Über eine Signaturinvariante für Mannigfaltigkeiten mit symmetrischem Rand

Michael Brunnbauer

Sommersemester 2005

Universität Regensburg Naturwissenschaftliche Fakultät I Mathematik

Diplomarbeit

# Über eine Signaturinvariante für Mannigfaltigkeiten mit symmetrischem Rand

Michael Brunnbauer

Regensburg, den 27. Juli 2005

Betreuer: Prof. Dr. Klaus Jänich

Danksagungen

## Danksagungen

Ich danke Herrn Prof. Jänich für die Stellung des Themas und die hervorragende Betreuung bei der Entstehung der Diplomarbeit.

Weiter will ich meinen Eltern für die Unterstützung danken, die sie mir während meines Studiums zukommen ließen.

Auch und nicht zuletzt danke ich meiner Freundin Melanie, die es ohne Klage mit einem Mathematiker aushält.

Regensburg, den 27. Juli 2005

Michael Brunnbauer

## Erklärung

Hiermit erkläre ich, die Arbeit selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Regensburg, den 27. Juli 2005

Michael Brunnbauer

## Inhaltsverzeichnis

1	Vor	wort	9		
<b>2</b>	Ein	führung	12		
	2.1	Die Schnittform und die Signatur einer Mannigfaltigkeit	12		
	2.2	Novikovs Additivität der Signatur	18		
	2.3	Walls Nicht-Additivität der Signatur	$\overline{24}$		
3	Kor	ventionen und vorbereitende Lemmata	26		
	3.1	Konventionen	26		
	3.2	Vorbereitende Lemmata	27		
4	Die $\sigma$ -Invariante				
	4.1	Voraussetzungen und Konstruktion	32		
	4.2	Überlagerungen und Transfer-Homomorphismus	33		
	4.3	Der zentrale Satz	34		
	4.4	Erster Schritt: Die induzierende Abbildung	35		
	4.5	Zweiter Schritt: Die induzierte Form	37		
<b>5</b>	Ers	te Korollare	41		
	5.1	Der Maslov-Index	41		
	5.2	Bekannte Anwendungen	43		
	5.3	r-Zinken-Mannigfaltigkeiten	45		
6	Eigenschaften, Spezialfälle und offene Fragen				
	6.1	Einfache Eigenschaften	50		
	6.2	Der Spezialfall $r = 3, 4$	53		
	6.3	Offene Fragen und Ausblick	54		
Aı	nhan	g: Einige Formeln	55		
$\mathbf{Li}$	terat	ur	59		
$\mathbf{St}$	ichw	ortverzeichnis	61		

### 1 Vorwort

## 1 Vorwort

In der Mitte des 20. Jahrhunderts entdeckte S. P. Novikov die Additivitätseigenschaft der Signatur: Zerschneidet man eine kompakte Mannigfaltigkeit längs einer geschlossenen Untermannigfaltigkeit in zwei Teile, die dann wieder kompakte Mannigfaltigkeiten sind, so addieren sich deren Signaturen zur Signatur der ursprünglichen Mannigfaltigkeit.

In der Folge zeigte K. Jänich, dass die Signatur im Wesentlichen die einzige Invariante mit dieser Eigenschaft ist (siehe [8]), und C. T. C. Wall verallgemeinerte das Novikovsche Resultat (siehe [13]).

Er befasste sich mit der Frage, was geschieht, wenn der trennende Schnitt auch den Rand treffen darf. Die Untermannigfgaltigkeit, entlang der man die Mannigfaltigkeit zerschneidet, ist also nur noch kompakt. Man erhält dann einen Korrekturterm gegenüber der ursprünglichen Additivität, der sich bei genauerem Hinsehen als Maslov-Index herausstellt. Dieses Ergebnis nannte Wall die Nicht-Additivität der Signatur.

Der Wallsche Korrekturterm tauchte in der Folge immer wieder in Artikeln auf: Bei Mannigfaltigkeiten mit Ecken (siehe [6]) oder auch beim Verklebe-Problem der  $\eta$ -Invariante (siehe [2]), um nur zwei Beispiele zu nennen. Dies sind jedoch (im Gegensatz zum vorliegenden Text) Arbeiten, die sich der Fragestellung von Atiyahs und Singers Indextheorie her nähern.

Im Jahre 1994 schrieben Cappell, Lee und Miller einen Übersichtsartikel zum Maslov-Index (siehe [3]), in dem sie auch auf das Auftreten eines solchen im Wallschen Resultat eingingen. Sie isolierten den Teil der Mannigfaltigkeit, dessen Signatur der Korrekturterm ist: eine von ihnen so genannte Zinken-Mannigfaltigkeit. Sie lässt sich aus dem Rand, der Zerschneideuntermannigfaltigkeit und den Daten des Schnittes beider rekonstruieren. Dieser Vorgang lässt sich allgemeiner durchführen.

Die hier realisierte Verallgemeinerung führt auf eine Klasse von Mannigfaltigkeiten mit "symmetrischem" Rand, was durch eine freie  $\mathbb{Z}_r$ -Aktion auf dem Rand verwirklicht ist. Ich nenne diese Mannigfaltigkeiten Auflösungsmannigfaltigkeiten, da sie in Analogie zur eben zitierten Arbeit die Singularität einer fiktiven Zerschneidemenge auflösen. Aus diesen Auslösungsmannigfaltigkeiten wird eine verallgemeinerte Zinken-Mannigfaltigkeit konstruiert, deren Signatur die  $\sigma$ -Invariante der Auflösungsmannigfaltigkeit heißt. Diese Invariante entspricht dem Maslov-Index bei Cappell, Lee und Miller. In der vorliegenden Arbeit wird ein Satz gezeigt, der die Berechnung der  $\sigma$ -Invariante aus den Daten erlaubt, ohne dass die Konstruktion der verallgemeinerten r-Zinken-Mannigfaltigkeit durchgeführt werden muss. Neben diesem Hauptresultat werden noch einige Spezialfälle untersucht. Insbesondere werden die erwähnten Ergebnisse von Wall und Cappell, Lee und Miller gefolgert. Außerdem wird ein Fehler richtiggestellt, der bei letzteren auftritt: Auch sie verallgemeinern ihr Vorgehen auf sogenannte r-Zinken-Mannigfaltigkeiten, aber die behauptete Formel in [3] ist im Allgemeinen falsch (siehe Abschnitt 5.3). Zuletzt rücken noch verschiedene Verträglichkeiten der  $\sigma$ -Invariante in den Blickpunkt, wie beispielsweise die Konstanz unter Surgery und äquivariantem Henkelansetzen.

**Inhalt.** Im folgenden Abschnitt 2 wird vieles über die Signatur gesagt und bewiesen, was in entsprechenden Lehrbüchern und/oder Artikeln auch zu finden ist, darunter die Novikovsche Additivität samt Beweis und ein kurzer Vorausverweis auf das Wallresultat.

Der Abschnitt 3 stellt einige technische Lemmata zur Verfügung, die mittels Poincaré-Dualität zwischen Homologie und Kohomologie vermitteln.

Danach folgt in Abschnitt 4 der Kern der Arbeit: mein Hauptresultat und sein Beweis. Hier wird natürlich auch die  $\sigma$ -Invariante definiert, die der Arbeit den Titel gab.

Der Abschnitt 5 zeigt dann, dass wirklich eine Verallgemeinerung der Arbeit von Wall vorliegt und liefert einige weitere Korollare, die aus der Arbeit von Cappell, Lee und Miller stammen.

Schließlich enthält der letzte Abschnitt 6 noch einige elementare Eigenschaften der  $\sigma$ -Invariante und einige Fragen, die offen bleiben mussten.

Zuletzt gibt noch ein kurzer Anhang eine fast vollständige Liste der benutzten Formeln wieder, die zum Nachschlagen gedacht ist. Daraus stammen Begriffe wie das "spezielle Koeffiziententheorem" und Verweise wie (CAP-3).

**Vorzeichenkonvention.** In der Algebraischen Topologie sind bekanntlich zwei verschiedene Vorzeichenkonventionen üblich, sobald Kohomologietheorien ins Spiel kommen. Ich folge hierin den Büchern von Spanier [10] und von Stöcker und Zieschang [12]. Auch Hatcher [7] hat diese Vorzeichenwahl, aber ein ungewöhnliches Cap-Produkt. Meine Wahl stimmt nicht mit der von

### 1 Vorwort

tom Dieck [4], Dold [5] und Milnor und Stasheff [9] überein. Der erste Unterschied ist in der Definition des Korandes  $\delta$  zu finden, aber auch in der des Cup-Produktes besteht ein Vorzeichenunterschied.

**Notation.** Im folgenden Text seien alle (Ko-) Homologiegruppen mit Koeffizienten in  $\mathbb{R}$  verstanden. Das Intervall [-1, 1] wird durchgehend mit I bezeichnet. Für  $x \in H^k(X, A)$  oder  $x \in H_k(X, A)$  bezeichne |x| := k den Grad von x.

## 2 Einführung

In diesem Abschnitt wird zuerst die Schnittform einer orientierten kompakten geraddimensionalen Mannigfaltigkeit definiert und etwas genauer untersucht. Im Anschluss wird die Signatur eingeführt und die Novikovsche Additivität gezeigt. Zu Ende wird noch kurz auf die Ergebnisse der Arbeiten von Wall [13] und Cappell, Lee und Miller [3] hingewiesen.

## 2.1 Die Schnittform und die Signatur einer Mannigfaltigkeit

**Definition.** Sei M eine kompakte orientierte 2n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Bilinearform

$$\begin{array}{rcl} H^n(M,\partial M) \times H^n(M,\partial M) & \to & \mathbb{R}, \\ (\alpha,\beta) & \mapsto & \langle \beta \smile \alpha, [M] \rangle \end{array}$$

heißt die Schnittform von M. Auch die entsprechende (durch Poincaré-Dualität entstehende) Bilinearform

$$\begin{array}{rccc} H_n(M) \times H_n(M) & \to & \mathbb{R}, \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha \cdot \beta \end{array}$$

wird als Schnittform bezeichnet. Sie hat in dieser Form die anschauliche Bedeutung des "Zykelschneidens", die namensgebend war. Hier in dieser Arbeit wird allerdings die homologische Schnittform immer nur als die von der kohomologischen induzierte Bilinearform betrachtet und nie über tatsächliches Zykelschneiden berechnet. (Siehe [12], 15.4.3.)

**Notiz 2.1.** Gemäß  $\beta \smile \alpha = (-1)^{|\beta||\alpha|} \alpha \smile \beta$  ist die Schnittform symmetrisch für dim  $M \equiv 0 \mod 4$  und schiefsymmetrisch für dim  $M \equiv 2 \mod 4$ .

**Lemma 2.2.** Ist  $\partial M = \emptyset$ , d. h. M geschlossen, so ist die Schnittform nichtentartet.

Beweis. Man hat einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} P: H^n(M) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M) & \xrightarrow{\cong} & H^n(M)^*, \\ \alpha & \mapsto & \alpha \frown [M] & \mapsto & \langle\_, \alpha \frown [M] \rangle \end{array}$$

mittels Poincaré-Dualität und speziellem Koeffiziententheorem. Es ist

$$\langle \beta \smile \alpha, [M] \rangle = \langle \beta, \alpha \frown [M] \rangle = P(\alpha)(\beta),$$

also ist die Schnittform nichtentartet, da die kanonische Paarung eines endlichdimensionalen Vektorraums mit seinem Dualraum nichtentartet ist.  $\Box$ 

Insbesondere macht die Schnittform im geschlossenen Fall mit dim M = 4k-2 die mittlere Kohomologiegruppe  $H^{2k-1}(M)$  zu einem symplektischen Vektorraum.

**Lemma 2.3.** Im berandeten Fall ist der Nullraum der Schnittform (d. h. das orthogonale Komplement von  $H^n(M, \partial M)$  bezüglich der Schnittform) durch

$$\operatorname{im}(H^{n-1}(\partial M) \xrightarrow{\circ} H^n(M, \partial M)) = \operatorname{ker}(H^n(M, \partial M) \to H^n(M))$$

gegeben.

Beweis. Betrachte die exakte lange Kohomologiesequenz

$$\dots \to H^{n-1}(\partial M) \xrightarrow{\delta} H^n(M, \partial M) \xrightarrow{j^*} H^n(M) \to \dots$$

Man hat wieder einen Isomorphismus

$$\begin{array}{cccc} P: H^n(M) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M, \partial M) & \xrightarrow{\cong} & H^n(M, \partial M)^*, \\ \alpha & \mapsto & \alpha \frown [M] & \mapsto & \langle \_, \alpha \frown [M] \rangle. \end{array}$$

Damit ist

$$\langle \beta \smile \alpha, [M] \rangle = P(j^* \alpha)(\beta),$$

denn es gilt  $\beta \smile \alpha = Id^*(\beta \smile \alpha) = Id^*\beta \smile j^*\alpha = \beta \smile j^*\alpha$  nach (CUP-1) mit  $j : (M; \partial M, \emptyset) \hookrightarrow (M; \partial M, \partial M)$ . Damit ist  $H^n(M, \partial M)^{\perp} = \ker j^* = \lim \delta$ .

**Lemma 2.4.** Sei  $M^{2n+1}$  eine berandete orientierte kompakte Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$L := \operatorname{im}(H^n(M) \to H^n(\partial M)) = \operatorname{ker}(H^n(\partial M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(M, \partial M))$$

gleich seinem orthogonalen Komplement  $L^{\perp}$  bezüglich der Schnittform. (Im Falle dim M = 4k - 1 ist ein L ein lagrangescher Unterraum des symplektischen Vektorraums  $H^{2k-1}(\partial M)$ .) Beweis. Betrachte

$$H^n(M) \xrightarrow{\iota^*} H^n(\partial M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(M, \partial M)$$

aus der langen exakten Kohomologiesequenz von  $(M, \partial M)$ . Es ist

$$\begin{aligned} \langle \iota^* \beta \smile \iota^* \alpha, [\partial M] \rangle &= \langle \iota^* (\beta \smile \alpha), \partial [M] \rangle \\ &= \langle \delta \iota^* (\beta \smile \alpha), [M] \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

also  $L \subset L^{\perp}$ . Für die umgekehrte Richtung sei  $\beta \in L^{\perp}$ , also gilt für alle  $\alpha \in H^n(M)$ , dass

$$0 = \langle \beta \smile \iota^* \alpha, [\partial M] \rangle$$
  

$$= \langle \beta, \iota^* \alpha \frown \partial [M] \rangle$$
  

$$= \langle \beta, \partial (\alpha \frown [M]) \rangle$$
 (CAP-2)  

$$= \langle \delta \beta, \alpha \frown [M] \rangle$$
  

$$= P(\alpha)(\delta \beta),$$

wobei P wie im Beweis von Lemma 2.3 definiert ist. Deshalb muss  $\delta\beta = 0$  gelten, d. h.  $\beta \in \ker \delta = \operatorname{im} \iota^*$  und somit  $L^{\perp} \subset L$ .

**Homologische Übersetzung.** Diese Lemmata haben eine homologische Entsprechung unter Poincaré-Dualität. So ist die Schnittform  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$  auf  $H_n(M)$  für geschlossenes  $M^{2n}$  nichtentartet und hat im berandeten Fall den Nullraum

$$\operatorname{im}(H_n(\partial M) \to H_n(M)) = \operatorname{ker}(H_n(M) \xrightarrow{j_*} H_n(M, \partial M)).$$

Man kann sogar eine Formel angeben, die das sichtbar macht: Bezeichnet  $D: H^n(M, \partial M) \xrightarrow{\cong} H_n(M)$  die Poincaré-Dualität, so ist

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= \langle D^{-1}\beta \smile D^{-1}\alpha, [M] \rangle \\ &= \langle D^{-1}\beta, D^{-1}\alpha \frown [M] \rangle \\ &= \langle D^{-1}\beta, j_*\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Schließlich stimmt in der Situation von Lemma 2.4

$$L := \operatorname{im}(H_{n+1}(M, \partial M) \xrightarrow{\partial} H_n(\partial M)) = \operatorname{ker}(H_n(\partial M) \to H_n(M))$$

### 2 Einführung

mit seinem orthogonalen Komplement überein, im Fall dim  $\partial M = 4k - 2$  ist *L* also ein lagrangescher Unterraum von  $H_{2k-1}(\partial M)$ .

