

Über Zopf invarianten.

Von WERNER BURAU in Königsberg.

Unter den von Herrn ARTIN¹⁾ in die Topologie eingeführten Zopfgebilden sind diejenigen Zöpfe n ter Ordnung, die sich als eine Verkettung von n unverknoteten Kurven darstellen, ein besonders einfacher Typ. Man entnimmt ihnen geometrisch unmittelbar, daß die Verkettung, die irgendwelche, beliebig herausgegriffenen der n Kurven für sich bilden, invariant in dem Zopf enthalten ist. Unter diesen Verkettungen erweisen sich von praktischer Bedeutung die hierdurch gelieferten Zweierzöpfe, die durch je eine Verkettungszahl gekennzeichnet sind, und die Dreierzöpfe, die man ebenfalls beherrscht.

Bei den nicht zu diesem Typ gehörenden Zöpfen findet man leicht eine kleinste positive Zahl τ von der Eigenschaft, daß der τ -mal iterierte Zopf jeden Faden in sich zurücklaufen läßt; z. B. ist in dem Falle, daß der Zopf Z_n in der geschlossenen Form eine Kurve darstellt, $\tau = n$.

In der Zopfgruppe $\mathfrak{Z}_n$, die nach Herrn ARTIN aus Erzeugenden σ_i gebildet wird, die Überkreuzungen zweier benachbarter Fäden bedeuten (u. zw. soll bei σ_i der i te den $(i+1)$ ten Faden überqueren), bilden die den obigen speziellen Zöpfen zugeordneten Gruppenelemente offenbar einen Normalteiler $\mathfrak{N}_n$ von $\mathfrak{Z}_n$, dessen Faktorgruppe $\mathfrak{Z}_n/\mathfrak{N}_n$ die symmetrische Permutationsgruppe von n Dingen ist. Obige Zahl τ ist die Ordnungszahl des dem Element Z von $\mathfrak{Z}_n$ bei dem Homomorphismus zugeordneten Elements der Permutationsgruppe. Sämtlichen Transformierten von Z entspricht dabei dasselbe τ , derart daß Z^τ in die Gruppe der Zöpfe mit identischer Permutation fällt, aber das dem ursprünglichen Z zugeordnete Z^τ ist in ein $X Z^\tau X^{-1}$ übergegangen, das diesem in einem inneren Automorphismus der Gesamtgruppe entspricht.

Im folgenden wird es uns gelingen, mittels des bekannten Verfahrens von Herrn REIDEMEISTER²⁾ und SCHREIER³⁾, ein solches System von $\binom{n}{2}$ Erzeugenden und definierenden Relationen von $\mathfrak{N}_n$ anzugeben, daß jede der $\binom{n}{2}$ Erzeugenden die einmalige Verdrillung zweier der n Kreise bedeutet und die Relationen einfache geometrische Gründe haben.

¹⁾ ARTIN, Hamburg. Abh. 4, p. 47.

²⁾ REIDEMEISTER, Hamburg. Abh. 5, p. 7.

³⁾ SCHREIER, Hamburg. Abh. 5, p. 161.

§ 1. Aufstellung des Repräsentantensystems der Nebengruppen.

Dem Verfahren entsprechend wollen wir jetzt ein Repräsentantensystem der Nebengruppen aufstellen, d. h. zu jeder der $n!$ Permutationen ein zugehöriges Zopfwort angeben. Da $\mathfrak{Z}_n$ nach Hinzunahme der Relationen $\sigma_i^2 = 1$ ($i = 1, \dots, n-1$) zur symmetrischen Gruppe wird, kann man offenbar zu jeder Permutation ein zugehöriges Zopfwort angeben, das nur die σ_i mit dem Exponenten plus 1 enthält und die kürzeste Länge hat, d. h. die Darstellung der Permutation als ein Produkt aus der geringstmöglichen Zahl von Transpositionen wiedergibt.

Über diese Zopfwords, die wir fortab Kurzworte nennen wollen, stellen wir zunächst einige Hilfssätze auf, die uns im folgenden nützlich sein werden.

