

Kennzeichnung der Schlauchverkettungen.

Von WERNER BURAU in Hamburg.

Es ist bekannt, daß eine Singularität algebraischer Kurven, die aus r Zweigen besteht, d. h. durch r Puiseuxentwicklungen beschrieben werden kann, sich topologisch im kleinen als Fläche im R_4 wie ein bestimmter Verkettungstypus von r Schlauchknoten verhält¹⁾. Von den Herren BRAUNER und KÄHLER ist a. a. O. gezeigt worden, wie man den metrischen Aufbau der betreffenden Verkettung aus den Reihenentwicklungen der Zweige beschreiben kann. In Ergänzung zu der früheren Arbeit über Schlauchknoten²⁾ beschäftigen wir uns im folgenden mit dem Typus von Verkettungen zweier beliebigen Schlauchknoten, wie er bei den Singularitäten auftritt und folgendermaßen erklärt werde: Wir gehen von einem durch die Zahlen $(n_1, m_1), \dots, (n_i, m_i)$ wie in K. S. 1 definierten Schlauchknoten i -ter Stufe \mathfrak{C}_i aus und erweitern ihn zu einem solchen $(i+1)$ -ter Stufe \mathfrak{C}_{i+1} mittels des weiteren Zahlenpaares (n_{i+1}, m_{i+1}) , wobei auch $n_{i+1} = 1$, d. h. \mathfrak{C}_{i+1} isotop \mathfrak{C}_i sein kann, und nehmen die sog. Seele \mathfrak{C}'_i von \mathfrak{C}_{i+1} hinzu, die mit \mathfrak{C}_i isotop ist. Aus \mathfrak{C}'_i werde weiterhin mittels der Zahlen $(n'_{i+1}, m'_{i+1}), \dots, (n'_t, m'_t)$ der Schlauchknoten t -ter Stufe \mathfrak{C}'_t gebildet, der ganz im Innern der letzten $((i+1)$ -ten) Schlauchfläche von \mathfrak{C}_{i+1} liegt; desgleichen werde \mathfrak{C}_{i+1} mittels $(n_{i+2}, m_{i+2}), \dots, (n_s, m_s)$ zu \mathfrak{C}_s verlängert.

Nach Aufstellen der Gruppe dieser Verkettung von \mathfrak{C}_s und \mathfrak{C}'_i und ihrer Polynomvariante $\mathfrak{P}(x, y)$, die in einer vorhergehenden Arbeit³⁾ von REIDEMEISTER und SCHUMANN allgemein eingeführt ist, in den §§ 1—3 wird in § 4 gezeigt, wie man aus der Kenntnis der Invarianten beider Kurven für sich genommen und des Polynoms $\mathfrak{P}(x, y)$ die Verkettung kennzeichnen, d. h. erkennen kann, bis zu welcher Stelle der Aufbau der beiden Schlauchknoten übereinstimmt, ob bei dem einen von ihnen ein Zahlenpaar $(n_{i+1} = 1, m_{i+1})$, das ja für den Knoten allein keine topologische Bedeutung hat, einzufügen ist, ferner welche der beiden Kurven als „innere“ und welche als „äußere“ zu betrachten ist; letzterer Unterschied besteht in evidentester Weise nur in den Fällen $n_{i+1} = 1$ sowie $n_{i+1} = n'_{i+1}$, $m_{i+1} = m'_{i+1}$, und bei $i = 0$ nicht⁴⁾.

¹⁾ Vgl. BRAUNER, Hamb. Abh., Bd. 6, p. 1. KÄHLER, Math. Zeitschr. 31.

²⁾ Vgl. BURAU, Hamb. Abh., Bd. 9, p. 125, zitiert mit K. S. 1.

³⁾ REIDEMEISTER und SCHUMANN, Hamb. Abh., Bd. 10, p. 256.

⁴⁾ Zu K. S. 1, Einleitung, sei hier noch berichtet: es sind nicht die Zahlen (n_i, m_i) , sondern (n_i, w_i) , wie auch aus der Diskussion hervorgeht. Invarianten, wobei es auf

Eine hierher gehörige Verkettung von r Kurven ($r > 2$) wird nun offenbar vollkommen beherrscht, wenn man die $\binom{r}{2}$ darin enthaltenen Verkettungen von je zwei Kurven kennzeichnen kann. Denn alsdann läßt sich der metrische Aufbau der Gesamtverkettung sofort konstruieren.

