В. С. БУСЛАЕВ

# КВАНТОВАНИЕ И МЕТОД ВКБ



## Введение

1. Постановка задачи. Настоящая работа посвящена развитию метода ВКБ, который широко используется для построения асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений вида

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\left(h,\ t,\ \xi,\ \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\psi,\quad \psi=\psi(h,\ t,\ \xi) \tag{0.1}$$

или

$$E\psi=H\left(h,\ \xi,\ \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\psi,\quad \psi=\psi(h,\ E,\ \xi) \tag{0.2}$$

$(t,\ E\in\mathbf{R}$ или $\mathbf{C},\ \xi\in\mathbf{R}^n)$ при $h\to 0$ $(h\in\Delta=(0,\ b))$.

Начнем с классической схемы метода ВКБ применительно к уравнению (0.1). Метод ВКБ имеет дело с решениями вида

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k u_k(\xi,\ t)\exp\frac{i}{h}S(\xi,\ t) \tag{0.3}$$

$$(u_k(\xi,\ t)\in\mathbf{C},\quad S(\xi,\ t)\in\mathbf{R}),$$

причем ряд в (0.3) рассматривается обычно как формальный степенной ряд относительно $h/i$. Подстановка этого ряда в уравнение сводит его к уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(0,\ t,\ \xi,\ \frac{\partial S}{\partial\xi}\right)=0 \tag{0.4}$$

для функции $S$ и к рекуррентным соотношениям для коэффициентов $u_k$, которые имеют характер системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Изложенная простая схема встречается, однако с существенными трудностями. Чтобы описать их, напомним, как связано уравнение (0.4) с классической динамической системой в фазовом пространстве $M=\mathbf{R}^n\oplus\mathbf{R}^n$, задаваемой уравнениями Гамильтона

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q};\quad H=H(0,\ t,\ q,\ p);\quad q,\ p\in\mathbf{R}^n;\quad t\in\mathbf{R}. \tag{0.5}$$

Пусть $m_t$ — отвечающий динамической системе диффеоморфизм $M$. Пусть $\Gamma_t$ — $n$-мерное подмногообразие в $M$, заданное уравнением

$$p=\frac{\partial S(q,\ t)}{\partial q}. \tag{0.6}$$

Уравнение (0.4), т. е. уравнение Гамильтона—Якоби для (0.5) (с точностью до слагаемого в $S$, зависящего только от $t$), эквивалентно тому, что $\Gamma_t$ при изменении $t$ преобразуется под действием $m_t$: $\Gamma_t=m_t\Gamma_0$.

Рассмотрим формальное решение задачи Коши для уравнения (0.1), считая, что начальное условие $\varphi(h,\ 0,\ \xi)$ также является выражением вида

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k u_k(\xi)\exp\frac{i}{h}S(\xi). \tag{0.7}$$

Уравнение (0.4) теперь должно быть дополнено начальным условием

$$S(\xi,\ 0)=S(\xi). \tag{0.8}$$

Задача (0.4), (0.8) имеет решение лишь при тех $t$ $(t_1<t<t_2)$, при которых подмногообразие

$$m_t\Gamma,\ \Gamma=\left\{\left\{q,\ \frac{\partial S(q)}{\partial q}\right\}\middle|\, q\in\mathbf{R}^n\right\} \tag{0.9}$$

допускает представление

$$m_t\Gamma=\{\{q,\ f(q)\}\,|\,q\in\mathbf{R}^n\}, \tag{0.10}$$

т. е. однозначно ортогонально проектируется на подпространство $Q=\{\{q,\ 0\}\,|\,q\in\mathbf{R}^n\}$. Вообще говоря, это может быть гарантировано только при достаточно малых $t$. При тех же $t$ беспрепятственно решается и система рекуррентных уравнений для $u_k$ с начальными условиями $u_k(\xi,\ 0)=u_k(\xi)$.

Если начальное условие (0.7) является асимптотическим разложением при $h\to 0$ для некоторой начальной функции $\varphi(h,\ 0,\ \xi)=\varphi(h,\ \xi)$, то, вообще говоря, точное решение $\varphi(h,\ t,\ \xi)$ уравнения (0.1) также имеет формальный ряд (0.3) своим асимптотическим разложением. Суть затруднений метода ВКБ с этой точки зрения состоит в том, что при достаточно больших $t$ формальное решение вида (0.3) уже не существует, и остается открытым вопрос об асимптотике точного решения $\varphi(h,\ t,\ \xi)$ при $h\to 0$.

2. Содержание работы. Настоящая статья возникла в результате изучения работ В. П. Маслова [1, 2], которому удалось преодолеть описанные здесь затруднения классического подхода. Маслов построил более широкий класс разложений, включающий в себя разложение вида (0.3). Этот класс сохраняется при динамике и так же, как разложения метода ВКБ, порождает асимптотику точных решений, но уже без оговорки относительно малости $t$.

Смысл конструкции Маслова состоит в том, что вместо функции $S(\xi)$ рассматривается специальное $n$-мерное подмногообразие в $M$, так называемое лагранжево многообразие, и заданная на нем первообразная формы $pdq$. Лагранжево многообразие, однозначно проектирующееся на $Q$, и первообразная формы $pdq$ на нем эквивалентны заданию функции $S(\xi)$. Это отчасти поясняется предыдущими рассуждениями, где в качестве лагранжева многообразия выступало $\Gamma_t$. Далее, вместо ряда $\sum_{k \geqslant 0} (h/i)^k u_k$ на $Q$ рассматривается аналогичный формальный ряд на лагранжевом многообразии. Следует отметить, что для однозначно проектируемого на $Q$ многообразия эти объекты могут быть естественным образом отождествлены. Лагранжеву многообразию, первообразной и формальному ряду на нем (Маслов имеет дело только с одним членом ряда) сопоставляется некоторая «функция» на $Q$. Это преобразование Маслов называет каноническим оператором.

Построенное в настоящей работе обобщение метода ВКБ по существу эквивалентно каноническому оператору. Оно исходит из того, что наряду с выражениями вида (0.3), в описании которых особую роль играет подпространство $Q$, следует рассматривать выражения, для которых аналогичную роль играют произвольные лагранжевы плоскости, т. е. $n$-мерные плоскости, полученные из $Q$ с помощью линейных канонических преобразований пространства $M$. При построении таких выражений используется каноническое квантование линейного фазового пространства и индуцированное этим квантованием унитарное представление в $L_2(Q)$ группы линейных канонических преобразований $M$, т. е. неоднородной симплектической группы.

Комбинируя указанные выражения, мы, естественно, приходим к их обобщениям, связанным с произвольными лагранжевыми многообразиями. Такие обобщенные разложения метода ВКБ могут быть инвариантно представлены в виде специального производящего интеграла по рассматриваемому лагранжеву многообразию. Этот интеграл возникает в результате некоторой предельной процедуры, состоящей в том, что лагранжево многообразие в окрестности каждой точки аппроксимируется касательной лагранжевой плоскостью. Производящий интеграл, будучи в конечном счете эквивалентен каноническому оператору Маслова, дает его инвариантное и более компактное описание. Он может быть использован также и в более широком круге задач. Подробнее о связи с каноническим оператором Маслова сказано в §§ 2 и 3. В § 3 даны асимптотические применения описанных формальных выражений как к уравнениям типа (0.1), так и к уравнениям типа (0.2).

В определении канонического оператора по Маслову важную роль играет так называемый индекс Маслова — индекс ориентированной кривой на лагранжевом многообразии. В нашем изложении это понятие возникает лишь при сравнении производящего интеграла и канонического оператора. В связи с этим в § 1 дана новая формула для индекса Маслова. В этом пункте настоящая работа имеет точки соприкосновения со статьями В. И. Арнольда [3] и Д. Б. Фукса [4], посвященными выяснению топологической природы индекса Маслова.

Опишем план изложения. В § 1 собраны необходимые сведения из классической и квантовой механики, а также рассмотрен индекс Маслова. § 2 является центральным: здесь строится производящий интеграл и выясняется его связь с каноническим оператором. В § 3 рассматривается задача Коши для формального уравнения

$$ih\frac{d}{dt}\Psi = \hat{H}\Psi \tag{0.11}$$

в классе выражений $\Psi$, описываемых производящими интегралами. Об асимптотических вопросах, затронутых в § 3, было сказано выше.

Автор приносит глубокую благодарность Л. Д. Фаддееву за ценные обсуждения.

## § 1. Фазовое пространство и квантование

На протяжении всей работы общие функции и геометрические объекты считаются принадлежащими классу $C^\infty$.

1. Лагранжево многообразие. *Фазовым пространством* $M$ условимся называть $n$-мерное унитарное пространство $C^n$, рассматриваемое как $2n$-мерное вещественное пространство. Точки $M$ будем обозначать буквами $x$ и $a$. Скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)+i[\cdot,\ \cdot]$ в $C^n$ определяет на $M$ две невырожденные билинейные формы: симметрическую $(\cdot,\ \cdot)$ и кососимметрическую $[\cdot,\ \cdot]$, причем $[\cdot,\ \cdot]=(\cdot,\ J\cdot)$, где $J$ — оператор комплексной структуры, соответствующий умножению на $i$ в $C^n$. Тем самым на $M$ вводятся три согласованные структуры: *эрмитова*, *симплектическая* и *комплексная*. Всегда будет подразумеваться, что $M$ и $M^*$ отождествлены с помощью эрмитовой структуры.

Рассмотрим на $M$ дифференциальную форму $\omega=\frac{1}{2}[x,\ dx]$, $x,\ dx\in M$. $n$-Мерное подмногообразие $\Gamma$ в $M$ называется *лагранжевым многообразием*, если форма $\omega$ на нем замкнута. Линейное лагранжево многообразие $\Lambda$ называется *лагранжевой плоскостью*. $n$-Мерное подмногообразие $\Gamma$ в $M$ лагранжево тогда и только тогда, когда все его касательные плоскости лагранжевы. $n$-Мерное подпространство $\Lambda$ является лагранжевой плоскостью (лагранжевым подпространством) тогда и только тогда, когда кососимметрическая форма $[\cdot,\ \cdot]$ аннулируется на нем. Множество лагранжевых подпространств обозначим $\mathbf{\Lambda}$.