Satz 1. Ist $K = K_1 \sigma_k$ ein Kurzwort über $P_1 = \left(\dots \begin{smallmatrix} k & k+1 \\ j_k & j_{k+1} \end{smallmatrix} \dots \right)$ so ist auch K_1 ein solches über $P_2 = \left(\dots \begin{smallmatrix} k & k+1 \\ j_{k+1} & j_k \end{smallmatrix} \dots \right)$.

Beweis. Angenommen $\bar{K}$ wäre ein noch kürzeres Wort über P_2 , dann gäbe es entgegen der Voraussetzung in $\bar{K} \sigma_k$ ein Wort über P_1 , das kürzer ist als K .

Satz 2. In dem Zopf, dem eines unserer Kurzworte zugeordnet ist, dürfen sich zwei Fäden nicht mehr als einmal überkreuzen.

Beweis. Angenommen, zwei Fäden überkreuzten sich mindestens zweimal, dann mache ich zuerst die Annahme, daß in dem von zwei aufeinanderfolgenden Doppelpunkten A und B und den die verbindenden Teilstücken a und b begrenzten Flächenstück F der Zopfprojektion samt deren Rand keine weiteren zwei zu ein und demselben Fadenpaar gehörigen Doppelpunkte vorkommen (s. Fig. 1). Dann teilen sich offenbar sämtliche Fäden, die dies Flächenstück F überqueren, in zwei Klassen α und β : 1. solche α , die links von A eintreten und notwendig rechts von B austreten müssen, da sie sonst den Faden a zum zweiten Male passieren würden, und 2. solche, die rechts von A ein- und links von B austreten. Alle Fäden α verlaufen nun wegen der Bedeutung des $+1$ -Exponenten der σ_i oberhalb a, b und sämtlicher Fäden der β -Klasse, da alle diese von links nach rechts überkreuzt werden. Entsprechend verläuft jeder Faden β unterhalb von jedem α -Faden, da er diese alle von rechts nach links überquert. Die beiden Klassen kann man sich also durch ein im Inneren des Zopfes zwischen a, b, A, B eingespanntes Flächenstück getrennt denken. Offenbar läßt sich dies Flächenstück aber so weit zusammenziehen, daß die Punkte A und B unmittelbar aufeinanderfolgen und ich ein neues zugeordnetes Wort erhalte, in dem

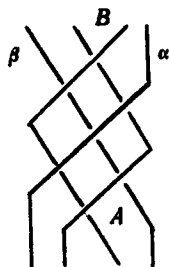


Fig. 1.

ein σ_i^2 auftritt, das also kein kürzestes sein kann. Die Operation des Zusammenziehens von F setzt sich aus einer Reihe von Einzelschritten zusammen, die darin bestehen, daß man erst sämtliche Doppelpunkte eines α - und β -Fadens aus dem Inneren von F über a oder b der Reihe nach nach außen führe und dann die Überkreuzung über alle jetzt doppeltpunktlos zu durchquerenden α - und β -Fäden nach oben schiebe. Bei jedem dieser Schritte ersetzt man in dem zugeordneten Wort ein $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ durch $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ oder umgekehrt, gemäß der Gruppenrelationen, ändert also an dem Kurzwortcharakter von K nichts. Hiermit ist aber bereits der Satz bewiesen. Denn existierte sonst ein Flächenstück, für das obige Annahme nicht gilt, so würde es in seinem Innern gewiß ein solches enthalten, für welches das der Fall ist; nach dem soeben Bewiesenen gilt also der Satz allgemein.