§ 1. Aufstellung gewisser Verkettungsgruppen.

Vorgegeben sei ein beliebiger Knoten \mathfrak{K} in einer normierten orientierten Projektion, aus der man die Wirtingerschen Relationen seiner Wegegruppe

$$P_{i+1} = P_{\mu_i}^{\varepsilon_i} P_i P_{\mu_i}^{-\varepsilon_i} \quad (i = 1, \dots, g); \quad P_{g+1} = P_1$$

in den einmal umschlingenden Erzeugenden P_i in bekannter Weise entnimmt. Dieser Knoten werde dann zu einer Parallelverkettung von $n + 1$ nebeneinander liegenden Kurven gemacht (siehe K. S. 1, p. 125), deren Gruppe von den Elementen $(C_i^{(n)}, \dots, C_i^{(1)}, C_i^{(0)})$ ($i = 1, \dots, g + 1$) mit den Relationen:

- (1) $C_{j+1}^{(q)} = (C_{\mu}^{(n)} \dots C_{\mu_j}^{(0)})^{\varepsilon_j} C_j^{(q)} (C_{\mu_j}^{(n)} \dots C_{\mu_j}^{(0)})^{-\varepsilon_j}$,
- (2) $C_1^{(q)} = C_{g+1}^{(q)} \quad (j = 1, \dots, g; q = 0, 1, \dots, n)$

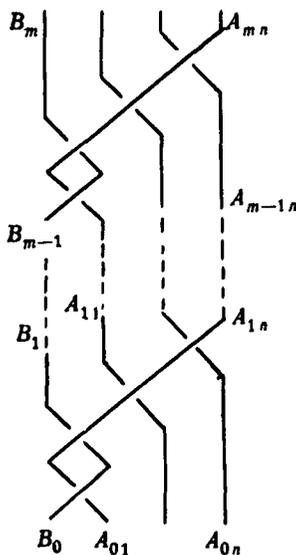


Fig. 1.

erzeugt wird. Schiebt man nun an eine Stelle, etwa da, wo die Kurvenstücke mit den Erzeugenden $C_1^{(q)}$ sich befinden, einen Zopf nebenstehender Art ein, der durch die Zahl m beschrieben wird, so liegt, wofern $(n, m) = 1$ ist, die Verkettung eines Parallelknotens mit seiner Seele vor. Die Gruppe dieser Verkettung wird nun ebenfalls durch die $C_i^{(q)}$ mit den Relationen (1) erzeugt. Statt (2) treten jedoch Ausdrücke, die sich nach Fig. 1 rekursiv folgendermaßen berechnen; man hat zunächst:

$$B_{i+1} = B_i^{-1} A_{i1}^{-1} B_i A_{i1} B_i,$$

$$A_{i+1n} = B_i^{-1} A_{i1} B_i,$$

$$A_{i+1j} = B_i^{-1} A_{i1}^{-1} B_i A_{ij+1} B_i^{-1} A_{i1} B_i \quad (j < n);$$

ist $m = kn + r$, so ergibt dies:

die Reihenfolge der ersten beiden nicht ankommt. Ferner sei bemerkt, daß unsere an der Projektion erklärte Zählung von m_i nicht mit der aus den Singularitäten räumlich gewonnenen übereinstimmt, sondern für denselben Knoten in leicht ersichtlicher Weise größere Werte ergibt.

d. h.