Nun kommen wir zur Signatur selbst:

21

**Definition.** Sei dim  $M \equiv 0 \mod 4$ . Dann heißt die Signatur der Schnittform die **Signatur** von M und wird mit  $\sigma(M)$  bezeichnet. Für dim  $M \not\equiv 0 \mod 4$  setzt man  $\sigma(M) = 0$ .

Dem bekannten Kobordismusbuch [11] (Seiten 219-223) von Robert E. Stong folgend, soll die Signatur nun als Ringhomomorphismus  $\Omega_* \to \mathbb{Z}$  nachgewiesen werden. (Die Beweise sind der Vollständigkeit halber aufgeführt. Sie stimmen aber mit denen in [11] im Wesentlichen überein.)

Notiz 2.5. Offenbar gilt  $\sigma(M_1+M_2) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2)$  und  $\sigma(-M) = -\sigma(M)$ .

**Lemma 2.6 (Produktformel der Signatur).** Seien M, N kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten. Dann ist auch  $M \times N$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit und es gilt

$$\sigma(M \times N) = \sigma(M) \cdot \sigma(N).$$

Beweis. Setze  $P := M \times N$  und seien p, m, n die entsprechenden Dimensionen, also p = m + n. Ist nun  $p \not\equiv 0 \mod 4$ , so ist auch m oder n nicht durch 4 teilbar und beide Seiten der Gleichung sind null. Sei also p = 4k. Dann ist nach der Künneth-Formel

$$\bigoplus_{s=0}^{2\kappa} H^s(M, \partial M) \otimes H^{2k-s}(N, \partial N) \xrightarrow{\times} H^{2k}(P, \partial P).$$

Die Schnittform rechts  $(\alpha,\beta)\mapsto \langle\beta\smile\alpha,[P]\rangle$  wird dabei zu

$$\begin{aligned} (\alpha_s \otimes \alpha'_{2k-s}, \beta_t \otimes \beta'_{2k-t}) & \mapsto \langle (\beta_t \times \beta'_{2k-t}) \smile (\alpha_s \times \alpha'_{2k-s}), [P] \rangle \\ &= (-1)^{(2k-t)s} \langle (\beta_t \smile \alpha_s) \times (\beta'_{2k-t} \smile \alpha'_{2k-s}), [M] \times [N] \rangle \\ &= \begin{cases} (-1)^{(2k-t)s} \langle \beta_t \smile \alpha_s, [M] \rangle \langle \beta'_{2k-t} \smile \alpha'_{2k-s}, [N] \rangle & \text{falls } s+t=m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Der Vektorraum  $\bigoplus_{s=0}^{2k} H^s(M,\partial M) \otimes H^{2k-s}(N,\partial N)$ zerlegt sich in die Unterräume

$$H^{s}(M,\partial M) \otimes H^{2k-s}(N,\partial N) \oplus H^{m-s}(M,\partial M) \otimes H^{2k-m+s}(N,\partial N)$$

mit  $s < \frac{m}{2}$  und für *m* gerade den zusätzlichen Summanden

$$H^{\frac{m}{2}}(M,\partial M)\otimes H^{\frac{n}{2}}(N,\partial N).$$

Diese Unterräume sind paarweise orthogonal bezüglich der Schnittform.

Für  $s < \frac{m}{2}$  erhält man auf dem entsprechenden Summanden Signatur null: Denn man ist in folgender allgemeiner Lage: Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform darauf, der sich als  $V = A \oplus B$  schreiben lässt, wobei  $A \subset A^{\perp}, B \subset B^{\perp}$  gilt. Dann ist  $A^{\perp} \cap B^{\perp} = V^{\perp}$ , also ist  $V/V^{\perp} = A^{\perp}/V^{\perp} \oplus B^{\perp}/V^{\perp}$ . Andererseits ist  $V/V^{\perp} = (A + V^{\perp})/V^{\perp} \oplus (B + V^{\perp})/V^{\perp}$ . Damit ist  $(A + V^{\perp})/V^{\perp} = A^{\perp}/V^{\perp}$  (ebenso für B), es gibt also im nichtentarteten Vektorraum  $V/V^{\perp}$  einen Unterraum, der gleich seinem orthogonalen Komplement ist. Nach dem letzten Lemma dieses Abschnitts (Lemma 2.8) ist daher die Signatur schon null.

Für ungerades m ist man damit fertig. Ist dagegen  $m, n \equiv 0 \mod 4$ , so wähle Basen  $e_1, \ldots, e_\ell, f_1, \ldots, f_q$  von  $H^{\frac{m}{2}}(M, \partial M), H^{\frac{n}{2}}(N, \partial N)$ , in denen die Schnittformen in Sylvesterform sind:

$$G_M = \begin{pmatrix} E_r & & \\ & -E_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_N = \begin{pmatrix} E_{r'} & & \\ & -E_{s'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

(dabei bezeichne  $E_r$  die  $r \times r$ -Einheitsmatrix, also hier etwa  $\sigma(M) = r - s$ ) und erhalte mit der Basis  $e_1 \otimes f_1, \ldots, e_\ell \otimes f_1, \ldots, e_1 \otimes f_q, \ldots, e_\ell \otimes f_q$  die Matrix

$$G_P = \begin{pmatrix} G_M & & & \\ & \ddots & & \\ & & -G_M & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $G_M$  r'-mal mit positivem und s'-mal mit negativem Vorzeichen auftritt. Demensprechend ist  $\sigma(P) = \sigma(M) \cdot \sigma(N)$ .

Bleibt noch  $m, n \equiv 2 \mod 4$ . In diesem Fall sind die Schnittformen auf Mund N schiefsymmetrisch. Wieder wählt man Basen  $e_1, \ldots, e_\ell$  und  $f_1, \ldots, f_q$ von  $H^{\frac{m}{2}}(M, \partial M)$  und  $H^{\frac{n}{2}}(N, \partial N)$  bezüglich derer die Schnittformen in symplektischer Normalform sind:

$$G_M = \begin{pmatrix} E_r \\ -E_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G_N = \begin{pmatrix} E_s \\ -E_s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

#### 2 Einführung

Bezüglich der Basis  $e_1 \otimes f_1, \ldots, e_\ell \otimes f_1, \ldots, e_1 \otimes f_q, \ldots, e_\ell \otimes f_q$  ist

$$G_P = \begin{pmatrix} & G_M & & \\ & & \ddots & \\ & -G_M & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(Die Matrizen  $\pm G_M$  tauchen je *s*-mal auf.) Diese symmetrische Matrix hat, wie man sich leicht überzeugt, Signatur Null, was den Beweis abschließt.

**Definition.** Ein *orientierter Bordismus* zwischen geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeiten  $M_i^n$ , i = 0, 1, ist eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit  $W^{n+1}$  mit Rand  $\partial W = M_1 - M_0$ .

Dies definiert eine Äquivalenzrelation *bordant* und man erhält den Bordismenring  $\Omega_*$  mit der disjunkten Summe und dem kartesischen Produkt als Verknüpfungen auf der Menge der Äquivalenzklassen. Die Signatur ist ein Ringhomomorphismus

$$\sigma: \Omega_* \to \mathbb{Z},$$

denn es gilt folgendes Lemma, das die Wohldefiniertheit sichert:

Lemma 2.7 (Bordismusinvarianz der Signatur). Ist M eine geschlossene orientierte 4k-dimensionale Mannigfaltigkeit und nullbordant, so ist

$$\sigma(M) = 0$$

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 2.4, das einen Unterraum  $L \subset H_{2k}(M)$  mit  $L^{\perp} = L$  liefert, und dem folgenden Hilfslemma aus der Linearen Algebra.

Nun endlich zum bereits zweimal verwendeten linear-algebraischen Hilfslemma:

**Lemma 2.8.** Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, s eine symmetrische Bilinearform darauf und sei  $A \subset V$  mit  $A^{\perp} = A$ . Dann ist die Signatur von s schon null. Beweis. OBdA sei s nichtentartet (sonst ersetze V durch  $V \nearrow V^{\perp}$  und A durch  $A \nearrow V^{\perp}$ ). Dann kommutiert



Also ist  $V \cong A^{\perp} \oplus A^* = A \oplus A^*$ . Dann ist für  $a \in A, b^* \in A^*$  mit  $b^* = b(b) = s(\_, b)$  die Schnittform  $(a, b^*) \mapsto s(a, b) = b^*(a)$  gerade die kanonische Paarung. Wählt man duale Basen, so erhält man daher

$$M(s) = \left(\begin{array}{cc} 0 & E \\ E & * \end{array}\right)$$

mit E die Einheitsmatrix und \* ein unbekannter Eintrag. Diese Matrix hat offenbar Signatur Null.

## 2.2 Novikovs Additivität der Signatur

In diesem Unterabschnitt wird die von S. P. Novikov entdeckte Additivitätseigenschaft der Signatur vorgestellt und auch bewiesen.

**Satz 2.9.** Seien M und M' orientierte kompakte berandete Mannigfaltigkeiten der Dimension 4k und X eine Vereinigung von Randkomponenten von  $\partial M$  bzw. -X von  $\partial M'$ . Setze  $N := M \cup_X M'$ . Dann gilt:

$$\sigma(N) = \sigma(M) + \sigma(M').$$

Der Beweis folgt dem von Atiyah und Singer in [1] im Spezialfall  $X = \partial M = \partial M'$  und im Allgemeinen der ersten Seite von [8].

Beweis. Fall 1:  $X = \partial M = \partial M'$ . Betrachte die langen exakten Kohomologiesequenzen von (N, M) und (N, M'):

### 2 Einführung

Die Isomorphismen kommen mittels Ausschneidung und Kragenretraktion zustande. Diese beiden Sequenzen sind dual zueinander via P, wobei der Dualitätsisomorphismus P wie in 2.2 und 2.3 wieder die Hintereinanderschaltung von Poincaré-Dualität und speziellem Koeffiziententheorem ist. Genauer und ferner kommutiert:



wobei mit  $\overline{f} := Hom(f, \mathbb{R})$  usw. die duale Abbildung bezeichnet sei. Zur Kommutativität: Aus Symmetriegründen genügt es die linke Seite zu prüfen. Das innere kleine Dreieck kommt vom Abbildungsdiagramm

kommutiert also  $(f = f_1^* \circ (f_2^*)^{-1}).$ 

Für das obere große Dreieck betrachte



Zu zeigen:  $\overline{f_1^*}\circ P=\overline{f_2^*}\circ P\circ g^*.$  Sei $\alpha\in H^{2k}(N),$  dann ist

$$\overline{f_2^*} \circ P \circ g^* \alpha = \langle f_2^*, g^* \alpha \frown [M] \rangle \\
= \langle \_, f_{2*}(g^* \alpha \frown [M]) \rangle \\
= \langle \_, \alpha \frown f_{2*}[M] \rangle$$

mit  $f_2, g: (M, \emptyset, \partial M) \to (N, \emptyset, M')$  gemäß (CAP-1). Andererseits ist

$$\overline{f_1^*} \circ P(\alpha) = \langle f_1^*, \alpha \frown [N] \rangle$$
$$= \langle -, f_{1*}(\alpha \frown [N]) \rangle$$
$$= \langle -, \alpha \frown f_{1*}[N] \rangle$$

mit  $f_1: (N, \emptyset, \emptyset) \to (N, \emptyset, M')$ . Es wird schließlich [N] unter

$$H_{4k}(N)$$

$$\downarrow^{f_{1*}}$$

$$H_{4k}(M,\partial \tilde{M}) \xrightarrow{f_{2*}} H_{4k}(N,M')$$

auf [M] abgebildet (wegen der Eindeutigkeit der Fundamentalklasse).

Das untere Dreieck entsteht aus dem oberen durch Dualisieren, denn beachte allgemein  $(X^{4k}$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit), dass mit  $H^{2k}(X,\partial X) \stackrel{\text{kanon.}}{\cong} H^{2k}(X,\partial X)^{**}, \alpha \mapsto \alpha^{**}, \text{ wobei } \alpha^{**}(u) := u(\alpha), \text{ für } \alpha \in H^{2k}(X,\partial X)$  gilt

$$\overline{P}(\alpha^{**})(\beta) = \alpha^{**}(P(\beta)) = P(\beta)(\alpha)$$

$$= \langle \alpha, \beta \frown [X] \rangle$$

$$= \langle \alpha \smile \beta, [X] \rangle$$

$$= \langle \beta \smile \alpha, [X] \rangle$$

$$= \langle \beta, \alpha \frown [X] \rangle$$

$$= P(\alpha)(\beta)$$

für alle  $\beta \in H^{2k}(X)$ .

Statt dem linken Viereck betrachte das Diagramm (äußeres Viereck, d. h. gan-

ze linke Hälfte)



Dies entsteht aus dem kleinen Dreieck durch Dualisieren. Damit ist das gesamte Diagramm als kommutativ nachgewiesen.

Es bezeichne nun  $s_N : H^{2k}(N) \times H^{2k}(N) \to \mathbb{R}$  die Schnittform auf N. Setzt man

$$G^{2k}(M) := \operatorname{im}(H^{2k}(M, \partial M) \xrightarrow{j^*} H^{2k}(M)),$$

so induziert die Schnittform eine nichtentartete Bilinearform mit derselben Signatur auf  $G^{2k}(M)$ . (Im Wesentlichen ist dies die gleiche Bilinearform, man hat nur den Nullraum herausgeteilt.) Sei  $s_M : G^{2k}(M) \times G^{2k}(M) \to \mathbb{R}$  diese induzierte Form, analog  $s_{M'}$ .

Sei  $A := \operatorname{im} f, A' := \operatorname{im} f'$ . Dann sind A, A' orthogonale Komplemente bezüglich  $s_N$ , denn sind  $\alpha \in H^{2k}(M, \partial M), \alpha' \in H^{2k}(M', \partial M')$ , so ist

$$s_N(f(\alpha), f'(\alpha')) = Pf(\alpha)(f'(\alpha'))$$
  
=  $\overline{f'}Pf(\alpha)(\alpha')$   
=  $Pg'^*f(\alpha)(\alpha') = 0$ 

wegen der Exaktheit der Kohomologie-Sequenzen vom Anfang des Beweises. Ist umgekehrt  $s_N(f(\alpha), \beta) = 0$  für alle  $\alpha \in H^{2k}(M, \partial M)$ , so ist

$$0 = Pf(\alpha)(\beta)$$
  
=  $\overline{g^*}P(\alpha)(\beta)$   
=  $P(\alpha)(g^*\beta),$ 

also  $\beta \in \ker g^* = \operatorname{im} f' = A'$ .

