

*A Monsieur TIBERIU POPOVICIU
à l'occasion de son 60-e anniversaire*

SUR LES COURBES FERMÉES SIMPLES TRACÉES SUR UNE SURFACE FERMÉE ORIENTABLE

par

G. CĂLUGĂREANU

à Cluj

Dans le „5-me Complément à l'Analysis situs”, H. POINCARÉ [1] pose le problème des courbes fermées simples que l'on peut tracer sur une surface fermée orientable, de genre $p > 1$, de R^3 . Ce problème intéresse la théorie des noeuds, car un noeud quelconque de R^3 peut être tracé sur une surface fermée orientable de genre suffisamment grand [3]. On admet que la surface est „en position normale” dans R^3 ; donc, c'est une sphère à anses, et ces anses ne sont pas nouées, ni enlacées entre elles. On peut même tracer un noeud quelconque sur une telle surface, de genre suffisamment grand, de manière que le noeud décompose la surface en deux domaines dont il est la frontière commune.

Toute courbe fermée, simple ou non, tracée sur une telle surface, appartient à une classe d'homotopie, élément du groupe fondamental π_1^p de la surface de genre p . Parmi ces classes d'homotopie on doit distinguer des classes qui contiennent des courbes simples, que nous appellerons „classes simples”. Les classes simples sont celles qui contiennent des noeuds, et chaque noeud N appartient à une telle classe au moins, si p est pris assez grand. Il existe une valeur minima de p pour laquelle N appartient à une classe de π_1^p , valeur que nous appelons le „genre normal” du noeud N .

Après les recherches approfondies de Dehn, Nielsen, Göritz, Baer, qui utilisent des méthodes différentes de celle de Poincaré, ce problème, qui consiste dans la détermination des classes simples d'un groupe fondamental π_1^p , a été repris en 1962 par B. L. REINHARDT [2], qui a donné un

algorithme permettant d'obtenir les classes simples en question, en posant le problème pour une surface orientable ou non, fermée ou ouverte. Dans ce qui suit, nous nous proposons de préciser, en partant des considérations de Poincaré, un procédé de calcul permettant de décider si un élément de π_1^p représente une classe simple.

Les remarques de Poincaré s'appuient sur l'image de π_1^p donnée par un groupe fuchsien F , de genre p , et parmi ces remarques on trouve la condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe soit simple, quoique l'application effective de cette condition n'ait pas arrêté davantage l'attention du grand géomètre.

1. *Le critère de Poincaré.* Nous appelons, selon l'usage, géodésiques du plan hyperbolique, représenté par le disque-unité pourvu de la métrique non-euclidienne, les arcs de cercle orthogonaux au cercle-unité et intérieurs à ce cercle. A chaque élément du groupe fondamental de S , Poincaré fait correspondre un élément d'un groupe fuchsien à $2p$ générateurs; les éléments de ce groupe F sont des homographies hyperboliques appliquant le disque-unité sur lui-même. A chaque homographie hyperbolique on fait correspondre un „axe”; c'est la géodésique du disque-unité que l'homographie applique sur elle-même, géodésique qui joint les points fixes de l'homographie, situés sur le cercle-unité.

Le disque-unité étant l'image de la surface universelle de recouvrement de S , une courbe fermée C tracée sur S sera représentée par un arc pqp' intérieur au disque-unité, les points p et p' étant homologues, ce qui signifie que p' est l'image de p par une homographie $h \in F$. Tous les translatsés de pqp' par les éléments de F représentent également la courbe C et, suivant Poincaré, la condition nécessaire et suffisante pour que C soit une courbe simple est que l'arc pqp' ne coupe aucun de ses translatsés. Menons la géodésique pp' , que l'homographie h applique sur elle-même, et que l'on appelle axe de h , et prenons pour pqp' l'arc pp' de cette géodésique. Pour que C soit une courbe simple il faut et il suffit que l'axe pp' de h ne rencontre l'axe d'aucun conjugué khk^{-1} de h , avec $k \in F$. Sous cette forme, le critère de Poincaré laisse penser que, afin que la courbe C soit simple, il serait nécessaire de poser une infinité de conditions. L'algorithme donné par B. L. Reinhardt montre, au contraire, qu'il y suffit d'un nombre fini de ces conditions, qui impliquent les autres. On peut le voir aussi d'une manière directe, en reprenant les considérations de Poincaré.