$$(I) \quad Q^{n\lambda} C_0^{m\lambda} T^{-n\lambda} P_1^{-m\lambda} = 1$$

(wobei benutzt wird, daß in der Gruppe \mathfrak{K} $T \leftrightarrow P_1$) und

$$(\delta'') \quad Q = C_0^{-k-1} Q^{r\lambda} C_0^{r\lambda+1} T^{-r\lambda} P_1^{-r\lambda} [Q^{n\lambda} C_0^{n\lambda+1} T^{-n\lambda} P_1^{-n\lambda}]^k T,$$

d. h. unter Benutzung von (I) und $C_0 \leftrightarrow Q$:

$$(II) \quad \begin{aligned} Q^{r\lambda-1} C_0^{r\lambda-k} T^{-r\lambda+1} P_1^{-r\lambda+k} &= 1, \\ Q^{(m-nk)\lambda-1} C_0^{(m-nk)\lambda-k} T^{-(m-nk)\lambda+1} P_1^{-(m-nk)\lambda+k} &= 1, \\ Q^{m\lambda} C_0^{m\lambda} T^{-m\lambda} P_1^{-m\lambda} &= 1. \end{aligned}$$

Da $(\lambda, \lambda) = 1$ ist, sind (I) und (II) der einen Relation $C_0^m Q^n T^{-n} P_1^{-m} = 1$ gleichwertig, woraus sich auch (γ'') als leichte Folgerung ergibt.

Die Gruppe unserer Verkettung erhält man also, wenn man zu der des Ausgangsknotens \mathfrak{K} die Erzeugenden Q und C_0 mit den Relationen

$$(III) \quad \boxed{\begin{aligned} C_0^m Q^n T^{-n} P_1^{-m} &= 1, \\ C_0 Q C_0^{-1} Q^{-1} &= 1 \end{aligned}}$$

hinzunimmt.

Betrachten wir schließlich noch diejenige Verkettung von zwei Kurven, die aus einer vorgegebenen \mathfrak{B} der Knoten \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' dadurch entsteht, daß man eine der Kurven, etwa \mathfrak{C} , zu einem Parallelknoten erweitert, der an der vorgelegten Projektion von \mathfrak{C} mittels des Zahlenpaares $(m, n) = 1$ erklärt ist und in genügend kleiner Umgebung von \mathfrak{C} verbleibt. Dann zeigen dieselben Überlegungen wie in K. S. 1, § 1, wo nur ein Knoten vorhanden war, daß die Gruppe der neuen Verkettung dadurch gewonnen werden kann, daß zu den Erzeugenden und Relationen der alten eine neue Erzeugende Q nebst der Relation

$$(IV) \quad Q^n = T^n B_1^n$$

hinzugefügt wird. T stellt auch hier wieder, in der Gruppe der Ausgangsverkettung gedeutet, einen Parallelweg zur Kurve \mathfrak{C} und B_1 ein einmal umschlingendes Element derselben dar, so daß die rechte Seite von (IV) den Parallelknoten als Weg im Außenraum der Verkettung \mathfrak{B} angibt.

§ 2. Polynom für die Verkettung eines Parallelknotens mit seiner Seele.

Um nun das L -Polynom für eine gegebene Verkettung von zwei Kurven¹⁾ zu berechnen, hat man zunächst in der Gruppe lauter Kom-

mutatoren bis auf zwei je einmal positiv umschlingende Elemente S_1, S_2 einzuführen, dann die Exponentenmatrix der in den vertauschbar gemachten

$$S_1^a S_2^b E_i S_2^{-b} S_1^{-a} \equiv E_i^{x^a y^b}$$

und

$$S_1^a S_2^b S_1 S_2 S_1^{-1} S_2^{-1} S_2^{-b} S_1^{-a} \equiv K^{x^a y^b}$$

geschriebenen Relationen und deren Determinante aufzustellen {die Matrix kann als quadratisch angenommen werden}. Führen wir dies für die im vorigen Paragraphen betrachtete Verkettung eines Parallelknotens mit seiner Seele durch, so hat man zunächst in der Gruppe \mathfrak{R} des Trägers $P_i = E_i P_1$ zu setzen und die ersten Relationen in den $B_1^b E_i B_1^b = E_i^{x^b}$ zu schreiben, so daß sie das Polynom der Gruppe \mathfrak{R} liefern. Dann setzen wir $Q = Q_1 T$ und $P_1 = P_1' C_0$, so daß die erste neu hinzutretende Relation (III) sich, kommutativ gemacht, als

$$(6) \quad Q_1^n = P_1'^m$$

schreibt. Man hat daher statt Q_1 und P_1' das einmal umschlingende Element S_1 wie in der Torusknotengruppe (6) einzuführen; hierbei werde dann

$$P_1' = E_1^{p(x)} S_1^n$$

und

$$Q_1 = E_1^{q(x)} S_1^m$$

d. h.