Also  $A^{\perp} = A'$  und (weil  $s_N$  nichtentartet)  $A'^{\perp} = A$ . Weiterhin gilt

$$(A \cap A')^{\perp} = A^{\perp} + A'^{\perp} = A + A'.$$

Man hat daher

$$\begin{array}{ccc} H^{2k}(N) & & \xrightarrow{P} & H^{2k}(N)^* \\ & & & & & \downarrow \\ & & & \downarrow |(A \cap A') \\ H^{2k}(N) \swarrow A + A' & \xrightarrow{\cong} & (A \cap A')^* \end{array}$$

und außerdem Isomorphismen

$$A + A' \swarrow A \cap A' = A \measuredangle A \cap A' \oplus A' \measuredangle A \cap A'$$
$$\xrightarrow{g^* \oplus g'^*} \operatorname{im} g^* f \oplus \operatorname{im} g'^* f'$$
$$= G^{2k}(M) \oplus G^{2k}(M').$$

Wähle nun Projektionen  $H^{2k}(N) \xrightarrow{\pi_1} A + A' \xrightarrow{\pi_2} A \cap A'$ , dann hat man einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} H^{2k}(N) &\xrightarrow{\cong} & (A \cap A') \oplus (A + A' \swarrow A \cap A') \oplus (H^{2k}(N) \swarrow A + A') \\ \alpha & \mapsto & (\pi_2 \circ \pi_1(\alpha), [\pi_1(\alpha)], [\alpha]) \\ &\xrightarrow{\cong} & (A \cap A') \oplus G^{2k}(M) \oplus G^{2k}(M') \oplus (A \cap A')^*, \\ & \mapsto & (\pi_2 \circ \pi_1(\alpha), g^* \oplus g'^*[\pi_1(\alpha)], P(\alpha)|(A \cap A')). \end{aligned}$$

Wählt man Basen dieser Vektorräume, so dass die von  $A \cap A'$  und  $(A \cap A')^*$  dual zueinander sind, so hat die Grammatrix  $M(s_N)$  der durch  $s_N$  induzierten Bilinearform die Gestalt:

$$M(s_N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & M(s_M) & 0 & * \\ 0 & 0 & M(s_{M'}) & * \\ E & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Beachte nämlich für  $\alpha \in (A \cap A')^*, \beta \in A \cap A'$ , dass für Urbilder  $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in H^{2k}(N)$ unter dem Isomorphismus gilt  $s_N(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = P(\overline{\alpha})(\overline{\beta}) = \alpha(\beta)$ , wodurch die beiden Ecken der Matrix bestimmt sind. Die Nullen stammen aus den Orthogonalitätsrelationen zwischen A und A' bzw. A + A' und  $A \cap A'$ . Die Sterne bezeichnen unbekannte Einträge. Bleiben die beiden mittleren Diagonaleinträge, dazu: Für  $\alpha, \beta \in H^{2k}(M, \partial M)$  ist (siehe den Beweis von Lemma 2.3)

$$s_M(j^*\alpha, j^*\beta) = \langle \beta \smile \alpha, [M] \rangle = P(j^*\alpha)(\beta)$$
  
=  $P(g^*f\alpha)(\beta) = \overline{f}P(f\alpha)(\beta)$   
=  $P(f\alpha)(f\beta)$   
=  $s_N(f\alpha, f\beta)$ 

#### 2 Einführung

und  $f\alpha$  ist das Urbild von  $j^*\alpha$  unter obigem Isomorphismus, ebenso  $f\beta$  das von  $j^*\beta$ . Analog im zweiten Fall. Damit ist die Matrixdarstellung verifiziert.

Symmetrische Spalten- und Zeilenumformungen ändern die Signatur nicht. Die unbekannten Einträge können so leicht zum Verschwinden gebracht werden und "diagonalisiert man die Ecken weg", so erhält man

$$\left(\begin{array}{cccc}
E & 0 & 0 & 0\\
0 & M(s_M) & 0 & 0\\
0 & 0 & M(s_{M'}) & 0\\
0 & 0 & 0 & -E
\end{array}\right)$$

und daher ist  $\sigma(N) = \sigma(M) + \sigma(M')$ .

Fall 2:  $\partial M \setminus X, \partial M' \setminus X$  beide orientiert nullbordant. Seien W, W' die Nullbordismen, so wende Fall 1 auf M - W', M' - W an:

$$\sigma(-W \cup_{-\partial M \setminus X} M \cup_X M' \cup_{\partial M' \setminus X} -W') =$$
  
=  $\sigma(M - W') + \sigma(M' - W)$   
=  $\sigma(M) + \sigma(M') + \sigma(-W) + \sigma(-W')$ 

und auf  $M \cup_X M', -W - W'$ :

$$\sigma(-W \cup_{-\partial M \setminus X} M \cup_X M' \cup_{\partial M' \setminus X} -W') =$$
  
=  $\sigma(M \cup_X M') + \sigma(-W - W')$   
=  $\sigma(M \cup_X M') + \sigma(-W) + \sigma(-W').$ 

Damit ist auch Fall 2 gezeigt.

*Fall 3:* Allgemein. Wende Fall 2 auf M + M' und M' + M wie folgt an: Die verklebte Mannigfaltigkeit sei  $M \cup_X M' + M \cup_X M'$  ("klammere die erste Summe um die zweite") und als Nullbordismen verwendet man jeweils  $M' \cup_{-X} M$ . Dann ist nach Fall 2

$$\sigma(M \cup_X M' + M \cup_X M') = \sigma(M + M') + \sigma(M' + M),$$

also  $\sigma(M \cup_X M') = \sigma(M) + \sigma(M').$ 

## 2.3 Walls Nicht-Additivität der Signatur

C. T. C. Wall untersuchte in [13] den Fall, dass die beiden Mannigfaltigkeiten nicht entlang einer Randkomponente, sondern nur an einer abgeschlossenen volldimensionalen Untermannigfaltigkeit des Randes miteinander verklebt werden. Oder anders formuliert: Man zerschneidet M nicht mehr an einer geschlossenen Untermannigfaltigkeit in zwei Teile, sondern nur noch entlang einer kompakten. Dann ergibt sich ein Korrekturterm gegenüber der Novikovschen Additivität, den Wall bestimmen konnte.

Genauer seien  $M_i$ , i = 1, 2, zwei 4k-dimensionale kompakte berandete Mannigfaltigkeiten,  $U_i \subset \partial M_i$  abgeschlossene volldimensionale Untermannigfaltigkeiten und  $\varphi : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$  ein orientierungsumkehrender Diffeomorphismus. Bilde  $M := M_1 \cup_{\varphi} M_2$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension 4k. Dann gilt

$$\sigma(M) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2) + \tau$$

mit einem Korrekturterm  $\tau$ , der von Null verschieden sein kann. (Siehe Abschnitt 5 für eine exakte Fassung dieses Satzes.)

Dies wird in [3] von Cappell, Lee und Miller im Zusammenhang mit dem Maslov-Index dreier lagrangescher Unterräume wieder aufgegriffen und umformuliert. In der Verdoppelung  $\tilde{M} := M \cup_{\partial M} - M$  von M liegt die Untermannigfaltigkeit mit Singularität  $\partial M \cup U_1$ , die aus drei "Armen" oder "Zinken" besteht: Nämlich  $U_1$  und die beiden Teile von  $\partial M$ , die durch Zerschneiden längs  $\partial U_1$  entstehen. Verdickt man diese Teilmenge in  $\tilde{M}$  etwas, so erhält man eine kompakte orientierte 4k-dimensionale Zinken-Mannigfaltigkeit  $U \subset \tilde{M}$ . Zerschneidet man  $\tilde{M}$  längs deren Rand  $\partial U$ , so erhält man vier Teile, die offenbar zu  $-M, M_1, M_2$  und U homotopieäquivalent sind. Da eine Verdoppelung nach Novikov immer Signatur Null hat, folgt

$$\sigma(M) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2) + \sigma(U).$$

Der Vergleich mit dem Wallschen Resultat zeigt, dass der Korrekturter<br/>m $\tau$ durch U"geometrisch" realisiert wurde.

Dies ist der Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung, die in dieser Arbeit vorgenommen wurde und die sowohl das Wall-Resultat als auch das Ergebnis von [3] miteinschließt.

Hier sieht man auch, wie die Bezeichung Auflösungsmannigfaltigkeit zustande kam, von der im Vorwort bereits die Rede war. Nennt man die drei Teile der

## 2 Einführung

singulären Untermannigfaltigkeit  $B_1, B_2$  und  $B_3$  (jeweils kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand  $\partial M \cap U_1$ ), so wäre in diesem Fall  $B := B_1 + B_2 + B_3$  die entsprechende Auflösungsmannigfaltigkeit. Tatsächlich "löst" sie die Singularität von  $\partial M \cup U_1$  in einem gewissen Sinne "auf".

## 3 Konventionen und vorbereitende Lemmata

Im ersten Teil dieses Kapitels werden einige Vorzeichenkonventionen getroffen und der (ko-)homologische Einhängungsisomorphismus erklärt. Im zweiten werden "Übersetzungen" wichtiger Abbildungen unter der Poincaré-Dualität näher betrachtet.

## 3.1 Konventionen

**Der Mayer-Vietoris-Randoperator.** Sei X ein topologischer Raum und (A, B) ein Mayer-Vietoris-Paar darin mit  $A \cup B = X$ . Dann sei der zugehörige Mayer-Vietoris-Randoperator  $\Delta$  in der Homologie durch

$$H_{k}(X) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(A \cap B)$$

$$\downarrow \qquad \uparrow^{\partial}$$

$$H_{k}(X,A) \xleftarrow{\cong} H_{k}(B,A \cap B)$$

und in der Kohomologie durch

$$\begin{array}{c|c} H^k(A \cap B) & \xrightarrow{\Delta} & H^{k+1}(X) \\ & & & \uparrow \\ & & & \uparrow \\ H^{k+1}(B, A \cap B) & \xleftarrow{\cong} & H^{k+1}(X, A) \end{array}$$

gegeben. Beachte, dass Vertauschung von A und B zu einer Vorzeichenänderung von  $\Delta$  führt.

**Der Einhängungsisomorphismus.** Sei X ein topologischer Raum. Dann ist der homologische Einhängungsisomorphismus (oder auch einfach die *Einhängung*) durch

$$\begin{array}{c} H_k(X) \xrightarrow{S} H_{k+1}(X \times I, X \times \partial I) \\ \downarrow \cong \qquad \cong \downarrow \partial \\ H_k(X \times 1) \xrightarrow{\cong} H_k(X \times \partial I, X \times (-1)) \end{array}$$

#### 3 Konventionen und vorbereitende Lemmata

definiert. Dies hat den Vorteil, dass im Fall  $X = M^n$  eine orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit die Fundamentalklasse [M] unter

$$H_n(M) \xrightarrow{S} H_{n+1}(M \times I, M \times \partial I)$$

auf  $[M \times I]$  abgebildet wird, wenn I wie gewöhnlich orientiert ist. (Das sieht man daran, dass M mit  $M \times 1$  identifiziert wird und dies daher die Orientierung [M] trägt, während  $M \times (-1)$  die Orientierung -[M] erhält.) Der kohomologische Einhängungsisomorphismus ist analog durch folgendes Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc} H^k(X) & \xrightarrow{S} & H^{k+1}(X \times I, X \times \partial I) \\ & \uparrow \cong & \cong \uparrow \delta \\ H^k(X \times 1) & \xleftarrow{} & H^k(X \times \partial I, X \times (-1)). \end{array}$$

Vertauscht man die Rollen von  $\pm 1$ , so wird in beiden Fällen S zu -S. Beachte auch, dass der homologische Einhängungsisomorphismus als die Abbildung  $\alpha \mapsto \alpha \times [I]$ , also als das Kreuzprodukt mit der Fundamentalklasse des Intervalls, realisiert werden kann. (Für den kohomologischen existiert eine entsprechende Realisierung.) Auch könnte man beide über den relativen Mayer-Vietoris-Randoperator des Paares  $(X \times 1, X \times (-1))$  in  $X \times I$  und die Projektion  $\pi : X \times I \to X$  definieren.

## 3.2 Vorbereitende Lemmata

In diesem Abschnitt werden drei Lemmata bewiesen, die den Mayer-Vietoris-Randoperator und den Einhängungsisomorphismus zum Inhalt haben. Die ersten beiden beschäftigen sich mit der "Übersetzung" dieser Abbildungen unter Poincaré-Dualität, das dritte mit dem Zusammenspiel von Einhängung und Cap-Produkt.

Lemma 3.1 (Mayer-Vietoris-Operator unter Poincaré-Dualität). Es seien  $M_1$  und  $M_2$  orientierte kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand. Weiter seien  $U_i \subset \partial M_i$  volldimensionale kompakte Untermannigfaltigkeiten der Ränder und sei  $\varphi : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$  ein orientierungsumkehrender Diffeomorphismus. Dann ist  $M := M_1 \cup_{\varphi} M_2$  eine orientierte kompakte ndimensionale Mannigfaltigkeit und  $(M_1, M_2)$  ein Mayer-Vietoris-Paar darin. Ferner kommutieren

$$\begin{array}{ccc} H_k(M) & & & & \\ & & & \\ \text{Poinc.} & & & \\ \end{array} \end{array} \xrightarrow{} H^{n-k}(M, \partial M) & & \xrightarrow{i^*} H^{n-k}(M_1 \cap M_2, \partial (M_1 \cap M_2)) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{c} H^{n-k-1}(M_1 \cap M_2) \xrightarrow{(-1)^{n-k}\Delta} H^{n-k}(M) \\ & \underset{i_*}{\operatorname{Poinc.}} \downarrow \cong \\ H_k(M_1 \cap M_2, \partial(M_1 \cap M_2)) \xrightarrow{i_*} H_k(M, \partial M). \end{array}$$

(Dabei sei  $M_1 \cap M_2$  orientiert wie  $U_2$ .)

Beweis. Unter den Inklusionsabbildungen

$$H_n(M, \partial M) \xrightarrow{j_*} H_n(M, \partial M \cup M_1) \xleftarrow{k_*} H_n(M_2, \partial M_2)$$

wird [M] auf  $[M_2]$  abgebildet. Dies wird unter

$$\partial' : H_n(M_2, \partial M_2) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial M_2, \overline{\partial M_2 \setminus U_2})$$
$$\stackrel{\cong}{\leftarrow} H_{n-1}(M_1 \cap M_2, \partial (M_1 \cap M_2))$$

auf  $[M_1 \cup M_2]$  abgebildet.

1. Diagramm: Beachte, dass  $\Delta$  durch

$$\begin{array}{c|c} H_k(M) & \xrightarrow{\Delta} & H_{k-1}(M_1 \cap M_2) \\ & & & & \uparrow^{\partial} \\ H_k(M, M_1) \xleftarrow{\cong} & H_k(M_2, M_1 \cap M_2) \end{array}$$

gegeben ist. Also ist für  $\alpha \in H^{n-k}(M,\partial M)$ 

$$\Delta(\alpha \frown [M]) = \partial k_*^{-1} j_*(\alpha \frown [M])$$
  
$$\partial h^{-1}(\alpha \frown [M]) \qquad (CAD 1)$$

$$= \partial k_*^{-1} (\alpha \frown j_*[M]) \qquad (CAP-1)$$
$$= \partial k_*^{-1} (\alpha \frown k_*[M_2])$$

$$= \partial(k^* \alpha \frown [M_2]) \tag{CAP-1}$$

### 3 Konventionen und vorbereitende Lemmata

mit  $k^* : H^{n-k}(M, \partial M) \to H^{n-k}(M_2, \overline{\partial M_2 \setminus U_2})$ . Weiter ist  $\dots = \partial(k^* \alpha \frown [M_2])$   $= i^* \alpha \frown \partial'[M_2]$   $= i^* \alpha \frown [M_1 \cap M_2].$ (CAP-2)

2. Diagramm: Hier ist $\Delta$ über

$$\begin{array}{c|c} H^{n-k-1}(M_1 \cap M_2) & \xrightarrow{\Delta} & H^{n-k}(M) \\ & \delta & & \uparrow^{j^*} \\ H^{n-k}(M_2, M_1 \cap M_2) & \stackrel{\cong}{\underset{k^*}{\leftarrow}} & H^{n-k}(M, M_1) \end{array}$$

definiert. Sei jetzt  $\alpha \in H^{n-k-1}(M_1 \cap M_2)$ , dann ist

$$\Delta \alpha \frown [M] = j^* (k^*)^{-1} \delta \alpha \frown [M]$$
  
=  $(k^*)^{-1} \delta \alpha \frown j_* [M]$  (CAP-1)  
=  $(k^*)^{-1} \delta \alpha \frown k_* [M_2]$   
=  $k_* (\delta \alpha \frown [M_2])$  (CAP-1)

mit  $k_*: H_k(M_2, \overline{\partial M_2 \setminus U_2}) \to H_k(M, \partial M)$ . Weiter ist

$$\dots = k_*(\delta \alpha \frown [M_2])$$
  
=  $(-1)^{n-k} i_*(\alpha \frown \partial'[M_2])$  (CAP-3)  
=  $(-1)^{n-k} i_*(\alpha \frown [M_1 \cap M_2]).$ 

Lemma 3.2 (Einhängung unter Poincaré-Dualität). Sei  $M^n$  eine geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit. Dann kommutieren

$$H_{k}(M) \xrightarrow{S} H_{k+1}(M \times I, M \times \partial I)$$
  
Poinc.  $\uparrow \cong \qquad \cong \uparrow$  Poinc.  

$$H^{n-k}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-k}(M \times I)$$

und

$$\begin{array}{ccc} H^{n-k-1}(M) \xrightarrow{(-1)^{n-k}S} H^{n-k}(M \times I, M \times \partial I) \\ & \cong & & \cong & \\ & \text{Poinc.} & & & \cong & \\ & & H_{k+1}(M) \xrightarrow{\cong} & & H_{k+1}(M \times I). \end{array}$$

(Dabei bezeichnen  $\pi : M \times I \to M$  die Projektion und  $\iota : M \to M \times I$  einen Schnitt gegen  $\pi$ .)

