Kennzeichnung der Schlauchknoten.

Von WERNER BURAU in Königsberg.

Wir beschäftigen uns im folgenden auf Anregung von Herrn REIDEMEISTER mit einer Reihe von Knotentypen, die sich aus einer festgewählten Projektion eines beliebigen Knotens leicht bilden lassen. Es sind die verallgemeinerten Schlauchknoten, die in gewissen Spezialfällen von Herrn BRAUNER zuerst als topologische Bilder der Singularitäten algebraischer Funktionen von zwei Veränderlichen[1]) betrachtet sind.

Allgemein sei uns eine beliebige orientierte Knotenprojektion K vorgelegt. Sie bestehe aus g Doppelpunkten, die der Reihe nach, wie sie beim Durchlaufen des Knotens als Unterkreuzungsstellen passiert werden, mit $D_1, \cdots, D_g$ bezeichnet werden mögen. Nach WIRTINGER sei dem Kurvenstück $D_{i-1} D_i$ die Erzeugende B_i einer Gruppe und dem Doppelpunkt D_δ die Relation $B_{\delta+1} = B_{\mu_\delta}^{-\varepsilon_\delta} B_\delta B_{\mu_\delta}^{\varepsilon_\delta}$ zugeordnet.

Jetzt werde aus dem Knoten eine Verkettung hergestellt dadurch, daß man den einen Kurvenzug der Projektion durch n parallel nebeneinanderliegende Kurven der gleichen Orientierung ersetzt, die sich an der Stelle der alten Doppelpunkte nach Art von Fig. 1 überkreuzen mögen. Numeriere ich die n Kurven von rechts nach links, so läßt sich die Gruppe der Verkettung offenbar durch ng Elemente $C_i', C_i'', \cdots, C_i^{(n)}$ $(i = 1, \cdots, g)$ erzeugen, wo die $C_i^{(\varrho)}$ den einzelnen Stücken der ϱten Kurve zugeordnet sind. Zwischen diesen $C_i^{(j)}$ bestehen nun, wie man sofort aus Fig. 1 abliest, die Relationen:

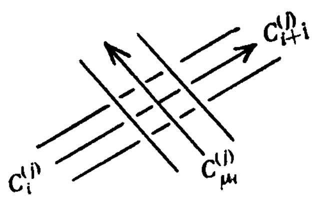

Fig. 1.

$$C_{i+1}^{(j)} = (C_{\mu_i}^{(n)} C_{\mu_i}^{(n-1)} \cdots C'_{\mu_i})^{-1} C_i^{(j)} (C_{\mu_i}^{(n)} \cdots C'_{\mu_i}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, g),$$
$$C_{g+1}^{(j)} = C_1^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

An einer Stelle, etwa da, wo die Strecke $(D_g D_1)$ des Knotens K sich befand, verdrillen wir die n Fäden $m$mal nach Art eines Toruszopfes[2]), wobei die Rechts- und Linksverdrillung durch das Vorzeichen von m unterschieden sei. Ist hierbei $(m, n) = 1$, so hat sich unsere Verkettung in einen sogenannten Schlauchknoten auf dem Träger K verwandelt. Verändert man nun den Trägerknoten mitsamt dem auf ihm liegenden

[1]) Hamburger Abhandlungen 6, p. 1.

[2]) ARTIN, Hamburger Abhandlungen 4, p. 47.

$m$mal verdrillten Bande durch elementare Deformationen[3], so sieht man, daß die so erklärte Zahl m sich entweder gar nicht ändert oder bei Hinzunahme oder Weglassen einer Schleife (Fig. 2) um $\pm n$. Da sich aber gleichzeitig dann die jeder Knotenprojektion K eigentümliche Selbstverdrillungszahl $v = \sum_{i=1}^{g} \varepsilon_i$ um ∓ 1 verändert, erweist sich als invariante Zahl $w = nv + m$.

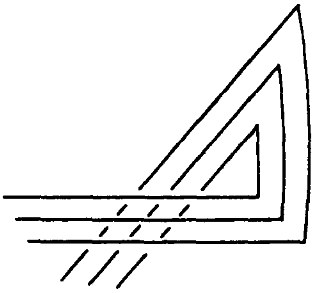

Fig. 2.