$$P_1 = E_1^{p(x)} S_1^n S_2$$

gesetzt, wo die Schreibweise $S_1^q E_1 S_1^{-q} = E_1^{x^q}$ bereits gebraucht und $C_0 = S_2$ geschrieben sei. Dann ist

$$P_1^q = E_1^{p(x) \frac{1-x^{p^n} y^q}{1-x^n y}} K^q S_1^{qn} S_2^q \quad \{K = S_2 S_1 S_2^{-1} S_1^{-1}\},$$

was aber in der Abelschen Kommutatorgruppe bedeutet, überall $E_i^{x^p}$ durch $E_i^{x^{pn} y^q}$ zu ersetzen. Nur in den neuen Relationen tritt das K und E_1 wirklich auf, und zwar ergeben sich die zugehörigen Exponenten folgendermaßen: Es sei

$$T = E_2^{\varepsilon_2(x)} \dots E_g^{\varepsilon_g(x)} P_1^v$$

in der Gruppe \mathfrak{R} ,

so daß

$$Q = Q_1 T = E_1^{q(x) + x^m p(x) \frac{1-x^{vn} y^q}{1-x^n y}} \times E_2^{x^m \varepsilon_2(x^n \cdot y)} \dots K \left[x^n \frac{1-x^n}{1-x} + x^{2n} \frac{1-x^n}{1-x} \frac{1-y^2}{1-y} + \dots + x^{vn} \frac{1-x^n}{1-x} \frac{1-y^{v-1}}{1-y} \right] x^m S_1^{nv+m} S_2^v$$

da

$$S_1^{\rho n} S_2^{\rho} S_1^{\rho n} S_2^{\rho} = K^{x^{\rho n} \frac{1-x^*}{1-x} \frac{1-y^{\rho}}{1-y}} S_1^{(q+1)n} S_2^{\rho+1}$$

ist. Werden dann die Relationen (III) zu:

$$\begin{aligned} E_1^{\epsilon_1} K^x E^2 \dots &= 1, \\ E_1^{\epsilon_1'} K^{x'} E_2^{\epsilon_2'} \dots &= 1, \end{aligned}$$

so ist darin:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^w y^v} \left[q + p \frac{x^m - x^w y^v}{1-x^n y} \right] - p \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^n y}, \\ \epsilon_1' &= (1-y) \left[q + p \frac{x^m - x^w y^v}{1-x^n y} \right], \\ x &= -\frac{1-x^n}{(1-x)(1-y)} \left[\frac{x^m - x^w}{1-x^n} - \frac{x^m - x^w y^v}{1-x^n y} \right] \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^w y^v} \\ &\quad - \frac{1-x^w}{(1-x)(1-y)} \left[\frac{1-x^{nw}}{1-x^w} - \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^w y^v} \right] \\ &\quad + \frac{1-x^{nw}}{(1-x)(1-y)} - \frac{1-x^n}{(1-x)(1-y)} \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^n y}, \\ x' &= (1-y) \left[\frac{x^w - x^m}{(1-x)(1-y)} + \frac{x^m - x^m y^v}{1-x^n y} \frac{1-x^n}{(1-x)(1-y)} \right] \\ &\quad - \frac{1-x^w}{1-x}. \end{aligned}$$

Unser gewünschtes Polynom ist dann $= \mathfrak{P}(x^n \cdot y) \begin{vmatrix} \epsilon_1 & x \\ \epsilon_1' & x' \end{vmatrix}$, wenn $\mathfrak{P}(t)$ das des Trägerknotens bedeutet. Zeilenkombination ergibt für die Determinante die einfachere Gestalt:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} -p \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^n y}, & -\frac{1-x^n}{(1-x)(1-y)} \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^n y} \\ \left(q + p \frac{x^m - x^w y^v}{1-x^n y} \right) (1-y), & \frac{1-x^m}{1-x} + \frac{1-x^n}{1-x} \frac{x^m - x^w y^v}{1-x^n y} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^n y} \begin{vmatrix} -p, & -\frac{1-x^n}{(1-x)(1-y)} \\ q \cdot (1-y), & \frac{1-x^m}{1-x} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1-x^{nw} y^{wv}}{1-x^n y} \left[-p \frac{1-x^m}{1-x} + q \frac{1-x^n}{1-x} \right]. \end{aligned}$$

