Über Verkettungsgruppen.

Von WERNER BURAU in Hamburg.

Von Herrn REIDEMEISTER[1]) ist eine gruppentheoretische Konstruktion angegeben worden, die es gestattet, in einfacher Weise einer Verkettungsgruppe Polynominvarianten zu entnehmen. Sei eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben in den Erzeugenden $A_1, \cdots, A_n$ und Relationen $R_i(A) = 1$, und sei $\mathfrak{G}$ homomorph zu einer abelschen Gruppe $\mathfrak{F}$, wobei in $\mathfrak{G}$ A_i über S_i stehe, so bilde man das freie Produkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ und stelle in $\mathfrak{P}$ die durch die Relationen $A_i S_i^{-1} = 1$ definierte invariante Untergruppe $\mathfrak{J}$ auf. $\mathfrak{J}$ schreibt sich, vertauschbar gemacht, als Gruppe mit den $A_i S_i^{-1} = H_i$ als Erzeugenden und den $x_1, \cdots, x_n$ als Operatoren, wobei $S_1^{s_1} \cdots S_n^{s_n} H_i S_n^{-s_n} \cdots S_1^{-s_1} = H_i^{x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}}$ gesetzt ist und die Exponenten modulo den Relationen von $\mathfrak{F}$ zu verstehen sind. Aus der Exponentialmatrix dieser Operatorgruppe lassen sich dann Polynominvarianten der Gruppe $\mathfrak{G}$ bilden, worunter das sog. L-Polynom der Verkettung vorkommt, wenn $\mathfrak{G}$ eine Verkettungsgruppe und $\mathfrak{F}$ zur Faktorkommutatorgruppe isomorph ist. In diesem Fall oder allgemeiner bei Gruppen, die zu einer freien abelschen Gruppe homomorph sind, lassen sich auch der durch diesen Homomorphismus definierte Normalteiler $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ [speziell die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$] als Gruppe mit Operatoren schreiben und aus deren Exponentialmatrix Polynominvarianten als Elementarteiler entnehmen. Es handelt sich im folgenden darum, diese Operatorgruppe aufzustellen und ihren Zusammenhang mit der erstgenannten zu klären, wobei es sich zeigen wird, daß die Elementarteiler ihrer Matrizen übereinstimmen.

§ 1. Die Kommutatorgruppe der freien Gruppe.

Durch passende Wahl der Erzeugenden $E_1, \cdots, E_{n-r}, A_1, \cdots, A_r$ unserer Ausgangsgruppe $\mathfrak{G}$ sei bereits erreicht, daß in dem Homomorphismus zu der von $S_1, \cdots, S_r$ erzeugten freien abelschen Gruppe $\mathfrak{F}$ A_i über S_i, und die E_i über der Identität stehen. Dann können wir unter Erfüllung der Schreierschen Bedingung die Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach dem zu dem Homomorphismus gehörigen Normalteiler $\mathfrak{U}$ durch die Elemente $A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_i = 0, \pm 1, \cdots)$ repräsentieren. Nach dem Verfahren, Untergruppen aufzustellen[2]), wird dann $\mathfrak{U}$ erzeugt von:

$$E_{i;\alpha_1,\cdots,\alpha_r} \equiv A_1^{\alpha_1} \cdots A_r^{\alpha_r} E_i A_r^{-\alpha_r} \cdots A_1^{-\alpha_1}$$

[1]) Siehe REIDEMEISTER-SCHUMANN, diese Abh. Bd. 10 (1934), p. 256.

[2]) Siehe REIDEMEISTER, Lehrbuch der Topologie (Braunschw. 1932), 3. Kap.

sowie

(1) $U_{\alpha_1\cdots\alpha_r;i} \equiv A_1^{\alpha_1}\cdots A_r^{\alpha_r} A_i A_r^{-\alpha_r}\cdots A_i^{-\alpha_i-1}\cdots A_1^{-\alpha_1} (\alpha_i = 0, \pm 1, \cdots)$.

