que nous tâcherons d'expliquer pourquoi Weyl associa ce groupe au mot "complexe". Dans une troisième partie, nous dégagerons l'origine "abélienne" du groupe symplectique, c'est-à-dire nous verrons comment ce groupe a pu voir le jour à partir d'une problématique relative à des intégrales abéliennes. Dans une quatrième et dernière partie, nous donnerons quelques résultats importants de structure, obtenus sur ce groupe par Jordan et ses successeurs.

1 Un peu d'étymologie

Par exemple, le dictionnaire étymologique et historique du français [La], indique que le mot "symplectique" apparaît dans le dictionnaire de l'Académie française en 1842, dans la rubrique histoire naturelle et qu'il vient du grec *sumplectikos*, de *sun*, avec et *plekein*, plier et signifie "qui est enlacé avec un autre corps". C'est donc comme l'indique Weyl le correspondant grec du latin *complexus*. A noter que de manière quelque peu étonnante, alors que ce mot figure dans à peu près n'importe quel dictionnaire raisonnable actuel, il ne figure plus dans les éditions récentes du dictionnaire de l'Académie ! L'ouvrage "Trésor de la langue française"[Tr] est plus détaillé sur le sujet en nous précisant que le mot apparaît en 1842 comme adjectif en histoire naturelle (qui est entrelacé avec un autre corps) et en 1872 comme substantif masculin, en ichtyologie, désignant une des pièces osseuses de la tête des poissons ; on parle du "symplectique" comme du "temporal", c'est un os. Le grand Larousse Universel [Glu] précise, que c'est un os enchondral de l'arc hyoïde des poissons osteichtyens (i.e. poissons osseux), prolongeant l'hyomandibulaire et inséré dans une gouttière du carré. Que le symplectique apparaisse ainsi dans une variété de poisson ne manque pas de sel ! Pour redevenir sérieux, l'emploi comme adjectif en 1842, se fait dans le cadre de la géologie (de la minéralogie précisément). Dans [Ba-Ja], on peut trouver comme définition : se dit d'une texture de roche produite par l'intercroissance intime de deux minéraux différents. Il donne alors par ailleurs naissance au terme "symplectite" ou 'symplectikte" désignant une roche qui a cette texture symplectique, cet entrelacement de minéraux différents. Qu'est-ce qui est entrelacé dans le contexte mathématique ? P. Iglesias [Ig] propose *la position et la vitesse* ; précisément, il écrit :

« L'idée de *complexe*, comme *symplectique* sous-entend l'existence de plusieurs types d'objets (ici deux) maintenus ensemble dans une même structure [...] dans le premier cas la *complexité* représente la dualité *réel-imaginaire*, et dans le second la *symplecticité* représente la dualité *position-vitesse*. »

Cette interprétation nous semble bonne a posteriori et du reste il se trouve, comme nous allons le voir dans la suite, que derrière ce "*complexe*" qui devint "*symplectique*", il y a à l'origine une *dualité*. Cependant, il ne nous semble pas que cette idée soit présente chez Weyl, qui n'utilise, comme il l'indique lui-même, le terme symplectique, que par simple transposition grecque du terme "complexe" des *complexes de droites*; les objets qui sont donc ainsi contenus, maintenus ensemble dans une même structure, ne sont autres que les droites du dit complexe.

2 L'origine "complexe" du groupe symplectique

La terminologie finalement choisie par Weyl pour désigner le groupe symplectique, prend ses racines dans les *complexes de droites*, objets introduits par Monge dans la branche de la géométrie nommée *Statique* et beaucoup étudiés par les géomètres allemands Möbius, Plücker, Clebsch, Klein et le géomètre norvégien Sophus Lie. Pour voir en quoi ce groupe peut être lié à ces dits *complexes* et parvenir à comprendre le choix terminologique de Weyl, il nous paraît nécessaire de donner un minimum d'éléments sur cette notion, qui n'est pas très courante dans les ouvrages actuels de géométrie, même si elle reste bien connue en géométrie algébrique (cf. [Gr-Ha]). On peut voir apparaître ce lien entre *symplectique* et *complexes de droites*, dans des travaux de Möbius [Mo] relatifs à un nouveau type de dualité, de type *antisymétrique*, entre points et plans de l'espace.

2.1 *Dualité projective et polarité par rapport à une quadrique*

Nous allons dans ce qui suit, rappeler brièvement la classique dualité projective résultant de la polarité par rapport à une quadrique non-dégénérée (cf. par exemple [Au], [Die-Gue]).

A un point de l'espace projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, de coordonnées homogènes (x, y, z, t), on peut faire correspondre le plan dont une équation est $xX + yY + zZ + tT = 0$. On obtient ainsi une correspondance bi-univoque, soit ϕ, entre points et plans de l'espace projectif. On peut faire de même dans le plan projectif entre points et droites. Notons que cette correspondance conserve les propriétés d'incidence, en ce sens qu'elle envoie des points coplanaires sur des plans qui passent tous par le même point et réciproquement. Précisément, si Π est un plan et si A est le point tel que $\phi(A) = \Pi$, alors tous les plans $\phi(M)$, pour M décrivant Π, passent par A. En effet, si Π a pour équation $uX + vY + wZ + sT = 0$, le point A est le point de coordonnées homogènes (u, v, w, s) ; or ce point A appartient bien à tous les plans $\phi(M)$, $M \in \Pi$ puisque si $M \in \Pi$ a pour coordonnées homogènes (x, y, z, t), alors $ux + vy + wz + st = 0$ et donc le plan $\phi(M)$, qui a pour équation $xX + yY + zZ + tT = 0$, contient bien A, compte tenu que $xu + yv + zw + ts = ux + vy + wz + st = 0$. Notons bien, car nous y reviendrons, que c'est cette propriété de *symétrie* entre les lettres x, y, z, t et u, v, w, s qui, dans ce cas, nous donne cette propriété de conservation des incidences.

Une telle transformation, qui échange points et plans bi-univoquement en respectant l'incidence est appelée par les anciens, *transformation dualistique réciproque* et le point et le plan qui se correspondent sont dits *corrélatifs* l'un de l'autre [Oc].

En fait, la *dualité* que nous venons de décrire correspond à la *transformation par* *polaires réciproques* par rapport à une *quadrique non-dégénérée* Γ (dans notre cas $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$), développée par Monge à la fin du XVIII-ième siècle, puis par Poncelet, à partir de l'analogue plan de polarité par rapport à une conique, initié par Apollonius.

Précisément, si $Q(x, y, z, t) = 0$ est l'équation homogène d'une quadrique non-dégénérée Γ de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, la transformation par polaires réciproques par rapport à Γ associe à tout point de coordonnées homogènes (x, y, z, t), le plan d'équation $uX + vY + wZ + sT = 0$ où

$$u = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ v = \frac{\partial Q}{\partial y}, \ w = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ s = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

sont appelées les *coordonnées tangentielles* ou *plückériennes* du plan.

Deux points $M(x, y, z, t)$ et $M'(x', y', z', t')$ sont dits *conjugués*, par rapport à la quadrique Γ, s'ils vérifient la relation $B(M, M') = 0$ où B est la forme bilinéaire

$$B(M, M') = x'\frac{\partial Q}{\partial x} + y'\frac{\partial Q}{\partial y} + z'\frac{\partial Q}{\partial z} + t'\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

A noter que cette forme bilinéaire est *symétrique*, comme nous l'avions noté dans l'exemple ci-dessus, ce qui assure la propriété de conservation des incidences signalée. Le *plan polaire* de M est l'ensemble des points M' qui sont conjugués à M. Pour un exposé général et moderne sur dualité et polarité par rapport à une quadrique nous renvoyons le lecteur aux références [Au] et [Si] par exemple.

2.2 *La dualité de Möbius*

Dans un article de 1833 au Journal de Crelle, intitulé *Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume*, A.F. Möbius étudie un nouveau type de *dualité*, une correspondance entre points et plans de l'espace, pour laquelle le plan polaire d'un point, a la particularité de contenir ce point lui-même. Ce nouveau contexte lui est suggéré par la statique[3]. Son point de départ est celui d'une relation générale

$$V(P, P') = 0$$

entre points de l'espace, qui définit, pour P (resp. P') fixé, une surface p' (resp. p), constituée des points P' (resp. P) vérifiant la relation. Il se limite au cas où ces surfaces sont des plans, c'est-à-dire au cas où V est une forme bilinéaire[4] et obtient ainsi une

[3]La première phrase de son article est la suivante : « Zu den vorliegenden geometrischen Untersuchungen bin ich zunächst durch einige, bei Beschäftigung mit der Statik erhaltene, an sich sehr einfache Resultate veranlasst worden. »

[4]Möbius écrit précisément : « Seien x, y, z und x', y', z' die recht- oder schiefwinkelingen Coordinaten zweier Puncte P und P', und diese sechs Grössen durch eine einzige Gleichnung,

$$V = 0,$$

mit einander verbunden. Giebt man alsdann den Coordinaten x, y, z oder x', y', z' bestimmte Werthe, so wird $V = 0$ eine Gleichung zwischen nur noch drei Unbestimmten x', y', z' oder x, y, z. Die beide Puncte werden daher durch die Gleichung in eine solche Abhängigkeit von einander gebracht, dass, wenn der Ort correspondance entre points et plans de l'espace[5]. Möbius se place alors dans le cas particulier consistant à imposer que chaque point P appartienne à son plan p' correspondant, c'est-à-dire, qu'on ait pour tout point P, $V(P,P) = 0$, ce qui force bien sûr V à être antisymétrique[6].

En fait ce cas particulier de *dualité*, qui fait intervenir une forme bilinéaire antisymétrique, est un cas particulier de *dualité*, dont Plücker[7] semble avoir fait l'étude générale en 1846.