Satz 3. *Steht ein Kurzwort über der Permutation $P = \left(\begin{smallmatrix} \dots & k & k+1 & \dots \\ & j_k & j_{k+1} & \end{smallmatrix} \right)$ mit $j_k > j_{k+1}$, so läßt sich dem zugehörigen Zopf auch stets das Wort $K' \sigma_k$ zuordnen, wo K' ein gewisses über $P' = \left(\begin{smallmatrix} \dots & k & k+1 & \dots \\ & j_{k+1} & j_k & \end{smallmatrix} \right)$ stehendes Kurzwort ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung müssen sich die in Z von j_k nach k und von j_{k+1} nach $k+1$ führenden Fäden a, b mindestens, also nach Satz 2 gerade einmal, überkreuzen. Dies geschehe im Punkt A der Projektion (s. Fig. 2). Dann teilen sich die übrigen Fäden, die das von ab gebildete Flächenstück der Projektion oberhalb A durchqueren, in zwei Klassen, 1. solche, die a und b von links nach rechts über- und 2. solche, die a und b von rechts nach links unterkreuzen. Zwischen beiden Arten von Fäden läßt sich A aber ans Ende des Zopfes schieben, und in ähnlicher Schlußweise wie beim vorigen Beweis sieht man, daß der durch K gelieferte Zopf auch eine Darstellung durch das Wort $K' \sigma_k$ gestattet.

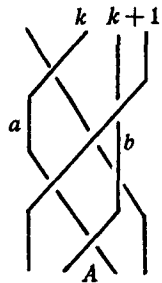


Fig. 2.

Satz 4. *Stehen zwei Kurzworte K und $\bar{K}$ über derselben Permutation, so sind ihre zugeordneten Zöpfe identisch.*

Beweis. K und $\bar{K}$ mögen sich schreiben $K = K_1 K'$ und $\bar{K} = K_2 K'$, wo K' der größte bei beiden Worten gleichlautende Endbestandteil ist. Dann stehen K_1 und K_2 noch immer über derselben Permutation $Q = \left(\begin{smallmatrix} \dots & k & k+1 & \dots \\ & j_k & j_{k+1} & \end{smallmatrix} \right)$, und zwar nach Satz 1 als Kurzworte. Ist $K_1 = K'_1 \sigma_k$, so stellt das σ_k im zugeordneten Zopf eine Überkreuzung der von j_k nach k und von j_{k+1} nach $k+1$ führenden Fäden dar. Dies bedingt die Ungleichung $j_k > j_{k+1}$, da Satz 2 keine weitere Überkreuzung dieser Fäden zuläßt. Dann gestattet Satz 3, auch das Gruppenelement K_2

in der Form $K'_2 \sigma_k$ zu schreiben. Für K'_1 und K'_2 , die wieder über derselben Permutation stehende Kurzworte sind, schließt man genau so weiter, bis schließlich die Identität der K und $\bar{K}$ entsprechenden Zöpfe erwiesen ist.

Satz 5. Wenn K ein Kurzwort über $\left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \dots \\ j_{k+1} & j_k & \dots \end{smallmatrix} \right)$ mit $j_k < j_{k+1}$ ist, dann ist auch $K \sigma_k$ ein solches über $\left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \dots \\ j_{k+1} & j_k & \dots \end{smallmatrix} \right)$.

Beweis. Nach Satz 3 läßt sich jedem Zopf, dessen zugeordnetes Wort über $\left(\begin{smallmatrix} k & k+1 & \dots \\ j_{k+1} & j_k & \dots \end{smallmatrix} \right)$, wo nach Voraussetzung $j_{k+1} > j_k$ gilt, steht, auch ein Wort $K' \sigma_k$ zuordnen, wo K' über P steht und nach dem vorigen Satz denselben Zopf wie K darstellt. Mithin sind auch die durch $K \sigma_k$ und $K' \sigma_k$ gelieferten Zöpfe identisch.

§ 2. Aufstellung eines Erzeugendensystems von N_n .

Aus unseren Kurzworten stellen wir nun ein Repräsentantensystem auf, das der Schreierschen Bedingung³⁾ genügt. Man nehme hierzu unter allen Kurzworten, die zu einer einzigen Permutation gehören, dasjenige als Repräsentant, das in der lexikographischen Anordnung als Wort in den σ_i , wobei σ_i früher als σ_k galt, wenn $i < k$, an die erste Stelle kommt. Dann sind auch alle Abschnitte dieses Wortes Repräsentanten ihrer zugehörigen Restklassen, weil es anderenfalls auch in der zu Anfang betrachteten Nebengruppe ein lexikographisch früheres Wort geben würde.