Für $E_{i;\alpha_1,\cdots,\alpha_r}$ schreiben wir wieder in bekannter Weise $E_i^{x_1^{\alpha_1}\cdots x_r^{\alpha_r}}$, die U hingegen, die nach Schreier ein freies Erzeugendensystem für die Kommutatorgruppe der von $A_1, \cdots, A_r$ erzeugten freien Gruppe bilden, erfüllen nicht die Bedingung, aus einer endlichen Zahl durch die in U induzierten Automorphismen hervorzugehen. Wir ersetzen sie daher folgendermaßen durch Elemente der Art:

$$A_1^{\alpha_1}\cdots A_r^{\alpha_r} A_j A_i A_j^{-1} A_i^{-1} A_r^{-\alpha_r}\cdots A_1^{-\alpha_1},$$

die dies erfüllen, d.h. durch sämtliche Potenzen $K_{ji}^{x_1^{\alpha_1}\cdots x_r^{\alpha_r}}$ der Kommutatoren

$$K_{ji} \equiv A_j A_i A_j^{-1} A_i^{-1},$$

wobei in der Untergruppe fortab kommutativ gerechnet werden soll:

Vermittels der Beziehungen

$$U_{s_1\cdots s_r+1;i} U_{s_1\cdots s_r;i}^{-1} = K_{ri}^{x_1^{s_1}\cdots x_r^{s_r}}$$

werden alle $K_{ri}^{x_1^{s_1}\cdots x_r^{s_r}}$ $(s_i = 0, \pm 1, \cdots)$ als neue Erzeugende eingeführt und dann $U_{s_1,\cdots,s_r;i}$ durch $K_{ri}^{x_1^{s_1}\cdots x_r^{s_r}}$ und $U_{s_1,\cdots,s_r-1;i}$ bzw. $U_{s_1,\cdots,s_r+1;i}$ ersetzt, je nachdem $s_r > 0$ oder < 0 ist; in Fortsetzung dieses Schrittes kommt man schließlich zu der Substitution:

$$U_{s_1\cdots s_r;i} = K_{ri}^{x_1^{s_1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}\frac{1-x_r^{s_r}}{1-x_r}} U_{s_1\cdots s_{r-1}0;i}.$$

Drückt man analog alle $U_{s_1\cdots s_{r-1}0;i}$ durch $U_{s_1,\cdots,s_{r-2}00;i}$ und die $K_{r-1\,i}^{x_1^{s_1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}}$ aus usf., so führt das schließlich zu der für $s_i = 0, \pm 1, \cdots$ gültigen Einsatzformel:

$$U_{s_1\cdots s_r;i} = K_{ri}^{x_1^{s_1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}\frac{1-x_r^{s_r}}{1-x_r}} \cdots K_{i+1\,i}^{x_1^{s_1}\cdots x_i^{s_i}\frac{1-x_{i+1}^{s_{i+1}}}{1-x_{i+1}}}, \tag{2}$$

da infolge der Schreierschen Bedingung $U_{s_1\cdots s_{i-1}0\cdots 0;i} \equiv 1$ ist. Hierbei sind aber nur für $r = 2$ alle Potenzen von K_{21} eingeführt, die mithin ebenfalls ein freies Erzeugendensystem der Kommutatorgruppe der von A_1, A_2 erzeugten freien Gruppe bilden; bei $r > 2$ gehören hierzu, wie die Herleitung zeigt, nicht die $K_{ji}^{x_1^{s_1}\cdots x_r^{s_r}}$ für $r > j > i$, wobei nicht alle $s_{j+1} = \cdots = s_r = 0$ sind. Nimmt man sie auch noch hinzu, so induziert das folgendermaßen Relationen in den K allein: Es ist

$$\begin{aligned} K_{ji}^{x_1^{s_1}\cdots x_r^{s_r}} &= S_1^{s_1}\cdots S_r^{s_r}\, S_j\, S_i\, S_j^{-1}\, S_i^{-1}\, S_r^{-s_r}\cdots S_1^{-s_1} \\ &= U_{s_1\cdots s_r;j}\, U_{s_1\cdots s_j+1\cdots s_r;i}\, U^{-1}_{s_1\cdots s_i+1\cdots s_r;j}\, U^{-1}_{s_1\cdots s_r;i}; \end{aligned}$$