2.3 *Qu'est-ce qu'une dualité en géométrie ?*

De manière générale, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, une forme bilinéaire non-dégénérée $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$, définit un isomorphisme de E sur son dual E^* par

$$B^b : E \longrightarrow E^*, \ v \mapsto B(v, .)$$

En termes projectifs, un tel *couplage* B met en correspondance bi-univoque points et hyperplans de $\mathbb{P}(E)$. Pour que les relations d'incidence soient conservées, il faut que si un hyperplan H est défini par l'équation $B(A,.) = 0$, où A est un certain point de $\mathbb{P}(E)$, alors pour tout point M de H i.e. vérifiant $B(A, M) = 0$, on ait A qui appartienne à l'hyperplan

des einen P oder P' bestimmt ist, der andere P' oder P in einer damit gegebenen Fläche liegt.

Werde nun verlangt, dass die Fläche, in welcher P' für einen bestimmten Ort von P liegt, stets eine Ebene sei, wo auch P angenommen werde. Zu diesem Ende muss V von der Form sein

$$Lx' + My' + Nz' + O,$$

wo L, M, N, O beliebige Functionen vom x, y, z sind ; und nach der Beschaffenheit dieser Functionen richtet sich die Natur der Fläche, in welcher für einen willkürlich gegebenen Ort von P' der Punct P begriffen ist. Soll daher auch letztere Fläche stets eine Ebene sein, so müssen L, M, N, O lineäre Functionen von x, y, z, und daher die Gleichung $V = 0$ von der Form sein :

$$A) \ (ax + by + cz + d)x' + (a'x + b'y + c'z + d')y' + (a''x + b''y + c''z + d'')z' + a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0.$$

[...] »

[5]Möbius écrit précisément : « Hiernach hat man also zwei Systeme von Puncten und Ebenen, das eine, dessen Coordinaten mit x, y, z bezeichnet worden, und welches S heisse, das andere S' mit den Coordinaten x', y', z', und diese zwei Systeme stehen in einer solchen gegenseitigen Beziehung, dass jedem Puncte P und jeder Ebene p des einen eine Ebene p' und ein Punct P' des anderen entspricht. »

[6]Möbius écrit précisément : « Ohne uns mit weiterer Entwickelung dieser zudem schon mehrfach behandelten reciproken Verhältnisse aufzuhalten, wollen wir jetzt zwischen den beiden Systemen die specielle Beziehung annehmen, *dass jeder Punct P' des Systems S' in seiner dem System S angehörigen Gegenebene p selbst enthalten ist*, dass also die Gleichung A), da sie als Gleichuntg der Ebene p angesehen werden kann, auch dann noch besteht, wenn mann $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ setzt. »

[7]Plücker écrit dans une note de bas de page de la référence [Pl] : « Ich verweise, was die allgemeine Theorie der Reciprocität betrifft, auf mein "System der analytischen Geometrie des Raumes, 1846" p.10-14. Die besondere Art von Reciprocität ist zuerst von Herrn Möbius im 10. Bande des Crelle'schen Journals hervorgehoben und später von L.J. Magnus in seiner "Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie des Raumes, 1837" p.139-145 behandelt worden. »

d'équation $B(M,.) = 0$. Autrement dit, la condition[8] de *dualité* est que pour tous points A et M, on ait $B(A,M) = 0$ si, et seulement si, $B(M,A) = 0$. Cette condition est évidemment satisfaite dans le cas où B est symétrique ou antisymétrique. En fait, elle ne l'est que dans ces cas là. En effet, si on note encore par B la matrice de la forme bilinéaire B dans une base quelconque de E, la condition précédente s'exprime par le fait que pour tous vecteurs colonnes X et Y de $\mathbb{K}^n$, on ait ${}^tXBY = 0$ si, et seulement si, ${}^tYBX = 0$ ou encore ${}^tXBY = 0$ si, et seulement si, ${}^tX{}^tBY = 0$. En choisissant successivement pour X les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on obtient que les formes linéaires $L_1, \cdots, L_n$ constituées par les lignes de B doivent avoir le même noyau que leurs correspondantes fournies par les lignes de ${}^tB$ c'est-à-dire les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ de B. Mais alors pour tout $i = 1, \cdots, n$, L_i doit être proportionnelle à C_i (à noter que toutes ces formes linéaires sont non nulles puisque B est non-dégénérée) i.e. pour tout $i = 1, \cdots, n$, il existe λ_i tel que $L_i = \lambda_i C_i$. Mais en appliquant maintenant la condition au vecteur colonne X égal à la somme des i-ième et j-ième vecteurs de la base canonique (avec $i \neq j$), on obtient de même que la forme linéaire $L_i + L_j$ est proportionnelle à la forme linéaire $C_i + C_j$. Ainsi $L_i + L_j = \lambda(C_i + C_j) = \lambda_i C_i + \lambda_j C_j$ donc par indépendance linéaire de C_i et C_j (B non-dégénérée), $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$. Ainsi $B = \lambda{}^tB$; par suite, on a ${}^tB = \lambda^2\,{}^tB$ d'où $\lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$, et donc B est symétrique ou antisymétrique. Le cas symétrique correspond à celui de la polarité relativement à une quadrique non-dégénérée, que nous avons rappelé précédemment. Le cas antisymétrique, dégagé par Möbius, est lui aussi attaché à un objet géométrique, à savoir un *complexe linéaire de droites*.

2.4 *Complexes de droites*

Pour des exposés anciens sur les *complexes de droites*, nous renvoyons le lecteur aux références [Je],[Pl]et [Oc], pour des études historiques de ce concept et particulièrement du rôle qu'y joua S. Lie, aux références [Hawl], [Haw2] et [Zie] et enfin pour une vision moderne de cette notion en géométrie algébrique, à [Gr-Ha]). La présentation qui suit s'inspire largement de ces diverses sources.

2.4.1 L'espace des droites

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, une droite (affine) D peut être décrite en procédant comme suit. Si $\vec{u} = (l, m, n)$ est un vecteur directeur de cette droite, alors clairement le vecteur $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}$ est indépendant du point $M \in D$; notons $\vec{\omega} = (p, q, r)$ ce vecteur. On obtient alors pour D les équations

$$\begin{cases} ny - mz &= p \\ lz - nx &= q \\ mx - ly &= r \end{cases}$$

[8]Dans [Die-Gue], on peut lire que c'est Möbius qui examina, en 1833, quelles étaient les formes bilinéaires satisfaisant à cette condition et donna l'exemple d'une forme antisymétrique. Cependant, comme nous l'avons déjà signalé, il a seulement envisagé le cas particulier antisymétrique, sans mener d'étude générale de ces formes bilinéaires.

avec la condition $(\vec{\omega}|\vec{u}) = 0$ i.e. $lp + mq + nr = 0$ reliant les six paramètres l, m, n, p, q, r. Ces équations restent encore valables pour une droite de $\mathbb{C}^3$.

Ainsi, une droite de l'espace est définie grâce à six paramètres l, m, n, p, q, r qui ne sont définis qu'à un facteur multiplicatif près et qui vérifie la relation $lp + mq + nr = 0$, ce qui fait finalement qu'une telle droite est repérée par quatre paramètres indépendants. Ainsi, il faudra quatre conditions pour déterminer une telle droite. Les nombres l, m, n, p, q, r sont appelées des *coordonnées homogènes* de la droite D (car définies seulement modulo un facteur multiplicatif). Les nombres l, m, n (modulo facteur multiplicatif) sont les projections sur les axes d'un vecteur quelconque porté par la droite et p, q, r les moments d'un tel vecteur relativement à ces axes.

Si on connait deux points M_0 et M_1 de la droite D, de coordonnées respectives (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1), des coordonnées homogènes de la droite D seront fournies par

$$x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0,\ z_1y_0 - y_1z_0,\ x_1z_0 - z_1x_0,\ y_1x_0 - x_1y_0$$

Autrement dit, si on se place dans l'espace projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, une droite D passant par deux points de coordonnées homogènes respectives (x_0, y_0, z_0, t_0) et (x_1, y_1, z_1, t_1), sera repérée par les six coordonnées homogènes

$$t_0x_1 - t_1x_0,\ t_0y_1 - t_1y_0,\ t_0z_1 - t_1z_0,\ z_1y_0 - y_1z_0,\ x_1z_0 - z_1x_0,\ y_1x_0 - x_1y_0$$

qui ne sont autres que les six déterminants 2×2 extraits de la matrice

$$\begin{pmatrix} t_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ t_1 & x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}$$

et liés par la condition correspondant à $lp + mq + nr = 0$. Autrement dit, les droites de l'espace projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ apparaissent comme une sorte de quadrique dans $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$. Cette façon de représenter les droites est due à Cayley et Plücker ([Diel], [Oc], [Pl]) et les coordonnées l, m, n, p, q, r sont appelées *coordonnées de Plücker* de la droite passant par M_0 et M_1.

De manière plus synthétique et actuelle, on peut reprendre ce qui précède de la manière suivante [Gr-Ha]. Dans l'espace projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, les droites correspondent à des 2-plans de $\mathbb{C}^4$. Une droite D passant par les points M_0 et M_1 de coordonnées homogènes respectives (x_0, y_0, z_0, t_0) et (x_1, y_1, z_1, t_1) correspond au plan $\mathrm{Vect}(v_0, v_1)$ où $v_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ et $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^4$. Un vecteur $v \in \mathbb{C}^4$ est dans le plan $\mathrm{Vect}(v_0, v_1)$ si, et seulement si, $v_0 \wedge v_1 \wedge v = 0$. Ce plan est complètement déterminé par la donnée de $v_0 \wedge v_1$ car si $v_0 \wedge v_1 = v_0' \wedge v_1'$ alors $v_0 \wedge v_1 \wedge v_0' = 0$ et $v_0 \wedge v_1 \wedge v_1' = 0$ donc $\mathrm{Vect}(v_0, v_1) = \mathrm{Vect}(v_0', v_1')$. Si on note $G(2, 4)$ la *Grasmannienne* des 2–plans de $\mathbb{C}^4$, celle-ci se plonge alors dans la puissance extérieure deuxième de $\mathbb{C}^4$ par :

$$G(2,4) \longrightarrow \bigwedge^2(\mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{C}^6,\ \mathrm{Vect}(v_0, v_1) \mapsto \omega := v_0 \wedge v_1$$

qui n'est bien définie qu'en passant au projectif et donne une application

$$p : G(2,4) \longrightarrow \mathbb{P}_5(\mathbb{C}),$$

appelée *plongement de Plücker*. L'ensemble des droites de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ s'identifie donc avec l'image $p(G(2,4))$ qui est caractérisée par la condition quadratique $\omega \wedge \omega = 0$, qui correspond avec les notations précédentes à la condition $lp+mq+nr = 0$. Ainsi l'ensemble des droites de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ peut se voir comme une hypersurface algébrique de degré 2 de $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$; c'est donc une sous-variété lisse de dimension 4 de $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$. On l'appelle la *Grassmannienne* des droites de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ et on la note G.