Beweis. Identifiziere Mmit $M\times 1$  (und oBdA se<br/>i $\iota:M\to M\times I$ die Inklusion). Die homologische Einhängung ist durch

$$\begin{array}{c|c} H_k(M) & \xrightarrow{S} & H_{k+1}(M \times I, M \times \partial I) \\ & & & \\ & & & \\ j_* \not \cong & & & \\ H_k(M \times \partial I, M \times (-1)) & \xleftarrow{}_{i_*} & H_k(M \times \partial I) \end{array}$$

gegeben. Insbesondere wird im Fall k = n die Fundamentalklasse [M] auf  $[M \times I]$  abgebildet. Sei nun  $\alpha \in H^{n-k}(M \times I)$ , dann ist

$$S^{-1}(\alpha \frown [M \times I]) = j_*^{-1} i_* \partial(\alpha \frown [M \times I])$$
  
=  $j_*^{-1} i_* (k^* \alpha \frown \partial [M \times I]),$  (CAP-2)

wobe<br/>i $k^*: H^{n-k}(M\times I) \to H^{n-k}(M\times \partial I),$  und weiter

$$\dots = j_*^{-1} i_* (k^* \alpha \frown \partial [M \times I])$$
  
=  $j_*^{-1} (k^* \alpha \frown \partial' [M \times I])$   
=  $j_*^{-1} (k^* \alpha \frown j_* [M])$  (CAP-1)

$$= \iota^* \alpha \frown [M]. \tag{CAP-1}$$

Die kohomologische Einhängung ist durch

$$\begin{array}{c} H^{n-k-1}(M) \xrightarrow{S} H^{n-k}(M \times I, M \times \partial I) \\ \downarrow^{i} \uparrow^{\cong} & \uparrow^{\delta'} \\ H^{n-k-1}(M \times \partial I, M \times (-1)) \xrightarrow{i^{*}} H^{n-k}(M \times \partial I) \end{array}$$

bestimmt. Sei  $\alpha \in H^{n-k-1}(M)$ , dann ist (mit  $k: M \times \partial I \hookrightarrow M \times I$ )

$$S\alpha \frown [M \times I] = \delta i^* (j^*)^{-1} \alpha \frown [M \times I]$$
  
=  $(-1)^{n-k} k_* (i^* (j^*)^{-1} \alpha \frown \partial [M \times I])$  (CAP-3)  
=  $(-1)^{n-k} k_* ((j^*)^{-1} \alpha \frown \partial [M \times I])$  (CAP-1)

$$= (-1)^{n-k} k_*((j^*)^{-1} \alpha \frown \mathcal{O}[M \times I]) \qquad (CAP-1)$$
  
=  $(-1)^{n-k} k_*((j^*)^{-1} \alpha \frown j_*[M])$   
=  $(-1)^{n-k} \iota_*(\alpha \frown [M]). \qquad (CAP-1) \square$ 

Lemma 3.3 (Verträglichkeit von Einhängung und Cap-Produkt). Sei X wieder ein topologischer Raum. Bezeichne

$$\chi: H^k(X \times I) \xrightarrow{\cong} H^{k+1}(X \times I, X \times \partial I)$$

die Zusammensetzung  $S \circ (\pi^*)^{-1}$  und auch

$$\chi: H_n(X \times I) \xrightarrow{\cong} H_{n+1}(X \times I, X \times \partial I)$$

die Zusammensetzung  $S \circ \pi_*$ . Seien  $\alpha \in H^k(X \times I), \beta \in H_n(X \times I)$ , dann gilt

$$\chi \alpha \frown \chi \beta = (-1)^{k+1} \alpha \frown \beta.$$

(Siehe auch [4], S. 368.)

Beweis. Es sind

und

kommutativ. Damit ist

$$\chi \alpha \frown \chi \beta = \delta k^* (j^*)^{-1} i^* \alpha \frown \partial'^{-1} j_* i_*^{-1} \beta$$
  
=  $(-1)^{k+1} \ell_* (k^* (j^*)^{-1} i^* \alpha \frown \partial \partial'^{-1} j_* i_*^{-1} \beta)$  (CAP-3)

mit  $\ell: X \times \partial I \hookrightarrow X \times I$ . Weiter ist

$$\dots = (-1)^{k+1} \ell_* (k^* (j^*)^{-1} i^* \alpha \frown \partial \partial'^{-1} j_* i_*^{-1} \beta)$$

$$= (-1)^{k+1} \ell_* ((j^*)^{-1} i^* \alpha \frown k_* \partial \partial'^{-1} j_* i_*^{-1} \beta)$$

$$= (-1)^{k+1} \ell_* ((j^*)^{-1} i^* \alpha \frown j_* i_*^{-1} \beta)$$

$$(CAP-1)$$

$$= (-1)^{k+1} \ell_* ((j^*)^{-1} i^* \alpha \frown j_* i_*^{-1} \beta)$$

$$(CAP-1)$$

$$= (-1)^{k+1} i_* (i^* \alpha \frown i_*^{-1} \beta)$$
(CAP-1)

$$= (-1)^{k+1} \alpha \frown \beta. \tag{CAP-1} \square$$

## 4 Die $\sigma$ -Invariante

Dieses Kapitel enthält die Kernaussage dieser Arbeit. Ich nenne sie Theorem, um sie von anderen wichtigen Aussagen abzuheben, die Sätze genannt werden. Zuerst werden die Voraussetzungen aufgelistet und eine verallgemeinerte Zinken-Mannigfaltigkeit konstruiert, dann wird das Theorem vorgestellt und bewiesen.

## 4.1 Voraussetzungen und Konstruktion

An Voraussetzungen hat man nur folgende beiden Daten:

Sei B eine (4k-1)-dimensionale kompakte berandete orientierte Mannigfaltigkeit und  $\phi: \partial B \times \mathbb{Z}_r \to \partial B$  eine freie orientierungserhaltende  $\mathbb{Z}_r$ -Rechtsaktion.

**Definition.** Ein solches Paar  $(B, \phi)$  heiße hier **Auflösungsmannigfaltigkeit**. Ähnlich wie man bei Mannigfaltigkeiten die Dimension als oberen Index notiert, soll eine  $\mathbb{Z}_r$ -Rechtsaktion  $\phi$  als  $\phi^r$  notiert werden.

Dann ist

$$\partial B \xrightarrow{p} \partial B / \mathbb{Z}_r =: C$$

ein  $\mathbb{Z}_r$ -Prinzipalbündel. Der Raum C ist eine orientierte (4k-2)-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit und  $p: \partial B \to C$  ist eine r-blättrige Überlagerung. Bilde mit  $D^2$  als Links- $\mathbb{Z}_r$ -Mannigfaltigkeit (Drehungen) das Diskbündel

$$E := \partial B \times_{\mathbb{Z}_r} D^2 \xrightarrow{p} C$$

und verdicke B zu  $B \times I$ . Diese beiden orientierten Mannigfaltigkeiten sollen nun zu einer orientierten Mannigfaltigkeit verklebt werden. Dazu: Sei  $W_r \subset S^1$ definiert als (Abbildung 1)

$$W_r := \left\{ e^{i\varphi} | \frac{4k-1}{2r} \pi \le \varphi \le \frac{4k+1}{2r} \pi, k = 0, \dots, r-1 \right\}.$$

Dann induziert die  $\mathbb{Z}_r$ -Aktion auf  $D^2$  eine solche auf  $W_r$  und man hat  $\partial B \times_{\mathbb{Z}_r} W_r \subset \partial B \times_{\mathbb{Z}_r} D^2$  und außerdem  $\partial B \times_{\mathbb{Z}_r} W_r \cong \partial B \times I$ , wobei die "Seelen"  $\partial B = \partial B \times_{\mathbb{Z}_r} \mathbb{Z}_r \subset \partial B \times_{\mathbb{Z}_r} W_r$  (fasse  $\mathbb{Z}_r$  als die Menge der *r*-ten Einheitswurzeln auf) und  $\partial B = \partial B \times 0 \subset \partial B \times I$  identisch aufeinander abgebildet werden sollen. Dies geschieht durch einen passenden äquivarianten orientierungserhaltenden



Abbildung 1:  $W_r$  schematisch

Diffeomorphismus  $\varphi: W_r \cong \coprod_{i=1}^r I$ . (Dieser wird in der ganzen Arbeit immer stillschweigend als Identifizierung verwendet.) Man kann also

$$U := E \cup_{\varphi} - (B \times I)$$

bilden, eine orientierte kompakte berandete 4k-dimensionale Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Setze damit

 $\sigma(B,\phi) := \sigma(U).$ 

Diese Invariante heiße die  $\sigma$ -Invariante von  $(B, \phi)$ .

Es seien im Folgenden immer  $\partial B \times I = \partial B \times_{\mathbb{Z}_r} W_r$  und auch  $\partial B = \partial B \times_{\mathbb{Z}_r} \mathbb{Z}_r \subset E$  identifiziert. Außerdem induziert die kanonische Rechtsaktion von  $S^1$  auf  $D^2$  eine Rechtsaktion von  $S^1$  auf E, die ich aber "von links" notieren will. So tritt im Weiteren beispielsweise  $e^{i\frac{\pi}{r}}(\partial B \times I)$  auf. Dies dient der besseren Lesbarkeit und ist durch die Kommutativität der Multiplikation in  $\mathbb{C}$  (von der diese Aktion ja herstammt) zum Teil auch gerechtfertigt.

## 4.2 Überlagerungen und Transfer-Homomorphismus

Wir haben es mit einer Überlagerung  $\partial B \xrightarrow{p} C$  zu tun, die von einer Gruppenaktion abstammt. Diese Situation soll nun etwas genauer im Allgemeinen untersucht werden. (Ich folge hier dem Appendix 3.G aus [7], in dem das allerdings kohomologisch aufgezogen wird.)

Sei dazu  $p : \tilde{A} \to A$  eine *r*-blättrige Überlagerung. Indem man jedem singulären Simplex  $\sigma : \Delta_j \to A$  die Summe seiner *r* verschiedenen Lifts  $\tilde{\sigma} : \Delta_j \to \tilde{A}$  zuordnet, definiert man einen Homomorphismus  $p^! : H_j(A) \to H_j(\tilde{A})$ , der offenbar  $p_*p^! = r \cdot Id$  erfüllt. Dieser Homomorphismus heißt der **Transfer-Homomorphismus**. Insbesondere ist  $p_* : H_j(\tilde{A}) \to H_j(A)$  surjektiv. Sei nun  $p: \tilde{A} \to A$  durch eine  $\Gamma$ -Aktion definiert, d. h.  $\Gamma$  ist eine *r*-elementige Gruppe, die frei auf  $\tilde{A}$  operiert und  $A = \tilde{A} / \Gamma$ . Bezeichnet  $H_j(\tilde{A})^{\Gamma}$  die Elemente von  $H_j(\tilde{A})$ , die unter  $\Gamma$  stabil sind, so ist

$$\operatorname{im} p^! = H_i(\tilde{A})^{\Gamma}.$$

Denn ist  $\alpha \in H_j(\tilde{A})^{\Gamma}$ , so ist  $p! p_* \alpha = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma_* \alpha = r \alpha$ , also ist  $\alpha = p! (\frac{1}{r} p_* \alpha)$  im Bild des Transfer-Homomorphismus p!. Die umgekehrte Inklusion ist klar.

Da  $p_* \circ \left(\frac{1}{r}p^!\right) = Id$ , ist

$$H_i(\tilde{A}) = \ker p_* \oplus H_i(\tilde{A})^{\Gamma}$$

Betrachte nämlich die spaltende kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker p_* \longrightarrow H_j(\tilde{A}) \xrightarrow{\frac{1}{r}p'} H_j(A) \longrightarrow 0.$$

Ist  $\Gamma = \mathbb{Z}_r$  und  $\varepsilon \in \mathbb{Z}_r$  ein Erzeuger, so ist

$$\operatorname{im}(\varepsilon_* - Id) = \ker p_*,$$

denn  $p_* \circ (\varepsilon_* - Id) = 0$  und die umgekehrte Inklusion folgt aus Dimensionsgründen, da ker $(\varepsilon_* - Id) = H_i(\tilde{A})^{\mathbb{Z}_r}$  ist.

### 4.3 Der zentrale Satz

**Theorem 4.1.** Sei  $(B^{4k-1}, \phi^r)$  eine Auflösungsmannigfaltigkeit. Bezeichne  $\varepsilon : \partial B \xrightarrow{\cong} \partial B, x \mapsto \phi(x, 1)$  den 1-Erzeuger der  $\mathbb{Z}_r$ -Aktion auf  $\partial B$ . Dann ist

$$\sigma(B,\phi) = \operatorname{sign}(Q),$$

wobei Q die quadratische Form auf

$$V := \operatorname{im} \left( H_{2k}(B, \partial B) \xrightarrow{\partial} H_{2k-1}(\partial B) \right) \cap \operatorname{im} \left( \varepsilon_* - Id_{H_{2k-1}(\partial B)} \right)$$
$$= \operatorname{ker} \left( H_{2k-1}(\partial B) \to H_{2k-1}(B) \right) \cap \operatorname{ker} p_*$$
$$\subset H_{2k-1}(\partial B)$$

ist, die durch

 $\alpha \mapsto \eta \cdot \varepsilon_* \eta$ 

für  $\alpha = \varepsilon_* \eta - \eta$  gegeben ist.

Der Beweis dieses Theorems geschieht in zwei Schritten, die die beiden folgenden Abschnitte ausfüllen. Zuvor noch die Wohldefiniertheit von Q: Ist  $c \in \ker(\varepsilon_* - Id)$ , also  $\varepsilon_* c = c$ , so ist

$$\begin{aligned} (\eta + c) \cdot \varepsilon_*(\eta + c) - \eta \cdot \varepsilon_*\eta &= \eta \cdot \varepsilon_*c + c \cdot \varepsilon_*\eta + c \cdot \varepsilon_*c \\ &= \varepsilon_*\eta \cdot \varepsilon_*^2c - \varepsilon_*\eta \cdot c + c \cdot c \\ &= \varepsilon_*\eta \cdot c - \varepsilon_*\eta \cdot c \\ &= 0. \end{aligned}$$

wobei  $\alpha \cdot \beta = \varepsilon_* \alpha \cdot \varepsilon_* \beta$  verwendet wurde (siehe Notiz 5.4).