Mit Hilfe eines von Herrn Alexander[4] angegebenen, mit jeder Knotengruppe invariant verknüpften Polynoms wird es sich im folgenden herausstellen, daß alle auf demselben Träger mittels zweier verschiedener geordneter Zahlenpaare n, w erklärten Schlauchknoten bis auf höchstens zwei vorläufig nicht unterscheidbare Fälle voneinander verschieden sind. w ist dabei in der Gruppe nur bis aufs Vorzeichen festgelegt; denn wenn man bei der Projektion des Schlauchknotens Über- und Unterkreuzungen vertauscht, ändert sich die Gruppe desselben nicht[5], andererseits ändert nun v und m und damit auch w sein Vorzeichen. Wir beschränken uns daher auf positive w.

Nimmt man als Grundträger den Kreis in doppelpunktloser Projektion und iteriert den Prozeß der Schlauchbildung $s$mal mittels der s positiven Zahlenpaare (n_1, m_1), $(n_2, m_2) \cdots (n_s, m_s)$, so erhält man dabei gewiß sämtliche von Herrn Brauner zuerst angegebenen Schlauchknoten. Zwei solche Knoten erweisen sich als verschieden, wenn ihre geordnete Zahlenreihe nicht übereinstimmt. (Außer im Falle der Torusknoten $s = 1$, wo es auf die Reihenfolge der beiden Zahlen nicht ankommt.)

§ 1. Gruppe der allgemeinen Schlauchknoten.

Zu der Gruppe der über der Knotenprojektion K mittels der Zahlen (n, m) bzw. (n, w) definierten Schlauchknoten gelangt man offenbar von der in der Einleitung zunächst betrachteten Verkettungsgruppe, indem man die dortigen Erzeugenden mit ihren Relationen beibehält, aber

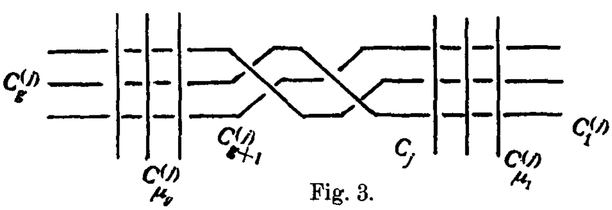

Fig. 3.

[3] Reidemeister, Hamburger Abhandlungen 5, p. 24.

[4] Alexander, Transact. of the Am. M. S. 31, p. 127.

[5] Bankwitz, Annals of Math., 2. s., t. 31, p. 129.

beachtet, daß wegen des eingefügten Zopfes $C^{(j)}_{g+1}$ $(j = 1, \cdots, n)$ nicht mehr mit $C^{(j)}_1$ identisch zu betrachten ist, sondern als neues mit C_j bezeichnetes Erzeugenden n-tupel einzuführen ist (s. Fig. 3). Als weitere Relationen ergeben sich dann die n Ausdrücke der $C^{(j)}_1$ in den C_j, die ich jetzt aufstelle.

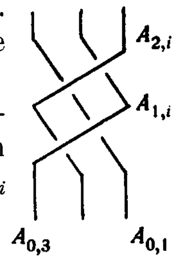

Fig. 4.

Hierzu betrachte ich nebenstehenden offenen Toreszopf (Fig. 4) und bezeichne die positiven Umschlingungen der 0. Schicht mit $A_{0,i}$ $(i = 1, \cdots, n)$, die der 1. mit $A_{1,i}$ usw. Dann gilt offenbar allgemein die Beziehung

$$A_{ij} = A^{-1}_{i-1,1} A_{i-1,j-1} A_{i-1,1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, m \\ j = 1, \cdots, n \end{pmatrix},$$

die 2. Indizes stets auf $1, \cdots, n \bmod n$ reduziert. Dann erhält man sofort $A_{m,j} = A^{-1}_{0,1} A^{-1}_{0,2} \cdots A^{-1}_{0,m} A_{0,j+m} A_{0,m} \cdots A_{0,2} A_{0,1}$. Hiermit wird die Gruppe unseres Schlauchknotens $\mathfrak{K}_{n,w}$ durch die $(g+1)n$ Erzeugenden C_j, $C^{(j)}_i$ $\begin{pmatrix} i = 1, \cdots, g \\ j = 1, \cdots, n \end{pmatrix}$ mit ebensovielen Relationen dargestellt:

$$\text{(I)} \quad C^{(j)}_{\delta+1} = \left(C^{(n)}_{\mu_\delta} \cdots C^{1}_{\mu_\delta}\right)^{-\varepsilon_\delta} C^{(j)}_\delta \left(C^{(n)}_{\mu_\delta} \cdots C^{1}_{\mu_\delta}\right)^{\varepsilon_\delta} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \cdots, n \\ \delta = 1, \cdots, g \end{pmatrix},$$

$$\text{(II)} \quad C^{(j)}_{g+1} = C_j,$$

$$\text{(III)} \quad C^{(j)}_1 = (C_m \cdots C_1)^{-1} C_{m+j} (C_m \cdots C_1),$$

die Indizes von C_i mod n, wie im folgenden stets, reduziert auf $1, \cdots, n$. Führt man durch

$$\text{(IV)} \quad B_\delta = C^{(n)}_\delta \cdots C''_\delta C'_\delta \qquad (\delta = 1, \cdots, g)$$

die B_μ als Erzeugende ein, die geometrisch Gesamtumschlingungen aller Fäden bedeuten, so kann man mit Hilfe von (I) der Reihe nach alle $C^{(j)}_\delta$ $(\delta = 2, \cdots, g)$ durch die B_μ, $C^{(j)}_1$ ausdrücken.

$$C^{(j)}_{\delta+1} = B^{-\varepsilon_\delta}_{\mu_\delta} \cdots B^{-\varepsilon_1}_{\mu_1} C^{(j)}_1 B^{\varepsilon_1}_{\mu_1} \cdots B^{\varepsilon_\delta}_{\mu_\delta} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \cdots, n \\ \delta = 2, \cdots, g \end{pmatrix}.$$

Mittels (III) seien ferner sämtliche $C^{(j)}_1$ durch die C_j eliminiert, so daß schließlich die gesamte Gruppe lediglich durch

$$C_1, \cdots, C_n \text{ und } B_1, \cdots, B_g$$

erzeugt wird. Die so erhaltenen Ausdrücke für $C^{(j)}_\delta$ in (II), (IV) eingesetzt, liefern sämtliche Relationen in den C_i, B_δ

$$\text{(I')} \quad B_\delta = B^{-\varepsilon_{\delta-1}}_{\mu_{\delta-1}} \cdots B^{-\varepsilon_1}_{\mu_1} (C_m \cdots C_1)^{-1} C_m \cdots C_{m-n+1}$$
$$(C_m \cdots C_1) B^{\varepsilon_1}_{\mu_1} \cdots B^{\varepsilon_{\delta-1}}_{\mu_{\delta-1}} \; (\delta = 1, \cdots, g),$$

$$\text{(II')} \quad C_j = T^{-1} (C_m \cdots C_1)^{-1} C_{j+m} (C_m \cdots C_1)\, T \; (j = 1, \cdots, n), \text{ wo}$$
$$T = B^{\varepsilon_1}_{\mu_1} B^{\varepsilon_2}_{\mu_2} \cdots B^{\varepsilon_g}_{\mu_g} \text{ gesetzt ist.}$$

(I′) läßt sich auch schreiben

$$B_1 = C_n \cdots C_1 \text{ und}$$

(I′) $$B_\delta = B_{\mu_{\delta-1}}^{-\varepsilon_{\delta-1}} \cdots B_{\mu_1}^{-\varepsilon_1} B_1 B_{\mu_1}^{\varepsilon_1} \cdots B_{\mu_{\delta-1}}^{\varepsilon_{\delta-1}} \qquad (\delta = 2, \cdots, g+1),$$

d. h. die B_i allein erzeugen eine zu $\mathfrak{K}$ isomorphe Gruppe.