2.4.2 Complexes

Puisque la position d'une droite de l'espace comporte quatre degrés d'indétermination, une famille de droites définie par une seule condition homogène portant sur les coordonnées homogènes des droites de la famille, définira un *système triplement infini* (i.e. dépendant de trois paramètres), appelé *complexe* de droites. Si un tel complexe est défini par une équation

$$F(l,m,n,p,q,r) = 0$$

où F est un polynôme (homogène) de degré μ, on dira que le complexe est algébrique d'ordre μ. Dans le cas particulier où $\mu = 1$, c'est-à-dire où F est linéaire, on dit que le complexe est *linéaire*.

Deux exemples de complexes sont fournis par l'ensemble des droites tangentes à une surface donnée ou bien des droites rencontrant une courbe donnée. Un troisième exemple, tiré de la statique, et particulièrement important pour ce qui nous concerne, puisque c'est celui sur lequel s'appuie Möbius[9] dans son article de 1833, est l'ensemble des axes vis à vis desquels le moment d'un système de forces donné est nul.

Si C est un complexe algébrique d'ordre μ défini par $F = 0$, l'ensemble des droites de ce complexe passant par un même point M_0 de coordonnées homogènes (x_0, y_0, z_0, t_0), vu comme sous-ensemble de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, est un cône d'ordre μ. En effet, si D est une droite quelconque du complexe et M un point quelconque de D, de coordonnées homogènes (x, y, z, t) alors, compte tenu de ce qui a été dit dans le paragraphe précédent sur les coordonnées homogènes d'une droite exprimées en fonctions de celles de deux de ses points, on a

$$F(t_0x - x_0t, t_0y - ty_0, t_0z - tz_0, zy_0 - yz_0, xz_0 - zx_0, yx_0 - xy_0) = 0$$

qui est bien l'équation d'un cône d'ordre μ. En particulier, si le complexe est linéaire, cette équation s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} a(t_0x - x_0t) + b(t_0y - ty_0) + c(t_0z - tz_0) + d(zy_0 - yz_0) \\ +e(xz_0 - zx_0) + f(yx_0 - xy_0) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

[9]Möbius écrit dans l'introduction : « Ich habe nun diese Verhältnisse, abgesehen von ihrem statischen Ursprunge, rein geometrisch zu behandeln gesucht, und theile was ich gefunden jetzt mit, in der Hoffnung, dass mehrere aus jener speciellen Voraussetzung hervorgehende Beziehungen nicht ohne Interesse sein werden. Insbesondere dürfte die hier gegebene Construction von Polyedern, die zugleich in und um einander beshcrieben sind, so wie das System von Linien, deren jede sich selbst zur entsprechen hat, und welche bei einem System von Kräften die Axen sind, für welche die Momentensumme der Kräfte Null ist, einige Aufmerksamkeit verdienen. Zum Schlusse habe ich noch den Zusammenhang erörtert, der zwischen diesen Dualitätsverhältnissen und statischen Sätzen obwaltet. »

où a, b, c, d, e, f sont des éléments de $\mathbb{C}$. Cette équation définit un plan, du moins sous une condition de non-dégénérescence sans laquelle on pourrait avoir l'espace tout entier. Précisément, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme $B(M_0, M) = 0$, où cette fois-ci B est une forme bilinéaire *antisymétrique*. La condition de non-dégénérescence demandée est que B soit non-dégénérée (comme dans le cas des quadriques) ; on dira dans ce cas que le complexe linéaire est non-dégénéré.

Ainsi, si C est un complexe linéaire non-dégénéré, toutes les droites de C passant par un même point, sont situées dans un même plan, dit *plan polaire* (ou *plan focal*) de ce point. Inversement, toutes les droites de C situées dans un même plan, passent par un même point dit *pôle* (ou *foyer*) de ce plan. D'autre part, il est clair que par tout point de l'espace, passent une infinité de droites du complexe. On a ainsi une *dualité* (assurée cette fois par l'antisymétrie de B), entre points et plans de l'espace, par rapport au complexe linéaire C. Par exemple pour le complexe linéaire défini par la condition $n - r = 0$, on obtient la correspondance point-plan donnée par

$$(x, y, z, t) \mapsto \{xY - yX + zT - tZ = 0\}$$

A noter qu'ici, en raison de l'antisymétrie et contrairement au cas de la polarité par rapport à une quadrique, tout point appartient à son plan polaire.

Il est clair que toute dualité associée à une forme bilinéaire B antisymétrique est bien de ce type, la correspondance entre le complexe et B se lisant sur l'équation (1).

A nouveau, dit de manière synthétique et actuelle, un complexe algébrique de degré μ n'est autre qu'une hypersurface algébrique de degré μ de la *Grassmannienne* des droites de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Dans le cas d'un complexe linéaire C, il s'agit alors de l'intersection de G avec un hyperplan H de $\mathbb{P}_5(\mathbb{C})$ i.e. $C = H \cap G$. Or l'application

$$\bigwedge^2 \mathbb{C}^4 \times \bigwedge^2 \mathbb{C}^4 \longrightarrow \bigwedge^4 \mathbb{C}^4 \simeq \mathbb{C}, \quad (\omega_0, \omega) \mapsto \omega_0 \wedge \omega$$

est un couplage non-dégénéré et donc toute forme linéaire sur $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ est de la forme $\omega \mapsto \omega_0 \wedge \omega$ pour un certain ω_0. Ainsi, l'hyperplan H est de la forme

$$H_{\omega_0} := \{\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^4, \ \omega_0 \wedge \omega = 0\}.$$

Comme G est formé des bivecteurs *décomposables* $\omega = v \wedge v'$, $v, v' \in \mathbb{C}^4$, on a donc

$$C = H_{\omega_0} \cap G = \{\overline{v, v'}, \omega_0 \wedge v \wedge v' = 0\}$$

où $\overline{v, v'}$ désigne la droite de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ définie par v et v' i.e. $p(\mathrm{Vect}(v, v'))$. Si on pose alors

$$B_{\omega_0}(v, v') := \omega_0 \wedge v \wedge v',$$

B_{ω_0} est une forme bilinéaire antisymétrique et

$$C = \{\overline{v, v'}, \ B_{\omega_0}(v, v') = 0\},$$

est bien défini par l'annulation d'une forme bilinéaire antisymétrique.

2.5 *Le groupe symplectique dans le cadre des complexes de droites*

Dans ce qui précède, nous avons vu comment le "symplectique" est apparu dans le contexte des complexes de droites, sous l'aspect d'une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée dont le lieu d'annulation définit le dit complexe. Pour que le "groupe symplectique", c'est-à-dire le groupe des automorphismes laissant ces formes invariantes, apparaisse lui-même, dans ce cadre, il faudra attendre 1870 et les travaux de S. Lie sur sa fameuse transformation [Lie1], [Lie2]. Nous n'allons pas nous apesantir là-dessus car cette question a déjà été largement étudiée par T. Hawkins et nous renvoyons le lecteur soucieux de détails à son très complet ouvrage [Haw2], consacré à l'émergence de la théorie des groupes de Lie. Dans ce qui suit, nous allons seulement donner quelques éléments sur ce sujet en nous appuyant sur cette source.

La transformation de Lie mettant en correspondance droites et sphères, procède de la notion de transformation réciproque en géométrie projective, dont nous avons rappelé quelques aspects dans ce qui précède et consiste à mettre en correspondance réciproque deux types d'objets géométriques. Elle est basée sur le système de deux équations linéaires :

$$\begin{cases} (X + \imath Y) - zZ - x = 0 \\ z(X - \imath Y) + Z - y = 0 \end{cases}$$

A l'aide de ces deux équations, on peut établir diverses correspondances entre des objets géométriques situés dans un premier espace $\mathfrak{r}$ et d'autres objets géométriques situés dans un deuxième espace $\mathfrak{R}$. Par exemple, pour $P = (X, Y, Z)$ point fixé de $\mathfrak{R}$, les points $p = (x, y, z)$ correspondant, c'est-à-dire solutions du système formé par ces deux équations linéaires, forment une droite δ contenue dans $\mathfrak{r}$. On a ainsi une correspondance $\Psi : P \mapsto \delta$ entre points de $\mathfrak{R}$ et certaines droites de $\mathfrak{r}$. L'image $\mathcal{C}$ de cette application est un complexe linéaire et l'application $\Psi : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{C}$ une bijection de $\mathfrak{R}$ sur ce complexe de droites.

Étant donnée maintenant δ une droite contenue dans $\mathfrak{r}$, soit $\mathcal{C}(\delta)$ l'ensemble des droites du complexe $\mathcal{C}$ qui rencontrent la droite donnée δ. Alors l'ensemble de points correspondant dans $\mathfrak{R}$ est une sphère (de centre et rayon éventuellement complexes). De cette manière, S. Lie établit une correspondance entre droites dans $\mathfrak{r}$ et sphères dans $\mathfrak{R}$. Grâce à cette correspondance, il explora les relations entre la géométrie des droites de l'espace $\mathfrak{r}$ et des propriétés géométriques, de nature métrique, de l'espace $\mathfrak{R}$. Il mit ainsi en correspondance le groupe conforme de l'espace $\mathfrak{R}$ avec le groupe des transformations projectives qui laissent le complexe linéaire $\mathcal{C}$ invariant. Or de telles transformations T sont celles qui transforment la forme symplectique B de manière homothétique i.e. de sorte qu'il existe une constante non nulle λ telle que pour tous u, v on ait, $B(Tu, Tv) = \lambda B(u, v)$, le sous-groupe pour lequel $\lambda = 1$ constituant alors exactement le groupe symplectique. C'est par cette voie que S. Lie introduisit les groupes symplectiques $Sp(2n, \mathbb{C})$, comme généralisations de ce groupe particulier associé à l'invariance d'un complexe linéaire.