Beachte, dass  $H_{2k-1}(\partial B)$  ein symplektischer Vektorraum ist und durch  $L := \ker(H_{2k-1}(\partial B) \to H_{2k-1}(B))$  ein lagrangescher Unterraum darin gegeben ist. Außerdem soll hier bemerkt werden, dass die Reihenfolge der Elemente in  $\mathbb{Z}_r$  eine wichtige Rolle spielt (d. h. welchen Erzeuger man wählt). So wurde nämlich  $B \times I$  auf eine bestimmte Weise an E geklebt, in die die  $\mathbb{Z}_r$ -Aktion auf  $D^2$  entscheidend eingeht. Stillschweigend wurde dort vorausgesetzt, dass  $1 \in \mathbb{Z}_r$  durch Drehung um  $\frac{2\pi}{r}$  operiert. Daher muss im Theorem auch dieser Erzeuger verwendet werden, da in der Faser von E gerade um einen "Anstoßpunkt" von  $B \times 0$  "weitergedreht" werden soll.

## 4.4 Erster Schritt: Die induzierende Abbildung

Die Schnittform auf U ist eine symmetrische Bilinearform auf  $H_{2k}(U)$ , deren Nullraum der Kern der Abbildung  $\ell_* : H_{2k}(U) \to H_{2k}(U, \partial U)$  ist. Definiere nun die *induzierende Abbildung* 

$$\Psi: H_{2k}(U) \xrightarrow{\Delta} H_{2k-1}(\partial B \times I) \xrightarrow{\pi_*} H_{2k-1}(\partial B),$$

wobei  $\Delta$  der Mayer-Vietoris-Randoperator des Paares  $(B \times I, E)$  ist. Dann ist

$$\ker \Psi = \ker \Delta = \operatorname{im}(H_{2k}(B \times I) \oplus H_{2k}(E) \to H_{2k}(U))$$

nach der zugehörigen Mayer-Vietoris-Sequenz. Da

$$\begin{array}{c} H_{2k}(B \times I) \longrightarrow H_{2k}(U) \\ \downarrow & \qquad \downarrow^{\ell_*} \\ H_{2k}(B \times I, B \times 1) \longrightarrow H_{2k}(U, \partial U) \end{array}$$

kommutiert und  $H_{2k}(B \times I, B \times 1) = 0$  ist, wird  $H_{2k}(B \times I)$  in den Nullraum der Schnittform abgebildet. Weiter ist

$$\begin{array}{c|c} H_{2k}(E) & \longrightarrow & H_{2k}(U) \\ & & & \downarrow_{\ell_*} \\ & & & \downarrow_{\ell_*} \\ H_{2k}(E, e^{i\frac{\pi}{r}}(\partial B \times I)) & \longrightarrow & H_{2k}(U, \partial U) \end{array}$$

kommutativ und  $j_*$  die Nullabbildung, denn betrachte dieses kommutative Diagramm (wobei  $e^{i\frac{\pi}{r}}(\partial B \times I) = \partial E \setminus (\partial B \times \mathring{I}) = \partial E \cap \partial U$ ):

$$\begin{array}{ccc} H_{2k}(e^{i\frac{\pi}{r}}(\partial B \times I)) & \longrightarrow & H_{2k}(E) \xrightarrow{j_{*}} & H_{2k}(E, e^{i\frac{\pi}{r}}(\partial B \times I)). \\ & \cong & & \swarrow \\ & & \cong & \\ & & H_{2k}(\partial B) \xrightarrow{p_{*}} & H_{2k}(C) \end{array}$$

Die erste Zeile ist exakt und  $p_*$  ist surjektiv, wie in Abschnitt 4.2 bemerkt wurde.

Somit ist der Kern von  $\Psi$  im Nullraum der Schnittform auf U enthalten und diese induziert daher via  $\Psi$  eine symmetrische Bilinearform auf dem Bild von  $\Psi$  mit derselben Signatur.

Nun zum Bild von  $\Psi$ : Es ist (Mayer-Vietoris-Sequenz)

$$\operatorname{im} \Delta = \operatorname{ker}(H_{2k-1}(\partial B \times I) \to H_{2k-1}(B \times I) \oplus H_{2k-1}(E))$$
$$= \operatorname{ker}(H_{2k-1}(\partial B \times I) \to H_{2k-1}(B \times I))$$
$$\cap \operatorname{ker}(H_{2k-1}(\partial B \times I) \to H_{2k-1}(E)).$$

Der erste Kern liefert den lagrangeschen Unterraum  $L = \ker(H_{2k-1}(\partial B) \rightarrow H_{2k-1}(B))$ , denn

$$\begin{array}{c} H_{2k-1}(\partial B \times I) \xrightarrow{\pi_{*}} H_{2k-1}(\partial B) \\ \downarrow \\ H_{2k-1}(B \times I) \xrightarrow{\cong} H_{2k-1}(B) \end{array}$$

ist kommutativ. Der zweite Kern liefert  $\ker(H_{2k-1}(\partial B) \xrightarrow{p_*} H_{2k-1}(C))$ , denn es kommutiert

$$H_{2k-1}(\partial B \times I) \xrightarrow{\pi_*} H_{2k-1}(\partial B)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow^{p_*}$$

$$H_{2k-1}(E) \xrightarrow{\cong} H_{2k-1}(C).$$

Damit ist

$$\operatorname{im} \Psi = L \cap \ker p_* = V.$$

## 4.5 Zweiter Schritt: Die induzierte Form

Beachte dazu Folgendes: Ist  $M^{2n}$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit und sind  $\alpha, \beta \in H_n(M)$  beliebige Homologieklassen mit  $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in H^n(M, \partial M)$ ihre Urbilder unter der Poincaré-Dualität, so ist

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= \langle \bar{\beta} \smile \bar{\alpha}, [M] \rangle \\ &= \langle \bar{\beta}, \bar{\alpha} \frown [M] \rangle \\ &= \langle \bar{\beta}, \ell_* \alpha \rangle \\ &=: P(\beta)(\ell_* \alpha), \end{aligned}$$

wobei  $\ell : M \hookrightarrow (M, \partial M)$ . Der Isomorphismus  $P : H_n(M) \xrightarrow{\cong} H_n(M, \partial M)^*$ ist wieder die Hintereinanderschaltung von Poincaré-Dualität und speziellem Koeffiziententheorem. (Er unterscheidet sich jedoch von den Isomorphismen in den Abschnitten 2.1 und 2.2, die auch P hießen.)

Die uns interessierende Schnittform  $\gamma \mapsto \gamma \cdot \gamma$  auf  $H_{2k}(U)$  ist also durch  $\gamma \mapsto P(\gamma)(\ell_*\gamma)$  gegeben. Daher das Interesse an folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{cccc} H_{2k}(U) & & \stackrel{\Delta}{\longrightarrow} H_{2k-1}(\partial B \times I) \xrightarrow{\pi_{*}} H_{2k-1}(\partial B) \\ \cong & & \stackrel{\uparrow}{\cong} & & \stackrel{\downarrow}{\cong} \\ H^{2k}(U, \partial U) & \xrightarrow{\iota^{*}} H^{2k}(\partial B \times I, \partial B \times \partial I) \xleftarrow{S}{\cong} H^{2k-1}(\partial B) \\ \cong & & \stackrel{\downarrow}{\boxtimes} & & \stackrel{\downarrow}{\cong} \\ H_{2k}(U, \partial U)^{*} \xrightarrow{\overline{\iota_{*}}} H_{2k}(\partial B \times I, \partial B \times \partial I)^{*} \xrightarrow{\overline{S}} H_{2k-1}(\partial B)^{*}. \end{array}$$

Dabei sind die oberen Isomorphismen Poincaré-Dualitäten und die unteren Anwendungen des speziellen Koeffiziententheorems, so dass sich insgesamt P ergibt. Nach den Lemmata 3.1 und 3.2 kommutieren die beiden oberen Vierecke. (Zur Anwendung von Lemma 3.1 beachte, dass  $\partial B \times I$  als Randteil von E orientiert ist, da  $B \times I$  in U negativ orientiert vorliegt.) Für das Rechteck links unten ist es die Kommutativität klar, bleibt nur noch das rechts unten: Sei dazu $\alpha \in H^{2k-1}(\partial B),$ dann ist

$$\langle S\alpha, \_\rangle = \langle \chi \pi^* \alpha, \_\rangle = \langle 1, \chi \pi^* \alpha \frown \_\rangle = \langle 1, \pi^* \alpha \frown \chi^{-1}\_\rangle$$
 (Lemma 3.3)  
$$= \langle \pi^* \alpha, \chi^{-1}\_\rangle = \langle \alpha, \pi_* \chi^{-1}\_\rangle = \langle \alpha, S^{-1}\_\rangle$$

und das komplette Diagramm ist kommutativ.

Damit ist ein  $\eta \in H_{2k-1}(\partial B)$  gesucht, so dass  $\iota_*S\eta = \ell_*\gamma$  gilt. Denn dann ist die induzierte Form Q durch (wobei  $\alpha = \Psi\gamma$ )

$$Q(\alpha) = P(\gamma)(\ell_*\gamma) = P(\gamma)(\iota_*S\eta)$$
  
=  $\overline{S}\overline{\iota_*}P(\gamma)(\eta) = P(\Psi\gamma)(\eta)$   
=  $P(\alpha)(\eta) = \eta \cdot \alpha$ 

nach obigem Diagramm gegeben.

Betrachte daher folgendes kommutative Diagramm:



Die obere Zeile ist der Mayer-Vietoris-Randoperator  $\Delta$ , die untere gerade  $\iota_*$ . Beachte, dass die beiden unteren waagrechten Abbildungen in der Mitte aufgrund der Kommutativität des Diagramms Isomorphismen sein müssen. Das rechte Dreieck kommutiert, da die beiden Abbildungen offenbar homotop zueinander sind.

Weiter kommutiert folgendes Diagramm, das direkt rechts an das vorherige



Wie das folgende kommutative Diagramm zeigt, ist die gepunktet gezeichnete Abbildung durch  $\varepsilon_* - Id$  gegeben (Abbildung 2):



Zum Abbildungstrapez links unten: Die Kommutativität in der zweiten Komponente ist klar. Bei der ersten ist zu beachten, dass sich allgemein

$$H_n(X \times I, X \times \partial I) \xrightarrow{\partial^{\pm}} H_{n-1}(X \times \partial I, X \times (\mp 1)) \cong H_{n-1}(X \times (\pm 1)) \cong H_{n-1}(X)$$

gerade um ein Vorzeichen unterscheiden, denn

$$H_n(X \times I, X \times \partial I) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X \times \partial I) \to H_{n-1}(X)$$

ist einerseits Null, andererseits die Summe der beiden obigen Abbildungen. Ansonsten ist die Kommutativität des Diagramms klar.

Die linke Seite ist gerade der Einhängungsisomorphismus S, also ist die untere Abbildungsfolge (U-förmig am Rand des Diagramms entlang) diejenige, die



Abbildung 2: Zur Kommutativität des Diagramms

schon im letzten Diagramm rechts auftauchte und die gepunktete Abbildung definierte. Da $e^{i\frac{2\pi}{r}} = \varepsilon_*$ ist, folgt, dass die gepunktete Abbildung durch  $\varepsilon_* - Id$ gegeben ist.

Da das Bild von  $\Psi$  in ker  $p_*$  enthalten ist, trifft  $\varepsilon_* - Id$  jedes Bildelement (siehe Abschnitt 4.2). Sei also  $\alpha = \Psi \gamma$  für ein  $\gamma \in H_{2k}(U)$ . Wähle ein Urbild  $\eta \in H_{2k-1}(\partial B)$  von  $\alpha$  unter  $\varepsilon_* - Id$ . Wie man am vorletzten Diagramm erkennt, erhält man aus  $\eta$  ein Element  $\bar{\eta} \in H_{2k}(E, \partial B \times I)$  (links oben im Diagramm), dass sich vom Bild von  $\gamma$  in diesem Raum nur um ein Element des Kerns von  $\partial : H_{2k}(E, \partial B \times I) \to H_{2k-1}(\partial B \times I)$  unterscheidet. Da jedoch  $H_{2k}(E) \to H_{2k}(E, \partial B \times I)$  die Nullabbildung ist, wie bereits im ersten Schritt bemerkt wurde (dort für  $H_{2k}(E) \to H_{2k}(E, e^{i\frac{\pi}{r}}(\partial B \times I))$ ), ist dieser Kern Null, also sind diese Elemente gleich und  $\eta$  wird unter  $\iota_* \circ S$  auf  $\ell_* \gamma$  abgebildet wie gewünscht.

Es ist also

$$Q(\alpha) = P(\alpha)(\eta)$$
  
=  $\eta \cdot \alpha$   
=  $\eta \cdot (\varepsilon_* \eta - \eta)$   
=  $\eta \cdot \varepsilon_* \eta$ 

und das Theorem ist gezeigt.

## 5 Erste Korollare

Hier sollen nun die bereits bekannten Ergebnisse, von denen schon in Abschnitt 2.3 die Rede war, aus dem Theorem gefolgert werden. Außerdem will ich auf einen Fehler hinweisen, der sich bei [3] eingeschlichen hat. Doch zuerst soll der Maslov-Index von drei lagrangeschen Unterräumen definiert werden.

## 5.1 Der Maslov-Index

Sei  $(V, \omega)$  ein endlichdimensionaler symplektischer Vektorraum.

**Definition.** Seien  $L_1, L_2, L_3 \subset V$  drei lagrangesche Unterräume. Dann definiert

$$Q_M : L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \quad \to \quad \mathbb{R},$$
  
$$(x_1, x_2, x_3) \quad \mapsto \quad \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, x_3) + \omega(x_3, x_1)$$

eine quadratische Form, deren Signatur  $\tau_V(L_1, L_2, L_3)$  der **Maslov-Index** des Tripels  $(L_1, L_2, L_3)$  heißt.

Dieser Index hat die folgenden vier charakterisierenden Eigenschaften:

(I) Für eine Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_3$  ist

$$\tau_V(L_{\sigma(1)}, L_{\sigma(2)}, L_{\sigma(3)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \tau_V(L_1, L_2, L_3).$$

(II) Ist W ein weiterer symplektischer Vektorraum mit lagrangeschen Unterräumen  $K_1, K_2, K_3 \subset W$ , so gilt

$$\tau_{V\oplus W}(L_1\oplus K_1, L_2\oplus K_2, L_3\oplus K_3) = \tau_V(L_1, L_2, L_3) + \tau_W(K_1, K_2, K_3).$$

(III) Ist  $g: V \xrightarrow{\cong} W$  ein linearer Symplektomorphismus, so ist

$$au_W(g(L_1), g(L_2), g(L_3)) = au_V(L_1, L_2, L_3).$$

(IV) Für die lagrangeschen Unterräume  $\mathbb{R}(1,0), \mathbb{R}(1,1), \mathbb{R}(0,1)$  von  $\mathbb{R}^2$  mit der symplektischen Struktur

$$((a,b),(c,d)) \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

gilt

 $\tau_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}(1,0),\mathbb{R}(1,1),\mathbb{R}(0,1)) = 1.$ 

Es bezeichne  $\mathcal{L}(V)$  die Menge der lagrangeschen Unterräume von V und  $\mathcal{Symp}$  die Klasse der endlichdimensionalen symplektischen Vektorräume. Dann gilt: Satz 5.1. Ist  $\tilde{\tau}_V : \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}$  ein durch  $V \in \mathcal{Symp}$  indiziertes Funktionensystem, das (I)-(III) erfüllt, so gilt schon

 $\tilde{\tau}_V = k \cdot \tau_V$ 

mit  $k = \tilde{\tau}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}(1,0),\mathbb{R}(1,1),\mathbb{R}(0,1)).$ 

Dieses k heiße die Normierung des Funktionensystems  $\tilde{\tau}_V$ . (Zum Beweis dieses Satzes siehe den Abschnitt 8 aus [3].) Nun folgen zwei Beispiele, die den Anschluss des Theorems 4.1 an die Literatur ermöglichen.