L'axe $\lambda\mu$ de h coupe le cercle-unité Γ aux points λ et μ , qui sont les points fixes de h . Supposons que λ est répulsif, et μ attractif, ce qui signifie que h déplace les points de cet axe de λ vers μ . Suivant Poincaré, $\pi_1^p(S)$ est isomorphe à un groupe fuchsien F de la première famille. Toutes les homographies de F sont hyperboliques, ayant donc leurs points fixes sur Γ . Au groupe fuchsien F il correspond un réseau fuchsien, pavage du disque-unité par des polygones curvilignes à $4p$ côtés, qui s'accumulent au voisi-

nage de chaque point de Γ . Un élément de F , quel qu'il soit, applique chaque polygone du réseau sur un autre polygone du réseau, et F est transitif, donc, deux polygones du réseau étant choisis, il existe dans F une homographie (et une seule) qui applique l'un des polygones sur l'autre. Chaque polygone donne une image complète de la surface S pourvue de ses coupures canoniques. Les générateurs de F sont en nombre fini, égal à $2p$. Nous utilisons, dans ce qui suit, la représentation symétrique [4, 5] du groupe F , telle que les générateurs g_i , $i = 1, 2, \dots, 2p$ sont liés par la relation

$$g_1 g_2 \dots g_{2p} g_1^{-1} g_2^{-1} \dots g_{2p}^{-1} = 1.$$

Il sera plus commode (et il revient au même) d'employer $4p$ générateurs g_i , liés par les relations

$$g_1 g_2 \dots g_{4p} = 1; \quad g_k g_{k+2p} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, 4p$$

où $k + 2p$ est pris (mod. $4p$).

Le réseau fuchsien peut être construit à partir d'un *polygone principal* Π_0 , contenant le centre O de Γ ; Π_0 est un polygone régulier à $4p$ côtés, qui sont des géodésiques de même longueur. Les autres polygones peuvent être obtenus par inversion de Π_0 par rapport à ses côtés, puis inversion des nouveaux polygones par rapport à leurs côtés, etc. Chaque générateur g_i applique un côté de Π_0 sur le côté opposé. Donc, g_i applique Π_0 sur un polygone contigu à Π_0 .

Soit $\lambda\mu$ l'axe de $h \in F$, et Π un polygone qui est traversé par $\lambda\mu$. H étant l'homographie qui applique Π sur Π_0 , $\Pi_0 = H(\Pi)$, $\lambda_0\mu_0 = H(\lambda\mu)$ est l'axe de HhH^{-1} , et HhH^{-1} représente une classe simple de π_1^p si h représente une classe simple, et réciproquement. Si h représente une classe simple de π_1^p , nous dirons, par abréviation, que h est un *élément simple* de F . On voit que les éléments simples de F se répartissent en classes d'éléments conjugués et, d'après BAER [6], deux courbes simples de S qui appartiennent à des éléments conjugués de F sont *isotopes sur S* ; on peut donc déformer *sur S* l'une de ces courbes de manière à l'amener sur l'autre sans que, pendant la déformation, cette courbe cesse d'être simple. On constate que la seconde propriété imposée à la courbe C , celle de diviser la surface S en deux domaines, se conserve aussi quand on passe de $h \in F$ à l'un de ses conjugués HhH^{-1} . Si l'on a en vue un procédé de construction des noeuds que l'on peut tracer sur S , on peut donc se borner à chercher les éléments simples (ou simples et séparateurs) de F , dont l'axe $\lambda\mu$ passe par Π_0 .