Das Verfahren liefert nun in $U_{R_k, \sigma_i} = (R_k \sigma_i \bar{R}_{k,i}^{-1}) \left(\begin{smallmatrix} k=1, \dots, n \\ i=1, 2, \dots, n-1 \end{smallmatrix} \right)$ sämtliche Erzeugende der Untergruppe, wo $\bar{R}_{k,i}$ die Restklasse repräsentiert, der $R_k \sigma_i$ angehört. Alle Relationen zwischen den U erhält man, wenn man in $R r(\sigma_i) R^{-1} = 1$ die linke Seite in den U ausdrückt, wo für R alle Repräsentanten und für $r(\sigma_i)$ alle Relationen der Zopfgruppe nacheinander einzusetzen sind. Schließlich ergeben sich nach SCHREIER³⁾, da die bei ihm vorgeschriebene Bedingung erfüllt ist, noch Relationen in der Bemerkung, daß $U_{R, \sigma_i} = 1$ ist, wenn $R \sigma_i$ selbst Repräsentant für seine zugehörige Nebengruppe ist.

Infolge unserer Sätze über Kurzworte gelingt es nun, bereits vor der Umrechnung der $R r R^{-1} = 1$ Relationen anzugeben, die weitere Erzeugende $= 1$ setzen und die übrigen in Klassen zueinander gleicher einteilen, so daß zwei Erzeugende aus verschiedenen Klassen aus geometrischen Gründen in der Gruppe nicht mehr einander gleich sein können.

Es gilt zunächst der

Satz: $U = R \sigma_k \bar{R}^{-1}$ ist $= 1$, wenn in der zu R gehörigen Permutation $P = \left(\dots \begin{smallmatrix} k & k+1 \\ j_k & j_{k+1} \end{smallmatrix} \dots \right) j_k < j_{k+1}$ ist.

Beweis. Nach Satz 5 ist $R \sigma_k$ auch ein Kurzwort über $P_k = \left(\dots \begin{smallmatrix} k & k+1 \\ j_{k+1} & j_k \end{smallmatrix} \dots \right)$ und stellt nach Satz 4 denselben Zopf dar wie $\bar{R}$. Daher ist $R \sigma_k \bar{R}^{-1}$ gewiß eine Darstellung der 1 in der Zopfgruppe.

Allen übrigen Erzeugenden U , bei denen in

$$P = \left(\dots \begin{smallmatrix} k & k+1 \\ j_k & j_{k+1} \end{smallmatrix} \dots \right) j_k > j_{k+1}$$

ist, erteilen wir im folgenden eine bestimmte Normalform in den σ_i , wodurch die Gleichheit zweier Erzeugenden, die dieselbe Normalform haben, sichergestellt ist.

Zunächst ersetzen wir in diesem Falle R nach Satz 3 durch $\bar{K} \sigma_k$, d. h. $U = \bar{K} \sigma_k^2 \bar{K}^{-1}$, wo $\bar{K}$ ein ebenso wie $\bar{R}$ über $\bar{P} = \left(\dots \begin{smallmatrix} k & k+1 \\ j_{k+1} & j_k \end{smallmatrix} \dots \right)$ stehendes Kurzwort ist, so daß man nach Satz 4 in der Zopfgruppe $\bar{R} = \bar{K}$ setzen kann. Dann sehen wir, ob in $\bar{P}$ die Beziehung $j_1 < j_2 \dots < j_{k-1}$ und $j_{k+2} < j_{k+3} < \dots < j_n$ gilt; andernfalls sei etwa $j_{k+i} > j_{k+i+1}$ ($i \geq 2$), so daß mir Satz 3 erlaubt, $\bar{K}$ durch $K' \sigma_{k+i}$ zu ersetzen. Für K' schreiben wir weiterhin $K' = K'' \sigma_{k+\varrho}$ ($\varrho \geq 2$) usw., bis schließlich $\bar{K}$ durch $K_1 f(\sigma_1 \dots, \sigma_{k-2}, \sigma_{k+2}, \dots, \sigma_n)$ ersetzt ist, wo K_1 über