**Beispiel 5.2.** Im weiteren Verlauf von [3] trifft man auf den Vektorraum  $V_{CLM} := \{(x_1, x_2, x_3) \in L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  und folgende quadratische Form:

$$Q_{CLM}: V_{CLM} \rightarrow \mathbb{R}$$
  
(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>)  $\mapsto \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, x_3) + \omega(x_3, x_1).$ 

Setze  $\tau_V^{CLM}(L_1, L_2, L_3)$  als die Signatur dieser quadratischen Form. Dann erfüllt der Index  $\tau_V^{CLM}$  die Bedingungen (I)-(III) und im Normierungsfall ist  $V_{CLM} = \{(t, 0), (-t, -t), (0, t) | t \in \mathbb{R}\}$  und  $Q_{CLM}(t) = -3t^2$ , also ist  $\tau_V^{CLM} = -\tau_V$ .

Beispiel 5.3. Auch Wall definiert in [13] einen derartigen Index: Setze

$$V_{Wall} := \frac{L_1 \cap (L_2 + L_3)}{(L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3)}$$

und definere  $Q_{Wall}: V_{Wall} \to \mathbb{R}$  durch

$$[x_1] \mapsto \omega(x_1, x_2)$$

wobei  $x_i \in L_i, x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . Die Signatur dieser quadratischen Form werde mit  $\tau_V^{Wall}(L_1, L_2, L_3)$  bezeichnet. Auch dieser Index erfüllt (I)-(III) und im Normierungsfall ist  $V_{Wall} = \mathbb{R}(1, 0)$  und  $Q_{Wall}(x_1) = -x_1^2$ . Daher ist auch  $\tau_V^{Wall} = -\tau_V$ .

### 5.2 Bekannte Anwendungen

Der Abschnitt beginnt mit zwei Spezialfällen des Theorems 4.1. Doch bevor wir uns diesen zuwenden können, benötigen wir noch folgende interessante Beobachtung:

**Notiz 5.4.** Da  $\varepsilon_*[\partial B] = [\partial B]$ , ist  $\langle \beta \smile \alpha, [\partial B] \rangle = \langle \varepsilon^* \beta \smile \varepsilon^* \alpha, [\partial B] \rangle$ . Homologisch ausgedrückt wird dies zu

$$\varepsilon_* \alpha \cdot \varepsilon_* \beta = \alpha \cdot \beta.$$

Damit folgen nun als Korollar aus Theorem 4.1:

**Notiz 5.5.** Im Fall r = 1 ist  $\varepsilon_* = Id$ , also V = 0. Für r = 2 ist  $Q \equiv 0$ ,  $da \ \eta \cdot \varepsilon_* \eta = \varepsilon_* \eta \cdot \varepsilon_*^2 \eta = \varepsilon_* \eta \cdot \eta = 0$  wegen der Schiefsymmetrie und  $\varepsilon_*^2 = Id$ . Insbesondere ist in beiden Fällen  $\sigma(B, \phi) = 0$ .

**Notiz 5.6.** Für r = 3 ist  $\alpha \cdot \varepsilon_* \alpha = \varepsilon_* \eta \cdot \varepsilon_*^2 \eta - \eta \cdot \varepsilon_*^2 \eta - \varepsilon_* \eta \cdot \varepsilon_* \eta + \eta \cdot \varepsilon_* \eta = 3Q(\alpha)$  und für r = 4 ist  $\alpha \cdot \varepsilon_* \alpha = 2Q(\alpha) - \eta \cdot \varepsilon_*^2 \eta = 2Q(\alpha)$ , da  $\eta \cdot \varepsilon_*^2 \eta = \varepsilon_*^2 \eta \cdot \varepsilon_*^4 \eta = \varepsilon_*^2 \eta \cdot \eta = 0$ . Damit kann man in beiden Fällen die (einfachere) quadratische Form

$$Q: V \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \alpha \cdot \varepsilon_* \alpha$$

anstelle von Q verwenden, da sign  $Q = \text{sign } \tilde{Q}$ .

Kommen wir nun zu den aus der Literatur bekannten Fällen, die durch das Theorem verallgemeinert werden. Zuerst der Satz von Cappell, Lee und Miller aus [3] (Seite 178f.):

**Satz 5.7 (CLM).** Sei C eine geschlossene orientierte (4k-2)-dimensionale Mannigfaltigkeit und seien  $B_i$ , i = 1, 2, 3, kompakte orientierte (4k-1)-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit  $\partial B_i = C$ . Bilde

$$U := C \times D^2 \cup_{C \times W_3} -(\coprod B_i \times I),$$

die sogenannte Zinken-Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$\sigma(U) = \tau_{H_{2k-1}(C)}(L_1, L_2, L_3)$$

 $mit L_i := \ker(H_{2k-1}(C) \to H_{2k-1}(B_i)).$ 

Beweis. Hier liegt die Situation des Theorems vor: Setze  $B := B_1 + B_2 + B_3$ und  $\phi^3$  als die zyklische Permutation der Ränder. Dann ist  $E = \partial B \times_{\mathbb{Z}_3} D^2 = C \times D^2$  und das hier definierte U stimmt mit dem aus Theorem 4.1 überein. Ferner ist  $V_{CLM} = \ker(H_{2k-1}(\partial B) \to H_{2k-1}(B)) \cap \ker p_* = V$  und  $Q_{CLM} = \varepsilon_* \alpha \cdot \alpha$ . Nach Notiz 5.6 haben  $Q_{CLM}$  und Q entgegengesetzte Signatur. Nach Theorem 4.1 und Beispiel 5.2 ist also  $\sigma(U) = \operatorname{sign}(Q) = -\operatorname{sign}(Q_{CLM}) = \tau_{H_{2k-1}(C)}(L_1, L_2, L_3).$ 

Nun [3] folgend erhält man noch das klassische Wall-Resultat aus [13]. Bereits hier hat sich in [3] ein Vorzeichenfehler eingeschlichen (siehe [3], S. 180).

**Satz 5.8 (Wall).** Seien M, M' kompakte orientierte 4k-dimensionale Mannigfaltigkeiten, deren Ränder sich wie folgt darstellen lassen:

$$\partial M = X_1 \cup_C -X_2, \partial M' = X_2 \cup_C -X_3,$$

mit kompakten volldimensionalen Untermannifaltigkeiten  $X_i$ , i = 1, 2, 3, der Ränder und  $C = \partial X_i$  eine (4k - 2)-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit. Setze  $N := M \cup_{-X_2} M'$ . Dann gilt

$$\sigma(N) = \sigma(M) + \sigma(M') - \tau_V(L_1, L_2, L_3),$$

wobei  $V := H_{2k-1}(C)$  und  $L_i := \ker(H_{2k-1}(C) \to H_{2k-1}(X_i))$  lagrangesche Unterräume darin.

Beweis. Wende obigen Satz 5.7 auf C und  $B_i := X_{4-i}$  an und erhalte so eine Mannigfaltigkeit U mit  $\sigma(U) = \tau_V(L_3, L_2, L_1)$ . (Beachte, dass die Reihenfolge der lagrangeschen Unterräume durch die Reihenfolge des "Anstoßens" der  $B_i$ an  $C \times D^2$  gemäß dessen Orientierung festgelegt ist. Siehe auch Abbildung 3.)

Diese kann nun in die Verdoppelung  $\tilde{N} := N \cup_{\partial N} - N$  von N eingebettet werden, so dass die "Seele"  $X_1 \cup X_2 \cup X_3$  identisch auf sich selbst abgebildet wird. Zerschneide nun  $\tilde{N}$  längs  $\partial U$  in vier Teile, die offenbar homotopieäquivalent zu -N, M, M' und U sind. Da  $\sigma(\tilde{N}) = \sigma(N \cup_{\partial N} - N) = \sigma(N) - \sigma(N) = 0$  ist, erhält man also nach Novikov (2.9) (und mit Eigenschaft (I) des Maslov-Index)

$$\sigma(N) = \sigma(M) + \sigma(M') + \sigma(U)$$
  
=  $\sigma(M) + \sigma(M') - \tau_V(L_1, L_2, L_3),$ 

was zu zeigen war.

		L

### 5 Erste Korollare



Abbildung 3: Zur Anwendung von 5.7 auf die Wall-Situation

## 5.3 r-Zinken-Mannigfaltigkeiten

Die Arbeit [3] schreitet nun zu allgemeineren Objekten voran, indem sie r-Zinken-Mannigfaltigkeiten betrachtet, d.h. statt nur drei Mannigfaltigkeiten  $B_i$  hat man nun r solche und wiederholt obige Konstruktion damit. Es ist klar, dass damit der Gültigkeitsbereich von Theorem 4.1 nicht verlassen wird. Doch folgen wir zuerst noch der zitierten Arbeit:

**Lemma 5.9.** Seien  $B_i$ , i = 1, ..., r, kompakte orientierte (4k - 1)-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand  $\partial B_i = C$ . Bilde damit die r-Zinken-Mannigfaltigkeit

$$U := C \times D^2 \cup_{C \times W_r} -(\coprod B_i \times I).$$

Dann ist

$$\sigma(U) = \sum_{j=2}^{r-1} \tau_V(L_1, L_j, L_{j+1})$$

mit  $V := H_{2k-1}(C)$  und  $L_i := \ker(H_{2k-1}(C) \to H_{2k-1}(B_i)).$ 

Beweis. Zerschneide U in r-2 Teile, die jeweils zu einer 3-Zinken-Mannigfaltigkeit homotopieäquivalent sind, wie in Abbildung 4 angedeutet. Dann ist mit der Novikovschen Additivität und Satz 5.7 die Behauptung klar.



Abbildung 4: Zerschneiden einer r-Zinken-Mannigfaltigkeit in 3-Zinken-Mannigfaltigkeiten

In [3] wird im Anschluß daran (S. 182) behauptet, dass diese r-Zinken-Mannigfaltigkeit U die Signatur der quadratischen Form

$$Q(\alpha) := \alpha \cdot \varepsilon_* \alpha$$

auf  $\tilde{V} := \{ \alpha \in L_1 \oplus \ldots \oplus L_r | \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 0 \}$  hat. Weiter wird sogar behauptet, dass folgende Formel immer (d.h. für alle symplektischen Vektorräume V mit lagrangeschen Unterräumen  $L_1, \ldots, L_r$ ) gilt:

$$\sum_{j=2}^{r-1} \tau_V(L_1, L_j, L_{j+1}) = \operatorname{sign} \tilde{Q}.$$

(Im obigen "geometrischen" Kontext würde dies natürlich aus der eben genannten Behauptung und Lemma 5.9 folgen.)

Beide Behauptungen sind jedoch für  $r \ge 5$  im Allgemeinen falsch! Ich will hier ein Gegenbeispiel für r = 5 angeben. (Beachte, dass sie für r < 5 nach den Notizen 5.5, 5.6 wahr sind. Dies beweist man im noch ausstehenden Fall r = 4 wie in Satz 5.7.)

Beispiel 5.10 (Schnittform auf dem Torus und Volltori). Sei  $T = S^1 \times S^1$  der Torus. Dann ist nach der Künneth-Formel

$$H_1(T) \cong (H_1(S^1) \otimes H_0(S^1)) \oplus (H_0(S^1) \otimes H_1(S^1)) \cong \mathbb{R}^2$$

#### 5 Erste Korollare

mit Basis  $(e_1 = [S^1] \times 1, e_2 = 1 \times [S^1])$ . Dabei ist  $e_1 \cdot e_2 = 1$  und es ergibt sich daher die Schnittform als

$$(a,b) \cdot (c,d) = \det \left( \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) = ad - bc.$$

Sei  $V = S^1 \times D^2$  ein Volltorus, d.h. insbesondere ein Nullbordismus von T. Schreibt man  $T = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ , so sieht man sofort, dass  $SL(2, \mathbb{Z})$  auf T operiert und man kann zu  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ 

$$V_A := T \cup_A V$$

bilden. (Beachte hierzu auch [4], Abschnitt VIII.11.7 über Dehn-Chirurgie.) Dies ist ebenfalls ein Volltorus und

$$H_1(V_A) = H_1(V) \cong H_1(S^1) \otimes H_0(D^2) \cong \mathbb{R}$$

mit Basis  $[S^1] \times 1$ . Somit erhält man  $L := \ker(H_1(T) \to H_1(V_A))$  als (schreibe  $A = (a_{ij})$ )

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a_{11}x + a_{12}y = 0\} = \mathbb{R}(a_{12}, -a_{11}),$$

denn

$$e_{1} = [S^{1}] \times 1 \quad \mapsto \quad a_{11}[S^{1}] \times 1 + a_{21}1 \times [S^{1}] \quad \mapsto \quad a_{11}, \\ e_{2} = 1 \times [S^{1}] \quad \mapsto \quad a_{12}[S^{1}] \times 1 + a_{22}1 \times [S^{1}] \quad \mapsto \quad a_{12}.$$

Beachte, dass sich so jeder lagrangesche Unterraum  $\mathbb{R}(a_{12}, -a_{11})$  mit teilerfremden  $(a_{11}, a_{12})$  realisieren lässt. (Die Bedingung für  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  ist nur  $1 = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , was bei ggT $(a_{11}, a_{12}) = 1$  immer möglich ist.)

Beispiel 5.11 (Gegenbeispiel). Sei  $V = \mathbb{R}^2$  mit der üblichen symplektischen Struktur. Seien

$$L_1 = L_5 = \mathbb{R}(1,0), L_2 = \mathbb{R}(1,1), L_3 = \mathbb{R}(0,1), L_4 = \mathbb{R}(1,-1)$$

die lagrangeschen Unterräume. Dann ist

$$\tilde{V} = \{((x,0), (y,y), (0,z), (y+z, -y-z), (-x-2y-z, 0)) | (x,y,z) \in \mathbb{R}\}$$

und

$$\tilde{Q}(x, y, z) = -xy - yz + yz + z^{2} + xy + xz + 2y^{2} + 2yz + yz + z^{2}$$
  
=  $xz + 2y^{2} + 3yz + 2z^{2}$ .

Daher hat  $\tilde{Q}$  bezüglich dieser Darstellung von  $\tilde{V}$  die Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 2 \end{array}\right),$$

deren Signatur 1 ist. Berechnet man jedoch Summe der Maslov-Indices, so erhält man 2, da  $\tau_V(L_1, L_2, L_3) = 1$  nach (IV) und auch  $\tau_V(L_1, L_3, L_4) =$  $\tau_V(L_3, L_4, L_1) = 1$ , denn durch Drehung um  $-\frac{\pi}{2}$  wird dies in die Situation von (IV) überführt (verwende (III)). Der letzte Maslov-Index ist Null, da zwei gleiche lagrangesche Unterräume auftreten (nach (I)). Damit ist ein Gegenbeispiel zur allgemeinen Behauptung gefunden, das nach Beispiel 5.10 auch ein Gegenbeispiel zur (spezielleren) geometrischen Behauptung ist.