Soit p_0 le point-entrée de $\lambda\mu$ dans Π_0 , et p_1 son point-sortie. Posons $p_n = h(p_0)$, et soient $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ les points d'intersection de l'arc $p_0 p_n \subset \lambda\mu$ avec les côtés des polygones du réseau fuchsien. Soit Π_i le polygone qui contient l'arc $p_i p_{i+1} \subset \lambda\mu$. Désignons par p_{n+1} le point-sortie de

$\lambda\mu$ du polygone Π_n . Le polygone Π_1 étant contigu à Π_0 , on a $\Pi_1 = g_{k_1}(\Pi_0)$, g_{k_1} étant un générateur de F ; posons $p'_1 p'_2 = g_{k_1}(p_1 p_2) \subset \Pi_0$. Le polygone Π_2 étant contigu à Π_1 , $g_{k_1}^{-1}(\Pi_2)$ est contigu à $g_{k_1}^{-1}(\Pi_1) = \Pi_0$, donc $g_{k_1}^{-1}(\Pi_2) = g_{k_2}(\Pi_0)$, g_{k_2} étant un générateur de F . Alors $\Pi_2 = g_{k_1} g_{k_2}(\Pi_0)$, et nous poserons $p''_2 p''_3 = g_{k_1} g_{k_2}(p_2 p_3) \subset \Pi_0$. Le polygone Π_3 étant contigu à Π_2 , $g_{k_1}^{-1} g_{k_2}^{-1}(\Pi_3)$ est contigu à $g_{k_1}^{-1} g_{k_2}^{-1}(\Pi_2) = \Pi_0$, donc $g_{k_1}^{-1} g_{k_2}^{-1}(\Pi_3) = g_{k_3}(\Pi_0)$, d'où $\Pi_3 = g_{k_1} g_{k_2} g_{k_3}(\Pi_0)$; posons $p'''_3 p'''_4 = g_{k_1} g_{k_2} g_{k_3}(p_3 p_4) \subset \Pi_0$. En continuant ainsi, on a en général $\Pi_i = g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_i}(\Pi_0)$, et nous poserons $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1} = g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_i}(p_i p_{i+1}) \subset \Pi_0$. On a finalement $\Pi_n = g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_n}(\Pi_0)$, et puisque $\Pi_n = h(\Pi_0)$, on a $h = g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_n}$, $p^{(n)}_n p^{(n)}_{n+1} = h(p_n p_{n+1}) = p_0 p_1$.

Les arcs $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ forment une image complète de la courbe C dans Π_0 . Donc, pour que C soit une courbe simple, il faut et il suffit que ces arcs soient disjoints deux-à-deux. Les géodésiques portant les arcs $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1}$ seront alors, elles aussi, disjointes deux-à-deux, car, si deux de ces géodésiques avaient un point commun, il en résulterait l'existence d'un point commun à deux arcs $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1}$; ceci résulte du fait que les arcs qui correspondent aux arcs $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1}$ dans les autres polygones fuchsien sont donnés par $\lambda\mu$ et ses translatés par tous les éléments de F . Ainsi, pour que C soit une courbe simple, il faut et il suffit que les translatés de $\lambda\mu$ par les homographies $H_i = g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ soient disjoints deux-à-deux. Posons $\lambda_i = H_i(\lambda)$, $\mu_i = H_i(\mu)$. La courbe C , correspondant au mot $h = H$, sera simple si les couples de points (λ_i, μ_i) et (λ_k, μ_k) ne sont pas entrelacés sur Γ , comme le remarque Poincaré. En employant les birapports, ceci revient à $[\lambda_1, \mu_i, \lambda_k, \mu_k] > 0$, $i \neq k$; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Nous verrons de quelle manière ces conditions peuvent être appliquées effectivement.

Cherchons d'abord quelles sont les conditions que l'on doit ajouter aux précédentes pour que la courbe simple C divise la surface S en deux domaines disjoints. Nous dirons alors que C est une *séparatrice* de S ; aussi, h sera appelé un *élément séparateur* de F .

