Întreprinderea Poligrafică Cluj — 462/1967

MATHEMATICA VOL. 9 (32), 2, 1967, pp. 225—231

COURBES FERMÉES SIMPLES SUR UNE SURFACE FERMÉE ORIENTABLE

par

G. CĂLUGĂREANU

à Cluj

Les remarques que nous ferons se rapportent au problème suivant: étant donnée une surface fermée S, orientable, de genre $p \geqslant 2$, déterminer les classes d'homotopie de S qui contiennent des courbes simples (classes simples), et ensuite les classes qui contiennent des courbes simples et séparatrices (qui divisent S en deux domaines disjoints : classes simples séparatrices). Des solutions de ce problème ont été données [2], [3], [4], [1] en utilisant les propriétés du groupe fondamental $\pi_1(S)$ et de ses automorphismes, parfois en y introduisant aussi des considérations de géométrie hyperbolique.

Nous voulons indiquer ici un procédé qui permet une simplification des algorithmes déjà connus. On représente habituellement le groupe $\pi_1(S)$ à l'aide de $2p$ générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_{2p}$ liés par la relation

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_{2p-1} g_{2p} g_{2p-1}^{-1} g_{2p}^{-1} = 1,$$

correspondant à un polygone canonique de S dont les cotés conjugués sont disposés en quadruplets. Or, bien d'autres choix des générateurs sont possibles, et l'un des plus remarquables est le système des générateurs symétriques, vérifiant la relation

$$g_1 g_2 \cdots g_{2p} g_1^{-1} g_2^{-1} \cdots g_{2p}^{-1} = 1.$$

En employant ce système de générateurs de $\pi_1(S)$, nous verrons que les conditions nécéssaires et suffisantes pour que le mot

$$h = g_{i_1}^{\alpha_1} g_{i_2}^{\alpha_2} \ldots g_{i_n}^{\alpha_n}$$

représente une classe simple de $\pi_1(S)$ conduisent à un système d'inégalités assez maniables. Ce sont des conditions de nature arithmétique concernant les suites d'entiers $i_1, i_2, \ldots, i_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Pour plus de symétrie, nous poserons $g_{k+2p} = g_k^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, 2p$. Nous aurons donc $4p$ générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_{4p}$, liés par les relations

$$g_1 g_2 \ldots g_{4p} = 1\,; \quad g_{k+2p} g_k = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, 4p$$

$k + 2p$ étant pris (mod. $4p$) si $k > 2p$. O étant un point de base choisi sur S, les coupures canoniques correspondant aux générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_{2p}$ sont des courbes simples C_i sur S, orientées, passant par 0, et n'ayant deux-à-deux aucun point commun en dehors de 0. La relation $g_1 g_2 \ldots g_{4p} = 1$ exige que deux quelconques de ces courbes se croisent en 0, et leurs positions relatives autour de 0 peuvent encore être précisées. En employant une image utilisée par B. L. Reinhardt ([3], 210), considérons sur S un petit disque de frontière γ, contenant 0 à son intérieur, et admettons que chacune des courbes C_i coupe γ en deux points, un point-sortie et un point-rentrée. En coupant S le long des courbes C_i on obtient un disque dont la frontière peut être orientée de manière que les g_i se suivent sur cette frontière dans l'ordre naturel $g_1, g_2, \ldots, g_{4p}$. En représentant, au voisinage de 0, les arcs de courbes C_i par des vecteurs partant de 0 marqués des indices $1, 2, \ldots, 4p$, on remarquera que les vecteurs aux indices k et $k + 2p$ appartiennent à une même courbe C_k. La relation $g_1 g_2 \ldots g_{4p} = 1$ sera vérifiée si les vecteurs en question sont distribués autour de 0 dans l'ordre indiqué sur notre fig. 1. En partant du vecteur marqué 1 et en tournant sur γ dans un sens convenable, on verra les indices des vecteurs se suivre dans l'ordre $1, 2p, 4p - 1, 6p - 2 \equiv 2p - 2, \ldots$ Ces nombres s'obtiennent par addition répétée de $2p - 1$, suivie de réduction (mod. $4p$), si nécessaire.