Zwecks weiterer Reduktion sei eingeführt:

(III′) $$Q = C_m \cdots C_1 T = Q' T.$$

Dann lautet (II′)

$$C_{j+m} = Q C_j Q^{-1} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

oder in anderer Anordnung

$$C_{1+tm} = Q C_{1+(t-1)m} Q^{-1} \qquad (t = 1, \cdots, n),$$

was mit

(II′) $$C_{1+tm} = Q^t C_1 Q^{-t} \qquad (t = 1, \cdots, n)$$

gleichbedeutend ist. Es gilt allgemein:

$$C_{tm} C_{tm-1} \cdots C_{(t-1)m} \cdots C_m \cdots C_1$$
$$= \prod_{\varrho=t}^{1} (Q^{\varrho-1} C_m \cdots C_1 Q^{-(\varrho-1)}) = \prod_{\varrho=1}^{t} (Q^{\varrho} T^{-1} Q^{-(\varrho-1)}) = Q^t T^{-t}.$$

Wählt man λ, $\varkappa$ als kleinste positive Lösungen von $\lambda m = \varkappa n + 1$, so ist

$$C_{\lambda m} \cdots C_2 C_1 = Q^\lambda T^{-\lambda}$$

und in anderer Zusammenfassung:

$$C_{\varkappa n+1} C_{\varkappa n} \cdots C_1 = C_1 B_1^\varkappa$$

(nach unserer Indexrechnung mod n). In $C_1 = Q^\lambda T^{-\lambda} B_1^{-\varkappa}$ hat man also C_1 durch Q, B_i ausgedrückt und mittels (II′) für $t = 1, \cdots, n-1$ auch die anderen C_i, da

(I″) $$\begin{aligned} C_{j+1} = C_{j+\lambda m} &= Q^\lambda C_j Q^{-\lambda} = Q^{j\lambda} C_1 Q^{-j\lambda} \\ &= Q^{(j+1)\lambda} T^{-\lambda} B_1^{-\varkappa} C^{-j\lambda} \quad (j = 1, \cdots, n-1). \end{aligned}$$

Für $t = n$ bleibt in den Q, B die Relation

(II″) $$Q^\lambda T^{-\lambda} B_1^{-\varkappa} \longleftrightarrow Q^n, \text{ d. h. } Q^n \longleftrightarrow T^{-\lambda} B_1^{-\varkappa}$$

übrig. Schließlich liefern die Eliminationsausdrücke (I″) in (I′) und (III′) eingeführt:

(III″) $$B_1 = Q^{n\lambda} (T^{-\lambda} B_1^{-\varkappa})^n,$$

(IV″) $$Q = Q^{m\lambda} (T^{-\lambda} B_1^{-\varkappa})^m T.$$

Da $B_1 \longleftrightarrow T$ nach (I′), schreibt sich (III″) und (IV″) einfacher

(III″) $$Q^{n\lambda} = (T^n B_1^m)^\lambda,$$

(IV″) $$Q^{n\varkappa} = (T^n B_1^m)^\varkappa;$$

wegen $(\varkappa, \lambda) = 1$, sind beide Relationen gleichwertig der einen:

$$(\alpha) \qquad Q^n = T^n B_1^m.$$

Da sich (II″) hieraus leicht folgern läßt, entsteht unsere Gruppe $\mathfrak{K}_{n,m}$ aus $\mathfrak{K}$ lediglich durch Hinzunahme der Erzeugenden Q mit der Relation (α). Als Element der Gruppe $\mathfrak{K}$ aufgefaßt, bedeutet $T^n B_1^m$ offenbar eine Darstellung des Schlauchknotens als Weg im Außenraum seines Trägers.

§ 2. Darstellung des Alexanderschen Polynoms für die Schlauchknotengruppe.

Um das Alexandersche Polynom, ein mit jeder Gruppe, die zu einer zyklischen homomorph ist, invariant verknüpftes Gebilde, für Knotengruppen $\mathfrak{K}$ aufzustellen, die aus $h+1$ Erzeugenden und h Relationen bestehen, seien zunächst solche $h+1$ Erzeugende $E_1, \cdots, E_h, S$ eingeführt, die bis auf S der Kommutatorgruppe angehören.

