Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3.

Von

N. Bruschlinsky in Moskau.

Einige der Homologie-Invarianten eines kompakten metrischen Raumes lassen sich, wie neuerdings gezeigt worden ist, durch Eigenschaften stetiger Abbildungen des Raumes charakterisieren: eine n-dimensionale kompakte Menge läßt sich dann und nur dann wesentlich auf die n-dimensionale Sphäre abbilden, wenn sie einen nicht berandenden n-dimensionalen Zyklus enthält[1]); die Anzahl der Abbildungsklassen eines n-dimensionalen Polyeders auf die n-dimensionale Sphäre ist unendlich, falls die n-te Bettische Zahl nicht Null ist, anderenfalls ist die Klassenanzahl gleich der Ordnung der $(n-1)$-ten Torsionsgruppe[2]). Beide Sätze gestatten somit, das Verschwinden oder Nichtverschwinden gewisser Bettischer Zahlen sowie die Ordnung gewisser Homologiegruppen aus Abbildungseigenschaften abzulesen. Es erhebt sich die Aufgabe, darüber hinaus auch den *Wert* Bettischer Zahlen und die *Struktur* von Bettischen und Torsionsgruppen in ähnlicher Weise zu charakterisieren.

Diese Aufgabe wird im folgenden für einige Spezialfälle gelöst, und zwar für: *die erste Bettische Gruppe*[3]) *eines beliebigen kompakten metrischen Raumes*; *die dritte Bettische Gruppe eines dreidimensionalen kompakten Raumes; die zweite Torsionsgruppe eines dreidimensionalen Polyeders.* Die Möglichkeit dieser gruppentheoretischen Untersuchung beruht auf der Tatsache, daß die Sphären S^1 und S^3 als *Gruppenräume* auftreten[4]).

1. M sei eine geschlossene Mannigfaltigkeit, deren Punkte eine stetige Gruppe bilden; diese Gruppe bezeichnen wir ebenfalls mit M. Es sei F

---

[1]) Alexandroff, Dimensionstheorie. Math. Annalen **106** (1932), 5. Hauptsatz.

[2]) H. Hopf, Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre, Comm. math. Helv. **5** (1932), Satz III.

[3]) Unter der Bettischen Gruppe eines Raumes F verstehen wir hier die duale Gruppe zur r-dimensionalen Zyklosis von L. Pontrjagin, Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze, Math. Annalen **105** (1931), insbesondere S. 198. Für einen Komplex stimmt diese Gruppe mit der freien oder reduzierten Bettischen Gruppe überein (vgl. Pontrjagin, a. a. O., S. 168—169).

[4]) Wir bemerken andererseits, daß in den von uns betrachteten Spezialfällen die Untersuchung der Menge aller Abbildungsklassen von F auf M auf das Studium der Homologie-Eigenschaften von F zurückgeführt wird.

ein beliebiger kompakter metrischer Raum. Sind f und g zwei eindeutige und stetige Abbildungen von F in M, so wird durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, wobei x die Punkte von F durchläuft und die Multiplikation die Gruppenoperation in M ist, ebenfalls eine eindeutige und stetige Abbildung von F in M erklärt; man erkennt ohne Mühe, daß die Abbildungen von F in M bezüglich dieser Multiplikation selbst eine Gruppe $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^*_M(F)$ bilden; das Einheitselement e von $\mathfrak{G}^*$ ist diejenige Abbildung, die den Raum F auf den Einheitspunkt von M abbildet. Ferner verifiziert man leicht: diejenigen Abbildungen, die zu derselben Abbildungsklasse wie e gehören, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}^*$; und: zwei Abbildungen f und g gehören dann und nur dann zu derselben Restklasse in bezug auf $\mathfrak{E}$, also zu demselben Element der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}^*}{\mathfrak{E}}$, wenn sie zu einer Abbildungsklasse gehören. Daher dürfen wir sagen: *die Abbildungsklassen von F in M bilden eine — mit $\frac{\mathfrak{G}^*}{\mathfrak{E}}$ isomorphe — Gruppe $\mathfrak{G}_M(F)$.* Ihr Einheitselement ist die Klasse $\mathfrak{E}$ der auf einen Punkt zusammenziehbaren Abbildungen.

Wir werden in dieser Arbeit unter M entweder die Kreislinie S^1, aufgefaßt als Gruppe ihrer Drehungen, oder die dreidimensionale Sphäre S^3, aufgefaßt als die von den Quaternionen des Betrages 1 gebildete multiplikative Gruppe (also eine Untergruppe der Drehungen der S^3), verstehen; die Gruppen $\mathfrak{G}_{S^1}(F)$ und $\mathfrak{G}_{S^3}(F)$ sind nach dem Vorstehenden für alle Räume F erklärt.

Verstehen wir unter $\mathfrak{B}^r(F)$ die r-te Bettische Gruppe von F [3]), unter $\mathfrak{T}^r(K)$ die r-te Torsionsgruppe des Komplexes K, so werden wir die folgenden Sätze beweisen:

Satz I: *Für jeden kompakten metrischen Raum F sind die Gruppen $\mathfrak{B}^1(F)$ und $\mathfrak{G}_{S^1}(F)$ einander isomorph.*

Satz II: *Für jeden dreidimensionalen kompakten metrischen Raum F^3 ist die Gruppe $\mathfrak{B}^3(F^3)$ mit der Faktorgruppe von $\mathfrak{G}_{S^3}(F^3)$ nach der von den Elementen endlicher Ordnung gebildeten Untergruppe $U_{S^3}(F^3)$ isomorph* [5]).