$$P_1 = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 & k+2 & n \\ l_1 & l_2 & & l_{k-1} & j_{k+1} & j_k & l_{k+2} & l_n \end{array} \right)$$

mit $l_1 < l_2 \dots < l_{k-1}$ und $l_{k+2} < l_{k+3} \dots < l_n$ steht. Dann schreibt sich aber

$$U = K_1 f \sigma_k^2 f^{-1} K_1^{-1} = K_1 \sigma_k^2 K_1^{-1},$$

da jeder Faktor von f mit σ_k vertauschbar ist, und der U entsprechende Zopf hat etwa das Aussehen nebenstehender Figur 3. Die von j_{k+1} und j_k ausgehenden Fäden a , b verkneten sich nach Maßgabe des σ_k^2 einmal in der Mitte des Zopfes. Alle übrigen Fäden teile man in zwei Klassen ein: 1. die Klasse α derer, die in dem entsprechenden unteren Zopfteil rechts von $k+1$ enden, und 2. die Klasse β derer, die dasselbe links von k tun. Wegen der Ungleichungen $l_{k+2} < \dots < l_n$ überkreuzen sich zwei α -Fäden nicht im unteren und also auch nicht in dem dazu inversen oberen Zopfteil, weil sie es sonst mindestens zweimal tun

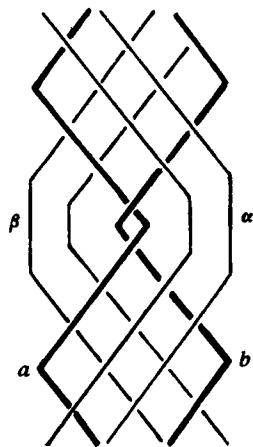


Fig. 3.

müßten, was nach Satz 2 unstatthaft ist. Das gleiche gilt für die β -Fäden wegen $l_1 < l_2 \dots < l_{k-1}$. Infolge der Bedeutung des $+1$ -Exponenten der Faktoren von K_1 verlaufen sämtliche α -Fäden oberhalb a , b und sämtlicher β -Fäden. Hieraus ist ersichtlich, daß wir durch Hinwegschieben der Fäden übereinander erreichen können, daß ein α - und β -Faden sich überhaupt nicht mehr überkreuzen, so daß für den gesamten Zopf nur noch kennzeichnend ist, wie sich die zwischen j_{k+1} und j_k beginnenden Fäden auf die Klassen α und β verteilen. Man überzeugt sich sofort, daß jede mögliche Verteilung vorkommt, da die R sämtliche Permutationen repräsentieren. Daher ergibt sich offenbar für U folgende Normalform:

$$U = (\sigma_{j_k-1}^{+1} \sigma_{j_k-2}^{+1} \dots) \sigma_{j_{k+1}}^2 (\sigma_{j_k-1}^{+1} \dots)^{-1}.$$

Hierfür führen wir die Bezeichnung $S_{j_{k+1} \dots \bar{i} \dots j_k}$ ein, wo zwischen j_{k+1} und j_k alle Zahlen von $j_{k+1} + 1$ bis $j_k - 1$ zu stehen kommen und der Zwischenindex mit einem Querstrich oder nicht versehen ist, je nachdem der entsprechende Faden unter- oder oberhalb verläuft.

§ 3. Relationen der Gruppe $\mathfrak{N}_n$.