Da nun zufolge der Herkunft von $p(x)$ und $q(x)$ $p \cdot \frac{1-x^{nm}}{1-x^n} - q \frac{1-x^{nm}}{1-x^m}$ das Polynom des Torusknotens mit dem Zahlenpaar (m, n) bedeutet,

dies aber andererseits (siehe K. S. 1, p. 131) $= \frac{(1-x^{nm})(1-x)}{(1-x^m)(1-x^n)}$ ist, folgt, daß

$$-(1-x^m)p + (1-x^n)q = x-1,$$

so daß wir in

$$\mathfrak{B}_1(x, y) = \mathfrak{B}(x^n \cdot y) \frac{1-x^{nv}y^v}{1-x^n y}$$

unser gewünschtes Verkettungspolynom haben.

§ 3. Polynom für die Verkettung eines Parallelknotens mit einer Kurve im Außenraum des Trägerschlauchs.

Vorgelegt sei uns eine beliebige Verkettung \mathfrak{B} von 2 Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$, aus deren Gruppe bereits das Polynom berechnet sei, nach Einführung der Erzeugenden A_1, S_2, E_i , wovon A_1 die Kurve \mathfrak{C}_1 und S_2 \mathfrak{C}_2 einmal umschlingen mögen. Verwandelt man dann \mathfrak{C}_1 in einen Parallelknoten \mathfrak{C}'_1 über \mathfrak{C}_1 , mittels der Zahlen (n, m) , so lautet die nach § 1 nebst der Erzeugenden Q neu hinzutretende Relation:

$$Q'' = T'' A_1^m,$$

was in der abelsch gemachten Gruppe zu

$$Q'' = A_1^{nv+m} S_2^c$$

wird, wo v und c angeben, wievielmals in der Ausgangsverkettung der Parallelweg T zu \mathfrak{C}_1 die Kurven \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 umschlingt ($c =$ sog. Verschlingungszahl der Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$). Setzt man $Q = Q' S_2^c$, so hat man ebenso wie in der Torusknotengruppe $Q'' = A_1^n$ statt Q' , A_1 die Elemente E, S_1 einzuführen, wo jetzt S_1 die neue Kurve \mathfrak{C}'_1 einmal umschlingt, und zwar sei:

$$Q' = E^{q(x)} S_1^u, \quad A_1 = E^{a(x)} S_1^n.$$

Lautete in der alten Gruppe in Operatoren eine Relation

$$\dots E_i^{\varepsilon_i(x, y)} \dots K^{\alpha(x, y)} = 1,$$

wo also $K_1 = S_2 A_1 S_2^{-1} A_1^{-1}$ und $A_1^\alpha S_2^\beta E_i S_2^{-\beta} A_1^{-\alpha} = E^{x^\alpha y^\beta}$ gesetzt sei, so tritt jetzt dafür:

$$\dots E_i^{\varepsilon_i(x'', y)} \dots (S_2 E^{u(x)} S_1^n S_2^{-1} S_1^{-n} E^{-a(x)})^{\alpha(x, y)} = 1,$$

d. h.

$$\dots E_i^{\mathfrak{E}_i(x^n, y)} \dots E^{a(x)(y-1)x(x, y)} K \frac{1-x^n}{1-x} z(x^n, y) = 1.$$