---

[5]) Die Gruppe $G_{S^3}(F^3)$ ist kommutativ. Im Falle, wenn F^3 ein Komplex ist, folgt dies aus dem Satze II'_k. Für den allgemeinen Fall ergibt sich die Behauptung aus dem Satz III unter Berücksichtigung der offensichtlichen Tatsache, daß die Limesgruppe einer direkten Homomorphismenfolge $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$ kommutativ ist, wenn die Gruppen G_m kommutativ sind. Deswegen bildet die Menge aller Elemente endlicher Ordnung von $G_{S^3}(F^3)$ die Untergruppe $U_{S^3}(F^3)$ von $G_{S^3}(F^3)$.

Da die Gruppen $G_{S^1}(F)$ und $G_{S^3}(F^3)$ kommutativ sind, so werden wir im folgenden diese Gruppen additiv schreiben.

Unter den Sätzen I_K und II_K werden wir die Sätze I und II verstehen, wenn man in ihnen F durch einen beliebigen Komplex K, bzw. F^3 durch einen dreidimensionalen Komplex K^3 ersetzt. Dann ist Satz II_K in dem folgenden schärferen Satz enthalten:

Satz II'_K: *Für jeden dreidimensionalen Komplex K^3 ist $\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)$ mit der direkten Summe $\mathfrak{B}^3(K^3) + \mathfrak{T}^2(K^3)$ isomorph.*

Wir werden zunächst die Sätze I_K und II'_K und dann durch Grenzübergang die Sätze I und II beweisen[6]).

2. Beweis des Satzes I_K: Unter einem „Charakter" einer Gruppe $\mathfrak{A}$ verstehen wir eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{A}$ in die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Sind χ_1, χ_2 zwei Charaktere, so wird durch $\chi(y) = \chi_1(y) + \chi_2(y)$, für jedes $y \varepsilon \mathfrak{A}$, ein neuer Charakter χ erklärt. Offenbar bilden die Charaktere bezüglich dieser Addition eine Gruppe, die wir $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ nennen. Ist die Gruppe $\mathfrak{A}$ – die wir uns additiv geschrieben denken – direkte Summe: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n$, so ist offenbar $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}) \approx \mathfrak{C}(\mathfrak{A}_1) + \ldots + \mathfrak{C}(\mathfrak{A}_n)$; ist $\mathfrak{A}_i$ ein unendlicher Zyklus, so ist auch $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}_i)$ ein unendlicher Zyklus, da man einen Charakter von $\mathfrak{A}_i$ durch willkürliche Festsetzung seines Wertes für das erzeugende Element von $\mathfrak{A}_i$ festlegt. Aus diesen beiden Tatsachen folgt: ist $\mathfrak{A}$ direkte Summe endlich vieler unendlicher Zyklen, so ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}) \approx \mathfrak{A}$.

Dies gilt insbesondere, wenn wir für $\mathfrak{A}$ die Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^1(K)$ nehmen. Daher wird der Satz I_K bewiesen sein, wenn wir die Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$ und $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$ bewiesen haben werden.

Eine Abbildung f von K in S^1 bildet zwei eindimensionale Zyklen, die zu derselben Homologie-Klasse, also zu denselben Elementen von $\mathfrak{B}^1(K)$ gehören, mit dem gleichen Grade ab; der Grad, mit dem die Summe zweier Zyklen abgebildet wird, ist gleich der Summe der Grade, mit denen die beiden Zyklen abgebildet werden; folglich bewirkt f einen Charakter von $\mathfrak{B}^1(K)$. Gehören f und g zu einer Klasse, so bewirken sie denselben Charakter. Mithin ist jeder Abbildungsklasse $\mathfrak{F}$, also jedem Element von $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$, ein Charakter χ von $\mathfrak{B}^1(K)$, also ein Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$, eindeutig durch die Bestimmung zugeordnet: Ist $\mathfrak{Z}$ ein Element von $\mathfrak{B}^1(K)$, so ist $\chi\mathfrak{F}(\mathfrak{Z})$ der Grad, mit welchem die in $\mathfrak{Z}$ enthaltenen Zyklen durch die zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Abbildungen abgebildet werden.

---

6) Man zeigt leicht: Ist die Gruppe M direktes Produkt von M_1 und M_2, so ist $G_M(F)$ direktes Produkt von $G_{M_1}(F)$ und $G_{M_2}(F)$. Infolgedessen gestatten die obigen Sätze, z. B. $G_{T^n}(F)$ durch $B^1(F)$ auszudrücken, wenn T^n der n-dimensionale Torus ist (in bekannter Weise als Gruppe aufgefaßt).

Wir werden nun zeigen, daß diese Zuordnung ein Isomorphismus ist; dann wird der Satz I_K bewiesen sein. Dreierlei ist zu beweisen: a) die Zuordnung ist ein Homomorphismus; b) nur das Einheitselement $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$ — also die Klasse der auf einen Punkt zusammenziehbaren Abbildungen — wird auf das Nullelement von $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$ abgebildet (d. h. der Homomorphismus ist eineindeutig); c) *jedes* Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$, also jeder Charakter von $\mathfrak{B}^1(K)$, ist einem Element von $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$ zugeordnet.

Beweis von a): f und g seien zwei Abbildungen von K in S^1, z sei ein eindimensionaler Zyklus in K, a und b seien die Grade, mit denen z durch f bzw. g abgebildet wird; zu zeigen ist: z wird durch $f \cdot g$ — diese Produktbildung ist in Nr. 1 erklärt — mit dem Grade $a + b$ abgebildet. Dabei kann man sich auf solche z beschränken, die eine Homologiebasis in K bilden, und als solche kann man einfach geschlossene, einmal durchlaufene Polygone wählen. Für ein solches z sind $2\pi a$ und $2\pi b$ die Änderungen, die die Winkelargumente $\varphi_f(x)$, $\varphi_g(x)$ der Bildpunkte $f(x)$ bzw. $g(x)$ erleiden, während der Punkt x das Polygon z durchläuft. Nun ist aber, nach Definition der Drehungsgruppe von S, $\varphi_f(x) + \varphi_g(x)$ das Winkelargument von $f \cdot g(x)$; die Änderung dieses Arguments ist daher $2\pi(a + b)$, w. z. b. w.