Es ist geometrisch ersichtlich, daß man aus den Erzeugenden $S_{i \dots k}$, die lediglich Zöpfe mit Überkreuzungen der Zwischenfäden darstellen und fortan mit S_{ik} kurz bezeichnet seien, alle übrigen durch Transformation erhält:

$$S_{i \dots \bar{i}_1 \dots \bar{i}_2 \dots \bar{i}_s \dots k} = S_{\bar{i}_1} S_{\bar{i}_2} \dots S_{\bar{i}_s} S_{ik} S_{\bar{i}_1}^{-1} \dots S_{\bar{i}_s}^{-1} S_{i_1}^{-1}.$$

Das Verfahren liefert nun alle Relationen in den ursprünglich Erzeugenden $S_{i \dots k}$. Man hat hierzu sämtliche $R \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} R_2^{-1}$, sowie $R \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1} R^{-1} = 1$ durch die $S_{i \dots k}$ auszudrücken, wobei sich die verschiedenen Relationstypen, die man erhält, im ersten Falle nach den Größenbeziehungen richten, die in der zu R gehörigen Permutation $P = \begin{pmatrix} \dots & i & \dots \\ & j & \end{pmatrix}$ zwischen j_i, j_{i+1}, j_{i+2} und im zweiten Falle zwischen j_i, j_{i+1} sowie j_k, j_{k+1} bestehen.

Wie hier nicht näher ausgeführt, erhält man schließlich nach Reduktion der Erzeugenden auf die S_{ik} folgende Relationen, deren geometrische Bedeutung leicht ersichtlich ist:

$$\left. \begin{array}{l} S_{ab} \longleftrightarrow S_{cd} \\ S_{ad} \longleftrightarrow S_{bc} \end{array} \right\} (a < b < c < d) \quad \left. \begin{array}{l} S_{ab} \longleftrightarrow S_{ac} S_{bc} \\ S_{ac} \longleftrightarrow S_{bc} S_{ab} \\ S_{ac} \longleftrightarrow S_{bc} S_{bd} S_{bc}^{-1} \end{array} \right\} (a < b < c)$$

a, b, c, d durchlaufen hierbei sämtliche Kombinationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$, die obigen Ungleichungen genügen.

§ 4. Die durch $\mathfrak{N}_n$ gelieferten Invarianten von $\mathfrak{Z}_n$.

Da diese Relationen sämtlich nur Vertauschbarkeiten aussagen, ist die Faktorgruppe der Komutatorgruppe von $\mathfrak{N}_n$ die freie Abelsche Gruppe von $\binom{n}{2}$ Erzeugenden $\bar{S}_{ik}$. Jeder Klasse von ineinander transformierbaren Elementen von $\mathfrak{N}_n$ entspricht somit in der Abelsch gemachten Gruppe ein Element $[\bar{S}_{ik}^{\alpha_{ik}}]$; um aber zu wissen, ob die α_{ik} Zopf invarianten sind, hat man noch zu untersuchen, wie sich die S_{ik} bei einem beliebigen inneren Automorphismus der Gesamtgruppe $\mathfrak{Z}_n$ verhalten. Man sieht geometrisch, daß die Transformation mit $a = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1$ jedes S_{ik} bei dem $i \neq 1$ in $S_{i-1, k-1}$ und S_{1k} in $S_{k-1, n}$ überführt; ferner läßt die Transformation mit σ_{n-1} alle S_{ik} unverändert, bei denen i und k von n und $n-1$ verschieden sind, führt aber $S_{i, n-1}$ in $S_{i, n}$ und S_{in} in $S_{n-1, n}$ über. Die Transformationen mit σ_{n-1} und a und damit jede beliebige in $\mathfrak{Z}_n$, da σ_{n-1} und a die Gesamtgruppe erzeugen, verwandeln somit jedes Element der Abelsch gemachten Gruppe $\mathfrak{N}_n$ in ein solches, dessen Erzeugenden S_{ik} miteinander vertauscht sind, ändern also an dem Werte der Invarianten α_{ik} nichts.

Ebenso sieht man allgemein, daß die Gesamtheit der Untergruppen $\mathfrak{N}_r$, die von $\binom{r}{2}$ zu r bestimmten Fäden gehörigen Erzeugenden für sich gebildet werden, mittels unserer Automorphismen zueinander konjugiert sind. Insgesamt können sie also ebenfalls zur Zopf kennzeichnung herangezogen werden, was besonders von den $\binom{n}{3}$ Dreierzöpfen gilt, für die das Transformationsproblem gelöst ist.

§ 5. Anwendung auf die Kennzeichnung der Schlauchknoten als Zöpfe.