Пусть $Q$ — фиксированное лагранжево подпространство. $Q$ будет считаться евклидовым пространством, в котором скалярное произведение векторов $q$ и $p$ равно $qp=(q,\ p)$. Пространство $M$ можно считать прямой суммой двух экземпляров пространства $Q$, причем отождествление $x$ и пары $\{q,\ p\}$ дается формулой

$$x=q+Jp. \tag{1.1}$$

При этом $(x_1,\ x_2)=q_1q_2+p_1p_2$ и $[x_1,\ x_2]=p_1q_2-q_1p_2$, где $x_i=q_i+Jp_i$. Кроме того, $J\{q,\ p\}=\{-p,\ q\}$. Буквы $q$ и $p$ всегда будут обозначать компоненты пары $x=\{q,\ p\}$, $q,\ p\in Q$.

2. Группа $G$. Диффеоморфизм $m$ пространства $M$ называется *каноническим*, если он сохраняет форму $d\omega$. Диффеоморфизм $m$ является

каноническим тогда и только тогда, когда для произвольного лагранжева многообразия $\Gamma$ многообразие $m\Gamma$ также лагранжево. Для того чтобы диффеоморфизм $m$ был каноническим, необходимо и достаточно, чтобы $dm \in \mathbf{Sp}(M)$, где $dm$ — дифференциал $m$, а $\mathbf{Sp}(M)$ — *симплектическая группа*, т. е. группа невырожденных линейных преобразований $M$, сохраняющих форму $[\cdot, \cdot]$.

Выделим в $\mathbf{Sp}(M)$ подгруппу $H_{QP}$, для которой лагранжевы плоскости $Q$ и $P = JQ$ являются инвариантными подпространствами. Матрицы элементов этой подгруппы (если $M$ представлено как прямая сумма $Q \oplus Q$) имеют вид

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & {}^t r^{-1} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где $r \in \mathbf{GL}(Q)$ и $\mathbf{GL}(Q)$ — группа невырожденных линейных преобразований $Q$. Введем более широкую подгруппу $H_Q$, для элементов которой инвариантно подпространство $Q$. Общий вид матрицы такого элемента следующий:

$$\begin{pmatrix} I_n & -\delta \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & {}^t r^{-1} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где $I_n$ — тождественное преобразование $Q$, а $\delta = {}^t\delta$ — произвольное симметрическое преобразование $Q$. *Однородное пространство* $\mathbf{Sp}(Q)/H_Q$ изоморфно множеству $\Lambda$. Произвольный элемент $\mathbf{Sp}(Q)$ представим в виде

$$(\exp J\Phi) B, \tag{1.4}$$

где $B \in H_Q$, а $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$ и $\varphi = {}^t\varphi$. По заданному элементу однозначно восстанавливается $\exp 2J\Phi$.

Рассмотрим *универсальную накрывающую группу* группы $\mathbf{Sp}(Q)$. Буквой $A$ будем обозначать ее элементы, через $\mathring{A}$ будем обозначать их канонические проекции на $\mathbf{Sp}(Q)$. Элементы универсальной накрывающей группы, естественно, параметризуются тройкой $\{\varphi, \delta, \rho\}$, где $\varphi$, $\delta$ и $\rho$ — линейные преобразования $Q$, причем $\varphi$ и $\delta$ — симметрические. В этих терминах

$$\mathring{A} = (\exp J\Phi) \begin{pmatrix} I_n & -\delta \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & {}^t r^{-1} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$, $r = e^{\rho}$.

Буквой $G$ будет обозначаться *полупрямое произведение* линейной группы пространства $M$ и универсальной накрывающей для $\mathbf{Sp}(Q)$. Элементы $G$ будут обозначаться буквой $g$. Они являются парами $g = \{a, A\}$, где $a \in M$. Группа $G$ порождает группу преобразований $\mathring{G}$ пространства $M$, действующих по формуле

$$\mathring{g}x = \mathring{A}x + a. \tag{1.6}$$

Группа $\mathring{G}$ есть ничто иное, как *группа линейных (неоднородных) канонических диффеоморфизмов* $M$. Иногда преобразования $\mathring{g} \in \mathring{G}$ придется рассматривать как элементы группы $G$. Во всех этих случаях будет безразлично, какой именно элемент группы $G$ брать в качестве представителя преобразования.

Плоскость $\mathring{g}Q$, где $\mathring{g}\in\mathring{G}$, является лагранжевой, обратно, всякая лагранжева плоскость может быть получена как $\mathring{g}Q$. Подпространство $\{0, \mathring{A}\}Q$ является лагранжевым, обратно, всякое лагранжево подпространство может быть представлено в таком виде. Каждому лагранжеву подпространству, а тем самым и каждой лагранжевой плоскости $\Lambda$ соответствует симметрическое преобразование $\varphi$ пространства $Q$

$$\Lambda=(\exp J\Phi)Q. \tag{1.7}$$

По лагранжеву подпространству $\Lambda$ однозначно определяется $\exp 2J\Phi$. $\varphi$ называется *углом* между $Q$ и подпространством $\Lambda$.

3. Лагранжевы пары. Пусть $\Gamma$ — связное лагранжево многообразие. Рассмотрим нормальный делитель $\chi(\omega)$ в *фундаментальной группе* $\pi_1(\Gamma)$, образованный классами петель $\gamma$, для которых $\int\limits_\gamma\omega=0$. Через $E$ всегда будет обозначаться *накрывающее пространство* многообразия $\Gamma$, для которого $\chi(\omega)$ является *характеристической подгруппой*. На $E$ существует *первообразная* $\Omega$: $E\to\mathbf{R}$ формы $\omega$, причем в разных точках каждого слоя $\Omega$ принимает различные значения. Совокупность $\langle\Gamma, \Omega\rangle$ назовем *лагранжевой парой*.

Пусть отображение $T$: $E\to G$ обладает свойством

$$Tx=\{x, A(x)\}, \tag{1.8}$$

причем $\mathring{A}(x)Q$ — параллельно касательной плоскости к $E$ в точке $x$. Совокупность $\langle\Gamma, \Omega, T\rangle$ назовем *лагранжевой тройкой*.

Пусть $\Gamma_1\subset\Gamma$. Пара $\langle\Gamma_1, \Omega_1\rangle$ называется *сужением лагранжевой пары* $\langle\Gamma, \Omega\rangle$ на $\Gamma_1$, если $\Omega_1=\Omega|_{\Gamma_1}$.

Пусть $\langle\Gamma, \Omega\rangle$ — лагранжева пара, тогда

$$g\langle\Gamma, \Omega\rangle\equiv\langle\mathring{g}\Gamma, \Omega_g\rangle, \tag{1.9}$$

где $\Omega_g(x)=\Omega(g^{-1}x)+\frac{1}{2}[a, x]$, $x\in g\Gamma$, $g=\{a, A\}\in G$ — также лагранжева пара. Если $\langle\Gamma, \Omega, T\rangle$ — лагранжева тройка, то

$$g\langle\Gamma, \Omega, T)\equiv\langle\mathring{g}\Gamma, \Omega_g, gT\rangle \tag{1.10}$$

— также лагранжева тройка.

Форма $\omega$ замкнута на подмногообразии одновременно с формой $pdq=\omega+\frac{1}{2}d(qp)$.

Пусть $\langle\Gamma, \Omega\rangle$ — лагранжева пара. Вместе с первообразной $\Omega$ мы всегда будем рассматривать первообразную $\tilde{S}$ формы $pdq$, стандартно связанную с $\Omega$ формулой

$$\tilde{S}=\Omega+\frac{1}{2}qp. \tag{1.11}$$

$n$-Мерное подмногообразие в $M$ называется *однозначно проектируемым* на $Q$, если оно имеет вид

$$\{\{q, f(q)\}\,|\,q\in D\},$$

где $f\colon D \to Q$ и $D$ — открытое множество в $Q$. Если $D$ — односвязно, такое подмногообразие лагранжево тогда и только тогда, когда существует функция $S\colon D \to \mathrm{R}$ такая, что

$$f = \frac{\partial S}{\partial q}. \qquad (1.12)$$

Условимся здесь и всюду в дальнейшем под $\partial S/\partial q$ $(S = S(q))$ или $\partial F/\partial x$ $(F = F(x))$ и т. д. понимать векторные поля, имеющие в ортонормированном базисе с координатами $q_i$ и $x_i$ соответственно компоненты $\partial S/\partial q_i$ и $\partial F/\partial x_i$. Возвращаясь к формуле (1.12), отметим, что

$$S(q) = \tilde{S}(\{q,\ p\}) + C, \qquad (1.13)$$

где $C$ — постоянная.

4. Квантование. Под квантованием конечномерного линейного пространства $M$, снабженного кососимметрической формой $[\cdot,\ \cdot]$, понимают (см., например, [5]) отображение $\mathrm{R}$ пространства $M$ во множество самосопряженных операторов гильбертова пространства $\mathfrak{W}$, обладающее свойствами:

$$1.\ \mathrm{R}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \mathrm{R}(x_1) + \alpha_2 \mathrm{R}(x_2),$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathrm{R}, \quad x_1,\ x_2 \in M; \qquad (1.14)$$

$$2.\ \frac{i}{h}(\mathrm{R}(x_1)\,\mathrm{R}(x_2) - \mathrm{R}(x_2)\,\mathrm{R}(x_1)) = [x_1,\ x_2]\,\mathrm{E}, \qquad (1.15)$$

где $\mathrm{E}$ — единичный оператор, а $h$ — заданная постоянная, $h \in \Delta = (0,\ b)$.

Ясно, что свойства 1 и 2 сформулированы не вполне корректно. Точное определение имеет дело с унитарными операторами

$$\mathrm{W}(x) = \exp\frac{i}{h}\,\mathrm{R}(x), \qquad (1.16)$$

которые должны образовывать *проективное представление* аддитивной группы пространства $M$, так что

$$\mathrm{W}(x_1)\,\mathrm{W}(x_2) = \exp\frac{i}{2h}[x_1,\ x_2]\,\mathrm{W}(x_1 + x_2). \qquad (1.17)$$

Все неприводимые квантования унитарно эквивалентны, причем операторы, устанавливающие такую эквивалентность, определены единственным образом с точностью до комплексного множителя $c$, $|c| = 1$.