3 L'origine "abélienne" du groupe symplectique

Pour comprendre la mention faite par Weyl au *groupe abélien* de Dickson, et à Abel, nous allons dans cette section, partir des oeuvres de Dickson et "remonter le temps", au gré des références bibliographiques des auteurs rencontrés. Cela nous conduira à "l'origine abélienne" du groupe symplectique, qui se situe dans les travaux d'Hermite relatifs à la transformation des intégrales abéliennes. Nous exposerons alors la partie de ses travaux qui mettent en jeu le futur groupe symplectique, après avoir essayé de montrer pourquoi Hermite a pu s'intéresser à ce problème. Pour ce dernier point, nous aurons besoin de faire un petit survol de la théorie des intégrales elliptiques et abéliennes.

3.1 *La "piste abélienne"*

Dans un article de 1897, intitulé *A triply infinite system of simple groups* [Dic1], L.E Dickson écrit en introduction :

« This paper generalizes to the Galois Field, the work of Jordan, *Traité des substitutions, pp.171-179*, on the decomposition of the Abelian group studied earlier by Hermite in connection with the transformation of Abelian functions. »

Dickson nous précise donc en une seule phrase, la généalogie de l'objet dont nous souhaitons faire l'historique. C'est sur cela que nous allons nous baser pour remonter aux sources de ce groupe.

Voici maintenant la reproduction la plus fidèle possible de ce qu'il écrit quelques années plus tard, au début du chapitre II de son livre *Linear groups* ([Dic4] pour l'édition Dover de 1958), avec les notes de bas de page[10] qui sont ici fondamentales :

THE ABELIAN LINEAR GROUP†

A linear homogeneous substitution on $2m$ indices with coefficients belonging to the $GF[p^n]$ is called *Abelian* if, when operating simultaneously upon two sets of $2m$ indices,

$$\xi_{i1},\ \eta_{i1};\ \xi_{i2},\ \eta_{i2}\ (i = 1, 2, \cdots, m),$$

it leaves formally invariant up to a factor (belonging to the field) the bilinear function

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} \xi_{i1} & \eta_{i1} \\ \xi_{i2} & \eta_{i2} \end{vmatrix}.$$

The totality of such substitution constitutes a group called the *general Abelian group*‡ $GA(2m, p^n)$. These of its substitutions which leave ϕ absolutely invariant form the *special Abelian linear group* $SA(2m, p^n)$.

[10]Les notes de bas de page de Dickson, que nous avons repérées par les signes † et ‡ dans le texte original, sont les suivantes :

†Investigated by Jordan, Traité, pp. 171-186, for the case $n = 1$; by the author , *Quar. Jour. of Math, 1897, pp. 169-178, ibid, 1899, pp. 383-4, for general n.*

‡To distinguish these groups from the ordinary Abelian, i.e. commutative, groups, we prefix the adjective *linear*. The Abelian linear group is not commutative in general.

Notons que là aussi le renvoi à Jordan est clair, que le futur groupe symplectique $Sp(2m, \mathbb{K})$ est en fait le *groupe spécial linéaire Abélien* et non le *groupe Abélien général* et que la théorie est faite sur le corps fini $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ où $q = p^n$.

Puisque Dickson nous renvoie à Jordan dans les références ci-dessus, examinons les œuvres de ce dernier.

Voici ce qu'écrit très exactement Jordan dans son *Traité des substitutions* en 1870 (cf. [Jo] §VIII. 217. p171, pour l'édition de 1957) :

« *Dans ses importantes recherches sur la transformation des fonctions abéliennes, M. Hermite a dû résoudre le problème suivant :*

Soient $x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n; \xi_1, \eta_1, \cdots, \xi_n, \eta_n$ *deux suites de* $2n$ *indices, répartis en* n *couples dans chacune d'elles ; et soit donnée la fonction*

$$\phi = x_1\eta_1 - \xi_1 y_1 + \cdots + x_n\eta_n - \xi_n y_n.$$

Trouver, parmi les substitutions du groupe linéaire du degré p^{2n}*, celles qui, étant opérées à la fois sur chacune des deux suites d'indices qui entrent dans la fonction* ϕ*, multiplieront cette fonction par un simple facteur constant (abstraction faite des multiples de* p*).*

Il est clair que si deux substitutions S, S' *multiplient respectivement* ϕ *par des entiers constants* m, m', SS' *multipliera* ϕ *par l'entier constant* mm'. *Donc les substitutions cherchées forment un groupe. Nous l'appellerons le groupe abélien, et ses substitutions seront dites abéliennes.* »

Comme l'écrivait Dickson, Jordan se place donc effectivement dans le cadre des transformations de $\mathbb{F}_p^{2n}$ qui laissent invariante ϕ. Le renvoi à Hermite est clair là aussi et il nous reste donc maintenant à aller étudier cette source première du groupe symplectique chez Hermite lui-même. Mais auparavant, après être remontés dans le temps de Weyl jusqu'à Hermite, nous allons faire un rapide survol des idées clés de la théorie des intégrales abéliennes, avant Hermite, afin de pouvoir comprendre pourquoi il s'attaqua à ce problème précis d'où émergea notre actuel groupe symplectique.

3.2 *Les intégrales abéliennes*

La théorie des intégrales elliptiques, et plus généralement abéliennes, est certainement à l'origine d'une grande partie de nos mathématiques contemporaines, en particulier dans les domaines de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres. Dans tous les ouvrages d'analyse du XIX ème siècle, elle est omniprésente et devait être incontournable à toute personne voulant étudier les mathématiques à cette époque là. De nos jours, en revanche elle a complètement disparu de nos enseignements, du moins en tant que théorie élémentaire. Elle subsiste seulement comme motivation historique dans des cours spécialisés de géométrie algébrique ou de théorie des nombres. Le petit survol des intégrales abéliennes que nous nous proposons de faire dans cette section n'a pas d'autre prétention que d'aider le lecteur peu familier avec ces "vieilles" mathématiques, à mieux situer le travail d'Hermite que nous exposerons dans la section suivante. Pour un véritable cours sur ces questions, nous renvoyons le lecteur soucieux d'approfondissement, aux références [Be] et [Her3] et, pour une étude historique détaillée, au très complet et excellent texte de C. Houzel [Hou], que nous avons en partie suivi (voir aussi [Diel] et [Hel]).

3.2.1 Origine des intégrales elliptiques

L'origine des intégrales elliptiques se situe essentiellement dans des problèmes de rectification de courbes auxquels se sont heurtés les mathématiciens au XVII-ième siècle.

La première tentative du calcul de la longueur d'un arc d'ellipse est due à Wallis en 1655 ; elle conduit à savoir calculer, pour une ellipse de demi-grand axe a, de demi-petit axe b et d'excentricité $e = 1 - b^2/a^2$, la primitive

$$\int \sqrt{\frac{a^2 - ex^2}{a^2 - x^2}} dx$$

Le fait que les méridiens de la Terre sont des ellipses et les orbites des planètes également, suffit à expliquer la volonté de faire un tel calcul.

En multipliant haut et bas la fonction précédente par le numérateur, on obtient

$$\int \frac{a^2 - ex^2}{\sqrt{(a^2 - ex^2)(a^2 - x^2)}} dx$$

c'est-à-dire que l'on doit calculer une primitive du type

$$\int \frac{R(x)dx}{\sqrt{P(x)}}$$

où R est une fraction rationnelle et P un polynôme. Dans le cas présent, le degré du polynôme P est 4.

Si P est de degré 2, on apprend à calculer en premier cycle de telles primitives à l'aide de changements de variables utilisant les fonctions trigonométriques circulaires ou hyperboliques. Lorsque P est de degré 3 ou 4, ces intégrales (indéfinies) ou primitives sont appelées *intégrales elliptiques*, en raison de l'exemple prototypique donné ci-dessus. Ce n'est qu'en 1833 que Liouville a montré qu'elles ne pouvaient s'exprimer à l'aide de "fonctions élémentaires", même si ce résultat ne faisait aucun doute depuis longtemps pour les mathématiciens. Si P est de degré supérieur ou égal à 5, on les appelle des *intégrales hyperelliptiques* ou *ultraelliptiques*. Plus généralement encore, on appelle *intégrales abéliennes* toute intégrale du type

$$\int R(x,y)dx$$

où x et y sont liés par une équation algébrique $f(x,y) = 0$.

Une autre intégrale elliptique célèbre est celle obtenue lors du calcul de la longueur d'arc de la lemniscate de Bernoulli (Fagnano 1716), d'équation polaire $\rho = \sqrt{\cos 2\theta}$, qui conduit à

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t^2)}} \quad (t = \rho^2)$$

Pour faire comprendre le type de problèmes qui s'est posé aux mathématiciens des XVIII-ième et XIX-ième siècles concernant les intégrales elliptiques et plus généralement abéliennes, il peut être utile de réfléchir à un exemple d'intégrale, que l'on pourrait qualifier pour des raisons évidentes d'intégrale "hypoelliptique" ; c'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

3.2.2 Un exemple pédagogique

Nous voudrions illustrer sur l'exemple suivant, quelques idées et méthodes clés relatives aux intégrales elliptiques, essentiellement *inversion* et *périodicité*, afin de mieux faire comprendre les problèmes qui jalonnent cette histoire des intégrales abéliennes, dont nous donnons ici un bref aperçu destiné à motiver le travail d'Hermite.

L'enseignement classique de l'analyse consiste à présenter d'abord les fonctions sinus et cosinus et leurs analogues hyperboliques, directement issues de la fonction exponentielle puis, leurs "fonctions inverses" arcsin, arccos etc. qui fournissent de nouvelles primitives et font les délices des cours d'analyse de premier cycle !

Prenons ici, artificiellement, le point de vue contraire et supposons connues seulement les fonctions rationnelles et racine carrée mais pas les fonctions trigonométriques.