die U rechts durch die K nach (2) ersetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} K_{ji}^{x_1^{s_1}\cdots x_r^{s_r}} &= K_{rj}^{x_1^{s_1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}\frac{1-x_r^{s_r}}{1-x_r}} \cdots K_{j+1\,j}^{x_1^{s_1}\cdots x_j^{s_j}\frac{1-x_{j+1}^{s_{j+1}}}{1-x_{j+1}}} \\ &\quad K_{ri}^{x_1^{s_1}\cdots x_j^{s_j+1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}\frac{1-x_r^{s_r}}{1-x_r}} \cdots K_{ji}^{x_1^{s_1}\cdots x_{j-1}^{s_{j-1}}\frac{1-x_j^{s_j+1}}{1-x_j}} \cdots K_{i+1\,i}^{x_1^{s_1}\cdots x_i^{s_i}\frac{1-x_{i+1}^{s_{i+1}}}{1-x_{i+1}}} \\ &\quad K_{rj}^{-x_1^{s_1}\cdots x_i^{s_i+1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}\frac{1-x_r^{s_r}}{1-x_r}} \cdots K_{j+1\,j}^{x_1^{s_1}\cdots x_i^{s_i+1}\cdots x_j^{s_j}\frac{1-x_{j+1}^{s_{j+1}}}{1-x_{j+1}}} \\ &\quad K_{ri}^{-x_1^{s_1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}\frac{1-x_r^{s_r}}{1-x_r}} \cdots K_{i+1\,i}^{-x_1^{s_1}\cdots x_i^{s_i}\frac{1-x_{i+1}^{s_{i+1}}}{1-x_{i+1}}} \\ &= K_{rj}^{x_1^{s_1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}\frac{1-x_r^{s_r}}{1-x_r}(1-x_i)} \cdots K_{j+1\,j}^{x_1^{s_1}\cdots x_j^{s_j}\frac{1-x_{j+1}^{s_{j+1}}}{1-x_{j+1}}(1-x_i)} \\ &\quad K_{ri}^{x_1^{s_1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}\frac{1-x_r^{s_r}}{1-x_r}(x_j-1)} \cdots K_{j+1\,i}^{x_1^{s_1}\cdots x_j^{s_j}\frac{1-x_{j+1}^{s_{j+1}}}{1-x_{j+1}}(x_j-1)}\, K_{ji}^{x_1^{s_1}\cdots x_{j-1}^{s_{j-1}}x_j^{s_j}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Speziell sind unter diesen Relationen für $s_k = 1$, $s_\varrho = 0$ $(\varrho \neq k)$

$$K_{ji} = K_{kj}^{1-x_i}\, K_{ki}^{x_j-1}\, K_{ji}^{x_k} \qquad (k > j),$$

d. h.

$$Q_{ijk} \equiv K_{kj}^{1-x_i}\, K_{ki}^{x_j-1}\, K_{ji}^{x_k-1} = 1 \qquad (i < j < k) \tag{4}$$

enthalten. Diese $\binom{r}{3}$ Relationen Q_{ijk} und ihre Operatorpotenzen lassen sich auf der rechten Seite von (3) mehrfach anwenden, wonach (3) in die Identität

$$K_{ji}^{x_1^{s_1}\cdots x_r^{s_r}} = K_{ji}^{-x_1^{s_1}\cdots x_{r-1}^{s_{r-1}}(1-x_r^{s_r})-\cdots-x_1^{s_1}\cdot\, x_j^{s_j}(1-x_{j+1}^{s_{j+1}})+x_1^{s_1}\cdots x_j^{s_j}}$$

übergeht; d. h. aber aus den Q_{ijk} folgen alle anderen Relationen zwischen den Kommutatoren in der abelschen Gruppe mit Operatoren.

§ 2. Vergleich der beiden Matrizen.