*Шредингеровским квантованием* фазового пространства $M$ называют такое квантование, при котором $\mathfrak{W} = \mathrm{L}_2(Q)$, а операторы $\mathrm{R}(x)$ задаются дифференциальными выражениями

$$(\mathrm{R}(x)f)(\xi) = \left(q\xi + \frac{h}{i}\,p\,\frac{\partial}{\partial \xi}\right)f(\xi), \qquad (1.18)$$

$\xi \in Q$. Это квантование неприводимо.

Представление $\mathrm{W}$ может быть расширено до унитарного проективного представления $\mathrm{V}$ описанной выше группы $G$. Характеристическим свойством представления $\mathrm{V}$ является соотношение

$$\mathrm{V}^*(g)\,\mathrm{R}\mathrm{V}(g) = g\mathrm{R}, \qquad (1.19)$$

где $g\mathrm{R} = A\mathrm{R} + a\mathrm{E}$ и $g = \{a,\ A\}$. Выражение $A\mathrm{R}$ и аналогичные операции над квантованием R, используемые ниже и перенесенные из пространства $M$, определяются в соответствии с двойственностью, устанавливаемой обозначением $R(a)=(R, a)$. В частности, $(AR)(x)=R({}^t\mathring{A}x)$. Легко видеть, что $gR$ — квантование, если R — квантование. Для неприводимого квантования R квантование $gR$ также неприводимо. Поэтому операторы V, обладающие свойством (1.19), существуют, унитарны и определены с точностью до комплексного множителя $c$, $|c|=1$. Очевидно, что эти операторы образуют унитарное проективное представление группы $G$.

5. Явные формулы. Можно положить

$$V(g)=V(a)V(A), \tag{1.20}$$

где

$$V(a)=\exp\frac{i}{h}[a, R], \quad V(A)=\exp\frac{i}{2h}[\ln\mathring{A}R, R]. \tag{1.21}$$

Здесь $V(a)$, $V(A)$ и $V(g)$ — унитарные операторы в $\mathfrak{W}$. Смысл выражения $[a, R]$ ясен, а

$$(BR, R)=\sum_{p=1}^{2n}(BR)(e_p)R(e_p),$$

где $\{e_p\}$ — произвольный ортонормированный базис в $M$, а $B=B^*$, где $*$ обозначает эрмитово сопряжение в комплексификации эрмитова пространства $M$. Оператор $V(A)$ определен с точностью до множителя $\pm 1$.

Операторы $V(g)$ удовлетворяют соотношению

$$V(g_1)V(g_2)=\pm\exp\frac{i}{2h}[a_1, \mathring{A}_1a_2]V(g_1g_2). \tag{1.22}$$

Потребуем, чтобы $V(e)=E$. Операторы $V(g)$ можно фиксировать *условием непрерывности* на $G$, и при этом будет выполняться соотношение

$$V(g_1)V(g_2)=\exp\frac{i}{2h}[a_1, \mathring{A}_1a_2]V(g_1g_2). \tag{1.23}$$

Оператор $V(g)$ по-прежнему равен

$$V(g)=V(a)V(A),$$

где

$$V(A)=V^{(1)}(\varphi)V^{(2)}(\delta)V^{(3)}(\rho) \text{ и } V^{(i)}, \quad i=1, 2, 3, \tag{1.24}$$

заданы с точностью до знака, который фиксируется условиями нормировки и непрерывности, формулами

$$V^{(1)}(\varphi)=\exp\frac{i}{2h}\left(R, \begin{pmatrix}\varphi & 0\\ 0 & \varphi\end{pmatrix}R\right), \tag{1.25}$$

$$V^{(2)}(\delta)=\exp\frac{i}{2h}\left(R, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}R\right), \tag{1.26}$$

$$V^{(3)}(\rho)=\exp\left(-\frac{i}{2h}\right)\left(R, \begin{pmatrix}0 & {}^t\rho\\ \rho & 0\end{pmatrix}R\right). \tag{1.27}$$

Выпишем явные формулы в случае шредингеровского представления. Оператор $V(a)$ равен

$$(V(a)f)(\xi)=\exp\frac{i}{2h}qp\exp\frac{i}{h}p(\xi-q)f(\xi-q), \tag{1.28}$$

причем $a=q+Jp$. Оператор $\mathbf{V}^{(3)}(\rho)$ равен

$$(\mathbf{V}^{(3)}(\rho)f)(\xi)=|\det^{-1/2}r|f(r^{-1}\xi). \tag{1.29}$$

Оператор $\mathbf{V}^{(1)}(\varphi)\mathbf{V}^{(2)}(\delta)$ является *интегральным*. Его ядро равно

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\det\frac{2\pi h}{i}(\cos\varphi_\varepsilon\delta_\varepsilon+\sin\varphi_\varepsilon)\right]^{-1/2}\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{i}{2h}\{\xi(-\sin\varphi_\varepsilon\delta_\varepsilon+\cos\varphi_\varepsilon)(\cos\varphi_\varepsilon\delta_\varepsilon+\sin\varphi_\varepsilon)^{-1}\xi+$$

$$+\xi'(\cos\varphi_\varepsilon\delta_\varepsilon+\sin\varphi_\varepsilon)^{-1}\cos\varphi_\varepsilon\xi'-2\xi'(\cos\varphi_\varepsilon\delta_\varepsilon+\sin\varphi_\varepsilon)^{-1}\xi\}\Big), \tag{1.30}$$

где $\varphi_\varepsilon=\varphi+i\varepsilon$, $\delta_\varepsilon=\delta+i\varepsilon$. При вырожденности $\cos\varphi\delta+\sin\varphi$ это выражение определяет *обобщенную функцию*, в противоположном случае указанный предел является гладкой функцией. Значение корня задается условием непрерывности выписанного ядра в зависимости от $\varphi$ и $\delta$ при $\varepsilon\neq 0$ и нормировкой при $\varphi=\delta=0$.

6. Индекс. Множество $\Phi$ симметрических преобразований $\varphi$ пространства $Q$ является *универсальным накрывающим пространством* для множества $\Lambda$ лагранжевых подпространств $\Lambda$. Проекция $\pi$: $\Phi\to\Lambda$ действует по формуле

$$\Lambda=\pi\varphi=(\exp J\Phi)Q. \tag{1.31}$$

Рассмотрим на $\Phi$ функцию

$$v_\varepsilon(\varphi)=|\det^{1/2}\cos(\varphi+i\varepsilon)|\det^{-1/2}\cos(\varphi+i\varepsilon). \tag{1.32}$$

Значение $\det^{1/2}\cos(\varphi+i\varepsilon)$ фиксировано требованием непрерывности и нормировкой $v_\varepsilon(0)=1$. Легко видеть, что произведение $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}v_\varepsilon^{-1}(\varphi)\mathbf{V}^{(1)}(\varphi)$ постоянно на каждом слое и является, тем самым, функцией на $\Lambda$. Рассмотрим далее непрерывную на $\Phi$ функцию $\ln v_\varepsilon$ с условием нормировки $(\ln v_\varepsilon)(0)=0$.

Общий вид преобразования $\varphi$, $\varphi\in\Phi$, таков:

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i(\cdot,\ e_i), \tag{1.33}$$

$$e_i\in Q,\quad e_ie_j=\delta_{ij},\quad \lambda_i\in\mathbf{R}.$$

Всегда можно считать, что

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n. \tag{1.34}$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^n$ векторов $\lambda=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ область $\mathbf{R}_+^n$, выделенную условием (1.34). Формула (1.33) задает отображение

$$\sigma\colon\ \Phi\to\mathbf{R}_+^n.$$

Рассмотрим в $\mathbf{R}_+^n$ плоскости вида $\lambda_i=e\pi+\pi/2$, $e$ — целое. Они делят $\mathbf{R}_+^n$ на ячейки.

Введем в $\mathbf{R}_+^n$ функцию

$$k=\sum_{i=1}^{n}E\Big(\frac{\lambda_i+\pi/2}{\pi}\Big), \tag{1.35}$$

где $E(t)$ — целая часть $t$, $t \in \mathbf{R}$. Эта функция не определена на указанных выше плоскостях и в ячейках постоянна. Перенесем $k$ на $\Phi$ условием $k = k\pi$, т. е. требованием постоянства на прообразах ячеек. Легко видеть, что

$$k = \frac{2}{\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ln v_\varepsilon. \tag{1.36}$$

Пусть $\gamma$ — ориентированная кривая на $\Lambda$ с началом $\Lambda_1$ и концом $\Lambda_2$. Предположим, что лагранжевы плоскости $\Lambda_1$ и $\Lambda_2$ однозначно проектируются на $Q$. Рассмотрим на $\Phi$ кривую $\gamma'$: $\pi\gamma' = \gamma$. *Индексом* $\operatorname{ind}\gamma$ кривой $\gamma$ называют целое число

$$\operatorname{ind}\gamma = k(\varphi_2) - k(\varphi_1). \tag{1.37}$$

Приведем другое определение $\operatorname{ind}\gamma$. Рассмотрим на $\Phi$ форму

$$\varkappa_\varepsilon = \frac{2}{\pi} d \ln v_\varepsilon. \tag{1.38}$$

Она фактически является формой на $\Lambda$. Рассмотрим на $\Lambda$ сингулярную форму

$$\varkappa = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varkappa_\varepsilon. \tag{1.39}$$

Пусть $\gamma$ — ориентированная кривая на $\Lambda$ с указанным выше условием относительно начала и конца. Тогда

$$\operatorname{ind}\gamma = \int_\gamma \varkappa. \tag{1.40}$$

Индексы замкнутых кривых определяют, очевидно, некоторый *класс целочисленных когомологий* $H^{(1)}(Z)$ на $\Lambda$. См. по этому поводу [3] и [4].

Ориентированная кривая $\gamma$ на лагранжевом многообразии $\Gamma$ индуцирует ориентированную кривую $\gamma'$ в множестве $\Lambda$. Индекс $\operatorname{ind}\gamma'$ называется *индексом Маслова* кривой $\gamma$. Обозначим его также $\operatorname{ind}\gamma$. Аналогично, кривая $\gamma$ на группе $G$ индуцирует кривую на множестве $\Phi$ и, тем самым, кривую $\gamma'$ на множестве $\Lambda$. Индекс последней назовем также *индексом* $\operatorname{ind}\gamma$ *кривой на группе*: $\operatorname{ind}\gamma = \operatorname{ind}\gamma'$.