Partons à nouveau d'un problème de rectification, celui du cercle. La longueur d'arc pour le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est donnée par

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc le problème est de calculer une primitive

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}} \ (t = x^2)$$

Précisément, posons

$$I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \ x \in [-1,1]$$

A noter que cette fonction est bien définie en ± 1 comme une intégrale impropre convergente.

On a alors le *théorème d'addition* des arcs de cercle

$$I(x) + I(y) = I(z) \text{ où } z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

Notons que si $x, y \in [-1,1]$, on a bien $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]$ en vertu de l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue et de l'inégalité de la moyenne arithmético-géométrique.

D'autre part, la fonction I est continue, strictement croissante donc bijective de $[-1,1]$ sur $[-K, K]$ où

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Notons alors $u \mapsto x = \sin u$ sa fonction réciproque définie (pour l'instant) sur $[-K, K]$. Le théorème d'addition permet de prolonger cette fonction inverse à $\mathbb{R}$ tout entier ; pour cela posons

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}, \ u \in [-K, K]$$

Le théorème d'addition précédent s'écrit alors si $u, v, u+v \in [-K, K]$,

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

On en déduit, toujours pour $u, v, u+v \in [-K, K]$, une relation analogue pour le cosinus,

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

Ces deux formules permettent clairement, d'étendre les fonctions sinus et cosinus, définies initialement seulement sur $[-K, K]$, en des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, que nous noterons encore $u \mapsto \sin u$ et $u \mapsto \cos u$, à valeurs dans $[-1, 1]$ et vérifiant encore les formules d'addition précédentes.

La fonction $u \mapsto \sin u$ est alors *périodique*, de période $4K$. En effet, par définition de K, on a $\sin K = 1$ et $\cos K = 0$; par suite, d'après la formule d'addition, on a $\sin 2K = 2 \sin K \cos K = 0$ et $\cos 2K = \cos^2 K - \sin^2 K = -1$ d'où $\sin 4K = 2 \sin 2K \cos 2K = 0$ et $\cos 4K = \cos^2 2K - \sin^2 2K = 1$. Mais alors, pour tout réel u, on a

$$\sin(u+4K) = \sin u \cos 4K + \cos u \sin 4K = \sin u$$

Remarquons que si on change x en $\imath x$ alors $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ devient $\frac{\imath dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Cela invite à procéder de même avec l'intégrale $u = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, que l'on peut pareillement inverser en une fonction que l'on notera $u \mapsto \sinh u$ et à poser

$$\sin(\imath v) = \imath \sinh v$$

On peut alors définir $\sin(u+iv)$ par la formule d'addition, d'où une fonction *sinus* définie sur tout le plan complexe. Cette fonction est alors holomorphe et donc n'admet pas de période $\mathbb{R}$-linéairement indépendante de $4K$ d'après le théorème de Liouville.

3.2.3 Les fonctions elliptiques

Lagrange fut le premier à considérer les intégrales elliptiques les plus générales

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$$

où R est une fraction rationnelle et P un polynôme de degré 3 ou 4, sans facteurs multiples. Parmi elles, l'une des premières étudiées (Fagnano, Euler, Gauss), fut l'*intégrale lemniscatique* à laquelle conduit la rectification de la lemniscate de Bernoulli,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t^2)}}$$

Par des changements de variables, ces intégrales elliptiques générales se ramènent à la somme de primitives de fractions rationnelles et d'une intégrale du type

$$\int \frac{M(x)dx}{\sqrt{(1 \pm p^2x^2)(1 \pm q^2x^2)}}$$

avec M fraction rationnelle paire, qui se ramène elle-même à l'un des trois types suivants (Legendre)

$$(I)\ :\ \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad (II)\ :\ \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx$$
$$(III)\ :\ \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

qualifiées respectivement d'intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèce et notées respectivement F, E, Π. Si l'on pose $x = \sin\phi$, ϕ est appelée l'*amplitude*, k le *module* et n le *paramètre*.

Pour ces trois types d'intégrales elliptiques, on a un *théorème d'addition*, dû à Euler, qui par exemple pour l'intégrale de première espèce est donné par la formule

$$F(\phi) + F(\psi) = F(\mu),\ \text{où}\ \cos\phi\cos\psi - \sqrt{1-k^2\sin^2\mu}\sin\phi\sin\psi = \cos\mu$$

Notons, que dans le cas dégénéré $k = 0$, qualifié de cas "hypoelliptique" dans le paragraphe précédent, cette formule redonne la formule d'addition pour les fonctions circulaires.

Dès 1797, Gauss inversa l'intégrale lemniscatique $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ et définit les sinus et cosinus lemniscatiques. Précisément, $u \mapsto \mathrm{sl}\, u$ est définie comme la fonction inverse de $x \mapsto u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ et $\mathrm{cl}\, u$ est défini comme étant

$$\mathrm{cl}\, u = \mathrm{sl}\,(\omega - u)\ \text{où}\ \omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

De même que les fonctions sinus et cosinus ordinaires sont liées par la relation fondamentale de la trigonométrie, les fonctions sinus et cosinus lemniscatiques sont liées par la *relation de Fagnano*

$$\mathrm{sl}^2 u + \mathrm{cl}^2 u + \mathrm{sl}^2 u \mathrm{cl}^2 u = 1$$

Le théorème d'addition d'Euler permet alors d'exprimer de manière rationnelle $\mathrm{sl}\,(u+v)$ et $\mathrm{cl}\,(u+v)$ en fonction de $\mathrm{sl}\, u$, $\mathrm{cl}\, u$, $\mathrm{sl}\, v$ et $\mathrm{cl}\, v$; cela permet de prolonger ces fonctions sinus et cosinus lemniscatiques en des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et qui sont en outre ω-périodiques. Comme pour l'exemple du sinus circulaire traité précédemment, puisque $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ se transforme en $\frac{\imath dx}{\sqrt{1-x^4}}$ lorsqu'on remplace x par $\imath x$, on peut poser avec Gauss, $\mathrm{sl}\,(\imath u) = \imath \mathrm{sl}\, u$, pour tout réel u et obtenir ainsi une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, admettant comme périodes, ω et $\imath\omega$, et donc tout un réseau de périodes qui n'est autre que les $k\omega$, où k décrit l'ensemble des entiers de Gauss.

Cette idée d'*inverser* les intégrales elliptiques fut retrouvée par Abel en 1823 puis Jacobi en 1827 ; ils définirent ainsi l'inverse de l'intégrale de première espèce, de module $k \in]0,1[$

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

qui fut notée $\sin \mathrm{am} u$ où $\mathrm{am} u = \phi$ est appelée l'*amplitude* de u. De même, on a les fonctions $\cos \mathrm{am} u = \sqrt{1-\sin^2 \mathrm{am} u}$ et $\Delta \mathrm{am} u = \sqrt{1-k^2\sin^2 \mathrm{am} u}$, que Gudermann nota plus simplement $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ respectivement. Là encore, par la même procédure que dans les exemples précédents, ces fonctions se prolongent en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ grâce aux formules d'addition qu'elles satisfont et sont doublement périodiques. Précisément, par exemple la fonction $u \mapsto \operatorname{sn} u$ admet une période réelle $4K$ et une période imaginaire pure $2\imath K'$ où

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}, \; (t = x^2)$$

et

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} = \int_1^{1/k^2} \frac{dt}{2\sqrt{t(t-1)(1-k^2t)}}, \; (t = x^2)$$

Remarquons, que ces périodes sont produites par les coupures de l'axe réel provoquées par l'annulation et le changement de signe du polynôme figurant sous le radical. Ici, il y a trois tels points $0, 1, 1/k^2$, qui découpent trois intervalles sur $]0, +\infty[$, à savoir $]0, 1[$, $]1, 1/k^2[$ et $]1/k^2, +\infty[$ donc fournissent trois intégrales, qui convergent, mais dont les deux extrêmes ont la même valeur K. Ainsi la première (ou la troisième) fournit une période réelle et la deuxième une période imaginaire pure (intuitivement, le polynôme initial sous le radical est négatif).

Si l'on en revient au cas de la fonction sinus que nous avons étudiée en préambule, les points de coupure étaient 0 et 1 d'où deux intégrales

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}, \; (t = x^2)$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t(t-1)}}, \; (t = x^2)$$

On avait vu que la première fournissait la période (réelle) du sinus, à savoir $4K (= 2\pi)$; quant à la seconde, c'est une intégrale divergente qui correspondrait moralement à une période imaginaire pure "infinie" pour le sinus.

On appela alors *fonctions elliptiques*, toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, doublement périodique ; l'étude générale de ce type de fonctions fut effectuée par Liouville (1844) et Eisenstein (1847). Pour faire le lien avec les intégrales elliptiques, mentionnons un résultat de Liouville qui affirme que toute fonction méromorphe doublement périodique d'ordre 2 est la fonction réciproque d'une intégrale elliptique de première espèce.

3.2.4 Quelques mots de géométrie algébrique

On peut se demander quels liens existent entre ces *intégrales elliptiques* et les *courbes elliptiques* de la géométrie algébrique moderne. La présentation que nous avons faite ci-dessus des intégrales elliptiques ne les a considérées que comme de simples primitives de fonctions continues d'une variable réelle. Nous n'avons introduit la variable complexe que pour leurs fonctions inverses, via une procédure de définition locale de l'inverse sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$ suivie d'un prolongement à $\mathbb{R}$ tout entier puis à $\mathbb{C}$. Ainsi, nous n'avons pas considéré au départ ces intégrales comme des *fonctions multiformes* d'une variable complexe, et d'ailleurs, un tel point de vue n'aurait pas vraiment eu de sens avant l'introduction de l'intégrale le long d'un chemin et des surfaces de Riemann, encore que souvent les mathématiciens n'attendent pas que le formalisme adéquat soit parfaitement posé pour l'utiliser de manière intuitive. En tout cas, d'un point de vue moderne, on peut considérer une intégrale elliptique comme une intégrale le long de la courbe complexe $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré 3 ou 4.