Beweis von b): Daß der Klasse, welche die Abbildung f enthält, das Nullelement von $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$ zugeordnet ist, bedeutet, daß f jeden eindimensionalen Zyklus von K mit dem Grade 0 abbildet, daß f also „algebraisch unwesentlich“ ist; dann ist f auch „topologisch unwesentlich“, läßt sich also auf einen Punkt zusammenziehen[7]); d. h. die Klasse von f ist das Einheitselement $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$.

Beweis von c): Zu zeigen ist: Bilden die Zyklen $z_1, z_2, \ldots, z_p$ von K eine Basis in $\mathfrak{B}^1(K)$, und sind $a_1, a_2, \ldots, a_p$ willkürlich gegebene ganze Zahlen, so gibt es eine Abbildung von K in S^1, durch welche die z_i mit den Graden a_i abgebildet werden $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Dabei kann man die z_i wieder als einfach durchlaufene, einfach geschlossene Polygone annehmen; verstehen wir unter K^1 den von diesen Polygonen gebildeten Komplex, so ist es zunächst leicht, eine Abbildung f von K^1 in S^1 zu konstruieren, bei der jedes z_i gerade den Grad a_i erhält. Sodann verstehen wir unter K^2 den Komplex, der von allen höchstens zweidimensionalen Simplexen von K gebildet wird; da der Teilkomplex K^1 von K^2, auf dem f bereits erklärt ist, keinen eindimensionalen Zyklus enthält, der in K^2 berandet, läßt sich f nach einem allgemeineren Satz[8]) zu einer

---

[7]) H. Hopf, Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Annalen **104** (1931), Satz V.

[8]) A. a. O. [2]), Satz II.

Abbildung von K^2 in S^1 erweitern. Um nun schließlich die Abbildung $f(K^2)$ zu einer Abbildung $f(K)$ zu erweitern, hat man endlich oft die folgende Aufgabe zu lösen: Es sei $r \geqq 2$; auf der Randsphäre $\bar{S}^r$ des $(r+1)$-dimensionalen Simplex T^{r+1} sei eine Abbildung f in die Kreislinie S^1 erklärt; man soll f zu einer Abbildung $f(T^{r+1})$ in S^1 erweitern. Diese Aufgabe, die damit identisch ist, $f(\bar{S}^r)$ stetig so abzuändern, daß das Bild ein einziger Punkt von S^1 wird, ist auf Grund des einfachen Zusammenhanges von $\bar{S}^r$ $(r \geqq 2)$ lösbar [9]).

3. Beweis des Satzes II'_K: Neben den „ganzzahligen" Charakteren, die in dem vorigen Beweis auftraten, betrachten wir jetzt noch „zyklische" Charaktere einer Gruppe $\mathfrak{A}$, d. h. homomorphe Abbildungen von $\mathfrak{A}$ in die mod 1 reduzierte additive Gruppe der rationalen Zahlen. Auch sie bilden eine Gruppe; wir nennen sie $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{A})$. Auch für sie gilt: ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_n$ so ist $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}) \approx \mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}_1) + \ldots + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}_n)$; ferner: ist $\mathfrak{A}_i$ eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung m, so ist auch $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}_i)$ eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung m; denn ein zyklischer Charakter von $\mathfrak{A}_i$ wird dadurch eindeutig festgelegt, daß man einem erzeugenden Element von $\mathfrak{A}_i$ eine willkürliche der Restklassen mod 1 zuordnet, die die Zahlen $\frac{k}{m}$ mit $k = 1, 2, \ldots, m$ enthalten. Aus den beiden genannten Sätzen folgt, da jede endliche Abelsche Gruppe direkte Summe endlicher Zyklen ist: $\mathfrak{C}_1(\mathfrak{A}) \approx \mathfrak{A}$ für jede endliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$.

Hieraus und aus der am Anfang des vorigen Beweises festgestellten Tatsache folgt: $\mathfrak{B}^3(K) + \mathfrak{T}^2(K) \approx \mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3(K)) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^2(K))$, und um den Satz II'_K zu beweisen, haben wir zu zeigen:

$$\mathfrak{G}_{S^3}(K^3) \approx \mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3(K^3)) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^2(K^3)) \text{ [10]}).$$

Nun bewirkt erstens, analog wie in dem im vorigen Beweis behandelten Falle, jede Abbildungsklasse $\mathfrak{F}$ von K^3 in S^3 einen ganzzahligen Charakter $\chi_{\mathfrak{F}}$ der Gruppe $\mathfrak{B}^3$, indem man jeder Homologieklasse von $\mathfrak{B}^3$ den Grad zuordnet, mit dem die in ihr enthaltenen Zyklen durch die Abbildungen aus $\mathfrak{F}$ abgebildet werden. Zweitens bewirkt $\mathfrak{F}$ einen zyklischen Charakter $\zeta_{\mathfrak{F}}$ der Gruppe $\mathfrak{T}^2$ durch die folgende Festsetzung [11]): man stelle die Gruppe $\mathfrak{L}^3$ der dreidimensionalen algebraischen Komplexe von K^3 als direkte Summe $\mathfrak{L}^3 = \mathfrak{Z}^3 + \mathfrak{W}^3$ dar, wobei $\mathfrak{Z}^3$ die — mit $\mathfrak{B}^3$ isomorphe — Gruppe der Zyklen ist; ist dann X ein Element von $\mathfrak{T}^2$, so gibt es in $\mathfrak{W}^3$ einen Zyklus mod m v_m^3, dessen durch m geteilter Rand $\frac{1}{m}\dot{v}_m^3 \subset X$ ist; der Grad

[9]) A. a. O. [7]), Beweis des Satzes Va.

[10]) Der Kürze halber lassen wir im weiteren Verlauf des Beweises das Argument K^3 in den Gruppen weg.

[11]) A. a. O. [2]), § 6.

mod m, mit dem v_m^3 abgebildet wird, ist $\equiv m \cdot \zeta_{\mathfrak{Z}}(X) \bmod m$. Somit ist jeder Abbildungsklasse, d. h. jedem Element von $\mathfrak{G}_{S^3}$, ein Element der Gruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^2)$ in eindeutiger Weise zugeordnet. Wir haben zu zeigen, daß dies ein Isomorphismus ist.

Nun ist bereits bekannt, daß diese Zuordnung die Elemente von $\mathfrak{G}_{S^3}$, also die Abbildungsklassen, und die Elemente von $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^2)$ einander eineindeutig zuordnet[11]); zu beweisen bleibt: es handelt sich um eine *homomorphe* Abbildung von $\mathfrak{G}_{S^3}$ in $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^3) + \mathfrak{C}_1(\mathfrak{T}^2)$. Diese Behauptung ist gleichbedeutend mit der folgenden: ist z ein dreidimensionaler Zyklus oder Zyklus mod m aus K^3, und sind f und g zwei Abbildungen von K^3 in S^3, die z mit den Graden, bzw. Graden mod m, a und b abbilden, so wird z durch $f \cdot g$ — im Sinne der in Nr. 1 erklärten Multiplikation verstanden — mit dem Grade (bzw. Grade mod m) $a + b$ abgebildet.

Für den Beweis dürfen wir f und g durch Abbildungen aus denselben Abbildungsklassen ersetzen. Daher können wir von vornherein annehmen, daß f und g simplizial sind, und daß ihnen dieselben Simplizialzerlegungen von K^3 und S^3 zugrunde liegen. Wir werden sie noch einmal durch Abbildungen f', g' derselben Klassen ersetzen.

E sei der Einheitspunkt des Gruppenraumes S^3. Es seien x_i^3 die dreidimensionalen Simplexe von K^3 $(i = 1, 2, \ldots)$; S^3 sowohl wie die x_i^3 seien mit festen Orientierungen versehen. Für jedes i sei h_i^+ eine Abbildung von x_i^3, die den Rand von x_i^3 auf den Punkt E, das Innere von x_i^3 eineindeutig mit dem Grade $+1$ auf $S^3 - E$ abbildet; daneben werden wir noch die Abbildung h_i^- betrachten, die durch $h_i^-(p) = (h_i^+(p))^{-1}$ — im Sinne der Gruppenoperation von S^3 — für alle Punkte $p \in x_i^3$ erklärt ist, sowie die Abbildung h_i^0, die das ganze Simplex x_i^3 auf den Punkt E abbildet. h_i^- bildet x_i^3 mit dem Grade -1 ab[12]). Nun sei y_i^3 ein Simplex von S^3, das E nicht enthält, aus der den simplizialen Abbildungen zugrunde liegenden Zerlegung von S^3.

Für jedes i ist entweder $f(x_i^3) = +y^3$ oder $f(x_i^3) = -y^3$, oder $f(x_i^3)$ bedeckt das Innere von y^3 nicht; im ersten Falle definieren wir $f'(x_i^3) = h_i^+(x_i^3)$, im zweiten $f'(x_i^3) = h_i^-(x_i^3)$, im dritten $f'(x_i^3) = h^0(x_i^3)$; dies liefert eine Abbildung f' von K^3. Durch sie wird, wie man durch Abzählung des Grades im Simplex y^3 erkennt, jeder dreidimensionale Zyklus von K^3 mit demselben Grade abgebildet wie durch f, und dasselbe gilt für die Zyklen mod m; folglich[13]) gehört sie zu derselben Klasse wie f.

---

12) Denn ist q die Quaternion mit den Komponenten x_0, x_1, x_2, x_3 auf der durch $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ gegebenen S^3, so hat q^{-1} die Komponenten $x_0, -x_1, -x_2, -x_3$; die Abbildung, die alle Quaternionen in ihre Inversen überführt, entsteht also durch Spiegelung an drei Ebenen und hat daher den Grad -1.

13) A. a. O. [2]), Satz 1.

Analog erklären wir eine Abbildung g', die zu derselben Klasse wie g gehört, und die in jedem x_i^3 mit h_i^+ oder h_i^- oder h_i^0 übereinstimmt.

Für diese Abbildungen haben wir nun den behaupteten Additionssatz bezüglich der Grade zu beweisen, mit denen ein Zyklus oder Zyklus mod m durch f', g' und $f' \cdot g'$ abgebildet wird; wir beweisen ihn, indem wir ihn für die Grade beweisen, die die Bilder der einzelnen Simplexe x_i^3 im Simplex y^3 haben. Diese Grade seien a_i und b_i für f' bzw. g'; sie sind $+1$, -1, oder 0. Ist eine dieser beiden Zahlen 0, etwa $b_i = 0$, so ist $g'(x_i^3) = h_i^0(x_i^3) = E$, also $f' \cdot g'(x_i^3) = f'(x_i^3)$, also hat $f' \cdot g'(x_i^3)$ in y^3 — wie in dem ganzen Gebiet $S^3 - E$ — den Grad $a_i = a_i + b_i$; die Behauptung ist also richtig. Ist eine der beiden Zahlen $+1$, die andere -1, etwa $a_i = +1$, $b_i = -1$, so ist $f'(x_i^3) = h_i^+$, $g'(x_i^3) = h_i^- = (h_i^+)^{-1}$, also $f' \cdot g'(x_i^3) = E$, also hat $f' \cdot g'$ den Grad $0 = a_i + b_i$, und die Behauptung ist richtig. Ist schließlich $a_i = b_i = \pm 1$, so stimmt in x_i^3 f' mit g' (und mit h_i^+ oder mit h_i^-) überein, und daher ist die Abbildung $f' \cdot g'$ in x_i^3 mit der Abbildung $(f')^2 = (g')^2$ identisch. Verstehen wir unter φ die Abbildung von S^3 auf sich, die jedem Punkt q sein Quadrat q^2 zuordnet, so können wir die Abbildung $(f')^2$ auch dadurch erhalten, daß wir erst f', dann φ ausüben, und infolge des Multiplikationssatzes für die Abbildungsgrade ist die Behauptung, daß diese Abbildung den Grad $a_i + b_i = 2a_i$ hat, identisch mit der folgenden Behauptung, die allein noch zu beweisen bleibt: φ hat den Grad 2.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht zu verifizieren. Die Punkte der durch $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ im R^4 gegebenen S^3 lassen sich durch $x_0 = \cos\alpha$, $x_i = v_i \sin\alpha$ $(i = 1, 2, 3)$ darstellen, wobei v_i die Komponenten eines dreidimensionalen Einheitsvektors sind, der nur für $\alpha = k\pi$ mit ganzem k, also nur in den Punkten mit den Koordinaten $\pm 1, 0, 0, 0$ unbestimmt wird. Das Quadrat der Quaternion mit den Komponenten $\cos\alpha$, $v_i \sin\alpha$ hat die Komponenten $\cos 2\alpha$, $v_i \sin 2\alpha$; daraus ist ersichtlich, daß ein von dem Punkt $-1, 0, 0, 0$ verschiedener Punkt $x_0 = \cos\beta$, $x_i = v_i \sin\beta$ bei der Abbildung φ genau zwei Originalpunkte hat, nämlich $\cos\frac{\beta}{2}$, $v_i \sin\frac{\beta}{2}$ und $\cos\left(\frac{\beta}{2} + \pi\right)$, $v_i \sin\left(\frac{\beta}{2} + \pi\right)$; sie sind antipodische Punkte auf der S^3 (dagegen bildet φ alle Punkte mit $x_0 = 0$ auf $-1, 0, 0, 0$ ab). Sind daher G_1, G_2 zwei antipodische Gebiete auf S^3, in denen $x_0 \neq 0$ ist, so wird jedes von ihnen eineindeutig auf dasselbe Bildgebiet G abgebildet, und dieses hat keinen weiteren Originalpunkt. Da die antipodische Abbildung der S^3 den Grad $+1$ hat, genügt es für den Beweis der Behauptung, daß φ den Grad $+2$ hat, zu zeigen, daß G_1 mit dem Grade $+1$ auf G abgebildet wird. Dabei können wir annehmen, daß in G_1 α eindeutig erklärt, etwa daß $0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist; dann wird durch $x_0 = \cos t\alpha$, $x_i = v_i \sin t\alpha$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ eine eineindeutige Deformation erklärt, deren Ergebnis $\varphi(G_1)$ ist; folglich hat diese Abbildung in der Tat den Grad $+1$.

4. Für die weiteren Beweise wird es bequem sein, den Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$ und $\mathfrak{B}^1(K)$, den wir oben durch Vermittlung der Gruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}^1(K))$ hergestellt haben, durch eine Orthogonalitätsrelation[14]) zwischen $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$ und $\mathfrak{B}^1(K)$ auszudrücken, und das Analoge für die Gruppen $\frac{\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)}{\mathfrak{U}}$ und $\mathfrak{B}^3(K^3)$ zu tun, wobei wir unter $\mathfrak{U}$ die Gruppe der Elemente endlicher Ordnung in $\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)$ verstehen. Man liest aus den Sätzen I_K und II'_K und ihren Beweisen ohne weiteres die Richtigkeit der beiden folgenden Tatsachen ab.

Hilfssatz I: Die Gruppe $\mathfrak{G}_{S^1}(K)$ ist zu der Gruppe $\mathfrak{B}^1(K)$ orthogonal, wenn wir das Produkt $\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{F}\,\varepsilon\,\mathfrak{G}_{S^1}(K)$, $\mathfrak{Z}\,\varepsilon\,\mathfrak{B}^1(K)$ als den Grad definieren, mit dem ein Zyklus z der Homologieklasse $\mathfrak{Z}$ durch eine Abbildung aus $\mathfrak{F}$ abgebildet wird. (In der Bezeichnung des Beweises des Satzes I_K: Ist $\chi_{\mathfrak{F}}$ der durch $\mathfrak{F}$ bewirkte Charakter, so ist $\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{Z} = \chi_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{Z})$.)

Hilfssatz II: Die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)$ nach der aus allen Elementen endlicher Ordnung bestehenden Untergruppe $\mathfrak{U}$ ist zu der Gruppe $\mathfrak{B}^3(K^3)$ orthogonal, wenn wir das Produkt $\Omega\cdot\mathfrak{Z}$, $\Omega\,\varepsilon\,\frac{\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)}{\mathfrak{U}}$, $\mathfrak{Z}\,\varepsilon\,\mathfrak{B}^3(K^3)$ als den Grad definieren, mit dem ein Zyklus z der Homologieklasse $\mathfrak{Z}$ durch eine Abbildung aus einer der in Ω enthaltenen Abbildungsklassen $\mathfrak{F}$ abgebildet wird. (In der Bezeichnung des Beweises von II'_K: $\Omega\cdot\mathfrak{Z} = \chi_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{Z})$; dabei ist zu beachten, daß $\chi_{\mathfrak{F}}$ nur von Ω abhängt; denn ist $\mathfrak{F}_1$ ein Element endlicher Ordnung m in $\mathfrak{G}_{S^3}(K^3)$, so ist $\chi_{\mathfrak{F}_1}(\mathfrak{Z}) = 0$ für alle $\mathfrak{Z}$, da $m\cdot\chi_{\mathfrak{F}_1} = \chi_{\mathfrak{F}_1 m} = \chi_{\mathfrak{E}} = 0$ [$\mathfrak{E}$ = Einheit in $\mathfrak{G}_{S^3}$] ist.)

5. Bevor wir zum Beweise unserer Sätze I und II übergehen, bemerken wir, daß die Eigenschaften der Gruppe $G_M(F)$ — wobei M eine beliebige Mannigfaltigkeit von Nr. 1 ist — als Grenzfall der entsprechenden Eigenschaften der für Komplexe definierten Gruppen $G_M(K)$ aufgefaßt werden können. Genauer gesprochen gilt folgende Tatsache: es sei

$$A = (K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots) \tag{1}$$

ein Projektionsspektrum[15]) des kompakten metrischen Raumes F, und π_m seien die zugehörigen simplizialen Abbildungen von K_{m+1} auf K_m. Wir betrachten die Gruppenfolge

$$G_1, G_2, \ldots, G_m, \ldots,$$

[14]) A. a. O. [8]), S. 176.

[15]) Im Sinne von Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen, Annals of Math. (2) **30** (1929), S. 101—187, insbesondere S. 107.

wobei $G_m = G_M(K_m)$ ist. Jedem durch eine stetige Abbildung $\varphi_m(K_m)$ bestimmten Element von G_m entspricht eindeutig ein durch die Abbildung $\varphi_{m+1}(K_{m+1}) = \varphi_m \pi_m (K_{m+1})$ bestimmtes Element von G_{m+1}; gehören in der Tat zwei Abbildungen φ_m und φ'_m zu einer und derselben Klasse $\Phi_m \varepsilon G_m$, so gehören offenbar die Abbildungen $\varphi_m \pi_m$ und $\varphi'_m \pi_m$ auch zu einer und derselben Klasse $\Phi_{m+1} \varepsilon G_{m+1}$. Vermöge dieser Zuordnung entsteht eine homomorphe Abbildung ω_m von G_m in G_{m+1}, so daß wir eine direkte Homomorphismenfolge[16]) $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$ bekommen.

Es gilt nun folgender

Satz III. *Die Gruppe $G_M(F)$ ist der Limesgruppe*[16]) *der Folge $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$ isomorph.*

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß jedem Element Φ von $G_m(F)$ eine gewisse Klasse konfinaler fundamentaler Folgen in $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$ entspricht. Es sei in der Tat $\varphi(F)$ eine stetige Abbildung der Klasse Φ; wir betrachten die Komplexe K_n als geometrisch ohne Singularitäten realisierte Nerven gewisser Überdeckungen U_n der Menge F und nehmen an, daß ihre Eckpunkte $a_1^{(n)}, \ldots, a_s^{(n)}$ durch eine ε_n-Verschiebung ($\lim \varepsilon_n = 0$) gewisser Punkte $b_1^{(n)}, \ldots, b_s^{(n)}$ von F entstanden sind. Wir definieren die Abbildung φ für alle Eckpunkte $a_1^{(n)}, \ldots, a_s^{(n)}$, indem wir für jedes i, $1 \leqq i \leqq s$

$$\varphi(a_i^n) = \varphi(b_i^n)$$

setzen[17]).

In der Annahme, daß das Eckpunktgerüst eines jeden Simplexes von K_n mittels φ in ein hinreichend kleines in M enthaltenes Element abgebildet wird (was für ein genügend großes n ($n \geqq m$) immer der Fall ist), können wir die in den Eckpunkten a von K_n als $\varphi_n(a) = \varphi(a)$ definierte Abbildung φ_n zu einer stetigen Abbildung des ganzen Komplexes K_n in M erweitern, wobei der Maximaldurchmesser σ_n des Bildes eines Simplexes von K_n bei der Abbildung φ mit $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert. Auf diese Weise tritt in jeder Gruppe G_n ($n \geqq m$) ein eindeutig bestimmtes Element Φ_n hervor, welches dem Element Φ von $G_M(F)$ entspricht. Wir zeigen, daß die Folge $\Phi_m, \Phi_{m+1}, \ldots, \Phi_n, \ldots$ eine Fundamentalfolge[16]) ist. In der Tat gehören, wie leicht ersichtlich, die stetigen Abbildungen $\varphi_{n+1}(K_{n+1})$ und $\varphi_n \pi_n (K_{n+1})$ zu derselben Klasse, so daß $\Phi_{n+1} = \omega_n(\Phi_n)$ ist und jedes Φ_n zu der mit dem Element Φ_m beginnenden Fundamentalfolge gehört, woraus die Behauptung folgt.

---

[16]) A. a. O. [3]), S. 194—195.

[17]) A. a. O. [15]), S. 104, 115 u. f.

Wir ordnen jetzt ein gewisses $\Phi \varepsilon G_M(F)$ jeder Klasse konfinaler Fundamentalfolgen

(1) $$\Phi_m, \Phi_{m+1}, \ldots, \Phi_n, \ldots$$

der Homomorphismenreihe zu. Auf Grund eines bekannten Satzes von Alexandroff[17]) kann jeder kompakte metrische Raum F durch eine ε-Überführung f_n in den Nerv einer beliebigen ε-Überdeckung von F abgebildet werden. Wir haben also: $f_n(F) \varepsilon K$. Deshalb erzeugt jede stetige Abbildung φ_n von K_n in M eine stetige Abbildung von F in M, nämlich die Abbildung $\varphi_n f_n(F)$. Auf diese Weise entspricht jedem Element Φ_n von G_n ein gewisses $\Phi^n \varepsilon G_M(F)$. Ich behaupte aber, daß die durch das Element Φ_m bestimmte Fundamentalfolge $\Phi_m, \Phi_{m+1}, \ldots, \Phi_n, \ldots$ die Eigenschaft besitzt, daß jedem Φ_n (wobei n größer als ein gewisses N ist) mittels des obigen Verfahrens ein und dasselbe $\Phi^n \varepsilon G_M(F)$ zugeordnet ist.

Um das zu beweisen, setzen wir voraus, daß K_{2n} die baryzentrische Unterteilung von K_{2n-1} im Projektionspektrum $A = (K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots)$ ist; das kann immer vorausgesetzt werden[18]). Wir bezeichnen dabei die vermöge dessen, daß K_{2n} die baryzentrische Unterteilung von K_{2n-1} ist, bestimmte identische Abbildung von $\overline{K}_{2n}$ auf $\overline{K}_{2n-1}$[19]) durch $\overline{\pi}_{2n-1}(\overline{K})$. Diese Abbildung kann in die Abbildung $\pi_{2n-1}(\overline{K})$ durch Verschiebung der Eckpunkte des Komplexes K_{2n} innerhalb der Simplexe des Komplexes K_{2n-1} stetig übergeführt werden, und zwar dadurch, daß man jeden Eckpunkt von K_{2n}, welcher Schwerpunkt eines Simplexes von K_{2n-1} ist, in einen Eckpunkt dieses Simplexes überführt.

Wir betrachten jetzt die Fundamentalfolge

$$\Phi_{2m-1}, \Phi_{2m}, \Phi_{2m+1}, \ldots,$$

wobei Φ_{2n-1} Element von G_{2n-1}, Φ_{2n} Element von G_{2n} ist $(n \geqq m)$. Wir konstruieren die Abbildungen φ_{2n-1} aus Φ_{2n-1}, φ_{2n} aus Φ_{2n} in folgender Weise: Wir wählen willkürlich φ_{2m-1} in der Klasse Φ_{2m-1}; wenn φ_{2n-1} schon definiert ist, so setzen wir

$$\varphi_{2n}(\overline{K}_{2n}) = \varphi_{2n-1}\overline{\pi}_{2n-1}(\overline{K}_{2n})\text{ }^{20)}$$

und

$$\varphi_{2n+1}(\overline{K}_{2n+1}) = \varphi_{2n}\pi_{2n}(\overline{K}_{2n+1}).$$

---

18) Pontrjagin und Tolstowa, Math. Annalen 105 (1931), S. 739.

19) $\overline{K}_{2n-1}$ bzw. $\overline{K}_{2n}$ sind die Polyeder, die den Komplexen K_{2n-1}, K_{2n} entsprechen (d. h. die Vereinigungsmengen der Simplexe der betreffenden Komplexe). Ist $f(K)$ eine simpliziale Abbildung eines Komplexes auf einen anderen, so bezeichnen wir mit $f(\overline{K})$ die dadurch bestimmte stetige Abbildung des einen Polyeders auf das andere. Vgl. hierzu Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie, Berlin, Springer, 1932.

20) Wobei zu beachten ist, daß das *Bild* $\overline{\pi}_{2n-1}(\overline{K}_{2n})$ das Polyeder $\overline{K}_{2n-1}$ ist.

Nachdem auf diese Weise φ_{2n} und φ_{2n+1} als simpliziale Abbildungen der Polyeder $\overline{K}_{2n}$ und $\overline{K}_{2n+1}$ definiert sind, fassen wir sie wieder als simpliziale Abbildungen der Simplizialzerlegungen K_{2n} bzw. K_{2n+1} dieser Polyeder auf. Es ist leicht zu sehen, daß bei jedem hinreichend großen $n \geqq N$ die Bilder der Simplexe des Komplexes K_{2n-1} bzw. K_{2n} bei der Abbildung φ_{2n-1} bzw. φ_{2n} beliebig klein werden; deshalb gehören die Abbildungen $\varphi_{2n-1} f_{2n-1}(F)$, $\varphi_{2n} f_{2n}(F)$, $\varphi_{2n+1} f_{2n+1}(F)$ sämtlich zu derselben Klasse Φ, *die wir nunmehr der Fundamentalfolge* (1) *entsprechen lassen.*

In dieser Weise wird: 1. jeder Klasse von Abbildungen Φ, also jedem Element von $G_M(F)$ eine eindeutig bestimmte Klasse konfinaler Fundamentalfolgen, und 2. jeder Klasse konfinaler Fundamentalfolgen eine eindeutig bestimmte Klasse stetiger Abbildungen des kompakten metrischen Raumes F zugeordnet. Zum Beweise des Satzes bleibt nur zu zeigen:

a) daß diese Zuordnungen reziprok sind, d. h. daß sie eine eineindeutige Abbildung der Gruppe $G_M(F)$ auf die Limesgruppe

$$B = \lim G_M$$

ergeben;

b) daß die erwähnte Abbildung homomorph ist.

Beweis von a). Die durch die Folge

$$\Phi_m, \ldots \quad \Phi_n, \ldots$$

definierte Klasse H konfinaler Fundamentalfolgen sei nach 1. der Klasse $\Phi \varepsilon G_M(F)$ zugeordnet. Das bedeutet, daß die in den Eckpunkten a des Komplexes K_n durch die Relationen $\varphi_n(a) = \varphi(a)$ definierte Abbildung dieses Komplexes in M bei jedem hinreichend großen n der Klasse Φ_n angehört (φ ist dabei eine beliebige Abbildung der Klasse Φ). Das nach 2. der Klasse H konfinaler Fundamentalfolgen zugeordnete und vermöge dieser Zuordnung durch die Abbildungen $\varphi_n f_n(F)$; $n \geqq N$ definierte Element $\overline{\Phi}$ von $G_M(F)$ enthält die Abbildung $\varphi(F)$, weil die Abbildungen $\varphi_n f_n(F)$ und $\varphi(F)$ bei jedem hinreichend großen n zu einer und derselben Klasse gehören, da sie sich beliebig wenig voneinander unterscheiden und M eine Mannigfaltigkeit ist. $\overline{\Phi}$ ist also die Ausgangsklasse Φ, woraus die Behauptung a) folgt.

Beweis von b). Es sei φ ein Element von Φ, φ' ein Element von Φ', $\psi = \varphi \cdot \varphi'$. Dann gehört ψ zu $\Psi = \Phi \cdot \Phi'$. Die Abbildungen $\varphi(F)$, $\varphi'(F)$ und $\psi(F)$ erzeugen die in den Eckpunkten a von K_n durch die Relationen

$$\varphi_n(a) = \varphi(a), \quad \varphi'_n(a) = \varphi'(a) \quad \text{und} \quad \psi_n(a) = \psi(a) = \varphi(a) \cdot \varphi'(a)$$

definierten Abbildungen $\varphi_n(K_n)\,\varepsilon\,\Phi_n$, $\varphi'_n(K)\,\varepsilon\,\Phi'_n$ und $\psi_n(K_n)\,\varepsilon\,\Psi_n$. Die Abbildungen ψ_n und $\psi_n^* = \varphi_n \cdot \varphi'_n$ des Komplexes K_n in M gehören bei jedem hinreichend großen n zu einer und derselben Klasse, nämlich zu Ψ_n, weil sie in den Eckpunkten a von K_n übereinstimmen:

$$\psi_n^*(a) = \varphi_n(a) \cdot \varphi'_n(a) = \varphi(a) \cdot \varphi'(a) = \psi(a) = \psi_n(a).$$

Somit ist $\Psi_n = \Phi_n \cdot \Phi'_n$, woraus die Behauptung b) folgt.

Der Satz III ist hiermit bewiesen.

6. Jetzt können wir leicht die Sätze I und II beweisen.

Beweis des Satzes I. Wie in Nr. 5 bereits erwähnt wurde, erzeugt ein Projektionsspektrum

$$A = (K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots)$$

des kompakten metrischen Raumes F eine direkte Homomorphismenfolge $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$. Andererseits entsteht vermöge der simplizialen Abbildung π_m von K_{m+1} auf K_m eine homomorphe Abbildung (die ebenfalls mit π_m bezeichnet wird) von $B_{m+1} = B^1(K_{m+1})$ in $B_m = B^1(K_m)$, so daß wir eine inverse Homomorphismenfolge $\overline{\mathfrak{F}}(B_m, \pi)$[16]) erhalten. Die Folgen $\mathfrak{F}(G_m \omega)$ und $\overline{\mathfrak{F}}(B_m, \pi)$ sind zueinander orthogonal, weil:

1. nach Hilfssatz I die Gruppen B_n und G_n zueinander orthogonal sind;

2. nach der Definition ω_n für je zwei Elemente Φ bzw. γ von G_n bzw. B_{n+1} die Relation

$$\omega_n(\Phi_n) \cdot \gamma = \Phi_n \cdot \pi_n(\gamma)$$

gilt.

Somit ist die Limesgruppe B der Folge $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$ der eindimensionalen Bettischen Gruppe von F isomorph. Andererseits aber ist diese Limesgruppe nach Satz III der Gruppe $G_{S^1}(F)$ isomorph, womit der Satz I bewiesen ist.

Beweis des Satzes II. Es sei

$$A = (K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots)$$

ein Projektionsspektrum des dreidimensionalen kompakten metrischen Raumes F^3. Auf Grund des Satzes III ist die Gruppe $G_{S^3}(F^3)$ der Limesgruppe der direkten Homomorphismenfolge $\mathfrak{F}(G_m, \omega)$ isomorph, wobei $G_m = G_{S^3}(K_m^3)$ ist. Die Elemente der mit dem Element endlicher Ordnung Φ_m von G_m beginnenden Fundamentalfolge $\Phi_m, \ldots, \Phi_n, \ldots$ werden ebenfalls von endlicher Ordnung sein, und dabei wird ihre Ordnung mit wachsendem n nicht wachsen. Deshalb ist, wie leicht ersichtlich, die Limesgruppe der Folge $\mathfrak{F}\left(\frac{G_m}{U_m}, \omega\right)$ [wobei U_m die aus allen Elementen endlicher Ordnung bestehende Untergruppe von G_m ist] der Faktorgruppe $\frac{G_{S^3}(F^3)}{U_{S^3}(F^3)}$ isomorph.

Ähnlich wie beim Beweise des Satzes I haben wir neben der direkten Homomorphismenfolge die inverse Homomorphismenfolge $\mathfrak{F}(B^3_m, \pi)$, wobei man mittels des Hilfssatzes II beweist, daß die Folgen $\mathfrak{F}\left(\frac{G_m}{U_m}, \omega\right)$ und $\mathfrak{F}(B^3_m, \pi)$ zueinander orthogonal sind, woraus die Behauptung des Satzes II folgt.

Zum Schluß möchte ich nicht unterlassen, Herrn Prof. L. Pontrjagin in Moskau und Herrn Prof. H. Hopf in Zürich meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für zahlreiche Anregungen und Verbesserungen mannigfachster Natur. Insbesondere verdanke ich Herrn Prof. Hopf die endgültige Fassung der ersten vier Nummern dieses Artikels.

(Eingegangen am 16. 6. 1933.)