7. Динамика. Пусть $m_t$, $t \in \mathbf{R}$, — семейство канонических диффеоморфизмов, задаваемых уравнениями Гамильтона

$$J\dot{x} = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \tag{1.41}$$

где $\chi = \chi(x, t)$. Рассмотрим на $\mathbf{R} \times M$ дифференциальную форму $\omega - \chi dt$. Ее сужение на $\bigcup_{-\infty < t < \infty} E_t$, где $E_t = m_t E$, $E$ — накрывающее пространство для многообразия $\Gamma$, является замкнутой формой. Пусть $\Omega^{(t)}$ — какая-либо первообразная этой формы. При фиксированном $t$ $\Omega^{(t)}$ — первообразная формы $\omega$ на $E_t$. Условимся через $d/dt$ или точкой обозначать *полную производную* по траекториям динамической системы $m_t$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\Omega^{(t)} = \dot{\Omega}^{(t)} = -\chi + \frac{1}{2}\left(x, \frac{\partial \chi}{\partial x}\right). \tag{1.42}$$

Пусть $g_t = \{a_t, A_t\}$, $t \in \mathbf{R}$, — путь в группе $G$. Нетрудно показать, что

$$ih\frac{d}{dt}\mathbf{V}(g_t) = \Big\{\frac{1}{2}[a_t, \dot{a}_t] +$$
$$+ [\mathbf{R} - a_t, \dot{a}_t] + \frac{1}{2}[\mathbf{R} - a_t, \dot{A}_t A_t^{-1}(\mathbf{R} - a_t)]\Big\}\mathbf{V}(g_t). \quad (1.43)$$

Дифференцирование понимается, например, в сильном смысле.

Будем говорить, что путь $g_t$ задан каноническим диффеоморфизмом $m_t$, если

$$g_t = \{m_t a, dm_t A\} \equiv m_t g, \quad (1.44)$$

где $\{a, A\} \in G$. Тогда из (1.42) и из (1.43) следует, что

$$ih\frac{d}{dt}\Big(\exp\frac{i}{h}\Omega^{(t)}\mathbf{V}(g_t)\Big) = \Big\{\chi + \Big(\mathbf{R} - x, \frac{\partial\chi}{\partial x}\Big) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(\mathbf{R} - x, \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}(\mathbf{R} - x)\Big)\Big\}\exp\frac{i}{h}\Omega^{(t)}\mathbf{V}(g_t), \quad (1.45)$$

где $x = x_t = m_t a$, а аргументы $\Omega^{(t)}$, $\chi$ и производных $\chi$ равны $x$, $t$.

Отметим также, что индекс пути $g_t = m_t g$, заданного каноническим диффеоморфизмом $m_t$, не зависит от начала пути и, вообще говоря, совпадает с *индексом Морса* траектории $m_t a$.

Пусть $\langle\Gamma, \Omega, T\rangle$ — лагранжева тройка. Условимся под $m_t\langle\Gamma, \Omega, T\rangle$ понимать

$$m_t\langle\Gamma, \Omega, T\rangle = \langle m_t\Gamma, \Omega^{(t)}, m_t T\rangle, \quad (1.46)$$

где $(m_t T)(x) = \{m_t x, dm_t(x) A(x)\}$ и $dm_t(x)$ — дифференциал $m_t$ в точке $x$, поднятый в группу $G$ так, что он гладко зависит от $x$. Аналогично определяется $m_t\langle\Gamma, \Omega\rangle$ для лагранжевой пары $\langle\Gamma, \Omega\rangle$.

## § 2. Производящий интеграл

В этом и следующем параграфах все ряды вида $\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k u_k$ считаются *формальными степенными рядами* относительно $\frac{h}{i}$, $h \in \Delta$. Выражения вида $\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k u_k$, где $u_k = \sum_{l\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^l u_{k,l}$, следует понимать как $\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k \sum_{l=0}^{k} u_{k-l,l}$.

1. Классы $\varphi$. Введем *формальные выражения*

$$\mathbf{V}(g)u\exp\frac{i}{h}S, \quad (2.1)$$

т. е. наборы $\{g, u, S\}$, где

1. $g \in G$,
2. $u = \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k u_k$, $u_k$: $Q \to \mathbf{C}$, причем $\operatorname{supp} u = \overline{\bigcup_{k\geqslant 0}\operatorname{supp} u_k}$ — компакт,
3. $S$: $\operatorname{supp} u \to \mathbf{R}$, причем $S$ продолжимо до отображения в $\mathbf{R}$ открытого множества $U$, $\operatorname{supp} u \subset U$. Класс таких функций обозначим $C^\infty(\operatorname{supp} u)$, а их продолжения будем обозначать $S_U$, если $S_U$: $U \to \mathbf{R}$.

Выражения вида (2.1) будут кратко записываться как $\mathrm{V}\varphi$, причем $\varphi$ будет также обозначаться

$$\varphi = u \exp \frac{i}{h} S \tag{2.2}$$

будет символизировать набор $\{u, S\}$.

В этом пункте будет определено *отношение эквивалентности*

$$\mathrm{V}_1\varphi_1 = \mathrm{V}_2\varphi_2. \tag{2.3}$$

С каждым $S_U$ можно связать лагранжево многообразие $\Gamma_{S_U}$ в $M$, однозначно проектируемое на $Q$ (см. стр. 10). Рассмотрим лагранжево многообразие $g\Gamma_{S_{U'}}$, где $g \in G$. Если $g\Gamma_{S_{U'}}$ однозначно проектируется на $Q$, то всякая функция $S_{U'}$ может быть сужена на такое открытое множество $U''$, $\operatorname{supp} u \subset U'' \subset U'$, что $g\Gamma_{S_{U''}}$ также будет однозначно проектироваться на $Q$.

Рассмотрим компакт

$$\Gamma_S = \left\{\left\{q, \frac{\partial S}{\partial q}\right\} \middle| q \in \operatorname{supp} u\right\} \tag{2.4}$$

и $g\Gamma_S$. Ясно, что $g\Gamma_S \subset g\Gamma_{S_U}$. Если $g\Gamma_{S_U}$ для какого-либо $S_U$ однозначно проектируется на $Q$, будем говорить, что $g\Gamma_S$ однозначно проектируется на $Q$.

Нижеследующее определение вводит основную рабочую конструкцию. Под символом

$$\mathrm{S.\ P.} \int\limits_Q \left(2\pi h e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}} u \exp\left(-\frac{i}{h} f\right) d\eta, \tag{2.5}$$

где $u$: $Q \to \mathbf{C}$, $u$ — финитна, а $f$: $U \to \mathbf{R}$, где $U$ — открытое множество, причем $\operatorname{supp} u \subset U$, и, наконец, $f$ имеет на $U$ единственную невырожденную критическую точку $\eta_S$, будем понимать формальное выражение

$$\left[\sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{i}\right)^k D_k (f \mid \eta_S) u\right] \exp\left(-\frac{i}{h} f(\eta_S)\right), \tag{2.6}$$

которое возникает, если к символу интеграла в (2.5) применить *процедуру метода стационарной фазы* (см., например, [6]). Здесь $D_k (f \mid \eta)$ — действующие на $u$ в точке $\eta$ линейные дифференциальные операторы, коэффициенты которых стандартным образом определяются производными функции $f$ в точке $\eta$. В частности,

$$D_0 (f \mid \eta) u = u(\eta) \left|\det{}^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right| \exp i \frac{\pi}{2} \delta, \tag{2.7}$$

где $\delta$ — *индекс вырождения точки* $\eta = \eta_S$. Выражение (2.5) очевидным образом переносится на тот случай, когда $u$ — формальный степенной ряд.

Используем явную формулу для оператора $\mathrm{V}(g)$ в шредингеровском квантовании. Тогда с выражением $\mathrm{V}\varphi$ можно связать символический интеграл вида (2.5)

$$\mathrm{V}\varphi \sim \int\limits_Q d\xi' \left|\det{}^{-1/2} r\right| u(r^{-1}\xi') \times$$

$$\times \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \det \frac{2\pi h}{i} (\cos \varphi_\varepsilon \delta_\varepsilon + \sin \varphi_\varepsilon) \right]^{-1/2} \exp\left( -\frac{i}{h} f_\varepsilon (\xi, \xi') \right), \tag{2.8}$$

где

$$f_\varepsilon (\xi, \xi') = -\frac{1}{2} qp - p(\xi - q) - S(r^{-1}\xi') +$$

$$+ \frac{1}{2} (\xi - q)(-\sin \varphi_\varepsilon \delta_\varepsilon + \cos \varphi_\varepsilon)(\cos \varphi_\varepsilon \delta_\varepsilon + \sin \varphi_\varepsilon)^{-1} (\xi - q) +$$

$$+ \frac{1}{2} \xi' (\cos \varphi_\varepsilon \delta_\varepsilon + \sin \varphi_\varepsilon)^{-1} \cos \varphi_\varepsilon \xi' - \xi' (\cos \varphi_\varepsilon \delta_\varepsilon + \sin \varphi_\varepsilon)^{-1} (\xi - q). \tag{2.9}$$

Оказывается, функция $f$ имеет *единственную невырожденную критическую точку* тогда и только тогда, когда $g\Gamma_S$ однозначно проектируется на $Q$. (Затруднения, связанные с особенностью $\cos \varphi\delta + \sin \varphi$, легко преодолеть, например, с помощью замены переменных). При выполнении этого условия имеет смысл символ S. P. $\mathrm{V}\varphi$, соответствующий (2.5), который определяет выражение вида $\varphi_1 = u_1 \exp \frac{i}{h} S_1$.

После того как определена операция S. P. над выражениями вида $\mathrm{V}\varphi$, нетрудно ввести отношение эквивалентности

$$\mathrm{V}_1 \varphi_1 = \mathrm{V}_2 \varphi_2.$$

Оно устанавливается формулой

$$\varphi_1 = \text{S. P.} (\mathrm{V}_1^{-1} \mathrm{V}_2) \varphi_2. \tag{2.10}$$

Корректность этого определения следует из равенства

$$\text{S. P. } \mathrm{V}_1 \text{ S. P. } \mathrm{V}_2 \varphi = \text{S. P. } \mathrm{V}_1 \mathrm{V}_2 \varphi, \tag{2.11}$$

которое выполняется, если в нем существует левая сторона.