Reprenons l'exemple de l'intégrale elliptique apparaissant dans le calcul de la longueur d'arc de la lemniscate de Bernoulli

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t^2)}} \quad (t = \rho^2)$$

Le changement de variable $t = \rho^2$ permet ainsi de passer d'un polynôme du quatrième degré à un polynôme du troisième degré. Notons que, de manière générale, Euler (1760) savait transformer $\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ où P est un polynôme de degré 4 en $\frac{dy}{\sqrt{Q(y)}}$ où Q est encore un polynôme de degré 4 mais sans puissances impaires; le changement de variables $y = t^2$ permet alors de se ramener là aussi au cas où Q est de degré 3. Si nous en revenons à notre exemple, ce changement de variable permet de se placer soit sur la courbe $y^2 = 1-x^4$, soit sur la courbe $y^2 = x - x^3$ ou de manière projective, soit sur $t^2y^2 = t^4 - x^4$, soit sur $ty^2 = t^2x - x^3$. La deuxième de ces courbes est une *cubique plane lisse*, son *genre géométrique* est donc égal à son *genre arithmétique* c'est-à-dire 1; c'est une *courbe elliptique*. La première est une *quartique plane*, son genre arithmétique est 3; mais elle a un point singulier en $(0,1,0)$. En faisant $y = 1$, on obtient la courbe affine $t^2 = t^4 - x^4$, avec cette fois le point singulier (point double) en $(0,0)$. On fait alors l'éclatement $t = sx$ et on obtient la courbe plane $s^2 = s^4x^2 - x^2$, qui possède comme seul point singulier, le point $(0,0)$, qui est cette fois un point double ordinaire. On sait alors qu'un éclatement supplémentaire donnera une courbe lisse. On a ainsi, la suite d'éclatements $C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C$ de la courbe initiale C, avec C_2 lisse et deux points doubles *infiniment voisins*, $P = (0,0) \in C$, $P_1 = (0,0) \in C_1$. Le genre géométrique de notre quartique est donc encore 1 $(= 3-1-1)$, c'est une courbe elliptique (cf. par exemple [Pe] pour ces notions).

De manière générale, ces changements de variables (souvent compliqués) de la forme $y = \phi(x)$, avec ϕ fonction algébrique, qui permettent d'obtenir une identité du type

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = a\frac{dy}{\sqrt{Q(y)}}$$

étaient appelés *transformations* des intégrales elliptiques. L'une des plus connues parmi elles, est la *transformation de Landen*. En termes de géométrie algébrique moderne, ces transformations correspondent à ce que l'on appelle aujourd'hui les *isogénies* de courbes elliptiques.

3.2.5 Les intégrales hyperelliptiques

On a vu dans les paragraphes précédents comment le théorème d'addition d'Euler permet, à partir de l'inverse d'une intégrale elliptique de première espèce définie sur un segment de $\mathbb{R}$, de la prolonger à $\mathbb{R}$ tout entier, puis à $\mathbb{C}$, en une fonction méromorphe doublement périodique.

Jacobi essaya donc, en 1832, de calquer la méthode d'inversion des intégrales elliptiques, afin d'inverser les intégrales hyperelliptiques,

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

où P est un polynôme de degré 5 ou 6.

Mais le problème est que par exemple, pour P de degré 5 du type

$$P(x) = x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$$

avec $0 < \mu < \lambda < k < 1$, on obtient 4 périodes pour la fonction inverse, produites par les intégrales prises entre les zéros de P, de la même manière que dans le cas elliptique sur lequel nous avons insisté. Cela mena Jacobi à la conclusion que x ne pouvait être une fonction méromorphe de u, puisqu'une telle fonction méromorphe ne pourrait avoir plus de deux périodes $\mathbb{Q}$-indépendantes. Il eut alors l'idée de considérer un *système de deux équations*, précisément :

$$\begin{cases} u &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} \\ \nu &= \int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{P(t)}} + \int_0^y \frac{tdt}{\sqrt{P(t)}} \end{cases}$$

et de tirer, en utilisant le *théorème d'Abel*, qui généralise le théorème d'addition d'Euler, x et y comme des fonctions méromorphes de deux variables u et ν, soient $x = \lambda(u,\nu)$ et $y = \lambda_1(u,\nu)$ quadruplement périodiques en chacune des variables. Afin d'étudier ces deux fonctions λ et λ_1, Jacobi avait besoin de les représenter analytiquement. De même que les fonctions circulaires (correspondant au cas "hypoelliptique") sont représentées par une série entière, Jacobi avait représenté les fonctions elliptiques, qui sont méromorphes, comme quotients de séries spéciales, appelées *fonctions thêta*. Les mathématiciens Göpel et Rosenhain développèrent indépendamment en 1847, une théorie des *fonctions thêta de deux variables*, prenant modèle sur celle que Jacobi avait élaborée à une variable. Au lieu des quatre fonctions thêta à une variable, ils obtinrent seize fonctions thêta à deux variables.

3.3 *Les travaux d'Hermite sur les intégrales abéliennes*

Nous allons partiellement étudier dans ce qui suit, la note de C. Hermite publiée aux comptes rendus de l'Académie des Sciences en 1855 et intitulée "*Sur la théorie de la transformation des intégrales abéliennes*" [Her2] (cf aussi p 444 à 478 de [Her1] T1).

3.3.1 Le problème de la transformation des intégrales abéliennes

Dans le début de cette note, Hermite pose le problème de la transformation des intégrales abéliennes (en fait hyperelliptiques avec un polynôme de degré 5 ou 6) en ces termes :

« En représentant par ϕx un polynôme du cinquième ou du sixième degré en x, et posant

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\phi x}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\phi y}} & = u, \\ \int_{x_0}^{x} \frac{x dx}{\sqrt{\phi x}} + \int_{y_0}^{y} \frac{y dy}{\sqrt{\phi y}} & = \nu, \end{cases} \tag{2}$$

on sait, par les travaux de Göpel et de M. Rosenhain, que $x+y$ et xy s'expriment par des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions des arguments u et ν, qui ont une valeur unique et finie pour toutes les valeurs finies réelles ou imaginaires de ces arguments. Ces illustres géomètres ont en même temps donné, sous une forme analogue, l'expression analytique de treize autres fonctions de u et de ν qui dépendent algébriquement, mais d'une manière irrationnelle, des deux premières [...] Je désignerai ces quinze fonctions par $f_1(u,\nu), \cdots, f_{15}(u,\nu)$, et par $f(u,\nu)$ l'une quelconque d'entre elles. Semblablement, je nommerai $F_1(u,\nu), \cdots, F_{15}(u,\nu)$ les fonctions de même nature auxquelles on parviendrait en prenant pour point de départ les équations

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} \frac{(\alpha+\beta x)dx}{\sqrt{\psi x}} + \int_{y_0}^{y} \frac{(\alpha+\beta y)dy}{\sqrt{\psi y}} & = u \\ \int_{x_0}^{x} \frac{(\gamma+\delta x)dx}{\sqrt{\psi x}} + \int_{y_0}^{y} \frac{(\gamma+\delta y)dy}{\sqrt{\psi y}} & = \nu \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes et ψx un polynôme du cinquième ou du sixième degré en x. Maintenant, je poserai, comme il suit, le problème de la transformation des fonctions abéliennes du premier ordre :

Le polynôme ϕx étant donné, déterminer les coefficients de ψx et les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de telle sorte que les quinze fonctions $F(u,\nu)$ puissent s'exprimer rationnellement par les quinze fonctions $f(u,\nu)$. »

Précisons pour faire le lien avec ce que nous avons mentionné en 3.2.5, que les quinze fonctions en question sont les quotients des seize fonctions thêta, par l'une quelconque d'entre elles.

3.3.2 Relation entre les périodes

Hermite poursuit dans le deuxième paragraphe de la manière suivante :

« On sait que les fonctions symétriques rationnelles de x et y, définies comme fonctions de u et ν par les équations (2), possèdent quatre paires de périodes simultanées, et que ces périodes, ou au moins leur doubles, appartiennent aux quinze fonctions $f(u,\nu)$. Ainsi, en désignant par les lettres ω et υ les indices simultanés de périodicité, on aura quatre relations de cette forme

$$\begin{cases} f(u+\omega_0, \nu+\upsilon_0) & = f(u,\nu), \\ f(u+\omega_1, \nu+\upsilon_1) & = f(u,\nu), \\ f(u+\omega_2, \nu+\upsilon_2) & = f(u,\nu), \\ f(u+\omega_3, \nu+\upsilon_3) & = f(u,\nu). \end{cases}$$

Mais il existe entre ces périodes, telles qu'on les tire du calcul intégral, une liaison exprimée par l'équation suivante :

$$\omega_0 v_3 - \omega_3 v_0 + \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 = 0. \tag{3}$$

Et si l'on nomme Ω_i et Υ_i les quantités analogues à ω_i et v_i, dans les fonctions $F(u,\nu)$, on aura de même

$$\Omega_0 \Upsilon_3 - \Omega_3 \Upsilon_0 + \Omega_1 \Upsilon_2 - \Omega_2 \Upsilon_1 = 0. \tag{4}$$

[...] »

Nous voyons là poindre le symplectique avec l'apparition d'une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée sur $\mathbb{C}^4$ vis à vis de laquelle les quadruplets de périodes ω et v d'une part, Ω et Υ d'autre part, sont orthogonaux.