Addiert man also die mit $\frac{(1-x)(1-y)}{1-x^n} a(x)$ multiplizierte K - zu der E -Spalte, so wird letztere zu 0, und die Determinante der übrigen hat den Wert $\frac{1-x^n}{1-x} \mathfrak{P}(x^n, y)$, wo $\mathfrak{P}(x, y)$ das Polynom der Ausgangsverkettung darstellt. Tut man dasselbe mit der letzten Zeile, so wird diese, die ursprünglich

$$E^{q(x) \frac{1-x^{nw} y^{nc}}{1-x^w y^c}} K \frac{1-x^{nw}}{(1-x)(1-y)} \frac{1-x^w}{(1-x)(1-y)} \frac{1-x^{nw} y^{nc}}{1-x^w y^c} \\ E^{-a(x)(y-1)z_1(x, y) - a(x) \frac{1-x^{nw}}{1-x^n}} K \frac{1-x^n}{1-x} z_1(x, y) E_i \dots = 1$$

lautete, zu

$$E^{q(x) \frac{1-x^{nw} y^{nc}}{1-x^w y^c} - a(x) \frac{1-x^w}{1-x^n} \frac{1-x^{nw} y^{nc}}{1-x^w y^c}} \dots = 1.$$

Mithin hat unser gewünschtes Polynom die Darstellung:

$$\mathfrak{P}(x^n, y) \frac{1-x^{nw} y^{nc}}{1-x^w y^c},$$

da

$$q(x) \frac{1-x^{nw}}{1-x^w} - a(x) \frac{1-x^{nw}}{1-x^n} = \frac{(1-x^{nw})(1-x)}{(1-x^n)(1-x^w)}$$

ist.

§ 4. Verschiedenheit der Schlauchverkettungen.

Die in den vorigen Paragraphen gegebenen Produktdarstellungen gestatten nun sofort, das Polynom für den allgemeinsten in der Einleitung beschriebenen Verkettungstypus zweier Schlauchknoten anzugeben, wie er bei den Singularitäten auftritt. Betrachten wir nämlich einen Schlauchknoten i -ter Stufe \mathfrak{C}_i , dessen Projektion aus einer regulären Kreisprojektion unter Verwendung der geordneten Zahlengruppe $(n_1, m_1), \dots, (n_i, m_i)$ entstanden sei. Sein Polynom, das in K. S. 1. aufgestellt ist, laute $\mathfrak{Q}_i(x)$; dann hat nach § 3 die Verkettung, die der über \mathfrak{C}_i mittels weiterer Zahlen (n_{i+1}, m_{i+1}) erklärte Parallelknoten \mathfrak{C}_{i+1} mit seiner Seele \mathfrak{C}'_i bildet, das Polynom:

$$\mathfrak{Q}_i(x^{n_{i+1}} y) \frac{1-x^{n_{i+1}v_{i+1}} y^{w_{i+1}}}{1-x^{n_{i+1}} y},$$

wo $w_{i+1} = n_{i+1} v_{i+1} + m_{i+1}$ wie in K. S. 1 zu erklären ist. Wird die Seele \mathfrak{C}'_i mittels (n'_{i+1}, m'_{i+1}) zu einem Parallelknoten \mathfrak{C}'_{i+1} erweitert, so lautet das Polynom

Die hierher gehörige Verkettung zweier Kreise, die als Zweierkopf von der einfachsten Art ist, wird offenbar durch die Verschlingungszahl d gekennzeichnet, die als $d = \mathfrak{P}(1, 1)$ aus dem Polynom $\mathfrak{P}(x, y) = \frac{1 - x^d y^d}{1 - x y}$ zu entnehmen ist. Diese Verkettung läßt sich als die eines Torusknotens $(1, d)$ mit seiner Seele auffassen; wird letztere mittels (n, m) zu einem Torusknoten erweitert, so lautet nach § 3 das neue Polynom:

$$\mathfrak{P}(x, y) = \frac{1 - x^d y^{n'd}}{1 - x y^{n'}} \frac{1 - x^{dn'} y^{m'n'}}{1 - x^d y^{m'}} = (1 + x y^{n'} + \dots)(1 + x^d y^{m'} + \dots).$$

Es ist $k = \mathfrak{P}(1, 1) = n'd$, woraus zu erkennen ist, ob $d = 1$ oder > 1 . Im letzteren Fall liefert dann das Glied $x y^{n'}$ die ausgezeichnete Zahl n und $\frac{k}{n'}$ den genauen Wert von d . Die Verkettung, die der Torusknoten (n, m) mit seiner inneren Seele bildet, hat das Polynom $\frac{1 - x^m y^{nm}}{1 - x y^n}$, von derselben Gestalt wie das eben aufgestellte für $d = 1$, $n = m'$, $m = n'$. Beide Verkettungen sind indes, wie man sich leicht überlegt, isotop.