C étant une séparatrice de S , soient Δ et Δ' les domaines disjoints déterminés par C sur S . Nous pouvons teindre Δ en blanc et Δ' en noir. Alors, parmi les domaines déterminés dans Π_0 par les arcs $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1}$, il y en aura que nous devons teindre en blanc, et les autres en noir, et chaque $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1}$ appartiendra à la frontière d'un domaine blanc et d'un domaine noir. La surface S peut être reconstituée en repliant Π_0 de manière à amener en coïncidence chaque paire de côtés opposés. Les domaines blancs de Π_0 doivent se joindre alors entre eux le long de leurs côtés situés sur les côtés de Π_0 que l'on amène en coïncidence, de manière à former un seul domaine blanc; il en est de même des domaines noirs. D'ailleurs, les arcs $p_{i-1} p_i$ et $p_i p_{i+1}$ étant en prolongement sur $\lambda\mu$, les arcs $p^{(i-1)}_{i-1} p^{(i-1)}_i$ et $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1}$

se trouvent en prolongement sur S , la courbe C étant fermée, donc $p^{(i-1)}_{i-1}$ et $p^{(i)}_i$ se trouvent sur des côtés opposés de Π_0 , pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Si la courbe C est orientée dans le sens qui correspond à $\lambda\mu$, les arcs $p^{(i)}_i p^{(i)}_{i+1}$ se trouvent aussi orientés, de manière que chaque domaine de Π_0 , blanc ou noir, se trouve orienté d'une manière cohérente par les arcs qui forment sa frontière.

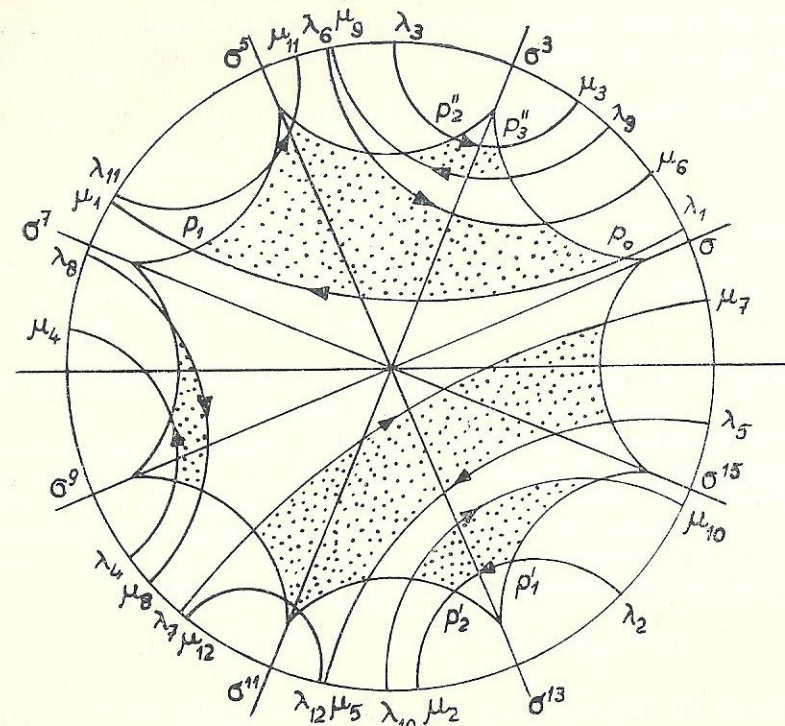


Fig. 1

Ceci se traduit par de nouvelles conditions, nécessaires et suffisantes pour que C soit une séparatrice :

1°. En choisissant un sens de parcours sur la frontière de Π_0 , les points $p^{(i)}_i, p^{(k)}_{k+1}$ doivent se suivre alternativement sur cette frontière, donc, deux $p^{(i)}_i, p^{(j)}_j$ seront toujours séparés par un $p^{(k)}_{k+1}$ au moins.

2°. Si un côté de Π_0 contient les points $p^{(i)}_i, p^{(j-1)}_j, p^{(k)}_k, p^{(l-1)}_l, \dots$ qui se succèdent dans cet ordre dans le sens positif, le côté opposé contient les points $p^{(i-1)}_{i-1}, p^{(j)}_j, p^{(k-1)}_k, p^{(l)}_l, \dots$ qui se succèdent sur ce côté dans le sens négatif.

Si 1°. et 2°. sont vérifiées, il est clair que, après repliement de Π_0 sur S , les arcs $p_i^{(i)}p_{i+1}^{(i)}$ forment une séparatrice de S .