Schreibt man die Relationen von $\mathfrak{K}$ in den vertauschbar gemachten $S^i E_j S^{-i} = E_{ji}$ und setzt symbolisch $E_{ji} = E_j^{x^i}$, so ist die Determinante der Exponentenmatrix der Relationen das Alexandersche Polynom.

In unserem Fall ist also zunächst $B_i = E_i B_1$ und $B_1^j E_i B_1^{-j} = E_{ij}$ zu setzen. Die n ersten Relationen liefern nun das Polynom $F(x)$ der Gruppe $\mathfrak{K}$ des Trägers, wenn $E_{ij} = E_i^{x^j}$ gesetzt wird. Beim Übergang zu $\mathfrak{K}_{n,m}$ lautet die Relation (α) in der abelsch gemachten Gruppe: $Q^n = B_1^{nv+m}$, wo $v = \sum \varepsilon_i$ gesetzt ist, also in $\mathfrak{K}_{n,m}$ selbst $Q^n = W(E_{il}) B_1^{nv+m}$, wo W ein Element der Kommutatorgruppe $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}_{n,m}$ ist. Q und B sind schließlich noch in der freien von Q, B erzeugten Untergruppe durch ein Paar primitiver Elemente E_{g+1}, S zu ersetzen, was nach einer Bemerkung von Herrn REIDEMEISTER[6]) stets möglich ist, so daß E_{g+1} zu $\mathfrak{K}_1$ gehört und die Potenzen von S die Restklassen nach $\mathfrak{K}_1$ repräsentieren. Dann ist

$$\begin{aligned} Q &= Q(E_{g+1,j}, S) = W_1(E_{g+1,j})\, S^{nv+m}, \\ B_1 &= Q(E_{g+1,j}, S) = W_2(E_{g+1,j})\, S^n, \end{aligned}$$

wo $E_{g+1,j} = S^j E_{g+1} S^{-j}$. Um das Polynom $\mathfrak{P}(x)$ der Gruppe $\mathfrak{K}_{n,m}$ zu erhalten, sind daher sämtliche Relationen in den kommutativen E_i^x zu schreiben. Es wird dabei:

$$B_1^j E_i B_1^{-j} = W_3(E_{g+1,j})\, S^{jn} E_i S^{-jn} W_3^{-1} = E_{i,jn} = E_i^{x^{jn}};$$

in der alten Matrix ist also überall x^n für x zu schreiben. Nur in der neuen Zeile tritt das E_{g+1} wirklich auf, und zwar wird

$$W(E_{il})\, B_1^{nv+m} Q^{-n} = \{[W_2(E_{g+1,j}) S^n]^{nv+m}\, [W_1(E_{g+1,j}) S^{nv+m}]^{-n} = 1.$$

[6]) REIDEMEISTER, Hambg. Abh. 5, p. 7.

Hieraus folgt, daß der symbolische Exponent von E_{g+1} von $B^{nv+m}\,Q^{-n}$ abhängt, also das im nächsten Paragraph aufzustellende Polynom $\mathfrak{P}_{nv+m,n}$ eines Torusknotens ist. Da sonst in der $(g+1)$ten Spalte lauter Nullen stehen, hat man für $\mathfrak{P}(x)$ die Produktdarstellung

$$\mathfrak{P}(x) = F(x^n)\,\mathfrak{P}_{nv+m,n}(x)$$

gefunden.

§ 3. Alexandersches Polynom für Torusknoten.

Zur Berechnung des $\mathfrak{P}_{a,b}(x)$ der Gruppe $\mathfrak{T}_{a,b}$ sei zunächst $a = kb+1$ angenommen; dann ist das gewünschte E, S folgendermaßen einzuführen: $A = ES^b$; $B = S(ES^b)^k$.