3.3.3 Transformation des périodes

Et de poursuivre encore,

« Cela posé, si l'on demande que les fonctions $F(u,\nu)$ s'expriment rationnellement par les fonctions $f(u,\nu)$, il faudra évidemment que les périodes simultanées ω_i et v_i appartiennent à F, et soient, par suite, des sommes de multiples entiers des périodes Ω_i et Υ_i. On devra donc avoir ces relations linéaires à coefficients entiers, savoir :

$$\left\{\begin{array}{ll} \omega_0 = a_0\Omega_0 + a_1\Omega_1 + a_2\Omega_2 + a_3\Omega_3, & v_0 = a_0\Upsilon_0 + a_1\Upsilon_1 + a_2\Upsilon_2 + a_3\Upsilon_3, \\ \omega_1 = b_0\Omega_0 + b_1\Omega_1 + b_2\Omega_2 + b_3\Omega_3, & v_1 = b_0\Upsilon_0 + b_1\Upsilon_1 + b_2\Upsilon_2 + b_3\Upsilon_3, \\ \omega_2 = c_0\Omega_0 + c_1\Omega_1 + c_2\Omega_2 + c_3\Omega_3, & v_2 = c_0\Upsilon_0 + c_1\Upsilon_1 + c_2\Upsilon_2 + c_3\Upsilon_3, \\ \omega_3 = d_0\Omega_0 + d_1\Omega_1 + d_2\Omega_2 + d_3\Omega_3, & v_3 = d_0\Upsilon_0 + d_1\Upsilon_1 + d_2\Upsilon_2 + d_3\Upsilon_3, \end{array}\right.$$

[...] »

En termes modernes, Hermite écrit donc

$$\omega = M\Omega, \quad v = M\Upsilon$$

avec $M \in M_4(\mathbb{Z})$. Il conclut son deuxième paragraphe, après avoir mentionné que ces matrices ne peuvent être arbitraires puisqu'elles conservent l'orthogonalité des quadruplets de périodes, en écrivant :

« *L'étude arithmétique des propriétés de ces systèmes particuliers de seize lettres*[11]*, qui vient ainsi s'offrir, a été le point de départ de mes recherches et m'a donné les résultats suivants.* »

Hermite aborde alors son troisième paragraphe en écrivant :

« En premier lieu, et pour satisfaire à la relation

$$\omega_0 v_3 - \omega_3 v_0 + \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 = 0,$$

sous la condition

$$\Omega_0 \Upsilon_3 - \Omega_3 \Upsilon_0 + \Omega_1 \Upsilon_2 - \Omega_2 \Upsilon_1 = 0,$$

[11] à savoir la matrice M

il faut poser les équations

$$\begin{cases} a_0d_1 + b_0c_1 - c_0b_1 - d_0a_1 & = 0 \\ a_0d_2 + b_0c_2 - c_0b_2 - d_0a_2 & = 0 \\ a_0d_3 + b_0c_3 - c_0b_3 - d_0a_3 & = a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 - d_1a_2 \\ a_1d_3 + b_1c_3 - c_1b_3 - d_1a_3 & = 0 \\ a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3 - d_2a_3 & = 0 \end{cases}$$

[...] »

Ces égalités signifient en termes modernes, que la matrice M vérifie la relation

$$^tMJM = kJ \tag{5}$$

où k désigne la valeur commune

$$a_0d_3 + b_0c_2 - c_0b_3 - d_0a_3 = a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 - d_1a_2$$

et J la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on note E_k l'ensemble des matrices $M \in M_4(\mathbb{Z})$ vérifiant l'égalité (5), on voit que E_1 n'est autre que le groupe symplectique $Sp(4, \mathbb{Z})$.

Hermite déduit des relations correspondant à (5), que le déterminant du système linéaire (i.e. de la matrice)

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

est un carré parfait, à savoir k^2 et que si deux tels systèmes, vérifient ces relations, en les composant on obtiendra un troisième système linéaire pour lesquelles ces relations auront encore lieu. Plus précisément, notons par a, b, c, d et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les lettres de deux tels sytèmes et par A, B, C, D celles du résultat de leur composition ; notons aussi respectivement k, κ et K les valeurs correspondant à chacun d'eux. On aura alors

$$K = k\kappa$$

Si $\kappa = 1$, on a $K = k$ et Hermite définit alors comme équivalents les systèmes a, b, c, d et A, B, C, D ; précisément, cela signifie, que parmi les systèmes associés à la même valeur k, deux d'entre eux sont dits équivalents, si on peut passer de l'un à l'autre par composition à droite par un système associé à la valeur 1. En termes actuels, Hermite fait agir par multiplication à droite le groupe symplectique $Sp(4, \mathbb{Z})$ sur E_k et regarde comme équivalentes deux matrices dans la même orbite.

Cela étant, lorsque k est premier, Hermite trouve que le nombre total de systèmes non équivalents est $1+k+k^2+k^3$, autrement dit, il y a $1+k+k^2+k^3$ orbites pour l'action envisagée. Il donne précisément une transversale à ces orbites, à savoir

$$I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \ II \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$
$$III \begin{pmatrix} k & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ IV \begin{pmatrix} k & 0 & i & i' \\ 0 & k & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les indices i, i', i'' varient entre 0 et $k-1$. Il y a bien ainsi 1 orbite du type I, k orbites du type II, k^2 orbites du type III et k^3 orbites du type IV. Remarquons que le fait que les indices i, i', i'' soient cantonnés entre 0 et $k-1$, vient du fait que la multiplication à droite d'une de ces matrices, par une matrice de transvection symplectique, augmente ces indices d'un multiple de k.

La suite de l'article d'Hermite sort de notre propos mais signalons tout de même qu'il obtient, grâce à ces considérations d'équivalence à droite sur les matrices de E_k, le théorème suivant :

le nombre de transformations distinctes des fonctions abéliennes qui correspondent à un nombre premier k est $720(1+k+k^2+k^3)$.

A noter que dans [Hou], ce travail d'Hermite est décrit de manière assez détaillée.

4 Quelques résultats sur le groupe symplectique

4.1 *Les premiers théorèmes de Jordan*

Comme nous l'avons vu, Jordan est le premier à faire une étude systématique du groupe symplectique dans son *Traité des substitutions*, à travers le *groupe abélien* sur les corps $\mathbb{F}_p$ (cf. 3.1).

Jordan note $\mathcal{G}$ le groupe abélien. Soit r un élément de $\mathbb{F}_p$ tel que $r^{p-1}=1$. La substitution U qui envoie (x,y) sur (rx,y) (en notant simplement x et y pour $(x_1,\cdots,x_n)$ et $(y_1,\cdots,y_n)$), appartient à $\mathcal{G}$ et multiplie, avec les notations déjà employées dans le paragraphe 3.1.2, la forme bilinéaire ϕ par r. Si S est une autre substitution de $\mathcal{G}$ qui multiplie ϕ par $m=r^\rho$, $0\le\rho\le p-2$, alors S s'écrira $S=U^\rho T$, T étant une substitution de $\mathcal{G}$ qui laisse ϕ invariante. Ainsi, l'ordre de $\mathcal{G}$ est égal à $p-1$ fois l'ordre Ω_n du groupe H formé par les substitutions qui laissent ϕ invariante. Autrement dit, le calcul de l'ordre de $\mathcal{G}$ est ramené à celui du groupe H, qui n'est autre précisément que le *groupe spécial linéaire abélien* de Dickson ou encore notre *groupe symplectique*. Jordan ajoute que si $\alpha,\beta,\cdots$ sont les facteurs premiers dont le produit donne $p-1$, et si $\mathcal{G},\mathcal{G}_\alpha,\mathcal{G}_{\alpha\beta},\cdots,\mathcal{G}_{p-1}=H$ sont les groupes formés respectivement par la combinaison de H avec $U,U^\alpha,U^{\alpha\beta},\cdots,U^{p-1}=1$, alors ces groupes auront pour ordre $(p-1)\Omega_n$, $\frac{p-1}{\alpha}\Omega_n$, $\frac{p-1}{\alpha\beta}\Omega_n,\cdots,\Omega_n$ et que chacun d'eux sera permutable aux substitutions de $\mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{G}$ aura pour facteurs de composition $\alpha, \beta, \cdots$ et les facteurs de composition de H. Jordan cherche alors l'ordre de H ainsi que ses facteurs de composition. Pour ce faire, il introduit des substitutions particulières de H, à savoir

$$\begin{array}{rcl} M_\mu & : & (\cdots, x_\mu, y_\mu, \cdots) \mapsto (\cdots, y_\mu, -x_\mu, \cdots) \\ L_\mu & : & (\cdots, x_\mu, y_\mu, \cdots) \mapsto (\cdots, x_\mu + y_\mu, y_\mu, \cdots) \\ N_{\mu,\nu} & : & (\cdots, x_\mu, y_\mu, \cdots, x_\nu, y_\nu, \cdots) \mapsto (\cdots, x_\mu + y_\nu, y_\mu, \cdots, x_\nu + y_\mu, y_\nu, \cdots) \end{array}$$

Il établit alors les trois théorèmes[12] suivants :

Théorème 1 *Le groupe H est dérivé des seules substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$ et son ordre est égal à*

$$(p^{2n}-1)p^{2n-1}(p^{2n-2}-1)p^{2n-2}\cdots(p^2-1)p.$$

Théorème 2 *Si p est impair, les facteurs de composition de H sont $\frac{1}{2}\Omega_n$ et 2.*
Théorème 3 *Si $p = 2$ et $n > 2$, le groupe H est simple.*

Il écrit ensuite :

« Il reste[13] à considérer le cas où l'on a $p = 2$, avec $n = 2$. Dans ce cas, H a pour facteurs de composition 2 et $\frac{1}{2}\Omega_n$. Mais il est inutile d'établir ici ce résultat, qui se présentera de lui-même plus loin. »

4.2 *L'apport de Dickson*

L.E. Dickson, comme il l'écrit[14] lui-même au début de son article de 1897 [Dic1], généralise les travaux de Jordan au "corps de Galois" d'ordre général $GF[p^m]$, c'est-à-dire, en termes modernes, il étudie le groupe symplectique sur tous les corps finis $\mathbb{F}_q$, $q = p^m$. Précisément, il montre, avec les mêmes notations que celles de Jordan, que l'ordre de H i.e. de $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$[15] est

$$\Omega(n,m,p) = p^{mn}(p^{2mn}-1)(p^{2mn}-p^{2m})(p^{2mn}-p^{4m})\cdots(p^{2mn}-p^{2mn-2m})$$

et que

Théorème 1 *Si $p > 2$, les facteurs de composition de H sont $\frac{1}{2}\Omega(m,n,p)$ et 2.*
Il montre ensuite le
Théorème 2 *Si $p = 2$ et $n > 2$, le groupe H est simple.*

---

[12]Manifestement, Jordan suppose implicitement dans cette étude que $n \geq 2$, ce qui était déjà visible dans la définition de $N_{\mu,\nu}$

[13]Ce qui confirme que Jordan suppose $n \geq 2$.