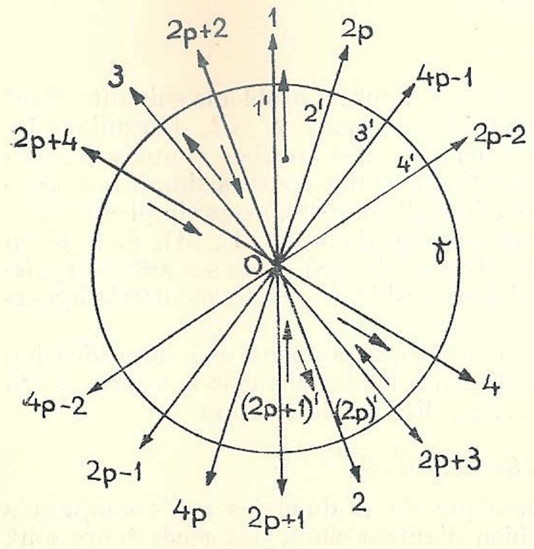

Fig. 1.

Considérons maintenant un mot

$$h = g_{i_1} g_{i_2} \ldots g_{i_n},$$

les i_k étant des nombres naturels entre 1 et $4p$, limites comprises. Pour construire une courbe sur S, correspondant à cet élément de $\pi_1(S)$, nous suivrons le vecteur i_1 en partant de 0, puis la courbe C_{i_1}, en rentrant dans γ par le vecteur opposé $i_1 + 2p$. Afin d'obtenir, si possible, une courbe simple représentant h, nous éviterons de revenir en 0. Nous joindrons donc le point où $i_1 + 2p$ coupe γ au point où i_2 coupe γ par un arc intérieur à γ, ne rencontrant pas le vecteur i_1. Désignons cet arc par $(i_1 + 2p, i_2)$. En sortant de γ sur le vecteur i_2, nous suivrons la courbe C_{i_2}, et serons conduits d'une manière analogue à joindre les points (sur γ) $i_2 + 2p$ et i_3 par un arc intérieur à γ et ne rencontrant pas l'arc précédemment construit, ni le vecteur i_1, si possible. En général, on devra construire n arcs $(i_k + 2p, i_{k+1})$ intérieurs à γ, de manière qu'ils soient disjoints deux-à-deux. L'ensemble de ces arcs, intérieurs à γ, forment ce que nous appellerons, avec B. L. Reinhardt, l' *indicatrice* du mot h. Si la classe d'homotopie définie par h contient des courbes simples, nous dirons que h est un mot simple. D'une manière analogue, nous employerons le terme mot simple séparateur.

Or, on voit facilement qu'il est nécessaire et suffisant, pour que les arcs en question soient disjoints, que les extrémités de deux quelconques de ces arcs ne soient pas enlacées sur γ. Pour traduire cette condition en un système d'inégalités pour les indices i_k, il convient de renuméroter les vecteurs i_k dans leur ordre naturel autour de 0, en employant des indices accentués (marqués à l'intérieur de γ sur la fig. 1) : $1' = 1$, $2' = 1 + 2p - 1$, $3' = 1 + 2(2p - 1), \ldots$, $i' = \varphi(i) = 1 + \overline{(i-1)(2p-1)}$, la barre au dessus d'un entier signifiant que l'on doit prendre ce nombre (mod. $4p$). A chaque couple $(i_k + 2p, i_{k+1})$ il correspond ainsi un couple $(\varphi(i_k + 2p), \varphi(i_{k+1})) = (1 + \overline{(2p-1)\, i_k + 1},\ 1 + \overline{(2p-1)\,(i_{k+1} - 1)})$ et l'on est conduit à poser la condition que, dans la suite

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(1 + \overline{(2p-1) i_1 + 1},\ 1 + \overline{(2p-1)(i_2 - 1)}), \\ &(1 + \overline{(2p-1)\, i_2 + 1},\ 1 + \overline{(2p-1)\,(i_3 - 1)}), \\ &\ldots, (1 + \overline{(2p-1)\, i_n + 1},\ 1 + \overline{(2p-1)(i_1 - 1)}) \end{aligned}$$

il n'existe pas deux couples enlacés. Il faut et il suffit, à cet effet, que les birapports formés avec deux couples quelconques de la suite soient tous positifs.

Nos conclusions sont valables lorsque, en construisant la courbe représentative du mot h, on n'est pas conduit à faire passer cette courbe plus d'une fois par un même point i_k de la courbe γ, ce qui a lieu si, dans h, chacun des générateurs $g_1, g_2, \ldots, g_{2p}$ figure une fois au plus, avec l'exposant ± 1. Plaçons-nous d'abord dans ce cas particulier. On vérifie sans peine que, x étant un entier et $\bar{x}$ son reste (mod. $4p$), on a

$$(2)\qquad \overline{x - 2p} = \bar{x} + 2p(-1)^{\left[\frac{\bar{x}}{2p}\right]}$$

où $[a]$ désigne la partie entière du nombre réel positif a. En effet, en posant $m = 2p$, $x = 2mq + r$, $0 \leqslant r < 2m$, on a $\overline{x} = r$. Pour $r < m$ on a $\overline{x} < m$, $x - m = 2m(q - 1) + m + r$, $\overline{x - m} = m + r = m + \overline{x}$, puis $\left[\dfrac{\overline{x}}{2p}\right] = 0$, ce qui vérifie la formule ci-dessus. Pour $r \geqslant m$, $x - m = 2mq + r - m$, $\overline{x - m} = r - m = \overline{x} - m$, mais $\left[\dfrac{\overline{x}}{2p}\right] = 1$, et la formule est encore vérifiée.