Заметим, что если оператор $\mathrm{V}$ не содержит интегрирования, то $\mathrm{V}\varphi$ непосредственно истолковывается как выражение вида $\varphi_1$. В этом случае действие операции S. P. считается тождественным.

Условимся введенные *классы эквивалентности* обозначать буквой $\psi$.

2. Свойства отношения эквивалентности. С каждым классом $\psi$ можно связать пару $\langle \Gamma_\psi, \Omega_\psi \rangle$, которую мы будем называть *лагранжевой парой класса* $\psi$. Здесь $\Omega_\psi$ — первообразная формы $\omega$ на $\Gamma_\psi$. Пусть класс $\psi$ содержит выражение $\mathrm{V}(g) u \exp \frac{i}{h} S$. Рассмотрим лагранжеву пару $\langle \Gamma_{S_U}, \Omega_{S_U} \rangle$, где

$$\Omega_{S_U}\left( \left\{ q, \frac{\partial S}{\partial q} \right\} \right) = S_U(q) - \frac{1}{2} q \frac{\partial S_U}{\partial q}. \tag{2.12}$$

*Лагранжевой парой* $\psi$ называется сужение лагранжевой пары $g\langle \Gamma_{S_U}, \Omega_{S_U} \rangle$ на $g\Gamma_S$. Оно не зависит от выбора выражения $\mathrm{V}\varphi$, входящего в класс $\psi$. Более того, класс $\psi$ содержит представителя вида $\mathrm{V}(g) u \exp \frac{i}{h} S$ с заданными $g$ и $S$, если сужение лагранжевой пары $g\langle \Gamma_{S_U}, \Omega_{S_U} \rangle$ на $g\Gamma_S$ совпадает с $\langle \Gamma_\psi, \Omega_\psi \rangle$.

Рассмотрим отображение $P_{\mathrm{V}\varphi}\colon \Gamma_\psi \to \operatorname{supp} u$, задаваемое формулой

$$P_{\mathrm{V}\varphi} = \pi_S \circ g^{-1}, \tag{2.13}$$

где $\pi_g$ — ортогональное проектирование $\Gamma_g$ на $Q$. Имеет место следующее *свойство локальности* введенного выше отношения эквивалентности: если $V_1\varphi_1 = V_2\varphi_2$, то

$$u_1 \circ P_{V_1\varphi_1} x = \left(\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{h}{i}\right)^k L_k u_2\right) \circ P_{V_2\varphi_2} x. \tag{2.14}$$

Здесь $x \in \Gamma_\psi$, а $L_k$ — действующие на $u_2$ линейные дифференциальные операторы, коэффициенты которых в точке $\xi$ зависят от $g_1$, $g_2$ и от $\Gamma_\psi$ в окрестности конечного порядка точки $x = P^{-1}_{V_2\varphi_2}\xi$. При этом

$$(L_0 u_2)(\xi) = \left|\det{}^{-1/2} d\left(P_{V_2\varphi_2} \circ P^{-1}_{V_1\varphi_1}\right)\right| u_2(\xi) \exp\frac{i}{2} k(\varphi), \tag{2.15}$$

где $d$ обозначает операцию взятия дифференциала, а функция $k(\varphi)$ определена на стр. 13, причем $\varphi$ соответствует элементу $g_1^{-1}g_2$.

3. Пространство $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$. Перейдем к определению линейных пространств, векторы которых будут использованы в дальнейшем для описания асимптотического поведения решений уравнений типа (0.1) и (0.2).

Рассмотрим лагранжеву пару $\langle\Gamma, \Omega\rangle$. Будем говорить, что *класс* $\psi$ *подчинен паре* $\langle\Gamma, \Omega\rangle$, если лагранжева пара класса $\psi$ *является сужением* лагранжевой пары $\langle\Gamma, \Omega\rangle$.

*Векторами* линейного пространства $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ (временно считаем $\Gamma$ односвязным) являются формальные суммы

$$\Psi = \sum_{\alpha\in I} \psi_\alpha \tag{2.16}$$

некоторого множества $I$ классов $\psi_\alpha$, подчиненных паре $\langle\Gamma, \Omega\rangle$, при условии (условие локальной конечности), что каждая точка $\Gamma$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом $\Gamma_{\psi_\alpha}$. Векторы пространства $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ будут обозначаться буквой $\Psi$.

Пусть класс $\psi$ содержит выражение $V(g)\,u \exp\frac{i}{h}S$. Обозначим через $c\psi$, $c \in \mathbf{C}$, класс, содержащий $V(g)(cu)\exp\frac{i}{h}S$. Определение $c\psi$ не зависит от выбора представителя класса и $\langle\Gamma_\psi, \Omega_\psi\rangle = \langle\Gamma_{c\psi}, \Omega_{c\psi}\rangle$.

Линейные операции в $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ определяются формулами

$$c\Psi = \sum_{\alpha\in I} c\psi_\alpha, \quad \text{если } \Psi = \sum_{\alpha\in I}\psi_\alpha, \; c \in \mathbf{C}. \tag{2.17}$$

и

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \sum_{\alpha\in I_1\cup I_2} \psi_\alpha, \quad \text{если } \Psi_i = \sum_{\alpha\in I_i}\psi_\alpha, \; i = 1, 2. \tag{2.18}$$

Сложнее определяется *нулевой вектор*. Пусть $\Psi \in \mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$. Фиксируем точку $x \in \Gamma$ и рассмотрим ее окрестность $U$, о которой идет речь в условии локальной конечности. Окрестность $U$ можно считать однозначно проектируемой на некоторую плоскость $\Lambda$. Пусть $I(x) = \{\alpha \mid U \cap \Gamma_{\psi_\alpha} \neq 0\}$. Пусть $U_0$ — такая окрестность $x$, что $\bar{U}_0 \subset U$. Пусть $\theta$: $\Gamma \to \mathbf{R}$, причем $\theta = 1$ на $U_0$, $\theta = 0$ на $\bar{U}$. Положим $\theta_\alpha = \theta \circ P^{-1}_{V_\alpha\varphi_\alpha}$. Рассмотрим выражения

$$V(g_\alpha)(u_\alpha\theta_\alpha)\exp\frac{i}{h}S_\alpha, \tag{2.19}$$

где $V(g_\alpha) u_\alpha \exp \frac{i}{h} S_\alpha$ входит в класс $\psi_\alpha$. Пусть $\mathring{g}\Lambda = Q$, $\mathring{g} \in G$. Тогда для $\alpha \in I(x)$

$$V(g_\alpha)(u_\alpha \theta_\alpha) \exp \frac{i}{h} S_\alpha = V(g) u^{(\alpha)} \exp \frac{i}{h} S, \tag{2.20}$$

где $S$ не зависит от $\alpha$. Образуем выражение

$$V\varphi = V(g) \left( \sum_{\alpha \in I(x)} u^{(\alpha)} \right) \exp \frac{i}{h} S. \tag{2.21}$$

Вектор $\Psi$ считается нулевым, если $\left( \sum_{\alpha \in I(x)} u^{(\alpha)} \right) (P_{V\varphi} x) = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Определение нулевого вектора не зависит от произвола конструкции.

При так введенных нулевом векторе и линейных операциях $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ образует *линейное пространство*.

4. Производящий интеграл. Теперь мы дадим новое описание векторов пространства $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$. Начнем с подготовки обозначений и с некоторых чисто символических преобразований. $\Gamma$ по-прежнему предполагается временно односвязным.

Введем основное обозначение

$$K\mu = K_{\langle \Gamma, \Omega, T \rangle} \mu = (K_{\langle \Gamma, \Omega, T \rangle} \mu)(\xi), \tag{2.22}$$

где $\langle \Gamma, \Omega, T \rangle$ — лагранжева тройка, а $\mu = \sum_{k \geqslant 0} \left( \frac{h}{i} \right)^k \mu_k$ и $\mu_k$ — *гладкие комплекснозначные меры* на $\Gamma$. Основное обозначение будет подробнее расшифровываться символом

$$(K_{\langle \Gamma, \Omega, T \rangle} \mu)(\xi) = \text{S.}\widetilde{\ }\text{P.} \int_\Gamma \mu(dx)\, T_{\langle \Gamma, \Omega, T \rangle}(\xi, x). \tag{2.23}$$

Здесь $\xi \in Q$, $x \in \Gamma$, к символу S.͂P. мы вернемся позже и, наконец,

$$T_{\langle \Gamma, \Omega, T \rangle}(\cdot, x) = \exp \frac{i}{h} \Omega(x)\, V(T(x))\, \delta, \tag{2.24}$$

причем $V(g)\delta$ — результат применения $V(g)$ к дельта-функции $\delta(\xi)$:

$$\begin{aligned} V(T(x))\,\delta = \exp \frac{i}{2h} qp\, (\det r)^{1/2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \det \frac{2\pi h}{i} (\cos \varphi_\varepsilon \delta_\varepsilon + \sin \varphi_\varepsilon) \right]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left( -\frac{i}{2h} \right) [(\xi - q)(-\sin \varphi_\varepsilon \delta_\varepsilon + \cos \varphi_\varepsilon) \times \\ \times (\cos \varphi_\varepsilon \delta_\varepsilon + \sin \varphi_\varepsilon)^{-1} (\xi - q) - 2p(\xi - q)]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Здесь $q$, $p$, $\varphi$, $\delta$ и $r$ — функции от $x$, отвечающие $g = T(x)$.

Так как для $g = \{a, A\} \in G$

$$V(T(x)) = \exp \frac{i}{2h} [x, a]\, V(g)\, V(T'(x')), \tag{2.26}$$

где $x' = g^{-1} x \in g^{-1}\Gamma = \Gamma'$ и $T'(x') = g^{-1} T(x)$, то

$$T_{\langle \Gamma, \Omega, T \rangle}(\cdot, x) = V(g)\, T_{g^{-1}\langle \Gamma, \Omega, T \rangle}(\cdot, x'). \tag{2.27}$$

Поэтому символически

$$K_{\langle \Gamma, \Omega, T \rangle} \mu = V(g)\, K_{g^{-1}\langle \Gamma, \Omega, T \rangle} \mu_{g^{-1}}, \tag{2.28}$$

где $\mu_{g^{-1}}(\gamma) = \mu(g\gamma)$.