Unsere abelsch gemachte Untergruppe $\mathfrak{U}$ hat zu diesen sog. universellen Relationen Q_{ijk} noch die von der speziellen Gruppe $\mathfrak{G}$ abhängigen, die man erhält, wenn man die $A_1^{\alpha_1}\cdots A_r^{\alpha_r} R_j A_r^{-\alpha_r}\cdots A_1^{-\alpha_1}$ nach dem Verfahren in den E_j, U und vermittels dieser in den E_j, $K_{ji}^{x_1^{s_1}\cdots x_r^{s_r}}$ aus-drückt. Dies ergibt m Relationen, aus denen die andern in der Gruppe mit Operatoren folgen und die wir in der Anordnung $E_1^{\varepsilon_1} \cdots E_{n-r}^{\varepsilon_{n-r}} \times K_{21}^{k_{21}} \cdots K_{r\,r-1}^{k_{r\,r-1}}$ schreiben. Die abelsch gemachte Gruppe hat dann eine Exponentenmatrix von $n - r + \binom{r}{2}$ Kolonnen und $m + \binom{r}{3}$ Zeilen. Nach dem in der Einleitung Gesagten bekommt man die Relationen der von den Herren Reidemeister-Schumann[1]) betrachteten Gruppe mit Operatoren, wenn man $A_i = H_i S_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ einführt und die Relationen R_k in den $E_i^{x_1^{s_1} \cdots x_r^{s_r}}, H_j^{x_1^{s_1} \cdots x_r^{s_r}}$ schreibt. Dies ergibt eine Matrix N von n Kolonnen und m Zeilen. Um den Zusammenhang zwischen M und N herzustellen, beachte man, daß eine Relation R_k in den E, K geschrieben, nach Anwendung der Substitution $E_j \equiv E_j$; $K_{ji} \equiv A_j A_i A_j^{-1} A_i^{-1} = H_j^{1-x_i} H_i^{x_j - 1}$ und Umordnung in die entsprechende in E, H geschriebene Relation übergeht; die Q_{ijk} werden dabei zu Identitäten in den H. Dies bedeutet aber, daß man aus M durch Multiplikation von rechts mit der Matrix

$$
(5) \qquad W = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{n-r} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \left(\begin{array}{cccccccc}
1 & & 0 & & & & & \\
& \ddots & & & & 0 & & \\
0 & & 1 & & & & & \\
& & & 1-x_2, & x_1-1, & 0 & & 0 \\
& 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & 1-x_r, & 0 & \cdots & \cdots & x_1-1 \\
& & & 0 & ,\ 1-x_3, & x_2-1, & & 0 \\
& & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
& & & & 1-x_r, & 0, & \cdots & x_2-1 \\
& 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
& & & & & & 1-x_r, & x_{r-1}-1
\end{array}\right) \end{array}
$$

von n Kolonnen und $n - r + \binom{r}{2}$ Zeilen N erhält, das noch mit $\binom{r}{3}$ lauter Nullen enthaltenden Zeilen versehen ist, die wir fortlassen. Um die Elementarteiler von M und N zu vergleichen, beweisen wir zunächst folgende Sätze:

Hilfssatz 1. *In einer Matrix* $M = \begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & \cdots, & a_{mn} \end{pmatrix}_{(m > n)}$ *ist der g. g. Teiler aller n-reihigen Determinanten gleich dem aller n-reihigen, an denen die k* $(< n)$ *ersten als lin. unabhängig angenommenen Zeilen beteiligt sind, dividiert durch einen Teiler aller k-reihigen Minoren aus den k ersten Zeilen.*

Beweis. Es sei zunächst $m = n+1$ und $(-1)^{i-1}\Delta_i$ die nach Streichen der i-ten Zeile gebildete n-reihige Determinante aus M. Wir fügen die i_ϱ-te Spalte noch einmal links an und entwickeln die entstandene $n+1$-reihige Determinante nach ihr:

$$0 = a_{1i_\varrho}\Delta_1 + \cdots + a_{ki_\varrho}\Delta_k + \cdots + a_{n+1\,i_\varrho}\Delta_{n+1}.$$

Dies werde mit A_{ii_ϱ} multipliziert und über ϱ von 1 bis k summiert; wobei $A_{\mu i_\nu}$ die Adjunkte zu $a_{\mu i_\nu}$ in $\begin{pmatrix} a_{1i_1}, & \cdots, & a_{1i_k} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{ki_k}, & \cdots, & a_{ki_k} \end{pmatrix}$ bezeichne, was zu

$$\begin{vmatrix} a_{1i_1}, & \cdots, & a_{1i_k} \\ a_{ki_1}, & \cdots, & a_{ki_k} \end{vmatrix} \Delta_i + B_{k+1}\Delta_{k+1} + \cdots + B_{n+1}\Delta_{n+1} = 0$$

führt. Es sind hiermit sämtliche $\Delta_i \begin{vmatrix} a_{1i_1}, & \cdots, & a_{1i_k} \\ a_{ki_k}, & \cdots, & a_{ki_k} \end{vmatrix}$ Linearkombinationen aus $\Delta_{k+1}, \cdots, \Delta_{n+1}$, d. h. der g. g. Teiler aller Δ_i ist gleich dem von $\Delta_{k+1}, \cdots, \Delta_{n+1}$, dividiert durch einen Faktor aller k-reihigen Minoren der k ersten Zeilen. Bei $m > n+1$ führt die mehrmalige Anwendung dieses Schlusses auf $n+1$-reihige Teilmatrizen von M zum allgemeinen Beweis.