Un couple de la suite (1) s'écrit, en posant $\omega = 2p - 1$,

$$(1 + \overline{\omega i_k + 1},\ 1 + \overline{\omega(i_{k+1} - 1)}).$$

Mais $\omega(i_k - 1) = \omega i_k + 1 - 2p$, donc, en appliquant (2), et en posant $\lambda_k = \overline{\omega i_k + 1}/2p$,

$$\overline{\omega(i_k - 1)} = \overline{\omega i_k + 1 - 2p} = \overline{\omega i_k + 1} + 2p(-1)^{[\lambda_k]} = 2p(\lambda_k + (-1)^{[\lambda_k]})$$

et notre couple s'écrit

$$(1 + 2p\lambda_k,\ 1 + 2p\{\lambda_{k+1} + (-1)^{[\lambda_{k+1}]}\}).$$

Remarquons que l'on a $0 \leqslant \lambda_k < 2$. En désignant par R_{kl} le birapport correspondant aux indices i_k, i_l, on trouve

$$R = \frac{\lambda_k - \lambda_l}{\lambda_k - \lambda_{l+1} - (-1)^{[\lambda_{l+1}]}} : \frac{\lambda_{k+1} + (-1)^{[\lambda_{k+1}]} - \lambda_l}{\lambda_{k+1} - \lambda_{l+1} + (-1)^{[\lambda_{k+1}]} - (-1)^{[\lambda_{l+1}]}}$$

et ce birapport sera positif si

$$(\lambda_k - \lambda_l)\left(\lambda_k - \lambda_{l+1} - (-1)^{[\lambda_{l+1}]}\right)\left(\lambda_l - \lambda_{k+1} - (-1)^{[\lambda_{k+1}]}\right) \times \left(\lambda_{k+1} - \lambda_{l+1} + (-1)^{[\lambda_{k+1}]} - (-1)^{[\lambda_{l+1}]}\right) < 0. \tag{3}$$

Ces conditions devront être vérifiées pour k, l distincts, variant de 1 à n, ce qui donne $(n - 1)n/2$ conditions nécessaires et suffisantes pour la simplicité du mot h, dans l'hypothèse faite sur h. Dans ce cas, aucune des parenthèses de (3) ne pourra être nulle ; car $(2p - 1, 4p) = 1$ pour $p \geqslant 2$, donc les restes $\overline{\omega i_k + 1}$ sont tous distincts, et les λ_k aussi, ce qui montre que $\lambda_k - \lambda_l \neq 0$ pour $k \neq 1$; la seconde parenthèse ne saurait être nulle que si λ_k et λ_{l+1} diffèrent d'une unité, donc $\overline{\omega i_k + 1} - \overline{\omega i_{l+1} + 1} = \pm 2p$, et ceci exige $i_k - i_{l+1} = \pm 2p$, donc $g_{i_{l+1}} = g_{i_k}^{-1}$, etc.

Avant de passer au cas général, prenons le cas des mots $h = g_{i_1} g_{i_2}$ à deux générateurs. On voit facilement que g_i^{α}, $|\alpha| \geqslant 2$ ne peut être un mot simple, la surface S étant orientable. Mais, si $i_1 \neq i_2$, h est simple, sans autre condition pour i_1 et i_2. Car, dans ce cas, on a une seule condition (3), qui s'écrit, en y remplaçant $k + 1$ par l et $l + 1$ par k,

$$(\lambda_k - \lambda_l)(\lambda_k - \lambda_k - (-1)^{[\lambda_k]})(\lambda_l - \lambda_l - (-1)^{[\lambda_l]}) \times \left(\lambda_l - \lambda_k + (-1)^{[\lambda_l]} - (-1)^{[\lambda_k]}\right) < 0$$

donc

$$(-1)^{[\lambda_k]+[\lambda_l]}\left(\lambda_k - \lambda_l)(\lambda_l - \lambda_k + (-1)^{[\lambda_l]} - (-1)^{[\lambda_k]}\right) < 0$$

et l'on voit que la condition est vérifiée dans les quatre hypothèses :

$[\lambda_k] = [\lambda_l] = 0$; $[\lambda_k] = 1$; $[\lambda_l] = 0$, $[\lambda_k] = 0$; $[\lambda_l] = 1$; $[\lambda_k] = [\lambda_l] = 1$.