Zuerst sei bemerkt, daß von den $\binom{n}{2}$ Invarianten, die wir jedem Zopf Z zugeordnet haben, höchstens $n-1$ voneinander verschieden sind, wenn Z einen Knoten darstellt. Denn der geschlossene Zopf Z^n zerfällt in n kongruente Stücke, die alle Z darstellen, nur daß jeder der n Fäden einmal die Rolle eines beliebigen anderen übernimmt. Daher kommt es nur auf die $n-1$ Verkettungszahlen an, die ein beliebiger Faden mit den $n-1$ übrigen bildet.

Es ist nun evident, daß bei einem Torusknoten, der als Zopf Z_{n_1} mit m_1 Verdrehungen gelegt ist, diese m_1 Zahlen alle einander gleich sind; der gemeinsame Wert $\pm m_1$ dieser Invarianten unterscheidet also alle Torusknoten, die als Zöpfe von n_1 Fäden gelegt sind. Ersetzt man

nun die Fäden des Torusknotens durch n_2 nebeneinanderliegende, die an einer Stelle, etwa zu Beginn des Zopfes, m_2 mal miteinander verdreht seien, so erhält man den sogenannten Schlauchknoten 2ter Stufe; durch Fortsetzung dieses Verfahrens erklärt man schließlich den allgemeinen Schlauchknoten⁴⁾ k ter Stufe als Zopf von $n_1 \cdots n_k$ Fäden mittels der k Zahlenpaare $(n_1, m_1) \cdots (n_k, m_k)$, wobei die m_i beliebig positiv oder negativ sein können und stets $(n_i, m_i) = 1$ erfüllt sein muß.

Angenommen, wir hätten bereits für einen Schlauchknoten $(k-1)$ ter Stufe der Charakteristiken $(n_1, m_1) \cdots (n_{k-1}, m_{k-1})$ seine $n-1 = n_1 \cdots n_{k-1} - 1$ Invarianten berechnet und dabei die Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ erhalten, als Verkettungszahlen etwa des ersten Fadens mit den übrigen. Geht man dann mittels des Zahlenpaares (n_k, m_k) zu dem Schlauchknoten k ter Stufe über, so sind dessen Invarianten zunächst $n_k \alpha_1, \dots, n_k \alpha_{n-1}$, wo aber jede dieser Zahlen n_k mal auftritt, da die Fadenzahl des Zopfes und damit auch die Vielfachheit, in der ich ihn zu iterieren habe, n_k mal so groß geworden ist. Hierzu kommen noch von der neuen Verdrehung $n_k - 1$ Zahlen der Größe m_k . Da $(n_k, m_k) = 1$ ist, sind die früheren Zahlen, die alle n_k als Faktor hatten, von dem Werte m_k verschieden; ferner treten sie in Gruppen von mindestens n_k zueinander gleicher auf, während nur $n_k - 1$ Invarianten den Wert m_k haben.

Ist uns also ein beliebiger Schlauchknoten als Zopf von N Fäden gegeben, so ordnen wir seine Invarianten in Gruppen zueinander gleicher. Wie wir soeben sahen, existiert hierunter eindeutig eine kleinste Gruppe, die aus $n_k - 1$ Zahlen mit dem Werte m_k bestehe. Hiermit ist das an letzter Stelle stehende Zahlenpaar (n_k, m_k) bereits abgelesen. Teilt man nun die übrigen Invarianten samt ihrer Vielfachheiten durch n_k , so erhält man die Zahlen, die zu dem um eine Stufe niedrigeren Schlauchknoten gehören, der nach Fortlassung von n_k, m_k aus unserem gegebenen entsteht. Mit ihm verfähre man ebenso und so fort, bis man schließlich eindeutig die k -Zahlenpaare, aus denen der Schlauchknoten aufgebaut ist, aus dem Zopf abgelesen hat. (Nur in umgekehrter Reihenfolge wie beim Aufbau.)

⁴⁾ Vgl. K. BRAUNER, Hambg. Abh. 6, p. 1.