[14]Il précise d'emblée dans une note de bas de page qu'il suppose dans son étude $n > 1$, le cas $n = 1$ réduisant le groupe abélien au groupe des substitutions sur deux indices de déterminant unité pour lesquels il rappelle les facteurs de composition.

[15]Nous échangeons ici les rôles de m et n par rapport aux notations de Dickson, afin de les rendre identiques à celles de Jordan.

Il conclut son article en précisant qu'il ne traite pas le cas $p = 2$, $n = 2$ et que Jordan a étudié cette situation dans le cas particulier où $m = 1$, pour lequel il a prouvé que H est d'ordre 720 et a les facteurs de composition 2 et 360. Dickson complète cette lacune dans sa note [Dic2], en prouvant que dans le cas $p = 2$, $n = 2$, H est simple d'ordre $2^{4n}(2^{4n} - 1)(2^{2n} - 1)$.

4.3 *Résultat définitif sur la structure du groupe symplectique*

Dans son ouvrage consacré aux groupes classiques [Die2], Dieudonné montre le résultat complet suivant relatif à la structure du groupe symplectique sur un corps *quelconque*,

Théorème 1 *A l'exception des groupes $Sp_2(\mathbb{F}_2)$, $Sp_2(\mathbb{F}_3)$ et $Sp_4(\mathbb{F}_2)$, tout groupe symplectique $Sp_n(K)$ ne contient aucun sous-groupe distingué distinct de lui-même et non contenu dans son centre.*

En introduisant le *groupe projectif symplectique* $PSp_n(K)$, quotient du groupe symplectique par son centre $\{\pm I\}$, on peut reformuler ce théorème de la manière suivante,

Théorème 1bis *A l'exception des groupes $PSp_2(\mathbb{F}_2)$, $PSp_2(\mathbb{F}_3)$ et $PSp_4(\mathbb{F}_2)$, les groupes $PSp_n(K)$ sont simples.*

Il précise, à propos du théorème 1, dans une note de bas de page,

« Le théorème n'est nouveau que pour le cas où K est un corps *imparfait*[16] de caractéristique 2 ; pour les autres cas, il est dû à Dickson (D-II, p. 368)[17]. »

Dans l'introduction de cet ouvrage (cf. loc. cit.), Dieudonné écrit :

« Historiquement, ceux de ces groupes[18] qui se sont introduits d'abord sont relatifs au cas où le "corps de base" (c'est-à-dire le corps dans lequel les variables et les coefficients prennent leurs valeurs) est le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes, ce qui explique le rôle joué par les méthodes infinitésimales dans les nombreuses recherches sur ce sujet ; nous n'avons pas à rappeler ici les résultats auxquels elles ont conduit, et qui, à beaucoup d'égards, épuisent les problèmes posés. Mais l'Algèbre moderne entend aborder la question de plus haut, en ne faisant aucune hypothèse particulière sur le corps de base, ce qui impose l'obligation de n'utiliser que des méthodes algébriques, dégagées de tout recours à l'idée de continuité. Le premier qui ait imaginé de telles méthodes est sans doute C. Jordan, qui, développant des idées de Galois, étudia de façon approfondie les groupes classiques sur les corps premiers de caractéristique $p \neq 0$[...] »

Cette remarque est quelque peu étonnante puisque l'étude des groupes commence essentiellement au milieu du XIX ème siècle, et qu'on s'intéresse, à la suite des travaux de Galois, aux groupes *finis* et tout particulièrement, eu égard à leur importance dans la théorie de Galois, à la détermination de leurs *sous-groupes invariants*, et par voie de conséquence à la recherche des *groupes simples*, grand problème qui va mobiliser les algébristes. Il est donc naturel que le futur groupe symplectique soit apparu, sous la plume de Jordan, d'abord dans le cadre des corps finis.

[16] Rappelons qu'un corps *imparfait* de caractéristique p est un corps pour lequel l'application $x \mapsto x^p$ n'est pas surjective ; par exemple, le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ est ainsi.

[17] Cette référence correspond à [Dic3] dans notre bibliographie.

[18] A savoir, les groupes classiques

En revanche, H. Weyl ne s'inscrit pas lui dans cette mouvance algébrique comme nous l'avons déjà souligné dans l'introduction de ce texte. Son *groupe complexe* l'est dans tous les sens du terme ! Il est dans la droite ligne de S. Lie, sa motivation et sa culture sont géométriques et ses méthodes "infinitésimales" et cela explique aisément que, dans la note de bas de page qui nous a servi de point de départ pour cette étude de la génèse du groupe symplectique, il semble "négliger" l'origine "abélienne", en faveur de l'origine "complexe".

Conclusion

Nous avons ainsi montré que deux voies très différentes sont à l'origine du groupe symplectique, l'une plutôt algébrique et l'autre géométrique. La première est issue de problèmes relatifs à la transformation des intégrales abéliennes étudiés par C. Hermite en 1855 et s'inscrit dans le cadre des groupes finis, faisant apparaître le groupe symplectique comme sous-groupe du groupe linéaire sur un corps fini, dans la ligne directe des travaux de Galois ; la seconde est issue de la géométrie projective sur le corps des complexes à partir de travaux de Möbius effectués en 1830 et fait apparaître le groupe symplectique dans le cadre des groupes continus de transformations de S. Lie une quarantaine d'années plus tard. Ces deux routes indépendantes confluent vers 1870 puisque le *Traité des substitutions* de Jordan [Jo] paraît en 1870 tandis que S. Lie publiera ses travaux sur ses transformations à partir de cette année là. En fait, au printemps de l'année 1870, F. Klein et S. Lie firent un séjour à Paris et rencontrèrent C. Jordan. Quelle fut l'influence de ce dernier et des groupes finis sur Lie et ses groupes continus ? T. Hawkins [Haw2] indique que rien ne permet de penser qu'une telle influence ait eu lieu, ce que nous croyons aussi volontiers, du moins concernant le sujet qui nous intéresse ici, tant semblait inévitable l'apparition de ce groupe symplectique dans le monde des complexes de droites, que Lie manipulait depuis déjà longtemps.

Remerciements : Je remercie les rapporteurs anonymes pour de très utiles remarques, commentaires et références bibliographiques.

Bibliographie :

[Au] M. Audin, Géométrie, Belin, 1998.

[Ba-Ja] R.L. Bates, J.A. Jackson (editors), Glossary of Geology, American Geological Institute Alexandria, Virginia, third edition 1987.

[Be] Bertrand, Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique 1891-92.

[Dic1] L.E. Dickson, A triply infinite system of simple groups, Quar. Jour. of Math, 1897, pp. 169-178.

[Dic2] L.E. Dickson, Simplicity of the Abelian group on two pairs of indices in the Galois field of order 2^n, $n > 1$, Quar. Jour. of Math, 1899, pp. 383-384.

[Dic3] L.E. Dickson, Theory of Linear Groups in an Arbitrary Field, Transactions of the American Mathematical Society, 1901, t. 2 pp. 363-394.

[Dic4] L.E. Dickson, Linear groups, Dover Publ, 1958.

[Die-Gue] J. Dieudonné, J. Guérindon, L'algèbre et la géométrie jusqu'en 1840, in Abrégé d'histoire des mathématiques, vol 1, Hermann, 1978.

[Die1] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, PUF, 1974.

[Die2] J. Dieudonné, Sur les groupes classiques, Hermann, 1948.

[Glu] Grand Larousse Universel, 1997.

[Gr-Ha] P. Griffiths, J. Harris , Principles of algebraic geometry, Wiley Classics Library, 1994.

[Hel] Y. Hellegouarch, Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles, Masson, 1997.

[Her1] C. Hermite, Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, 1905.

[Her2] C. Hermite, Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. XL, 1855.

[Her3] C. Hermite, Cours de M. Hermite rédigé par M. Andoyer, Hermann, 1891.

[Hou] C. Houzel, Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes, in Abrégé d'histoire des mathématiques, vol 2, Hermann, 1978.

[Ig] P. Iglesias, Les origines du calcul symplectique chez Lagrange, L'enseignement Mathématique, t. 44, 1998, pp. 257-277.

[Jo] C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, Gauthier-Villars, 1957.

[Haw1] T. Hawkins, Line Geometry, Differential Equations and the Birth of Lie's Theory of Groups, in The History of Modern Mathematics, D. Rowe and J. McCleary editors, vol. 1, pp. 275-327, Academic Press 1989.

[Haw2] T. Hawkins, Emergence of the Theory of Lie Groups. An Essay in the History of Mathematics, 1869-1926, Springer 2000.

[Je] C.M. Jessop, A Treatise on the Line Complex, Cambridge University Press, 1903.

[La] A. Dauzat et al, Dictionnaire étymologique et historique du français, Larousse, 1993.

[Lie1] S. Lie, Über Komplexe, inbesondere Linien- und Kugelkomplexe, mit Anwendung auf die Theorie der partieller Diffetialgleichungen, Mathematische Annalen 5 (1872), 145-208, 209-256.

[Lie2] S. Lie, Theorie der Trasformationsgruppen I,II,III, Leipzig 1888, 1890, 1893.

[Mo] A.F. Möbius Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume, Journal de Crelle, t. 10, p 317-341, 1833.

[Oc] M. D'Ocagne, Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique, Gauthier-Villars, 1917.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique, une introduction, InterEditions, 1995.

[Pl] J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, Leipzig, 1868.

[Ro] D.E. Rowe, The Early Geometrical Works of Sophus LIe and Felix Klein, in The History of Modern Mathematics, D. Rowe and J. McCleary editors, vol. 1, pp. 275-327, Academic Press 1989.

[Si] J-C. Sidler, Géométrie projective, InterEditions, 1993.

[Tr] Trésor de la langue française, dictionnaire de la langue XIX-ième et XX-ième siècles, CNRS, Gallimard, 1992.

[We] H. Weyl, The Classical groups, their invariants and representations, Princeton University Press, 1946.

[Zie] R. Ziegler, Die Geschichte der geometrischen Mechanik, Frans Steiner Verlag 1985.

Received: 19. 03. 2003
Revised: 20. 10. 2003