Ainsi tous les mots à deux générateurs sont simples, les carrés exceptés.

En passant au cas général, remarquons d'abord que si le mot h contient un générateur g_k à une puissance α avec $|\alpha| \geqslant 2$, l'indicatrice de h contient au moins un arc „diamétral", qui joint les points k et $k + 2p$ de γ. Il en résulte que, si h est simple, il ne pourra contenir les autres générateurs, différents de g_k et $g_{k+2p} = g_k^{-1}$, qu'avec des exposants ± 1, sans quoi l'indicatrice contiendrait deux arcs joignant des points diamétralement opposés sur γ, ayant nécessairement une intersection non-vide. Mais les générateurs g_k et g_{k+2p} pourront figurer plusieurs fois dans h, avec des exposants divers.

Dans le cas général, un même générateur g_{i_k} pourra donc figurer plusieurs fois dans h. En construisant l'indicatrice de h, on sera alors conduit à tracer dans γ plusieurs arcs aboutissant au même point i_k marqué sur γ. Afin d'éviter la formation de points multiples sur la courbe représentative de h, nous modifierons notre construction de la manière suivante : au lieu de faire aboutir l'arc correspondant à $g_{i_{k-1}} g_{i_k}$ au point i_k de γ, nous le ferons aboutir en un point voisin $i_k + \varepsilon_k$, ε_k étant un petit nombre réel de signe indéterminé ; en sortant de γ par le point $i_k + \varepsilon_k$, nous suivrons sur S une courbe parallèle et rapprochée du générateur g_{i_k}, puis nous reviendrons sur γ au point $i_k + 2p - \varepsilon_k$; à partir de ce point nous construirons l'arc suivant $(i_k + 2p - \varepsilon_k,\ i_{k+1} + \varepsilon_{k+1})$ de l'indicatrice. Nous ferons ainsi correspondre à chaque k, $1 \leqslant k \leqslant n$, un ε_k, de signe indéterminé, ces n nombres étant distincts et pouvant être pris aussi petits que l'on veut en valeur absolue. Les conditions (3) pourront être transformées en conséquence, en prenant cette fois $\varphi(i_k + 2p - \varepsilon_k) = 1 + \overline{\omega i_k + 1} - \varepsilon_k$, $\varphi(i_{k+1} +$

$+ \varepsilon_{k+1}) = 1 + \overline{\omega(i_{k+1} - 1)} + \varepsilon_{k+1}$. On trouve alors, en remplaçant $\varepsilon_k/2p$ par ε_k,

$$(\lambda_k - \lambda_l - \varepsilon_k + \varepsilon_l)\left(\lambda_{k+1} - \lambda_{l+1} + (-1)^{[\lambda_{k+1}]} - (-1)^{[\lambda_{l+1}]} + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{l+1}\right) \times \tag{4}$$
$$\times \left(\lambda_k - \lambda_{l+1} - (-1)^{[\lambda_{l+1}]} - \varepsilon_k - \varepsilon_{l+1}\right)\left(\lambda_l - \lambda_{k+1} - (-1)^{[\lambda_{k+1}[} - \varepsilon_l - \varepsilon_{k+1}\right) < 0.$$

Le mot h représente une courbe simple sur S lorsque les signes des ε_i peuvent être choisis de manière que les $(n-1)n/2$ inégalités (4) soient vérifiées. L'inégalité (4) ne diffère de (3) que par l'addition des termes en ε. Ces termes jouent un rôle lorsque, dans l'une des parenthèses de (4), les termes restants donnent une somme nulle. Dans le cas contraire, ces termes en ε peuvent être supprimés, comme étant négligeables devant les autres. Dans les applications, le nombre des ε qui seront maintenus dans les inégalités (4) sera donc inférieur à n.

Remarquons que si une courbe sur S est simple, chaque automorphisme de S (application homéomorphe de S sur elle-même) la transforme en une courbe simple. Si la courbe est simple st séparatrice, la transformée sera encore simple et séparatrice. Or, on sait [4] que les automorphismes de S se distribuent en classes d'isotopie, deux automorphismes appartenant à une même classe lorsque l'un résulte de l'autre par une déformation isotope de S en elle-même, et que les classes d'automorphismes ainsi formées correspondent bijectivement aux classes de conjugaison du groupe des automorphismes Aut $\pi_1(S)$. Un automorphisme de $\pi_1(S)$ qui ne change pas la longueur n d'un mot est $\alpha : g'_i = g_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 4p$, comme on le vérifie facilement. On a $\alpha^{4p} = 1$. Par application de α et ses puissances, chaque mot simple (et séparateur) de longueur n engendre $4p - 1$ autres mots de même longueur, simples aussi (et séparateurs).

Supposons que h vérifie les conditions (4), étant donc un mot simple; quelles sont les conditions supplémentaires à ajouter pour que h soit simple et séparateur? Une courbe séparatrice sur S étant homologue à zéro, on voit que dans h, la somme des exposants pour chacun des générateurs g_1, $g_2, \ldots, g_{2p}$ doit être nulle (après avoir remplacé $g_{2p+1} = g_1^{-1}, \ldots, g_{4p} = g_{2p}^{-1}$); car, en abélianisant le groupe $\pi_1(S)$, ce qui donne le groupe d'homologie $H_1(S)$, le mot h doit se réduire à 1 (mot vide). Cette condition, jointe à (4), est nécessaire et suffisante pour que h soit simple et séparateur.

Nous avons vu que tous les mots de longueur 2, carrés exceptés, sont simples et non-séparateurs. Cherchons les mots simples de longueur 3.

Deux cas sont possibles: $h = g_k^2 g_l$, $k \neq l$, $k \neq l + 2p$, et $h = g_k g_l g_m$ où k, l, m sont distincts (mod. $2p$).

Le mot $g_k^2 g_l$, $l \neq k \neq l + 2p$, est toujours simple (et non-séparateur). On le vérifie avec les conditions (4), mais il est bien plus facile de le constater en construisant l'indicatrice (fig. 2).

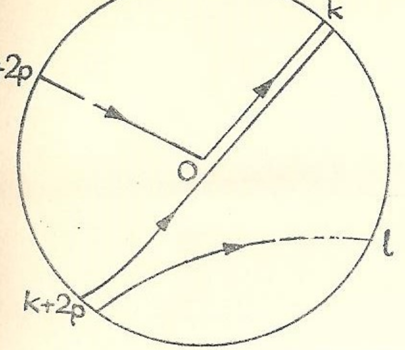

Fig. 2.

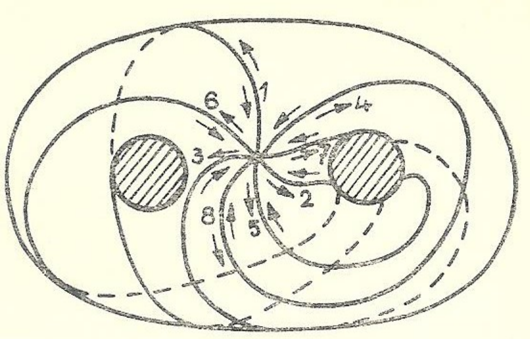

Fig. 3.

Dans le cas $h = g_k g_l g_m$, nous avons trouvé, pour $p = 2$, en appliquant (3), qu'il existe un seul mot simple $g_1 g_2 g_3$, aux automorphismes α, α^2, $\ldots \alpha^7$ près.

Les mots de longueur 3 ne peuvent être séparateurs, comme le montre notre remarque précédente (un mot séparateur est de longueur paire).

Dans le cas des mots de longueur 4, les mots simples et séparateurs apparaissent. On trouve que le commutateur $h = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ représente une séparatrice de S. Si S est en position normale dans S^3 ($S^3 - S$ est composée de deux domaines homéomorphes) la courbe représentative de h est le noeud que l'on désigne par $\mathfrak{3}_1$. Les coupures canoniques de S, utilisées ici, sont celles de la fig. 3. Le mot $h = g_1 g_3^2 g_4 g_1^{-1} g_3^{-2} g_4^{-1}$ représente une séparatrice qui, dans les mêmes conditions, donne le noeud $\mathfrak{5}_1$. D'une manière générale, les mots $g_k^m g_l$, avec $l \neq k \neq l + 2p$, $|m| \geqslant 2$ sont simples et non-séparateurs, comme on le constate en construisant l'indicatrice correspondente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Călugăreanu G., *Sur les courbes fermées simples tracées sur une surface fermée orientable.* Mathematica (Cluj), **8**, 29–38 (1966).

[2] Poincaré H., *Cinquième complément à l'Analysis situs.* Rend. Circ. mat. Palermo, **18**, 45–110 (1904).

[3] Reinhardt B. L., *Algorithms for Jordan curves on compact surfaces.* Ann. of math., **75**, 209–222 (1962).

[4] Zieschang H., *Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen.* Mathematica Scandinavica, **17**, 17–40 (1965).

Reçu le 17. II. 1967.