Prolongeons maintenant chaque arc $p_i^{(i)}p_{i+1}^{(i)}$ jusqu'au cercle Γ , ce qui donne les géodésiques $\lambda_i\mu_i$. Sur une telle géodésique, ces quatre points se succèdent dans l'ordre $\lambda_i, p_i^{(i)}, p_{i+1}^{(i)}, \mu_i$. Les projections radiales des sommets de Π_0 (voir fig.) sur le cercle Γ sont les points σ^{2k+1} , $k = 0, 1, \dots, 2p-1$,

avec $\sigma = e^{i\pi/p}$, si l'on place Π_0 de manière que deux côtés opposés soient orthogonaux à l'axe réel. Alors, les conditions indiquées reviennent aux suivantes :

1°. Pour chaque couple (λ_i, λ_j) , il existe au moins un couple (μ_r, μ_s) tel que

$$[\lambda_i, \lambda_j; \mu_r, \mu_s] < 0.$$

2°. Si $\lambda_i \in (\sigma^{2k-1}, \sigma^{2k+1})$, $\lambda_j \in (\sigma^{2k+2p-1}, \sigma^{2k+2p+1})$, alors les couples (λ_i, μ_{i-1}) et (λ_j, μ_{j-1}) ne sont pas entrelacés (rappelons que $\mu_{i-1} \in (\sigma^{2k+2p-1}, \sigma^{2k+2p+1})$, $\mu_j \in (\sigma^{2k-1}, \sigma^{2k+1})$). On peut encore exprimer ceci sous la forme :

Si $[\lambda_i, \lambda_j; \sigma^{2k+1}, \sigma^{2k+2p+1}] < 0$, pour $k = 1, 2, \dots, 2p-1$, alors $[\lambda_i, \mu_{i-1}; \lambda_j, \mu_{j-1}] > 0$.

Telles sont les conditions analytiques que l'on doit vérifier pour établir qu'un $h \in F$ représente une classe simple séparatrice.

2. *Représentation du groupe F .* Le calcul effectif exige une représentation analytique des éléments du groupe F . Le polygone principal Π_0 étant régulier à $4p$ côtés, ayant son centre au centre 0 de Γ , une rotation de l'angle $\pi/2p$ autour de 0 applique Π_0 sur lui-même. En désignant par κ la distance d'un sommet de Π_0 à 0, on trouve $\kappa^2 = \cos \pi/2p$. Le générateur g_k applique un côté de Π_0 sur son opposé. Prenons

$$A = g_{4p}(z) = \frac{z-w}{1-wz}, \quad w^2 = \frac{2 \cos \pi/2p}{1 + \cos \pi/2p} < 1.$$

$g_{4p}(z)$ applique le côté qui coupe l'axe réel positif (côté placé symétriquement par rapport à cet axe) sur son opposé; car, en posant $\sigma = e^{i\pi/p}$, A transforme $\kappa\sigma$ en $-\kappa\sigma^{-1}$ et conserve l'axe réel. En posant $\sigma(z) = \sigma z$ (rotation de l'angle $\pi/4p$ autour de 0) et $r = \sigma^2$, $r(z) = rz$, on a

$$(1) \quad g_k = r^k A r^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots, 4p; \quad r^{4p} = 1,$$

en employant encore $4p$ générateurs g_k , liés par les relations

$$g_1 g_3 \dots g_{4p} = 1; \quad g_k g_{k+2p} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, 4p$$

l'indice $k+2p$ étant pris (mod. $4p$). En tenant compte de (1), on a

$$(rA)^{4p} = 1, \quad (Ar^{2p})^2 = 1.$$

On doit remarquer que A est un élément de F , tandis que r n'appartient pas à F ; c'est un générateur externe. On a $A^{-1} = r^{2p} A r^{-2p}$, car $r^{2p} = r^{-2p}$. Un élément quelconque $h \in F$ s'exprime donc, à l'aide des deux générateurs A et r , sous la forme

$$h = r^{s_n} A r^{s_{n-1}} A \dots r^{s_2} A r^{s_1}, \quad s_1 + s_2 + \dots + s_n = 0 \pmod{4p}$$

et chaque mot de cette forme, où les entiers s_i vérifient la congruence ci-dessus, représente un élément de F . Si $h(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}$, avec $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$,

nous écrirons $h = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Si, de même $h' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, on trouve

$$hh' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \bar{b}\bar{b}' \\ ba' + \bar{a}\bar{b}' \end{pmatrix}.$$