*Между векторами $\Psi$ пространства $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ и символами $K_{\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}\mu$ при фиксированной лагранжевой тройке $\langle\Gamma, \Omega, T\rangle$ существует простое взаимно однозначное соответствие, при котором линейные операции над $\Psi$ переходят в обычные линейные операции над $\mu$, а нулевому вектору отвечает $\mu = 0$.*

Опишем переход от $K\mu$ к $\Psi$. Введем на $\Gamma$ локально конечное покрытие $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и подчиненное ему разбиение единицы $\{0_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Наложим на покрытие дополнительное условие 1: каждое $\Gamma_\alpha$ однозначно проектируется на некоторую лагранжеву плоскость $\Lambda_\alpha$. Пусть $g_\alpha \in G$ таково, что $\mathring{g}_\alpha Q = \Lambda_\alpha$. Наложим на покрытие и семейство $\{g_\alpha\}_{\alpha\in I}$ дополнительное условие 2: на $\Gamma_\alpha$ не вырожден оператор $\delta_\alpha(x_\alpha) + \operatorname{tg}\varphi_\alpha(x_\alpha)$, где $\delta_\alpha$ и $\varphi_\alpha$ соответствуют элементу $g_\alpha^{-1}T(x) = T_\alpha(x_\alpha) = \{x_\alpha, \ A_\alpha(x_\alpha)\}$, $x_\alpha = g_\alpha^{-1}x$, $x \in \Gamma_\alpha$, группы $G$. Дополнительные условия 1 и 2 всегда можно считать выполненными за счет достаточно мелкого покрытия и подходящего выбора $g_\alpha$.

Символу $K_{\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}\mu$, естественно, сопоставляется символическая сумма

$$\sum_{\alpha\in I} K_{\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}(0_\alpha\mu), \tag{2.29}$$

которую, в соответствии с (2.28), перепишем так:

$$\sum_{\alpha\in I} V(g_\alpha)\, K_{g_\alpha^{-1}\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}(0_\alpha\mu)_{g_\alpha^{-1}}. \tag{2.30}$$

При выполнении дополнительных условий интеграл (2.23), ассоциируемый с каждым $K_{g_\alpha^{-1}\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}(0_\alpha\mu)_{g_\alpha^{-1}}$, имеет вид (2.5). Соответствующая функция $f$ будет иметь при этом изолированную невырожденную критическую точку $x_\alpha = \{\xi, \ p\} \in g_\alpha^{-1}\Gamma_\alpha$, не обязательно единственную. S. P. в (2.23) означает процедуру метода стационарной фазы относительно этой точки. Тем самым,

$$K_{g_\alpha^{-1}\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}(0_\alpha\mu)_{g_\alpha^{-1}} \to \varphi_\alpha = u_\alpha \exp\frac{i}{h} S_\alpha \tag{2.31}$$

и символу $K_{\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}\mu$ сопоставляется вектор

$$\Psi = \sum_{\alpha\in I} \psi_\alpha,$$

где класс $\psi_\alpha$ содержит выражение $V(g_\alpha)\varphi_\alpha$. Вектор $\Psi$ не зависит от произвола конструкции.

5. Свойства символа $K\mu$. Отметим, что преобразование символа $K_{g_\alpha^{-1}\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}(0_\alpha\mu)_{g_\alpha^{-1}}$ в выражение $\varphi_\alpha$ обладает свойством локальности, аналогичным (2.14). Отметим также, что $K_{\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}\mu$ сводится к классу $\psi$, содержащему выражение вида $V\varphi$ тогда и только тогда, когда лагранжево многообразие $g^{-1}\Gamma$ однозначно проектируется на $Q$. В частности, при $g$, равном единице, выражение $\varphi$ равно

$$\varphi(\xi) = u(\xi)\exp\frac{i}{h} S(\xi), \tag{2.32}$$

где

$$S(\xi) = \Omega(x_\xi) + \frac{1}{2}\xi p, \ x_\xi = \{\xi, \ p\} \in \Gamma \tag{2.33}$$

и

$$u_0(\xi)=\frac{d\mu_0}{ds}\left|\det{}^{1/2} r \det{}^{-1/2}\cos\varphi\right|_{x=x_\xi}\exp\frac{i}{2}\pi k, \tag{2.34}$$

$k=k(\varphi)$ описано в § 1, $k=\text{const}$, $s$ — элемент площади на $\Gamma$, а $r$ и $\varphi$ являются параметрами $T(x)$.

Нетрудно проверить, что произвольный вектор $\Psi\in\mathscr{L}(\Gamma,\Omega)$ может быть единственным образом представлен символом $K_{\langle\Gamma,\Omega,T\rangle}\mu$. Условимся называть $K_{\langle\Gamma,\Omega,T\rangle}\mu$ *производящим интегралом* для вектора $\Psi$.

Следует заметить, что выбор $T$ при таком соответствии между $K_{\langle\Gamma,\Omega,T\rangle}\mu$ и $\Psi$ произволен. Можно было бы исследовать условия равенства векторов

$$K_{\langle\Gamma,\Omega,T_1\rangle}\mu_1=K_{\langle\Gamma,\Omega,T_2\rangle}\mu_2. \tag{2.35}$$

Оказывается, $\mu_1$ и $\mu_2$ в этом случае связаны преобразованием, обладающим свойством локальности.

Формула (2.28) позволяет определить действие на векторы $\Psi$ оператора $\mathbf{V}(g)$: $\mathscr{L}(\Gamma,\Omega)\to\mathscr{L}(\mathring{g}\Gamma,\Omega_g)$. Если $\Psi=K_{\langle\Gamma,\Omega,T\rangle}\mu$, то

$$\mathbf{V}(g)\Psi=K_{g\langle\Gamma,\Omega,T\rangle}\mu_{g^{-1}}. \tag{2.36}$$

Оператор $\mathbf{V}(g)$ сохраняет равенство (2.35).

В заключение этого пункта опишем пространство $\mathscr{L}(\Gamma,\Omega)$ для *неодносвязного* лагранжева многообразия $\Gamma$. В этом случае рассматривается накрывающее пространство $E$ многообразия $\Gamma$, о котором шла речь в § 1. Оно обладает тем свойством, что на нем существует однозначная первообразная $\Omega$: $E\to\mathbf{R}$ формы $\omega$, принимающая разные значения в различных точках слоя. Ясно, что на этот случай, естественно, переносятся все предыдущие построения и обозначения с той поправкой, что вместо (2.23) теперь следует писать

$$(K_{\langle\Gamma,\Omega,T\rangle}\mu)(\xi)=\mathrm{S.\widetilde{P}.}\int_E \mu(dx)\,T_{\langle\Gamma,\Omega,T\rangle}(\xi,x) \tag{2.37}$$

и $\mu_k$ — меры на $E$.

6. Канонический оператор Маслова. Пусть $\mu$ финитна, т. е. $\operatorname{supp}\mu=\overline{\bigcup_{k\geqslant 0}\operatorname{supp}\mu_k}$ — компакт. Введем конечное покрытие $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ такое, что $|\operatorname{osc}\lambda_i^\alpha|\leqslant\frac{\pi}{2}$, где $\lambda^\alpha=\sigma\varphi_\alpha$, а $\varphi_\alpha=\varphi|_{E\alpha}$. Пусть $x_\alpha\in E_\alpha$. Положим $\tilde\varphi_\alpha=\varphi_\alpha(x_\alpha)$. Пусть $\tilde\varphi_\alpha=\sum_{i=1}^n\lambda_i^\alpha\tilde e_i^\alpha(\cdot,\tilde e_i^\alpha)$. Каждое $\lambda_i^\alpha$ заменим ближайшим числом вида $\hat\lambda_i^\alpha=m_i^\alpha\frac{\pi}{2}$, $m_i^\alpha$ — целое.

Рассмотрим теперь числа

$$\lambda_i^\alpha=\begin{cases}0, \text{ если } \hat\lambda_i^\alpha=\hat m_i^\alpha\pi,\\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } \hat\lambda_i^\alpha=\hat m_i^\alpha\pi+\frac{\pi}{2},\ \hat m_i^\alpha \text{ — целое.}\end{cases}$$

Введем $\hat\varphi_\alpha=\sum_{i=1}^n\lambda_i^\alpha\tilde e_i^\alpha(\cdot,\tilde e_i^\alpha)$ и $\mathbf{V}^{(1)}(\hat\varphi_\alpha)$. Если $f=f(\xi)=f(\xi_1,\ldots\xi_n)$, $\xi\in Q$, а $\xi_i$ — компоненты $\xi$ в базисе $\tilde e_i^\alpha$, то $\mathbf{V}^{(1)}(\hat\varphi_\alpha)$ действует тождественно на переменную $\xi_i$, для которой $\lambda_i^\alpha$, и как преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi h}{i}\right)^{-1/2} e^{\frac{i}{h}\xi_i\xi_i'} f(\ldots, \xi_i' \ldots)\, d\xi_i' \tag{2.38}$$

на переменную $\xi_i$, если $\lambda_i^\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Введем подчиненное покрытию разбиение единицы и разложение

$$K_{\langle \Gamma, \Omega, T\rangle}\mu = \sum_{\alpha \in I} K_{\langle E_\alpha, \Omega, T\rangle}(\theta_\alpha \mu). \tag{2.39}$$

Далее следуем преобразованию (2.30)

$$K_{\langle E_\alpha, \Omega, T\rangle}(\theta_\alpha \mu) = V^{(1)}(\varphi_\alpha)\, K_{g_\alpha^{-1}\langle E_\alpha, \Omega, T\rangle}(\theta_\alpha \mu)_{g_\alpha^{-1}}, \tag{2.40}$$

где $g_\alpha = \{0, \{\varphi_\alpha, 0, 0\}\}$ и $g_\alpha^{-1}E_\alpha$ однозначно проектируется на $Q$. Поэтому

$$K_{g_\alpha^{-1}\langle E_\alpha, \Omega, T\rangle}(\theta_\alpha \mu)_{g_\alpha^{-1}} = \psi, \tag{2.41}$$

причем класс $\psi$, согласно (2.32), содержит выражение

$$\left\{\left(\theta_\alpha \frac{d\mu_0}{ds}\right)\Big|_{g_\alpha^{-1}} + \ldots\right\} \left|\det{}^{1/2} r_\alpha \det{}^{-1/2}\cos\varphi_\alpha\right| \Big|_{x = x_\xi^\alpha} \times$$

$$\times \exp\frac{i}{h} S_\alpha(\xi) \exp\frac{i}{2}\pi k_\alpha, \tag{2.42}$$

в котором $x_\xi^\alpha = \{\xi, p\} \in g_\alpha^{-1}E_\alpha$.

*Каноническим оператором по Маслову* называют отображение $E$, $\Omega$ и функции $v$ на $E$ в функцию на $Q$, равную

$$\sum_{\alpha \in I} V^{(1)}(\varphi_\alpha)(\theta_\alpha v)_{g_\alpha^{-1}}(x_\xi^\alpha)\,|\det{}^{-1/2}\cos\varphi_\alpha|\,\Big|_{x = x_\xi^\alpha} \exp\frac{i}{h} S_\alpha(\xi) \exp\frac{i}{2}\pi k_\alpha. \tag{2.43}$$

Отметим, что Маслов группирует в общий символ — функцию на $E$, которая выступает у него вместо $\mu_0$ — произведение $v = |\det{}^{-1/2} r|\, \frac{d\mu_0}{ds}$.

## § 3. Квазиклассическая асимптотика

1. Квазиклассический оператор. Рассмотрим *задачу Коши* для уравнения

$$ih\frac{d}{dt}\Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t), \tag{3.1}$$

$$t \in \mathbf{R}, \quad \Psi(t) \in \mathscr{L}(\Gamma_t, \Omega_t),$$

с начальным условием

$$\Psi(0) = \Psi \in \mathscr{L}(\Gamma, \Omega). \tag{3.2}$$

Предварительно нам предстоит определить операции $\hat{H}$ и $ih\frac{d}{dt}$ над векторами $\Psi(t)$.

$\hat{H}$ обозначает линейный оператор специального вида в пространствах $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$. Операторы, принадлежащие этому специальному классу, будут называться *квазиклассическими операторами*.

Квазиклассический оператор $\hat{H}$ задается *функцией Гамильтона*

$$H = \sum_{k \geq 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k H_k, \quad H_k : M \to \mathbf{C}. \tag{3.3}$$

Если $H=H_0$ и $\Psi=K_{\langle\Gamma,\,\varrho,\,T\rangle}\mu$, то действие $\hat{H}$ на $\Psi$ определяется формулой вида

$$\hat{H}\Psi=K_{\langle\Gamma,\,\varrho,\,T\rangle}\mathscr{H}(\Gamma,\,T)\,\mu, \tag{3.4}$$

где $\mathscr{H}(\Gamma,\,T)\,\mu=\sum\limits_{l\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^l D_l(H_0,\,\Gamma,\,T)\,\mu$, причем $D_l(H_0,\,\Gamma,\,T)$ — действующие на $\mu$ линейные дифференциальные операторы, стандартным образом определяемые в точке $x\in\Gamma$ функцией $H_0$, многообразием $\Gamma$ и отображением $T$ в окрестности конечного порядка точки $x$. От $H_0$ и производных $H_0$ операторы $D_l$ зависят линейно. Для общих $\hat{H}$ по-прежнему сохраняется формула (3.4), но

$$\mathscr{H}\mu=\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k\sum_{l\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^l D_l(H_k,\,\Gamma,\,T)\,\mu. \tag{3.5}$$

*Опишем конструкцию, приводящую к явному виду коэффициентов* $D_l$. Достаточно считать при этом $H=H_0$ и $\mu=\mu_0$. Для величины $\hat{H}\Psi$ будет использоваться также следующее обозначение:

$$\hat{H}\Psi=\mathrm{S.\widetilde{}P.}\int\limits_{\mathrm{E}}\mu(dx)\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k\,!}\left(\mathrm{R}-x,\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^k H(y)\,|_{y=x}\,T_{\langle\Gamma,\,\varrho,\,T\rangle}(\xi,\,x). \tag{3.6}$$

Введем

$$F_k=F_k(h,\,\xi,\,x\,|\,H)=$$
$$=T^{-1}(\xi,\,x)\,\frac{1}{k\,!}\left(\mathrm{R}-x,\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^k H(y)\,|_{y=x}T(\xi,\,x). \tag{3.7}$$

Легко видеть, что $F_k$ — полином относительно $h$ и $\xi$, а также линейная функция от производных $H$ порядка $k$ в точке $x$. Вследствие формулы

$$\left(g\mathrm{R}-x,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^k H(x)=\left(\mathrm{R}-x',\,\frac{{}^{g}\partial}{\partial x'}\right)^k H(gx'), \tag{3.8}$$

где $x'=g^{-1}x$, $g\in G$, выполняется соотношение

$$F_k(x\,|\,H)\,T_{\langle\Gamma,\,\varrho,\,T\rangle}(\xi,\,x)=\mathrm{V}(g)\,F_k(x'\,|\,H_g)\,T_{g^{-1}\langle\Gamma,\,\varrho,\,T\rangle}(\xi,\,x'), \tag{3.9}$$

$H_g(x)=H(gx)$. Здесь использовано также (2.27). Каждый символ

$$\mathrm{S.\widetilde{}P.}=\int\limits_{\mathrm{E}}\mu(dx)\,T(\xi,\,x)\,F_k \tag{3.10}$$

может быть расшифрован как выражение вида $K\mu$. Для этого воспользуемся цепочкой символических преобразований из § 2

$$\mathrm{S.\widetilde{}P.}\int\limits_{E}\mu(dx)\,T(\xi,\,x)\,F_k(h,\,\xi,\,x\,|\,H)\rightarrow$$
$$\rightarrow\sum_{\alpha\in I}\mathrm{S.\widetilde{}P.}\int\limits_{E}(\theta_\alpha\mu)(dx)\,T(\xi,\,x)\,F_k\rightarrow$$
$$\rightarrow\sum_{\alpha\in I}\mathrm{V}(g_\alpha)\,\mathrm{S.\widetilde{}P.}\int\limits_{g_\alpha^{-1}E_\alpha}(\theta_\alpha\mu)_{g_\alpha^{-1}}(dx_\alpha)\,T(\xi,\,x_\alpha)\times$$
$$\times F_k(h,\,\xi,\,x_\alpha\,|\,H_{g_\alpha})\rightarrow\sum_{\alpha\in I}\mathrm{V}(g_\alpha)\,\varphi_\alpha\left(\frac{h}{i}\right)^{E\left(\frac{k+1}{2}\right)}. \tag{3.11}$$

Появление множителя $\left(\frac{h}{i}\right)^{E\left(\frac{k+1}{2}\right)}$ легко устанавливается более внимательным исследованием структуры функции $F_k$. Последний член приведенной цепочки уже может быть осмыслен как элемент $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$, причем этот элемент представим в виде

$$K_{\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}\left(\sum_{j\geqslant E\left(\frac{k+1}{2}\right)}\left(\frac{h}{i}\right)^j d_{k,j}\mu\right), \tag{3.12}$$

где $d_{k,j}$ — линейные дифференциальные операторы.

Оператор $\hat{H}$ определяется теперь формулой (3.4), где

$$D_0 = H, \tag{3.13}$$

$$D_l = \sum_{k=1}^{2l} d_{k,l}, \quad l \geqslant 1.$$

Из предыдущего легко выводится соотношение

$$\hat{H}\mathrm{V}(g)\Psi = \mathrm{V}(g)\hat{H}_g\Psi. \tag{3.14}$$

2. Формальная задача Коши. Пусть вектор $\Psi(t)$ зависит от $t$, $t \in \mathbf{R}$. Предположим, что эта зависимость имеет вид (чего достаточно для задачи Коши)

$$\Psi(t) = K_{m_t\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}\mu_t, \tag{3.15}$$

где $m_t$ — диффеоморфизмы, описанные в § 1, а $(\mu_t)_k$ — мера на $m_tE$. Естественно, ввиду формулы (1.45), определить $ih\frac{d}{dt}\Psi(t)$ выражением

$$ih\frac{d}{dt}\Psi(t) = \widetilde{\mathrm{S.P.}} \int_{E_t} \mu_t(dx)\left\{ih\frac{d\dot{\mu}_t}{d\mu_t} + \chi + \right.$$

$$\left. + \left(\mathbf{R} - x, \frac{\partial\chi}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{R} - x, \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}(\mathbf{R} - x)\right)\right\} T(\xi, x), \tag{3.16}$$

расшифровку которого следует провести аналогично расшифровке (3.6). В итоге

$$ih\frac{d}{dt}\Psi(t) = K_{m_t\langle\Gamma, \Omega, T\rangle}\left\{ih\frac{d\dot{\mu}_t}{d\mu_t} + \dot{\chi} + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{h}{i}\right)^k \sum_{j=1}^{2} d_{j,k}(\chi)\right\}\mu_t. \tag{3.17}$$

Возвратимся теперь к уравнению

$$ih\frac{d}{dt}\Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t).$$

Предположим, что в $H(t) = \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k H_k$ функция $H_0 = \chi$.

Уравнение (3.1) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\left[ih\frac{d\dot{\mu}_t}{d\mu_t} + H_0 + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{h}{i}\right)^k \sum_{j=1}^{2} d_{j,k}(H_0)\right]\mu_t =$$

$$= \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k \sum_{l\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^l D_l(H_k)\mu_t. \tag{3.18}$$

После перестройки формальных рядов коэффициенты при $\left(\frac{h}{i}\right)^0$ сокращаются, при $\left(\frac{h}{i}\right)^1$ дают

$$(\dot{\mu}_t)_0 + H_1(\mu_t)_0 = 0 \tag{3.19}$$

и, наконец, при $k \geqslant 1$

$$(\dot{\mu}_t)_k + H_1(\mu_t)_k = \mathscr{N}_k \quad ((\mu_t)_i,\ i < k). \tag{3.20}$$

Итак, уравнение (3.1) свелось к рекуррентной системе линейных дифференциальных уравнений для мер $\mu_k$.

В задаче Коши эти уравнения дополняются начальным условием

$$\mu_t|_{t=0} = \mu, \tag{3.21}$$

вместе с которым они однозначно определяют $\mu_t$, $t \in \mathrm{R}$, а тем самым и $\Psi(t)$. *Задача Коши решена.*

3. Асимптотические определения. Элементы пространства $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ могут быть использованы для асимптотического представления функций: $Q \to \mathrm{C}$. Для определенности будем рассматривать асимптотические разложения в топологии $\mathrm{L}_2(Q)$. Выражение $O(h^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, h \in \Delta$, будет обозначать элемент $\mathrm{L}_2(Q)$, зависящий от $h$, причем $h^{-k}\|O(h^k)\|_{\mathrm{L}_2(Q)}$ ограничено при $h \in \Delta$.

Рассмотрим выражение

$$\mathrm{V}\varphi = \mathrm{V}(g)\, u \exp \frac{i}{h} S, \quad u = \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{i}\right)^k u_k. \tag{3.22}$$

Под $\mathrm{V}\varphi^N$ условимся понимать элемент $\mathrm{L}_2(Q)$, заданный формулой

$$\mathrm{V}\varphi^N = \mathrm{V}(g)\, u^N \exp \frac{i}{h} S, \quad u^N = \sum_{k \geqslant 0}^{N} \left(\frac{h}{i}\right)^k u_k. \tag{3.23}$$

Из $\mathrm{V}_1\varphi_1 = \mathrm{V}_2\varphi_2$ следует $\mathrm{V}_1\varphi_1^N - \mathrm{V}_2\varphi_2^N = O(h^{N+1})$. Пусть $\psi$ — класс эквивалентности выражений вида $\mathrm{V}\varphi$. Под $\psi^N$ будем понимать класс функций $\mathrm{V}\varphi^N$, где $\mathrm{V}\varphi$ принадлежит классу $\psi$.

Обозначим через $\mathring{\mathscr{L}}(\Gamma, \Omega)$ подмножество в $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$, отвечающее финитным мерам $\mu$. Пусть $\Psi \in \mathring{\mathscr{L}}(\Gamma, \Omega)$ и

$$\Psi = \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha. \tag{3.24}$$

Множество $I$ будет (это возможно) считаться конечным. Положим

$$\Psi^N = \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha^N. \tag{3.25}$$

Если $\Psi_1^N$ и $\Psi_2^N$ отвечают одному и тому же $\Psi$ при разных разложениях (3.24), то

$$\Psi_1^N - \Psi_2^N = O(h^{N+1}).$$

*Будем говорить, что* $\Psi$, $\Psi \in \mathring{\mathscr{L}}(\Gamma, \Omega)$, *является асимптотическим разложением при* $h \to 0$ *некоторого элемента* $\psi_h$, $\psi_h \in \mathrm{L}_2(Q)$, *если*

$$\psi_h - \Psi^N = O(h^{N+1}) \tag{3.26}$$

при $N = 0, 1, 2, \ldots$. Запись: $\psi_h \sim \Psi$.

Пусть H — зависящий от $h$ линейный оператор в $L_2(Q)$ и пусть для любого $\Psi$, $\Psi \in \mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$, и $N=0, 1, 2, \ldots$, $\Psi^N \in D(\mathrm{H})$, где $D(\mathrm{H})$ — область определения H. Будем говорить в этом случае, что оператор H *порождает квазиклассический оператор* $\hat{H}$, если

$$\mathrm{H}\Psi^N = (\hat{H}\Psi)^N + O(h^{N+1}). \tag{3.27}$$

Для того чтобы оператор H порождал некоторый квазиклассический оператор $\hat{H}$, достаточно, чтобы элемент

$$\mathrm{V}^*(g)\,\mathrm{H}\mathrm{V}(g)\,u \exp\frac{i}{h}S, \quad u=u_0, \tag{3.28}$$

допускал при $h\to 0$ асимптотическое разложение в $L_2(Q)$ вида

$$\left[\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k L_k(g, S)u\right]\exp\frac{i}{h}S, \tag{3.29}$$

где $L_k$ — линейные дифференциальные операторы, коэффициенты которых зависят от производных функции $S$ в точке дифференцирования, причем выполняется соотношение

$$u\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k L_k\left(g, S+\frac{h}{i}\ln u\right)1 = \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{h}{i}\right)^k L_k(g, S)\,u. \tag{3.30}$$

Выражение $L_k\left(g, S+\frac{h}{i}\ln u\right)$ обозначает ряд Тейлора для $L_k\left(g, S+\frac{h}{i}\ln u\right)$ по степеням $\frac{h}{i}$.

Нетрудно проверить, что описанным свойством обладают, например, операторы, заданные дифференциальными выражениями вида $\mathscr{L}\left(u, \xi, \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$, где $\mathscr{L}(h, \xi, p)$, $h\in\Delta$, $\xi$, $p\in Q$, является полиномом по $\xi$ при достаточно больших $\xi$.

4. Квазиклассическая асимптотика. Пусть $\mathrm{H}=\mathrm{H}(t)$ зависит от $t$, $t\in\mathrm{R}$. Рассмотрим в $L_2(Q)$ задачу Коши

$$ih\frac{d}{dt}\psi(t) = \mathrm{H}(t)\psi(t) + \mathrm{f}(t), \qquad \psi(0)=\psi. \tag{3.31}$$

Предположим, что 1) оператор $\mathrm{H}(t)$ порождает квазиклассический $\hat{H}(t)$, обладающий свойствами, использованными при рассмотрении формальной задачи Коши (3.1), и что 2) разрешающий оператор задачи (3.31) ограничен, так что при любом конечном $t_0$ и $|t|<t_0$, $t_0>0$,

$$\|\psi(t)\| \leqslant C_{t_0}(\|\psi\| + \sup_t\|\mathrm{f}(t)\|), \tag{3.32}$$

причем $C_{t_0}$ не зависит от $h$.

Нет надобности останавливаться здесь на условии 2) подробнее, см. например [7] и [8]. Отметим очевидный случай: H не зависит от $t$ и самосопряжен.

Теорема. *Если* H *удовлетворяет условиям* 1), 2) *и* $\mathrm{f}=0$, *а* $\psi\sim\Psi$, $\Psi\in\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$, *то* $\psi(t)\sim\Psi(t)$, *где* $\Psi(t)$ — *решение задачи* (3.1), (3.2).

Доказательство очевидно, если в дополнение к сказанному выше об операторе H заметить, что

$$ih\frac{d}{dt}\Psi^{N}(t)-\left(ih\frac{d}{dt}\Psi\right)^{N}=O(h^{N+1}). \tag{3.33}$$

Аналогичное утверждение доказано Масловым в работах [1, 2] в терминах канонического оператора.

Производящий интеграл можно использовать также для исследования асимптотики при $h\to 0$ *собственных элементов* оператора H, порождающего квазиклассический. Однако это отдельная большая тема, которая выходит за рамки настоящей работы. Поэтому мы ограничимся здесь краткими замечаниями. Оказывается, с каждым замкнутым компактным лагранжевым многообразием Γ, инвариантным относительно динамической системы $m_t$ и обладающим определенным свойством устойчивости, можно связать элемент Ψ, $\Psi\in\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$, который на некоторой последовательности $h_n$, $n=0, 1, 2, \ldots, h_n\to 0, n\to\infty$, асимптотически приближается к собственной функции оператора H. Эта собственная функция при $h\to 0$ в известном смысле сосредоточивается на многообразии Γ. Оказывается далее, что с помощью производящего интеграла, расшифровывая естественным образом символ S. P. $\int$ по многообразию, размерность которого меньше $n$, такие собственные функции можно связать с инвариантными многообразиями меньшей размерности, например с замкнутыми устойчивыми одномерными орбитами. Отметим, что роль условия устойчивости в этом круге задач была впервые обнаружена при исследовании асимптотики собственных функций оператора Лапласа, отвечающих замкнутым геодезическим (см., например, [9, 10]).

В каноническом операторе Маслова участвует индекс Маслова или функция $k(\varphi)$. В производящем интеграле это понятие элиминировано. Однако при рассмотрении задач об асимптотике собственных функций индекс Маслова, естественно, возникает и с точки зрения производящего интеграла. Он входит в описание упоминавшейся выше подпоследовательности $h_n$ (см., например, [2]).

В заключение кратко сопоставим канонический оператор с производящим интегралом. В задаче Коши эти объекты в старшем порядке эквивалентны. Правда, производящий интеграл может быть описан более инвариантно и компактно. С его помощью можно также получить полные асимптотические разложения и избежать (в задаче Коши) понятия индекса. Преимущества производящего интеграла в особенности сказываются при переходе к многообразиям, размерность которых меньше $n$. Об этом упоминалось в связи с асимптотикой собственных функций. Если собственные функции при $h\to 0$ имеют экспоненциально разные порядки в различных частях плоскости $Q$, то асимптотика таких функций также может быть точно представлена с помощью простой модификации производящего интеграла. Наконец, отметим, что производящий интеграл может быть использован и в случае нелинейного пространства $Q$.

## Литература


1. В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. Изд. МГУ, 1965.
2. В. П. Маслов. Приложение к книге: Хединг. «Введение в метод фазовых интегралов». Изд. «Мир», 1965.
3. В. И. Арнольд. О характеристическом классе, входящем в условия квантования. Функцион. анализ и его прилож., т. 1, вып. 1, 1967.
4. Д. Б. Фукс. О характеристических классах Маслова-Арнольда. ДАН СССР, 1968, 178, № 2, 303—306.
5. И. Сигал. Математические проблемы релятивистской физики. Изд. «Мир», 1968.
6. М. В. Федорюк. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов. Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1962, 2, № 1, 145—150.
7. С. Г. Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Изд. «Наука», 1967.
8. J. L. Lions. Equations differentielles operationneles et problemes aux limites. Springer, 1961.
9. В. С. Булдырев. Коротковолновая асимптотика собственных функций оператора Гельмгольца. ДАН СССР, 163, № 4, 1965, 853—856.
10. В. М. Бабич, В. Ф. Лазуткин. О собственных функциях, сосредоточенных вблизи замкнутой геодезической. Сб. «Проблемы математической физики», 1967, в. 2, 15—25, Изд. ЛГУ.
11. В. С. Буслаев. Инвариантное описание канонического оператора В. П. Маслова. ДАН СССР, 1969, 184, № 1, 59—62.
12. В. С. Буслаев. Производящий интеграл и канонический оператор Маслова в методе ВКБ. Функцион. анализ и его прилож., 1969, 3, в. 2.