Wird nun der unseren Torus außen d -mal umschlingende Kreis ebenfalls mittels eines Zahlenpaares (n, m) zu einem Torusknoten erweitert, so geht das Polynom über in:

$$\mathfrak{P}(x, y) = \frac{1 - x^{nd} y^{n'd}}{1 - x^n y^{n'}} \frac{1 - x^{ndn'} y^{m'n'}}{1 - x^{nd} y^{m'}} \frac{1 - x^{mn} y^{n'dn}}{1 - x^m y^{n'd}}.$$

Hieraus ersieht man zunächst, daß nur bei $d > 1$ ein einziges Glied $x^n y^{n'}$ vorhanden ist, d. h. ein solches, in dem die Exponenten je eine Zahl aus den mit den einzelnen Knoten schon bekannten Paaren (n, m) , (n', m') darstellen; der Wert von d ergibt sich dann als $\frac{\mathfrak{P}(1, 1)}{n n'}$. Bei $d = 1$ liefern die dann auftretenden Glieder $x^n y^{m'}$ und $x^{m'} y^n$ mit $\mathfrak{P}(1, 1) = n n'$ zusammen die Auszeichnung der Kombination n, n' . Nur wenn $n n' = m m'$, d. h. $n = m', n' = m$, lassen sich zwei äußerlich verschiedene Verkettungen dieser Art nicht unterscheiden, die aber ersichtlich auch topologisch identisch sind. Wegen der topologischen Gleichwertigkeit von Innen- und Außenraum des Torus ist es ferner einleuchtend, daß der Verkettungstypus zweier Torusknoten, wobei der Torus von \mathfrak{Z}' im Innern des von \mathfrak{Z} statt wie soeben im Äußern liegt, sich hiervon nicht unterscheiden läßt und in der Tat auf denselben Polynomtypus führt.

Zwei gleiche Torusknoten $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ mit den charakteristischen Zahlen n, m können schließlich so miteinander verkettet sein, daß \mathfrak{Z} als Schlauch-

knoten (n, m) , $(1, d)$ aufgefaßt wird mit \mathfrak{T}' als Seele. Dann hat das Polynom:

$$\mathfrak{P}(x, y) = \mathfrak{P}^{n,m}(x \cdot y) \frac{1 - x^{(n-1)m+d} y^{(n-1)m+d}}{1 - x y}.$$

wo

$$\mathfrak{P}^{n,m}(t) = \frac{(1-t^n)(1-t^m)}{(1-t)(1-t^{nm})} = 1 - t + \dots$$

ist. Durch das Vorhandensein eines Gliedes xy unterscheidet sich dieser Verkettungsfall sofort von den soeben behandelten. Weiterhin kann man aus $\mathfrak{P}(1, 1) = kd$ zu $k - (n-1)m$ oder $k - (m-1)n$ errechnen; je nachdem die Schlauchfläche, auf der man \mathfrak{T} mit \mathfrak{T}' als Seele gelegt hat, als Zopf von m oder n Fäden projiziert wird, hat man in der Tat für d den einen oder andern dieser Werte zu setzen.

Der Diskussion des allgemeinen Falles seien nun folgende Bemerkungen vorangestellt:

1. Das Polynom jedes Schlauchknotens beginnt mit den Gliedern $1 - x$, was für Torusknoten bereits oben verwandt wurde und allgemein dann sofort aus der Produktdarstellung des Schlauchknotenpolynoms folgt;
2. es gilt für jeden Schlauchknoten mit den Aufbauzahlen $(n_1, m_1) \dots (n_s, m_s)$, daß $w_j > n_j w_{j-1}$ für $j = 1, \dots, s$. Denn nach K. S. 1, p. 133, gilt die Rekursion:

$$w_j = m_j > n_j n_{j-1} w_{j-1} - n_j m_{j-1},$$

d. h. $w_j > n_j w_{j-1}$, da $n_{j-1} > 1$.

Betrachtet man nun unser allgemeines Polynom, so sieht man, daß es die Gestalt

$$\mathfrak{P}(x, y) = (1 - x \dots) \prod_i (1 + x^{a_i} + \dots + x^{(b_i-1)a_i})$$

hat. Die Glieder mit niedrigsten Exponenten im Produkt sind daher die der einzelnen Faktoren. Nähere Betrachtung des Polynoms zeigt dann unter Anwendung unserer Bemerkungen, daß in dem Gliede $x^{n_{i+1} \dots n_s} y^{n'_{i+1} \dots n'_i}$ die Zahl $\alpha = n_{i+1} \dots n_s <$ alle andern in $\mathfrak{P}(x, y)$ vorkommenden x -Exponenten, dgl. $\beta = n'_{i+1} \dots n'_i <$ alle y -Exponenten ist. Dies erleidet höchstens bei $i = 0$ eine Ausnahme, da dann auch das Glied $x^{m_1 n_2 \dots n_s} y^{m'_1 n'_2 \dots n'_i}$ auftritt. In jedem Fall erkennt man jedoch den Wert i der Verkettung an diesen Gliedern, da die Invarianten $(n_1, w_1), \dots, (n_s, w_s)$ die Produkte $n_s, n_s n_{s-1}, \dots, n_s \dots n_2 n_1$ (bzw. $n_s \dots n_2 m_1$) und analog für den gestrichelten Knoten anzugeben gestatten. Nehmen wir zuerst $i > 0$ an, so rechne man die Verschlingungszahl $k = \mathfrak{P}(1, 1)$ aus; sie muß $k = w_{i+1} n'_{i+1} \dots n'_i n_{i+1} \dots n_s$ sein derart,

daß $\frac{\alpha\beta}{(k, \alpha\beta)} = n_{i+1}$ und $\frac{k}{(k, \alpha\beta)} = w_{i+1}$ ist, wo $(k, \alpha\beta) = 1$ g. T. von k und $\alpha\beta$ bedeutet. Hieraus ist sofort zu ersehen, ob $n_{i+1} = 1$ ist oder nicht. Bei $n_{i+1} > 1$ hat man dann sofort die Auszeichnung von \mathfrak{C}'_i vor \mathfrak{C}_s als innerer Kurve, außer wenn $n_{i+1} = n'_{i+1}$ und $m_{i+1} = m'_{i+1}$, wo die $i+1$ -te Näherungskurve \mathfrak{C}'_{i+1} liegt, deformieren läßt. Ist $n_{i+1} = 1$ festgestellt, so kommen für das zugehörige m_i zwei Werte in Frage, die aus der zweiten oben ermittelten Zahl w_{i+1} als $m_{i+1} = w_{i+1} - v_i$ zu errechnen sind, wobei v_i als Überkreuzungszahl des i -ten Näherungsknotens \mathfrak{C}_i , je nachdem \mathfrak{C}_1 als Zopf von n_1 oder m_i Fäden vorliegt, verschieden zu berechnen ist. Im Falle $i = 0$ schließlich besteht ebenfalls keine Auszeichnung der Kurven voreinander; ist $n_1 = 1$ und das zugehörige $m_1 > 1$, so ist auch hier wie in dem zuerst behandelten Fall zweier Torusknoten das Glied $x^{n_1 \cdots n_s} y^{n'_1 \cdots n'_i}$ und damit $\alpha\beta = n_1 \cdots n_s n'_1 \cdots n'_i$ eindeutig festzustellen und der Wert von m_1 zu berechnen. Bei $n_1 > 1$ sowie bei $n_1 = 1, m_1 = 1$ sind die Glieder $x^{n_1 \cdots n_s} y^{n'_1 \cdots n'_i}$ und $x^{m_1 n_2 \cdots n_s} y^{m'_1 n'_2 \cdots n'_i}$ als gleichberechtigt heranzuziehen, und wiederum wird hierdurch eine doppelte Auffassungsweise derselben Verkettung wiedergegeben.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß von den Verkettungen, die sich hierbei unter verschiedener Zahlenbeschreibung als isotop erwiesen, höchstens eine bei den Singularitäten realisiert werden kann, wie sich aus den Ungleichheitsbeziehungen, die dort bestehen müssen, leicht ergibt⁵⁾.

⁵⁾ Siehe ¹⁾.