**Beispiel 5.12.** Anhand dieses Beispiels 5.11 soll nun einmal die  $\sigma$ -Invariante mithilfe von Theorem 4.1 berechnet werden. Zuerst benötigen wir zu jedem  $\alpha \in \tilde{V}$  ein Urbild  $\eta \in V^5 = (\mathbb{R}^2)^5$  unter der Abbildung  $\varepsilon_* - Id$ , d.h.

$$\alpha_i = \eta_{i-1} - \eta_i, i = 1, \dots, 5$$

(wobei  $\eta_0 := \eta_5$ ). Wähle etwa  $\eta_5 = 0$ , dann sind

$$\eta_4 = \alpha_5,$$
  

$$\eta_3 = \alpha_4 + \alpha_5,$$
  

$$\eta_2 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = -(\alpha_1 + \alpha_2),$$
  

$$\eta_1 = -\alpha_1.$$

Damit ist

$$Q(\alpha) = \eta \cdot \varepsilon_* \eta = \eta_1 \cdot \eta_5 + \ldots + \eta_5 \cdot \eta_4$$
  
=  $\alpha_2 \cdot \alpha_1 + \alpha_1 \cdot \alpha_4 + \alpha_1 \cdot \alpha_5 + \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \alpha_2 \cdot \alpha_5 + \alpha_5 \cdot \alpha_4$ 

und setzt man die Basis aus 5.11 ein, so erhält man

$$Q(x, y, z) = -xy - xy - xz - y^{2} - yz - y^{2} - yz + xy + 2y^{2} + yz + xy + xz + 2y^{2} + 2yz + yz + z^{2} = 2y^{2} + 2yz + z^{2},$$

also die Matrix

$$\left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Somit ist die  $\sigma$ -Ivariante hier 2, wie auch schon in 5.11 auf anderem Wege gezeigt wurde.

#### 5 Erste Korollare

**Bemerkung 5.13.** Hier wurden die Volltori "verdreht" in den Torus T eingeklebt und die Operation einfach als die zyklische Vertauschung realisiert. Genauso gut könnte man als Mannigfaltigkeit fünf Kopien des Standardvolltorus verwenden und die Aktion durch Elemente aus  $SL(2, \mathbb{Z})$  verkomplizieren. Diese Sichtweise ist völlig gleichwertig, nur wäre es dann kein Gegenbeispiel mehr zur Behauptung aus [3].

Nimmt man jedoch einmal diesen anderen Standpunkt ein, so erkennt man, dass die  $\sigma$ -Invariante hier zwei freie orientierungserhaltende  $\mathbb{Z}_5$ -Operationen auf der fünffachen Kopie des Voltorus unterscheiden kann: Nämlich die eben beschriebene und die zyklische Vertauchung. Bei dieser ist die  $\sigma$ -Invariante offensichtlicherweise Null.

**Bemerkung 5.14.** Sei V ein symplektischer Vektorraum,  $L_1, \ldots, L_r \subset V$  lagrangesche Unterräume. Definiere

$$V := \{ \alpha \in L_1 \oplus \ldots \oplus L_r | \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = 0 \}.$$

Sei  $\varepsilon_* : V^r \to V^r, (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \mapsto (\alpha_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$ . Dann ist  $\tilde{V} = \operatorname{im}(\varepsilon_* - Id_{V^r}) \cap L_1 \oplus \ldots \oplus L_r$ . Setze

$$Q: \tilde{V} \to \mathbb{R}, \alpha = \varepsilon_* \eta - \eta \mapsto \eta \cdot \varepsilon_* \eta.$$

Dann sollte gelten

$$sign(Q) = \sum_{j=2}^{r-1} \tau_V(L_1, L_j, L_{j+1}).$$

Im geometrischen Kontext folgt dies unmittelbar aus Theorem 4.1 und Lemma 5.9. Im Allgemeinen will ich dies als naheliegende Vermutung so stehen lassen.

## 6 Eigenschaften, Spezialfälle und offene Fragen

## 6.1 Einfache Eigenschaften

Trivialerweise gelten:

**Notiz 6.1.** Sind  $(B_1^{4k-1}, \phi_1^r), (B_2^{4k-1}, \phi_2^r)$  Auflösungsmannigfaltigkeiten, so ist auch  $(B_1 + B_2, \phi_1 + \phi_2)$  eine solche und es gilt

 $\sigma(B_1 + B_2, \phi_1 + \phi_2) = \sigma(B_1, \phi_1) + \sigma(B_2, \phi_2).$ 

Lemma 6.2 (Produkt mit geschlossener Mannigfaltigkeit). Sei  $X^{4l}$  eine geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit und  $(B, \phi)$  eine Auflösungsmannigfaltigkeit. Dann ist auch  $(B \times X, \phi \times Id)$  eine Auflösungsmannigfaltigkeit und es gilt

$$\sigma(B \times X, \phi \times Id) = \sigma(B, \phi) \cdot \sigma(X).$$

Beweis. Verfolgt man die Konstruktion aus Abschnitt 4.1, so sieht man, dass alle Objekte einfach mit X multipliziert werden und man so schließlich  $U \times X$  erhält, woraus die Behauptung sofort mit der Produktformel der Signatur (2.6) folgt.

Kommen wir nun zu Surgery im Inneren: Sei  $(B_0, \phi)$  eine Auflösungsmannigfaltigkeit der Dimension 4k - 1 und  $\iota : S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell} \hookrightarrow B_0 \setminus \partial B_0$  eine orientierungserhaltende Einbettung  $(\ell \in \{1, \ldots, 4k - 1\})$ . Setze

$$B_1 := B_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell}) \cup_{\iota} (D^\ell \times S^{4k-\ell-1}).$$

Man sagt  $B_1$  geht aus  $B_0$  durch  $\ell$ -Surgery im Inneren hervor. (Orientiere  $B_1$  so, dass die Orientierung auf  $B_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell})$  mit der von  $B_0$  herkommenden Orientierung übereinstimmt.) Dann ist  $(B_1, \phi)$  wieder eine Auflösungsmannigfaltigkeit. Zur Anwendung von Theorem 4.1 beachte, dass die  $\mathbb{Z}_r$ -Aktion  $\phi$ , der Rand  $\partial B_0 = \partial B_1$  und somit auch der Quotient  $\partial B_0 / \phi = \partial B_1 / \phi$ gleich bleiben. Es ändert sich also höchstens  $H_{2k-1}(B_0)$  zu  $H_{2k-1}(B_1)$ . Hierzu betrachte die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-1})$$
  

$$\to H_{2k-1}(B_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell})) \oplus H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell})$$
  

$$\to H_{2k-1}(B_0) \xrightarrow{\Delta} H_{2k-2}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-1}).$$

Darin sind

$$\begin{aligned} H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-1}) &= 0 \ \text{für } \ell \neq 2k, \\ H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell}) &= 0 \ \text{für } \ell \neq 2k, \\ H_{2k-2}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-1}) &= 0 \ \text{für } \ell \neq 2k \pm 1, k \neq 1. \end{aligned}$$

Für k = 1 beachte, dass hier  $\ell \neq 2k, 2k \pm 1$  schon alle Fälle von  $\ell$  ausschließt. Damit gilt für  $\ell \neq 2k, 2k \pm 1$  und alle  $k \in \mathbb{N}$ 

$$H_{2k-1}(B_0) \cong H_{2k-1}(B_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell})).$$

Die Sequenz des Mayer-Vietoris-Paares  $(B_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell}), D^{\ell} \times S^{4k-\ell-1})$ in  $B_1$  unterscheidet sich von obiger Sequenz nur im zweiten Summanden der mittleren Zeile, der hier zu  $H_{2k-1}(D^{\ell} \times S^{4k-\ell-1})$  wird. Aber das ist Null für  $\ell \neq 2k$ . Also ist

$$H_{2k-1}(B_1) \cong H_{2k-1}(B_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell})) \cong H_{2k-1}(B_0)$$

für  $\ell \neq 2k, 2k \pm 1$ . Damit folgt

$$\sigma(B_0,\phi) = \sigma(B_1,\phi)$$

in diesem Fall. Dieses Ergebnis kann unter Ausnutzung des Wall-Satzes 5.8 noch verbessert werden:

Lemma 6.3 (Invarianz unter Surgery). In obiger Situation gilt

$$\sigma(B_0,\phi) = \sigma(B_1,\phi)$$

sogar für  $\ell \neq 2k$ .

Beweis. Bezeichnen  $U_0, U_1$  die aus  $B_0, B_1$  konstruierten Mannigfaltigkeiten, so ist offenbar

$$U_1 = U_0 \setminus \iota \times Id(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell} \times I) \cup_{\iota \times Id} (D^\ell \times S^{4k-\ell-1} \times I).$$

Nach Wall 5.8 ist

$$\sigma(U_0) = \sigma(U_0 \setminus \iota \times Id(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell} \times I)) + \sigma(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell} \times I) - \tau,$$

wobei  $\sigma(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell} \times I) = 0$  nach der Produktformel 2.6 und  $\tau$  der entsprechende Maslov-Index. Bei diesem ist der grundlegende Vektorraum  $V = H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-1} \times \partial I) \cong \bigoplus_{\pm} \bigoplus_{s=0}^{2k-1} H_s(S^{\ell-1}) \otimes H_{2k-1-s}(S^{4k-\ell-1})$ . Dies ist Null für  $\ell \neq 2k$ . Also ist  $\sigma(U_0) = \sigma(U_0 \setminus \iota \times Id(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell} \times I))$ . Analog zeigt man  $\sigma(U_1) = \sigma(U_0 \setminus \iota \times Id(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell} \times I))$ , womit die Behauptung gezeigt ist. Korollar 6.4 (Invarianz unter zusammenhängender Summe). Sind  $(B_1, \phi_1^r)$  und  $(B_2, \phi_2^r)$  zwei Auflösungsmannigfaltigkeiten gleicher Dimension, so ist die zusammenhängende Summe im Inneren  $B_1 \# B_2$  mit  $\phi_1 + \phi_2$  wieder eine Auflösungsmannigfaltigkeit und für die  $\sigma$ -Invarianten gilt:

$$\sigma(B_1 \# B_2, \phi_1 + \phi_2) = \sigma(B_1, \phi_1) + \sigma(B_2, \phi_2).$$

Beweis. Die zusammenhängende Summe ist nichts weiter als 1-Surgery auf  $B_1 + B_2$  angewandt.

Hiermit kann das Beispiel aus Abschnitt 5.3 weiter ausgebaut werden zu einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit, deren Rand aus fünf Kopien des Torus besteht.

Als letzte Konstruktion, die in diesem Abschnitt betrachtet werden soll, kommen wir nun zum äquivarianten Anheften von Henkeln: Sei wieder  $(B_0, \phi_0)$  eine (4k-1)-dimensionale Auflösungsmannigfaltigkeit und  $(\ell \in \{0, \ldots, 4k-1\})$ 

$$\iota: S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1} \times \mathbb{Z}_r \hookrightarrow \partial B_0$$

eine äquivariante orientierungserhaltende Einbettung. Setze nun <br/> rStück $\ell\text{-}$ Henkel an:

$$B_1 := B_0 \cup_{\iota} (D^{\ell} \times D^{4k-\ell-1} \times \mathbb{Z}_r).$$

(Wieder sei  $B_1$  so orientiert, dass die Orientierung auf  $B_0 \subset B_1$  mit der ursprünglichen übereinstimmt.) Der Rand  $\partial B_1$  erbt eine freie orientierungserhaltende  $\mathbb{Z}_r$ -Aktion  $\phi_1$ , also ist  $(B_1, \phi_1)$  wieder eine Auflösungsmannigfaltigkeit.

Beachte, dass  $\partial B_1$  durch äquivariante  $\ell$ -Surgery aus  $\partial B_0$  hervorgeht, ebenso wie  $C_1 = \partial B_1 / \mathbb{Z}_r$  aus  $C_0 = \partial B_0 / \mathbb{Z}_r$  durch "normale"  $\ell$ -Surgery entsteht.

Betrachte also man die Mayer-Vietoris-Sequenz des Paares  $(C_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1}), S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1})$  in  $C_0$ :

$$H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-2})$$
  

$$\to H_{2k-1}(C_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell-1})) \oplus H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1})$$
  

$$\to H_{2k-1}(C_0) \xrightarrow{\Delta} H_{2k-2}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-2}).$$

Darin sind

$$H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-2}), H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1}), H_{2k-2}(S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-2})$$

Null für  $\ell \neq 2k, 2k-1$  bzw.  $\ell \neq 2k$  bzw.  $\ell \neq 2k, 2k-1$  und  $k \neq 1$ . Für k = 1 sind jedoch  $\ell = 1, 2$  durch  $\ell \neq 2k, 2k-1$  ausgeschlossen und für  $\ell = 0, 3$  ist  $S^{\ell-1} \times S^{4k-\ell-2} = \emptyset$ , es ist also

$$H_{2k-1}(C_0) \cong H_{2k-1}(C_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell-1}))$$

für  $\ell \neq 2k, 2k - 1$ . Betrachtet man weiter die Mayer-Vietoris-Sequenz von  $(C_0 \setminus \iota(S^{\ell-1} \times \mathring{D}^{4k-\ell-1}), D^{\ell} \times S^{4k-\ell-2})$  in  $C_1$ , so erhält man schließlich

$$H_{2k-1}(C_0) \cong H_{2k-1}(C_1).$$

Völlig analog findet man  $H_{2k-1}(\partial B_0) \cong H_{2k-1}(\partial B_1)$ .

Bleiben also noch  $B_0, B_1$  zu untersuchen: Betrachte hierzu die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1} \times \mathbb{Z}_r)$$
  

$$\to H_{2k-1}(B_0) \oplus H_{2k-1}(D^{\ell} \times D^{4k-\ell-1} \times \mathbb{Z}_r)$$
  

$$\to H_{2k-1}(B_1) \xrightarrow{\Delta} H_{2k-2}(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1} \times \mathbb{Z}_r)$$

Darin ist in jedem Fall  $H_{2k-1}(D^{\ell} \times D^{4k-\ell-1} \times \mathbb{Z}_r) = 0$  und  $H_{2k-1}(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1} \times \mathbb{Z}_r) = 0$  für  $\ell \neq 2k$  und  $H_{2k-2}(S^{\ell-1} \times D^{4k-\ell-1} \times \mathbb{Z}_r) = 0$  für  $\ell \neq 2k-1$ . Man erhält also

$$H_{2k-1}(B_0) \cong H_{2k-1}(B_1)$$

für  $\ell \neq 2k, 2k-1$ .

Da alle diese Isomorphismen mit den entsprechenden Abbildungen verträglich sind, erhält man mit Theorem 4.1:

Lemma 6.5 (Invarianz unter äquivariantem Henkelanheften). In obiger Situation gilt für  $\ell \neq 2k, 2k-1$ 

$$\sigma(B_0,\phi_0) = \sigma(B_1,\phi_1).$$

### 6.2 Der Spezialfall r = 3, 4

In Notiz 5.5 sahen wir bereits, dass für r = 1, 2 die  $\sigma$ -Invariante immer verschwindet. Für die nächsteinfachen beiden Fälle r = 3, 4 kann man gemäß Notiz 5.6 statt Q die einfachere quadratische Form

$$\hat{Q}: V \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \alpha \cdot \varepsilon_* \alpha$$

verwenden:  $\sigma(B, \phi) = \operatorname{sign}(\tilde{Q})$ . Im nächsten Lemma sei r = 3, 4.

**Lemma 6.6.** Lässt sich  $\varepsilon : \partial B \to \partial B$  auf B fortsetzen zu  $\varepsilon : B \to B$ , so gilt  $\sigma(B, \phi) = 0$ . Dies ist insbesondere der Fall, wenn die ganze  $\mathbb{Z}_r$ -Aktion  $\phi$  auf B fortsetzbar ist.