Hilfssatz 2. *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} v_{11}, & \cdots, & v_{1p}; & 1-x_1 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ v_{q1}, & \cdots, & v_{qp}; & 0 & & 1-x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1-x_1 & & 0 \\ V & & \ddots & \\ & 0 & & 1-x_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und}\quad B = \begin{pmatrix} x_1-1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_1-1 \\ & V & \end{pmatrix},$$

und es bezeichne $A^{i_1\cdots i_s;j_1\cdots j_{q-s}}$ eine q-reihige Determinante von A, die den Kolonnen $i_1, \cdots, i_s$ aus V und $j_1, \cdots, j_{q-s}$ aus $\begin{pmatrix} 1-x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-x_1 \end{pmatrix}$ entnommen ist und analog $B_{\varrho_1\cdots\varrho_{p-s};\sigma_1\cdots\sigma_s}$ eine p-reihige aus den ϱ_1-, $\cdots$, ϱ_{p-s}-ten Zeilen von $\begin{pmatrix} x_1-1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_1-1 \end{pmatrix}$ und den σ_1-, $\cdots$, σ_s-ten von V, so gilt, wenn $i_1\cdots i_s\,\varrho_1\cdots\varrho_{p-s}$ und $j_1\cdots j_{q-s}\,\sigma_1\cdots\sigma_s$ Permutationen von $1, \cdots, p$ bzw. $1, \cdots, q$ sind:

$$\operatorname{sig.}\begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & p+q \\ \varrho_1\cdots\varrho_{p-s} & p+\sigma_1\cdots p+\sigma_s\; i_1\cdots i_s\; p+j_1\cdots & p+j_{q-s} \end{pmatrix} (1-x_1)^p$$
$$\times A^{i_1\cdots i_s j_1\cdots j_{q-s}} = (-1)^p (1-x_1)^q B_{\varrho_1\cdots\varrho_{p-s}\sigma_1\cdots\sigma_s}.$$

Denn es ist[3]):

$$\operatorname{sig.}(\ ) = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}+\varrho_1+\cdots+\varrho_{p-s}+s\,p+\sigma_1+\cdots+\sigma_s},$$

$$(1-x_1)^p \operatorname{sig.}(\ )\, A^{i_1\cdots i_s j_1\cdots j_{q-s}}$$
$$= (-1)^{\varrho_1+\cdots+\varrho_{p-s}+\frac{p(p+1)}{2}+s\cdot p+\frac{s(s+1)}{2}}\, V^{i_1\cdots i_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_s}\cdot(1-x_1)^{p+q-s},$$

$$(1-x_1)^q B_{\varrho_1\cdots\varrho_{p-s}\sigma_1\cdots\sigma_s}$$
$$= (-1)^{\varrho_1+\cdots+\varrho_{p-s}+\frac{(p-s)(p-s+1)}{2}+s}\, V^{i_1\cdots i_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_s}\cdot(1-x_1)^{p+q-s}.$$

Weiter stellen wir zunächst fest, daß bei $r>3$ zwischen den universellen Relationen folgende $\binom{r}{4}$ Identitäten gelten:

$$Q_{ijk}^{1-x_l}\, Q_{ijl}^{x_k-1}\, Q_{ikl}^{1-x_j}\, Q_{jkl}^{x_i-1} = 1, \tag{6}$$

wo $i<j<k<l$ alle Quadrupel zwischen 1 und r durchläuft. Ist die Matrix $M=\binom{P}{U}$, wo U den von den Q_{ijk} herrührenden Bestandteil von $\binom{r}{3}$ Zeilen bedeutet, und sei eine Kolonne von U sinngemäß mit $u_{123},\cdots,u_{r-2\,r-1\,r}$, bezeichnet, wobei es nicht auf die Reihenfolge der Indizes ankomme, so ergibt (6), daß

$$(1-x_l)\,u_{ijk}+(x_k-1)\,u_{ijl}+(1-x_j)\,u_{ikl}+(x_i-1)\,u_{jkl} = 0,$$

d. h. alle u_{ikl}, deren Indizes $\neq 1$ sind, hängen von den u_{1ij} ab. Bezeichnen wir mit U_ν die Teilmatrix von U, in der nur die auf die $Q_{\nu ij}$ bezüglichen Zeilen enthalten sind, so erhält man, wenn man alle Zeilen u_{ijk} $(j,k\neq i)$ mit $1-x_i$ multipliziert und die mit $1-x_k$ multiplizierten Zeilen u_{1ij} sowie die mit x_j-1 multiplizierten Zeilen u_{1ik} zu ihnen addiert, die Matrix U_i, in der entsprechend alle Zeilen $u_{i\mu\nu}$ $(\mu,\nu\neq 0)$ mit $1-x_1$ multipliziert sind. Sind Δ_1, Δ_i entsprechende $\binom{r-1}{2}$-reihige Determinanten aus U_1, U_i, so gilt daher:

$$(1-x_1)^{\binom{r-2}{2}}\Delta_i = (1-x_i)^{\binom{r-2}{2}}\Delta_1 \qquad (r>3). \tag{7}$$

In der Matrix W streiche man die Kolonne $(0,\cdots,0,1-x_2,\cdots,1-x_r,0,\cdots,0)$, wodurch sie in W_1 übergehen mag. Dann ist

$$U_1 = \left.\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}0\cdots0\\ \\ 0\cdots0\end{matrix}}_{n-r} & \underbrace{V_1}_{r-1} & \begin{matrix}1-x_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1-x_1\end{matrix}\end{pmatrix}\right\}\binom{r-1}{2} \tag{8}$$

---

[3]) Siehe Kowalewski, Determinantentheorie (Berlin-Leipzig 1925), S. 33.

und

$$(9) \qquad W_1 = \left(\begin{array}{ccc} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & & 0 \\ & x_1-1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & x_1-1 \\ & & V_1 & \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots \\ 1\end{matrix}}\right\} n-r \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Wir betrachten nun aus $M_1 = \begin{pmatrix} P \\ U_1 \end{pmatrix}$ nur $k + \binom{r-1}{2}$-reihige[4]) Minoren, die alle Zeilen aus U_1 und sämtliche $\binom{r-1}{2}$ letzten Kolonnen enthalten und bezeichnen einen solchen mit $M_{i_1 \cdots\cdots\cdots i_{s+t}}^{j_1 \cdots j_s; h_1 \cdots h_t}$ $(s+t=k)$, wo $i_1, \cdots, i_{s+t}$ die Zeilennummern von P und $j_1, \cdots, j_s$ sowie $h_1, \cdots, h_t$ die Spaltennummern von $\begin{pmatrix} 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$ und V_1 in U_1 bedeuten, aus denen er entnommen ist. Die Laplaceentwicklung von $M_{i_1 \cdots}^{j_1 \cdots}$ nach den $\binom{r-1}{2}$ letzten Zeilen gibt dann, wenn wir gewisse Nullglieder gleich fortlassen:

$$M_{i_1 \cdots\cdots\cdots i_{s+t}}^{j_1 \cdots j_s; h_1 \cdots h_t} = \sum_{(\varrho, \sigma)} \pm P_{i_1 \cdots\cdots\cdots i_{s+t}}^{j_1 \cdots j_s; \varrho_1 \cdots \varrho_t} U_1^{\sigma_1 \cdots \sigma_{\binom{r-1}{2}}},$$

wo rechts über alle Minoren von P aus den bezeichneten Zeilen und Spalten und ihre Adjungierten summiert wird. Anderseits ist die ebenso bezeichnete Determinante $N_{i_1 \cdots\cdots\cdots i_{s+t}}^{j_1 \cdots j_s; h_1 \cdots h_t}$ aus $N_1 = P \cdot W_1$ nach den Produktsätzen entwickelt:

$$N_{i_1 \cdots\cdots\cdots i_{s+t}}^{j_1 \cdots j_s; k_1 \cdots k_t} = \sum_{\varrho_1, \cdots, \varrho_t} P_{i_1 \cdots\cdots\cdots i_{s+t}}^{j_1 \cdots j_s; \varrho_1 \cdots \varrho_t} W_{j_1 \cdots j_s; \varrho_1 \cdots \varrho_t}^{j_1 \cdots j_s; k_1 \cdots k_t},$$

wo über alle Kombinationen $\varrho_1, \cdots, \varrho_t$ zu je t aus $1, 2, \cdots, \binom{r}{2}$ summiert wird.

Wendet man nun Hilfssatz 2 auf den vorliegenden Fall an, wobei die dort V genannte Matrix der hier bei der Determinantenbildung ausgezeichnete Teil von V_1 ist, so hat man schließlich:

$$(10) \qquad (1-x_1)^t \, M_{i_1 \cdots i_{s+t}}^{j_1 \cdots j_s k_1 \cdots k_t} = \pm (1-x_1)^{\binom{r-1}{2}} N_{i_1 \cdots i_{s+t}}^{j_1 \cdots j_s k_1 \cdots k_t}.$$

Bilden wir auf dieselbe Weise wie M_1 [bzw. N_1] unter Auszeichnung des Index i die Matrizen M_i [bzw. N_i], so werden die k-reihigen Minoren aus N_i wieder mit den analog spezialisierten $k + \binom{r-1}{2}$-reihigen aus

[4]) Bei $r = 2$ bedeute $\binom{1}{2} = 0$.

M_i durch eine Formel wie (9) in Beziehung gesetzt, in der x_i an Stelle von x_1 tritt. Damit ist aber gezeigt, daß der g. g. Teiler aller k-reihigen Minoren aus $N_1, N_2, \cdots$ gleich dem aller auf obige Weise spezialisierten $k+\binom{r-1}{2}$-reihigen aus $M_1, M_2, \cdots$ ist. Infolge einer leicht ersichtlichen linearen Abhängigkeit der Kolonnen von W sind alle nicht schon in $N_1, N_2, \cdots$ enthaltenen Minoren von $N = P \cdot W$ aber gleich 0. Es ist zum Schluß nur noch zu zeigen, daß der g. g. Teiler aller so spezialisierten $k+\binom{r-1}{2}$-reihigen Minoren in M auch alle anderen teilt. Dazu dient der Hilfssatz 1. Wir stellen zunächst fest, daß der g. g. Teiler aller $\binom{r-1}{2}$-reihigen Determinanten aus den festen Zeilen und Kolonnen in M_i eine Potenz von $1-x_i$ ist, da die aus den speziellen Zeilen und Kolonnen in M_i gebildete $(1-x_i)^{\binom{r-1}{2}}$ lautet [s. in 8 die am weitesten rechts liegende Determinante von U_1]. Ist C_k der g. g. Teiler aller $k+\binom{r-1}{2}$-reihigen Minoren in M und A_k^i der der speziellen aus M_i, so gilt daher

$$C_k = \frac{A_k^1}{(1-x_1)^{\gamma_1}} = \frac{A_k^2}{(1-x_2)^{\gamma_2}} = \cdots.$$

und der g. g. Teiler aller $A_k^1, \cdots, A_k^r$, d. h. der unserer speziellen Determinanten aus $M_1, \cdots, M_r$ ist bereits C_k. Der g. g. Teiler aller Minoren aus $M \left(h \leqq \binom{r-1}{2}\right)$ ist schließlich gleich 1, da dies bereits für U gilt.

Ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe einer Verkettung von r Kurven, so kann man bekanntlich annehmen, daß $m = n-1$, d. h. $\mathfrak{G}$ aus n Erzeugenden und $n-1$ Relationen besteht. Dann ist von besonderer Wichtigkeit der g. g. Teiler aller höchsten, d. h. $n-r+\binom{r}{2}$-reihigen Minoren aus M, bez. $n-1$-reihigen aus N, der das L-Polynom der Verkettung genannt wird. Es ergibt sich in diesem Falle leicht, daß alle $n-1$-reihigen Determinanten aus N die Gestalt $\pm(1-x_i)\,\mathfrak{P}(x_1, \cdots, x_r)$ haben. Denn in (10) ist dann $t = r-1$ zu setzen und nach (7) ist $M_{12\cdots n-1} = (1-x_1)^{\binom{r-2}{2}}\mathfrak{P}$ bei $r > 3$, bzw. $= \mathfrak{P}$ bei $r = 3$, so daß schließlich

$$N_{12\cdots n-1} = \pm(1-x_1)\,\mathfrak{P}(x_1, \cdots, x_r)$$

und entsprechend $\qquad = \pm(1-x_k)\,\mathfrak{P}(x_1, \cdots, x_r)\ (k = 1, \cdots, r)$, wenn zur Determinantenbildung der Reihe nach die andern Kolonnen in N gestrichen sind.