Alors

$$g_k = r^k A r^{-k} = r^k \frac{\gamma r^{-k} z - w\gamma}{\gamma - w\gamma r^{-k} z} = \frac{\gamma z - w\gamma r^k}{-\gamma r^k z + \gamma} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma r^k \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$$

γ ayant été introduit afin de réaliser la condition $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$.

Si $h = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in F$, on en déduit $4p$ nouveaux éléments $g_k h \in F$, $k = 1, 2, \dots, 4p$ et en posant

$$g_k h = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma w r^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

on trouve

$$(2) \quad a_k = \gamma a - \gamma w r^k b, \quad b_k = \gamma b - \gamma w r^{-k} a.$$

Tous les éléments de F peuvent être ainsi obtenus de proche en proche, en partant de l'un quelconque d'entre eux. Nous prendrons $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1$, $a = 1$, $b = 0$, qui correspond à l'identité. En posant

$$g_{k_1} g_{k_2} \dots g_{k_n} = \begin{pmatrix} a_{k_1 k_2 \dots k_n} \\ b_{k_1 k_2 \dots k_n} \end{pmatrix}$$

on trouve

$$(3) \quad a_{k_1 \dots k_n} = \gamma a_{k_2 \dots k_n} - \gamma w r^{k_1} b_{k_2 \dots k_n}; \quad b_{k_1 \dots k_n} = \gamma b_{k_2 \dots k_n} - \gamma w r^{-k_1} a_{k_2 \dots k_n}.$$

On forme successivement les mots à 1, à 2, à 3, ... générateurs

$$\begin{aligned}
 a_k &= \gamma; b_k = -\gamma w r^{-k} \\
 a_{k_1 k_2} &= \gamma^2 (1 + w^2 r^{k_1 - k_2}); b_{k_1 k_2} = -\gamma^2 w (r^{-k_1} + r^{-k_2}) \\
 a_{k_1 k_2 k_3} &= \gamma^3 [1 + w^2 (r^{k_1 - k_2} + r^{k_1 - k_3} + r^{k_2 - k_3})]; \\
 b_{k_1 k_2 k_3} &= -\gamma^3 w (r^{-k_1} + r^{-k_2} + r^{-k_3} + w^2 r^{-k_1 + k_2 - k_3}) \\
 a_{k_1 k_2 k_3 k_4} &= \gamma^4 [1 + w^2 (r^{k_1 - k_2} + r^{k_1 - k_3} + r^{k_1 - k_4} + r^{k_2 - k_3} + r^{k_2 - k_4} + r^{k_3 - k_4}) + \\
 &\quad + w^4 r^{k_1 - k_2 + k_3 - k_4}] \\
 b_{k_1 k_2 k_3 k_4} &= -\gamma^4 w [r^{-k_1} + r^{-k_2} + r^{-k_3} + r^{-k_4} + \\
 &\quad + w^2 (r^{-k_1 + k_2 - k_3} + r^{-k_1 + k_2 - k_4} + r^{-k_1 + k_3 - k_4} + r^{-k_2 + k_3 - k_4})]
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

et en général

$$\begin{aligned}
 a_{k_1 \dots k_n} &= \gamma^n [1 + w^2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} r^{k_{i_1} - k_{i_2}} + w^4 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} r^{k_{i_1} - k_{i_2} + k_{i_2} - k_{i_3}} + \dots + \\
 &\quad + w^{2q} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2q} \leq n} r^{k_{i_{2q-1}} - k_{i_{2q-2}} + \dots + k_{i_2} - k_{i_1}} + \dots] \\
 b_{k_1 \dots k_n} &= -\gamma^n w [\sum_{1 \leq i \leq n} r^{-k_i} + w^2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} r^{-k_{i_3} + k_{i_2} - k_{i_1}} + \dots + \\
 &\quad + w^{2q-2} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2q-1} \leq n} r^{-k_{i_{2q-1}} + k_{i_{2q-2}} - \dots - k_{i_2} + k_{i_1}} + \dots].
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Ces formules permettent de former les composantes a , b de tous les mots à n générateurs.