Beweis. Es kommutiert

$$\begin{array}{c} H_{2k-1}(\partial B) \xrightarrow{\varepsilon_{*}} H_{2k-1}(\partial B) \\ \downarrow \\ \downarrow \\ H_{2k-1}(B) \xrightarrow{\varepsilon_{*}} H_{2k-1}(B), \end{array}$$

also ist mit  $\alpha \in L = \ker(H_{2k-1}(\partial B) \to H_{2k-1}(B))$  auch  $\varepsilon_* \alpha \in L$  und damit ist  $\tilde{Q} \equiv 0$ .

## 6.3 Offene Fragen und Ausblick

Einige interessante Fragestellungen mussten bis jetzt offen bleiben. Dies ist einerseits, ob sich aus der Fortsetzbarkeit der Aktion  $\phi$  (oder zumindest von  $\varepsilon$ ) auf ganz *B* etwas schließen lässt. Für die Fälle  $r \leq 4$  haben wir gesehen, dass dann  $\sigma(B, \phi) = 0$  ist. Ob sich diese Erkenntnis auf höhere *r* ausweiten lässt ist noch unklar.

Das zweite offene Problem ist vielleicht interessanter: Was passiert in der mittleren Dimension bei Surgery (l = 2k)? Ist die  $\sigma$ -Invariante hier ebenfalls invariant oder aber kommt ein Korrekturterm ins Spiel, der vielleicht wiederum für sich interessant wäre?

Ein ebensolches Interesse kommt den Ausnahmen des Lemmas 6.5 entgegen und in beiden Fällen stellt sich, die Frage, ob ein geeigneter Bordismusbegriff existiert, so dass die  $\sigma$ -Invariante bordismusinvariant wird.

Außerdem bleiben natürlich noch unzählige weitere Probleme offen, wie zum Beispiel die Frage nach der Verträglichkeit mit allgemeinerer Produktbildung. Etwa Produkte mit berandeten Mannigfaltigkeiten oder Produkte von Auflösungsmannigfaltigkeiten. (In beiden Fällen muss  $\phi$  auf *B* fortsetzbar sein.)

Nicht unerwähnt bleiben soll auch die linear-algebraische Behauptung aus Bemerkung 5.14, deren Beweis mit den Mitteln aus [3] zu führen sein sollte, die aber nicht in den Rahmen dieser Arbeit passte.

## Anhang: Einige Formeln

Hier in diesem Anhang sind noch kurz einige öfter benutzte Formeln und Tatsachen zusammengestellt. Es ist alles Standardmaterial der algebraischen Topologie und kann beim Lesen weggelassen und nur zum Nachschlagen benutzt werden. Die verwendeten Quellen sind [4], [7], [9] und [12]. Dabei wurde auf die Unterschiede in den Vorzeichenkonventionen der verschiedenen Autoren Rücksicht genommen.

**Cap-Produkt.** Sei X ein topologischer Raum und (A, B) ein Mayer-Vietoris-Paar darin. Das heißt  $A, B \subset X$  und es gilt beispielsweise, um nur eine der vielen äquivalenten Definitionen zu nennen, dass die von der Inklusion induzierten Abbildungen  $H_n(B, A \cap B) \to H_n(A \cup B, A)$  für alle natürlichen Zahlen *n* Isomorphismen sind. Dann existieren insbesondere die bekannten Mayer-Vietoris-Sequenzen von (A, B). Das Cap-Produkt ist eine lineare Abbildung

$$H^k(X,A) \otimes H_n(X,A \cup B) \to H_{n-k}(X,B), x \otimes y \mapsto x \frown y$$

und hat folgende Eigenschaften:

1. Ist  $f : (X; A, B) \to (X'; A', B')$  stetig und sind  $x' \in H^k(X', A'), y \in H_n(X, A \cup B)$ , so gilt

$$f_*(f^*x' \frown y) = x' \frown f_*y. \tag{CAP-1}$$

2. Ist  $x \in H^k(X, A), y \in H_n(X, A \cup B)$ , dann gilt

$$\partial(x \frown y) = j^* x \frown \partial' y, \qquad (CAP-2)$$

wobei  $\partial : H_{n-k}(X, B) \to H_{n-k-1}(B)$  der herkömmliche Randoperator,  $j^* : H^k(X, A) \to H^k(B, A \cap B)$  durch die Inklusion induziert und  $\partial' :$  $H_n(X, A \cup B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cup B, A) \cong H_{n-1}(B, A \cap B)$  ist.

3. Ist  $x \in H^k(A), y \in H_n(X, A \cup B)$ , dann gilt

$$\delta x \frown y = (-1)^{|x|+1} j_*(x \frown \partial' y), \qquad (CAP-3)$$

wobei  $\delta : H^k(A) \to H^{k+1}(X, A), j_* : H_{n-k-1}(A, A \cap B) \to H_{n-k-1}(X, B)$ durch die Inklusion induziert und  $\partial' : H_n(X, A \cup B) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A \cup B, B) \cong$  $H_{n-1}(A, A \cap B)$  ist. **Cup-Produkt.** Ist (X; A, B) wie oben, so ist das Cup-Produkt eine lineare Abbildung

$$H^k(X,A) \otimes H^n(X,B) \to H^{k+n}(X,A \cup B), x \otimes y \mapsto x \smile y$$

Für stetige Abbildungen  $f: (X; A, B) \to (X'; A', B')$  gilt folgende Verträglichkeit:

$$f^*(x \smile y) = f^*x \smile f^*y. \tag{CUP-1}$$

Außerdem ist das Cup-Produkt graduiert kommutativ, d.h.

$$x \smile y = (-1)^{|x||y|} y \smile x. \tag{CUP-2}$$

Auswertungsabbildung. Eine Kohomologieklasse wird durch eine lineare Abbildung vom Raum der singulären Ketten nach  $\mathbb{R}$  repräsentiert, eine Homologieklasse durch eine solche singuläre Kette. Man kann also die eine auf die andere anwenden. Dies induziert die sogenannte Auswertungs- oder Evaluationsabbildung (auch Skalarprodukt genannt)

$$H^n(X, A) \otimes H_n(X, A) \to \mathbb{R}, x \otimes y \mapsto \langle x, y \rangle.$$

Diese Abbildung ist linear und erfüllt folgende drei Formeln:

1. Ist  $f: (X, A) \to (X', A')$  stetig, so gilt

$$\langle f^*x, y \rangle = \langle x, f_*y \rangle$$
 (EVAL-1)

für  $x \in H^n(X', A'), y \in H_n(X, A)$ .

2. Ist  $x \in H^{n-1}(A), y \in H_n(X, A)$ , so gilt

$$\langle \delta x, y \rangle = \langle x, \partial y \rangle.$$
 (EVAL-2)

3. Sind  $x \in H^k(X, A), y \in H^n(X, B)$  und  $z \in H_{k+n}(X, A \cup B)$ , so gilt

$$\langle x \smile y, z \rangle = \langle x, y \frown z \rangle.$$
 (EVAL-3)

**Spezielles Koeffiziententheorem.** Was hier unter diesem Namen verstanden werden soll, ist ein Korollar des bekannten universellen Koeffiziententheorems, daher der eigenwillige Name. Da das universelle Koeffiziententheorem hier jedoch nicht auftaucht, will ich dieses Korollar auch einfach als *Koeffiziententheorem* bezeichnen. Genauer gesagt sogar den Isomorphismus, der darin auftaucht. Es besagt, dass für topologische Paare (X, A) die Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} H^n(X,A) & \to & H_n(X,A)^*, \\ x & \mapsto & \langle x, \_ \rangle \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} H_n(X,A) & \to & H^n(X,A)^*, \\ & x & \mapsto & \langle\_,x\rangle \end{array}$$

Isomorphismen sind. (Beachte, dass die Koeffizienten aus  $\mathbb{R}$  sind.)

**Poincaré-Dualität.** Sei nun  $M^n$  eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit. Dann hat M eine Fundamentalklasse  $[M] \in H_n(M, \partial M)$ , d.h. für jeden Punkt  $p \in M \setminus \partial M$  ist ihr Bild in  $H_n(M, M \setminus p)$  die gewählte lokale Orientierung an diesem Punkt. Weiter hat man Isomorphismen

$$\begin{array}{rccc} H^k(M, \partial M) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-k}(M), \\ H^k(M) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-k}(M, \partial M), \end{array}$$

wobei beide Abbildungen durch  $x \mapsto x \frown [M]$  gegeben sind. Diesen Sachverhalt nennt man *Poincaré-Dualität*. Wie beim Koeffiziententheorem wird auch hier der Isomorphismus oft einfach Poincaré-Dualität genannt. Mit den angegebenen Formeln sieht man leicht, dass folgendes Diagramm kommutiert (beachte dabei noch, dass  $\partial[M] = [\partial M]$  gilt):

$$\begin{array}{cccc} H^{k-1}(\partial M) & \stackrel{\delta}{\longrightarrow} H^k(M, \partial M) & \stackrel{i^*}{\longrightarrow} H^k(M) & \stackrel{j^*}{\longrightarrow} H^k(\partial M) \\ & \cong & & \downarrow \frown [M] & \cong & \downarrow \frown [M] & \cong & \downarrow \frown [\partial M] \\ & & H_{n-k}(\partial M) & \stackrel{(-1)^k j_*}{\longrightarrow} H_{n-k}(M) & \stackrel{i_*}{\longrightarrow} H_{n-k}(M, \partial M) & \stackrel{\partial}{\longrightarrow} H_{n-k-1}(\partial M). \end{array}$$

**Kreuzprodukte.** Für die Produktformel der Signatur (2.6) werden die homologischen und kohomologischen Kreuzprodukte und die Künneth-Formel benötigt, weshalb sie hier kurz aufgeführt sind. Seien (X, A) und (Y, B) zwei Raumpaare, so dass  $(X \times B, A \times Y)$  ein Mayer-Vietoris-Paar in  $X \times Y$  ist. Man hat dann lineare Abbildungen

$$H_m(X,A) \otimes H_n(Y,B) \to H_{m+n}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y),$$
  
$$H^m(X,A) \otimes H^n(Y,B) \to H^{m+n}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y),$$

die beide als  $x \otimes y \mapsto x \times y$  geschrieben werden und Kreuzprodukt heißen. Von den zahlreichen Eigenschaften dieser Produkte interessieren uns nur zwei Verträglichkeiten: Seien  $x_i \in H^{m_i}(X, A_i), y_i \in H^{n_i}(Y, B_i), i = 1, 2$ , dann gilt

$$(x_1 \times y_1) \smile (x_2 \times y_2) = (-1)^{|y_1||x_2|} (x_1 \smile x_2) \times (y_1 \smile y_2).$$
 (KREUZ-1)

Sind  $x \in H^m(X, A), a \in H_s(X, A), y \in H^n(Y, B)$  und  $b \in H_t(Y, B)$  mit m + n = s + t, so gilt

$$\langle x \times y, a \times b \rangle = \begin{cases} \langle x, a \rangle \langle y, b \rangle & \text{für } m = s, n = t, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
(KREUZ-2)

**Künneth-Formel.** Sind (X, A), (Y, B) wie gerade eben, so definiert das Kreuzprodukt Isomorphismen

$$\begin{array}{ll} H_*(X,A) \otimes H_*(Y,B) & \xrightarrow{\times} & H_*(X \times Y, X \times B \cup A \times Y), \\ H^*(X,A) \otimes H^*(Y,B) & \xrightarrow{\times} & H^*(X \times Y, X \times B \cup A \times Y), \end{array}$$

sofern man im kohomologischen Fall voraussetzt, dass  $H_*(X, A)$  endlich erzeugt ist. (Dies wird hier immer der Fall sein, da die in Frage kommenden Räume jeweils Mannigfaltigkeiten sind.)

#### Literatur

## Literatur

Da ich aus den meisten der angegebenen Quellen nur einen kleinen Teil verwendet habe, wird dieser meist gesondert als kurzer Kommentar angemerkt.

- ATIYAH, M. F.; SINGER, I. M.: The index of elliptic operators: III. In: Ann. of Math. 87 (1968), S. 546–604. – Der Beweis der Novikovschen Additivität, S. 587-589.
- [2] BUNKE, U. : On the Gluing Problem for the  $\eta$ -invariant. In: J. Diff. Geom. 41 (1995), S. 397–448. Wird in der Einleitung kurz erwähnt.
- [3] CAPPELL, S. E.; LEE, R.; MILLER, E. Y.: On the Maslov Index. In: *Comm. Pure Appl. Math.* XLVII (1994), S. 121–186. – Die zitierten Resultate finden sich im Abschnitt 12, Formeln zum Maslov-Index auch zu Beginn des Abschnitts 8.
- [4] DIECK, T. tom: *Topologie*. 2. Auflage. de Gruyter, 2000
- [5] DOLD, A. : Lectures on Algebraic Topology. Springer, 1972. Nur wegen Vorzeichenkonvention hier aufgeführt.
- [6] HASSELL, A.; MAZZEO, R.; MELROSE, R. B.: A Signature Formula for Manifolds with Corners of Codimension two. In: *Topology* 36 (1997), Nr. 5, S. 1055–1075. – Wird in der Einleitung kurz erwähnt.
- [7] HATCHER, A. : Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002. – Hauptsächlich den Transfer-Homomorphismus auf den Seiten 321-322.
- [8] JÄNICH, K. : Charakterisierung der Signatur von Mannigfaltigkeiten durch eine Additivitätseigenschaft. In: *Invent. math.* 6 (1968), S. 35–40.
  – Eigentlich nur die erste Seite mit der Erweiterung des Novikovschen Resultats.
- [9] MILNOR, J. W.; STASHEFF, J. D.: Characteristic Classes. Princeton University Press, 1974 (Annals of Mathematics Studies 76). – Appendix A.
- [10] SPANIER, E. H.: Algebraic Topology. Springer, 1966, 1989. Nur wegen Vorzeichenkonvention hier aufgeführt.
- [11] STONG, R. E.: Notes on Cobordism Theory. Princeton University Press, 1968. – Den Abschnitt über die Signatur, S. 219-223.

- [12] STÖCKER, R. ; ZIESCHANG, H. : Algebraische Topologie. 2. Auflage. Teubner, 1994
- [13] WALL, C. T. C.: Non-Additivity of the Signature. In: Invent. math. 7 (1969), S. 269–274

## Stichwortverzeichnis

Die **fett** gedruckten Seitenzahlen beziehen sich auf die Definition des Eintrages, wogegen die normal gedruckten Seitenzahlen auf ein Auftreten des Stichwortes im laufenden Text hinweisen.

## |\_|, 11

Additivität der Signatur, 18 äquivariantes Henkelanheften, 52 Auflösungsmannigfaltigkeit, **32** Auswertungsabbildung, **56** 

Bordismus, **17** Bordismusinvarianz der Signatur, 17

Cap-Produkt, 31, 55 Cup-Produkt, 56

Einhängung, **26**, 29, 31 Evaluationsabbildung, **56** 

Fortsetzbarkeit, 54 Fundamentalklasse, **57** 

Grad |\_|, 11

I = [-1, 1], 11induzierende Abbildung, 35

Künneth-Formel, **58** Koeffiziententheorem, **57** Kreuzprodukt, **58** 

Maslov-Index, **41** Mayer-Vietoris-Paar, **55** Mayer-Vietoris-Randoperator, **26**, 27 Nicht-Additivität der Signatur, 24, 44 Poincaré-Dualität, 27, 29, **57** Produktformel der Signatur, 15 Schnittform, **12**, 12–15  $\sigma$ -Invariante, **33**, 34 Henkelanheften, 53 Produktformel, 50 Surgery, 51

zusammenhängende Summe, 52 Signatur, **15**, 15–17 Additivität, 18 Bordismusinvarianz, 17 Nicht-Additivität, 24, 44 Produktformel, 15 Skalarprodukt, **56** Spezielles Koeffiziententheorem, **57** Surgery, 50

Torus, 46 Transfer-Homomorphismus, **33** 

Volltorus, 46 Vorzeichenkonvention, 10

Zinken-Mannigfaltigkeit, 43, 45