Unter Benutzung unserer symbolischen Bezeichnung $E_j^{x^i} = S^i E_j S^{-i}$ schreibt sich dann:

$$A^\varrho = E^{1+x^b+\cdots+x^{(\varrho-1)b}}\,S^{\varrho b} = E^{\frac{1-x^{\varrho b}}{1-x^b}}\,S^{\varrho b},$$

$$B^b = E^{x\frac{1-x^{kb}}{1-x^b}+x^{a+1}\frac{1-x^{kb}}{1-x^b}+\cdots+x^{(b-1)a+1}\frac{1-x^{kb}}{1-x^b}}\,S^{ab},$$

und die Relation $A^a = B^b$ wird zu

$$E^{\frac{1-x^{ab}}{1-x^b}} = E^{x\frac{1-x^{kb}}{1-x^b}\,\frac{1-x^{ab}}{1-x^a}}$$

Daher lautet das Polynom der Gruppe $\mathfrak{T}_{a,b}$

$$(*)\qquad \mathfrak{P}_{a,b} = \frac{1-x^{ab}}{(1-x^a)(1-x^b)}(1-x^a-x+x^a) = \frac{(1-x^{ab})(1-x)}{(1-x^a)(1-x^b)}.$$

Angenommen, die Form $(*)$ des Polynoms sei bereits bewiesen für alle Gruppen $\mathfrak{T}_{u,v}$, bei denen der euklidische Algorithmus von u, v aus höchstens λ Schritten besteht. Dann sei a, b das Zahlenpaar von $\mathfrak{T}_{a,b}$, bei denen $\lambda+1$ Divisionen zum größten gemeinschaftlichen Teiler 1 führen:

$$\begin{aligned} a &= kb + r_1.\\ b &= k_1 r_1 + r_2.\\ &\;\;\vdots\\ r_{\lambda-1} &= k_\lambda r_\lambda + 1.\end{aligned}$$

Dann hat man zunächst B durch $B = CA^k$ zu eliminieren, ferner A durch $A = DC^{k_1}$ usw. Da B den Knoten $b$mal und C $r_1$mal umschlingt, mögen schließlich in unserer Schreibweise E und S durch $A = E^{f(x)}S^b$ und $C = E^{g(x)}S^{r_1}$ eingeführt sein. Dann lautet die Ausgangsrelation:

$$E^{f(x)+x^b f(x)+\cdots+x^{(a-1)b}f(x)}\,S^{ab}$$

$$E^{g(x)+x^{r_1}\varphi(x)+x^a g(x)+x^{a+r_1}\varphi(x)+\cdots+x^{(b-1)a}g(x)+x^{(b-1)a+r_1}\varphi(x)}\,S^{ab},$$

wo

$$\varphi(x) = f(x) + x^b f(x) + \cdots + x^{(k-1)b} f(x) = f(x) \frac{x^{kb}-1}{x^b-1}$$

gesetzt ist. Damit wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{a,b}(x) &= f(x)\frac{x^{ab}-1}{x^b-1} - g(x)\frac{x^{ab}-1}{x^a-1} - x^{r_1} f(x)\frac{x^{kb}-1}{x^b-1}\,\frac{x^{ab}-1}{x^a-1} \\ &= \frac{x^{ab}-1}{(x^a-1)(x^b-1)}\left[f(x)(x^a-1) - g(x)(x^b-1) - (x^a - x^{r_1})f(x)\right] \\ &= \frac{(x^{ab}-1)\,h(x)}{(x^a-1)(x^b-1)}.\end{aligned}$$

Das Polynom der Gruppe $A^{r_1} C^b$ berechnet sich nun aus

$$E^{f(x)+x^b f(x)+\cdots+x^{(r_1-1)b} f(x)}\, S^{r_1 b} = E^{g(x)+x^{r_1} g(x)+\cdots+x^{(b-1)r} g(x)}\, S^{r_1 b}$$

zu

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{r_1,b}(x) &= f(x)\frac{x^{r_1 b}-1}{x^b-1} - g(x)\frac{x^{r_1 b}-1}{x^{r_1}-1} \\ &= \frac{x^{r_1 b}-1}{(x^b-1)(x^{r_1}-1)}\left(f(x)\,x^{r_1} - f(x) - g(x)\,x^b + g(x)\right)\end{aligned}$$

und ist andererseits nach Induktionsannahme $= \dfrac{(x^{r_1 b}-1)(x-1)}{(x^{r_1}-1)(x^b-1)}$, woraus man die Beziehung

$$f(x)x^{r_1} - f(x) - g(x)x^b + g(x) = h(x) = x-1$$

erhält. Mithin ist gezeigt, daß für alle Torusknotengruppen das Polynom die Gestalt

$$\mathfrak{P}_{a,b} = \frac{(x^{ab}-1)(x-1)}{(x^a-1)(x^b-1)}$$

hat.