3. Le cas $n = 2$. Appliquons ces résultats aux mots à deux générateurs $h = g_k g_{k'}$. On a ici $H_1 = g_k$, $H_2 = h$, $\lambda_1 = g_k(\lambda)$, $\mu_1 = g_k(\mu)$. En posant $h = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $a = a' + ia''$, $b = b' + ib''$, on sait que λ et μ vérifient l'équation $b\lambda^2 - 2ia''\lambda - \bar{b} = 0$. On a $g_k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -w & -k \end{pmatrix}$ et l'on doit calculer

$$R = [\lambda, \mu; \lambda_1, \mu_1] = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\mu - \mu_1)}{(\lambda - \mu_1)(\mu - \lambda_1)}.$$

On trouve

$$R = \frac{w^2(\lambda^2 - r^{2k})(\mu^2 - r^{2k})}{w^2(\lambda\mu - r^{2k})^2 - (\lambda - \mu)^2 r^{2k}} = \frac{w^2[(br^k - \bar{b}r^{-k})^2 - 4(b\bar{b} - a''^2)]}{w^2(br^k + \bar{b}r^{-k})^2 - 4(b\bar{b} - a''^2)}$$

en tenant compte de $\lambda + \mu = \frac{2ia''}{b}$, $\lambda\mu = -\frac{\bar{b}}{b}$, $(\lambda - \mu)^2 = \frac{4}{b^2}(b\bar{b} - a''^2) = \frac{4}{b^2}(a'^2 - 1)$. On a $b\bar{b} - a''^2 > 0$, du au fait qu'il s'agit d'homographies

hyperboliques, puis $b\bar{b} - a''^2 = a'^2 - 1 > 0$, car $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. En y introduisant $a = \gamma^2(1 + w^2 r^{k'-k})$, $b = -\gamma^2 w(r^{-k} + r^{-k'})$, on trouve

$$R = \frac{w^2}{2} \left[1 - \cos(k' - k) \frac{\pi}{2p} \right] \geq 0, \text{ et } 0 \leq R \leq 1.$$

Pour $k' - k \not\equiv 0 \pmod{4p}$, donc si h n'est pas le carré d'un générateur, on a $R > 0$, donc h est simple. On a $R' = [\lambda, \lambda_1; \mu, \mu_1] = 1 - R > 0$, donc h n'est pas un séparateur, les couples (λ, λ_1) et (μ, μ_1) , n'étant pas entrelacés. Ainsi, en exceptant les carrés des générateurs, tous les mots à deux générateurs représentent des courbes simples non-séparatrices, quel que soit le genre $p > 1$ de la surface S . On doit remarquer que ceci a lieu dans la représentation symétrique du groupe F , et ne subsiste pas dans la représentation définie par la relation

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \dots g_{2p-1} g_{2p} g_{2p-1}^{-1} g_{2p}^{-1} = 1.$$

4. Cas général. Pour les mots à plus de deux générateurs il y a lieu de tenir compte de quelques remarques. L'élément h sera simple si, pour $i < j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 [\lambda_i, \mu_i; \lambda_j, \mu_j] &= [H_i(\lambda), H_i(\mu); H_j(\lambda), H_j(\mu)] = \\
 &= [\lambda, \mu; H_i^{-1} H_j(\lambda), H_i^{-1} H_j(\mu)] > 0.
 \end{aligned}$$