§ 4. Diskussion der Verschiedenheit der Schlauchknoten über demselben Träger.

Es soll gezeigt werden, daß alle Schlauchknoten über demselben festen Träger mit verschiedenen geordneten Zahlenpaaren im allgemeinen voneinander verschieden sind. Da der Trägerknoten vorgegeben ist, kennen wir $F(x)$, daß die Faktorzerlegung

$$F(x) = a(x)\,p_{\alpha_1}(x) \cdots p_{\alpha_t}(x)$$

habe, wo in $a(x)$ alle Faktoren vereinigt seien, die nicht Kreisteilungspolynome sind. Bei den anderen Faktoren sei mit $p_{\alpha_i}(x)$ das zum $\alpha_i$ten Teilungsgrad gehörige irreduzible Kreisteilungspolynom bezeichnet. Dann ist

$$F(x) = a(x^n) p_{\alpha_1}(x^n) \cdots p_{\alpha_t}(x^n)$$

und wenn man in den vorgegebenen $\mathfrak{P}(x)$ alle Faktoren, die nicht Kreisteilungspolynome sind, zusammenfaßt, hat man sofort das Polynom $\overline{a}(x^n)$ und damit n erkannt. Hiernach läßt sich sofort das $F(x^n)$ als Faktor abspalten. Unter den übrigbleibenden Kreisteilungspolynomen gibt es eines, das zum größten Teilungsgrad γ gehört. Der Quotient $\frac{\gamma}{n}$ ist die zweite gesuchte Zahl w. Ist bei $F(x)$ der Faktor $\overline{a}(x) = 1$, was gewiß nicht bei jeder Knotengruppe der Fall ist (z. B. hat das Polynom des Viererknotens die Gestalt $x^2 - 3x + 1$), so führt die Diskussion von $\mathfrak{P}(x)$, die hier nicht weiter ausgeführt wird, auf höchstens zwei nicht unterscheidbare Typen von Schlauchknoten über K.

§ 5. Verschiedenheit der Braunerschen Schlauchknoten.

Nehmen wir als Trägerknoten den Kreis, so ist der mittels der Zahlen (n_1, m_1) aufgebaute Schlauchknoten erster Stufe ein gewöhnlicher Torusknoten. Mittels weiterer $s-1$ Zahlenpaare $(n_2, m_2) \cdots, (n_s, m_s)$ sei der Prozeß der Schlauchbildung fortgesetzt. Das Polynom dieses sogenannten Schlauchknotens $\mathfrak{S}_s$ $s$ter Stufe lautet dann offenbar:

$$\mathfrak{P}_s(x) = \mathfrak{P}_{n_1, w_1}(x^{n_2 \cdots n_s}) \, \mathfrak{P}_{n_2, w_2}(x^{n_3 \cdots n_s}) \cdots \mathfrak{P}_{n_{s-1}, w_{s-1}}(x^{n_s}) \, \mathfrak{P}_{n_s, w_s}(x),$$

wo die Zahlen w_i erklärt sind als

$$w_i = n_i v_{i-1} + m_i \qquad (i = 1, \cdots, s).$$

Da in unserem Falle alle $\mathfrak{S}_i$ als gleichsinnig verdrillte Zöpfe gelegt sind, ist v_i gleich der Anzahl der Doppelpunkte der Projektion von $\mathfrak{S}_i$. Diese berechnet sich aber rekursiv:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \text{ (für den Kreis } \mathfrak{S}_0), \\ v_i &= v_{i-1} n_i^2 + (n_i - 1) m_i. \end{aligned}$$

Das Polynom $\mathfrak{P}_s$ zerfällt nun in lauter Kreisteilungspolynome $p_\alpha(x)$. Dabei ist unter allen $p_\alpha(x)$, die von $\mathfrak{P}_{n_i, w_i}(x^{n_{i+1} \cdots n_s})$ herrühren, $p_{n_i n_{i+1} \cdots n_s w_i}(x)$ dasjenige, das zum größten Teilungsgrade $\alpha_i = n_i n_{i+1} \cdots n_s w_i$ gehört.

S a t z: *Für jedes i ist α_i größer als die vorhergehende Maximalzahl α_{i-1}, d. h. $w_i > n_{i-1} w_{i-1}$, woraus folgt, daß $w_s n_s$ die größte Zahl aller α ist.*

Zum Beweis eliminiere man die v_i durch die w_i:

$$v_i = \frac{w_{i+1} - m_{i+1}}{n_{i+1}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, s-1)$$

und ersetze die obige Rekursion in den v_i durch die entsprechende in den w_i:

$$\frac{w_{i+1}-m_{i+1}}{n_{i+1}} = n_i^2\,\frac{w_i-m_i}{n_i}+(n_i-1)\,m_i,$$

$$w_{i+1} = m_{i+1}+n_i\,n_{i+1}\,w_i-n_{i+1}\,m_i.$$

Hieraus schließt man $w_{i+1} > n_{i+1}\,n_i w_i - n_{i+1} m_i$,

$$w_{i+1} > n_i w_i\left(n_{i+1}-\frac{n_{i+1}\,m_i}{n_i\,w_i}\right) > n_i w_i\left(n_{i+1}-\frac{n_{i+1}}{n_i}\right),$$

weil $w_i > m_i$ ist; da die n_i stets $\geqq 1$ angenommen werden können, ist schließlich $n_{i+1}-\frac{n_{i+1}}{n_i} \geqq 1$; daher folgt $w_{i+1} > n_i\,w_i$, w. z. b: w.

Ist uns ein beliebiges zu irgendeinem dieser Schlauchknoten gehöriges $\mathfrak{P} = \prod\limits_i p_{\beta i}(x)$ gegeben, so können wir eindeutig die Zahlen n_i, v_i und damit auch n_i, m_i bestimmmen.

Hierzu nehmen wir die größte der Zahlen β_i, die $\beta = n_s\,w_s$ ist und stellen fest, daß infolge von $\mathfrak{P}_{n_s, w_s}(x)$ sämtliche Teiler von β vorkommen müssen bis auf die höchstens, die schon n_s oder w_s teilen. Von diesen sieht man aber leicht, daß wenigstens w_s nicht in den zu irgendeinem $\mathfrak{P}_{n_i, w_i}(x^{n_{i+1}\cdots n_s})$ gehörigen Zahlen β_j vorkommen darf, da in p_{β_i}, das Teiler von $\frac{(x^{n_i\cdots n_s w_i}-1)\,(x^{n_{i+1}\cdots n_s}-1)}{(x^{n_i\cdots n_s}-1)\,(x^{n_{i+1}\cdots n_s w_i}-1)}$ ist, das β_i die Gestalt $\beta_i = n_i'\cdots n_s' w_i'$ hat, wo n_j'/n_j und w_i'/w_i ist. Sollte $\beta_i = w_s$ sein, so müßte $n_s' = 1$ wegen $(w_s, n_s) = 1$; da aber $w_s > n_{s-1}\cdots n_i\,w_i$ nach unserem Satz und erst recht $w_s > n_{s-1}'\cdots n_i'\,w_i'$, ist $\beta_i = w_s$ nicht möglich. Nachdem so eindeutig die Faktorenzerlegung $\beta = n_s\,w_s$ erkannt ist, spalten wir $\mathfrak{P}_{n_s, w_s}(x)$ ab und betrachten das übrigbleibende Polynom, $\mathfrak{P}_{s-1}(x^{n_s}) = \mathfrak{P}_{s-1}(y)$ in y, das zu dem um eine Stufe niedrigeren Schlauchknoten $\mathfrak{S}_{s-1}$ mit den Zahlen $(n_{s-1}, w_{s-1})\cdots(n_1, w_1)$ gehört. Mit ihm führe man dieselbe Diskussion durch usw., bis schließlich die Zahlen n_i, w_i von $\mathfrak{S}_s$ lückenlos in der richtigen Reihenfolge erhalten sind.