On a $H_i^{-1} H_j = g_{k_{i+1}} g_{k_{i+2}} \dots g_{k_j} = H_{ij}$, et l'on est ramené au calcul des birapports $[\lambda, \mu; H_{ij}(\lambda), H_{ij}(\mu)]$, où les sections H_{ij} seront des mots plus courts que les H_i . Ainsi, pour $n = 3$, $h = g_{k_1} g_{k_2} g_{k_3}$, h sera simple si

$$R_1 = [\lambda, \mu; g_{k_1}(\lambda), g_{k_1}(\mu)], R_2 = [\lambda, \mu; g_{k_2}(\lambda), g_{k_2}(\mu)],$$

$$R_3 = [\lambda, \mu; g_{k_3}(\lambda), g_{k_3}(\mu)]$$

sont positifs. Pour le calcul de ces birapports on peut procéder comme pour $n = 2$. D'une manière générale, λ et μ étant les points fixes de h , puis $\lambda_1 = h_1(\lambda)$, $\mu_1 = h_1(\mu)$, on a

$$R = [\lambda, \mu; \lambda_1, \mu_1] = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\mu - \mu_1)}{(\lambda - \mu_1)(\mu - \lambda_1)} = \frac{2(\lambda\mu + \lambda_1\mu_1) - (\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + (\lambda - \mu)(\lambda_1 - \mu_1)}{2(\lambda\mu + \lambda_1\mu_1) - (\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) - (\lambda - \mu)(\lambda_1 - \mu_1)}.$$

Si $h = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $h_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, λ et μ vérifient $b\lambda^2 - 2ia''\lambda - \bar{b} = 0$, $\lambda_1 = \frac{a_1\lambda + \bar{b}_1}{b_1\lambda + \bar{a}_1}$, $\mu_1 = \frac{a_1\mu + \bar{b}_1}{b_1\mu + \bar{a}_1}$, et le calcul donne, avec $a = a' + ia''$, $b = b' + ib''$, $a_1 = a'_1 + ia''_1$, $b_1 = b'_1 + ib''_1$

$$R = \frac{(b'b'_1 + \bar{b}''b''_1 - \bar{a}''a''_1)^2 - (a'^2 - 1)(a'_1{}^2 - 1)}{(b'b'_1 + \bar{b}''b''_1 - \bar{a}''a''_1)^2 - (a'^2 - 1)a_1'^2} > 0,$$

condition nécessaire et suffisante pour que les couples (λ, μ) et (λ_1, μ_1) ne soient pas entrelacés. Pour la vérification effective, dans le cas (6) par exemple, il reste à y remplacer les parties réelles et imaginaires de a, b, a_1, b_1 , par leurs valeurs extraites de (4) ou (5). Un calcul récurrent de ces birapports par l'intermédiaire des formules (3) serait aussi à envisager. La condition pour qu'un élément h soit séparateur exige le calcul des rapports plus compliqués $[\lambda_i, \lambda_j; \mu_r, \mu_s]$. Nous nous proposons de revenir sur ces calculs dans un prochain travail. La courbe représentée sur notre figure correspond au mot $g_2 g_1 g_4^{-2} g_2^{-1} g_1^{-1} g_4^2$ pour $p = 2$; c'est une séparatrice de la surface de genre 2, qui réalise dans l'espace le noeud „4₁” à 4 points doubles (au moins) en projection sur un plan.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Poincaré H., *Cinquième complément à l'Analysis situs*. Rend. Circ. mat. Palermo, **18**, 45—110 (1904).
- [2] Reinhardt B. L., *Algorithms for Jordan curves on compact surfaces*. Ann. of math., **75**, 209—222 (1962).
- [3] Călugăreanu G., *Considérations directes sur la génération des noeuds tridimensionnels*. Revue roumaine de math. p. et appl., **10**, 389—403 (1965).
- [4] Nielsen J., *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, III. Acta math. **58**, 87—167 (1932).
- [5] Coxeter H., Moser W., *Generators and relations for discrete groups*. Ergebnisse der Mathematik, Springer-Berlin, p. 61.
- [6] Baer R., *Kurventypen auf Flächen*. Journ. für reine u. angew. Math., **156**, 231—246 (1927).
- *Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen*. Journ. für reine u. angew. Math., **159**, 101—116 (1928).

Reçu le 2. IV. 1966.

REVUE ROUMAINE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

TIRAGE À PART

1

TOME XIII
1968

EDITIONS DE L'ACADEMIE DE LA REPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE