Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

(Von Herrn *G. Cantor* in Halle.)

Wenn zwei wohldefinirte Mannigfaltigkeiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (was, wenn es auf eine Art möglich ist, immer auch noch auf viele andere Weisen geschehen kann), so möge für das Folgende die Ausdrucksweise gestattet sein, dass diese Mannigfaltigkeiten *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch, dass sie *äquivalent* sind. Unter einem *Bestandtheil* einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir jede andere Mannigfaltigkeit M', deren Elemente zugleich Elemente von M sind. Sind die beiden Mannigfaltigkeiten M und N nicht von gleicher Mächtigkeit, so wird entweder M mit einem Bestandtheile von N oder es wird N mit einem Bestandtheile von M gleiche Mächtigkeit haben; im ersteren Falle nennen wir die Mächtigkeit von M kleiner, im zweiten Falle nennen wir sie grösser als die Mächtigkeit von N.

Wenn die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten *endliche,* d. h. aus einer endlichen Anzahl von Elementen bestehende sind, so entspricht, wie leicht zu sehen, der Begriff der Mächtigkeit dem der *Anzahl* und folglich dem der *ganzen positiven Zahl,* da nämlich zweien solchen Mannigfaltigkeiten dann und nur dann gleiche Mächtigkeit zukommt, wenn die Anzahl ihrer Elemente die gleiche ist. Ein Bestandtheil einer endlichen Mannigfaltigkeit hat immer eine kleinere Mächtigkeit als die Mannigfaltigkeit selbst; dieses Verhältniss hört gänzlich auf bei den *unendlichen,* d. i. aus einer unendlichen Anzahl von Elementen bestehenden Mannigfaltigkeiten. Aus dem Umstande allein, dass eine unendliche Mannigfaltigkeit M ein Bestandtheil einer andern N ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, darf keineswegs geschlossen werden, dass ihre Mächtigkeit kleiner ist als die von $N;$ dieser Schluss ist nur dann berechtigt, wenn man weiss, dass die Mächtigkeit von M nicht gleich ist derjenigen von $N;$ ebensowenig darf der Umstand, dass N ein Bestandtheil von M ist oder einem solchen eindeutig und vollständig zugeordnet werden kann, als ausreichend dafür betrachtet werden, dass die Mächtigkeit von M grösser sei, als die von N.

Um an ein einfaches Beispiel zu erinnern, sei M die Reihe der positiven, ganzen Zahlen ν, N die Reihe der positiven geraden ganzen Zahlen 2ν; hier ist N ein Bestandtheil von M und nichtsdestoweniger sind M und N von gleicher Mächtigkeit.

Die Reihe der positiven, ganzen Zahlen ν bietet, wie sich leicht zeigen lässt, die kleinste von allen Mächtigkeiten dar, welche bei unendlichen Mannigfaltigkeiten vorkommen. Nichtsdestoweniger ist die Klasse der Mannigfaltigkeiten, welche diese kleinste Mächtigkeit haben, eine ausserordentlich reiche und ausgedehnte. Zu dieser Klasse gehören beispielsweise alle diejenigen Mannigfaltigkeiten, welche Herr *R. Dedekind* in seinen werthvollen und schönen Untersuchungen über die algebraischen Zahlen *„endliche Körper"* nennt (Man vergl. *Dirichlet*s Vorlesungen über Zahlentheorie, zweite Auflage, Braunschweig 1871, S. 425 f.); ferner sind hier diejenigen, zuerst von mir in Betracht gezogenen, Mannigfaltigkeiten anzuführen, welche ich *„Punktmengen der ν^{ten} Art"* genannt habe (Man vergl. Mathematische Annalen von *Clebsch* und *Neumann,* Bd. V. S. 129). Jede als einfach unendliche Reihe, mit dem allgemeinen Gliede a_ν, auftretende Mannigfaltigkeit gehört offenbar hierher; aber auch die Doppelreihen und allgemein die n-fachen Reihen mit dem allgemeinen Gliede $a_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n}$ (wo ν_1, ν_2, ... ν_n unabhängig von einander alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen) sind von dieser Klasse. Bei einer früheren Gelegenheit wurde sogar bewiesen, dass der Inbegriff (ω) aller reellen (und man könnte auch hinzufügen: aller complexen) algebraischen Zahlen in Form einer Reihe, mit dem allgemeinen Gliede ω_ν, gedacht werden kann, was nichts anderes heisst, als, dass die Mannigfaltigkeit (ω) sowohl, wie auch jeder unendliche Bestandtheil derselben die Mächtigkeit der ganzen Zahlenreihe haben.

In Bezug auf die Mannigfaltigkeiten dieser Klasse gelten die folgenden, leicht zu beweisenden Sätze:

„Ist M eine Mannigfaltigkeit von der Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe, so hat auch jeder unendliche Bestandtheil von M gleiche Mächtigkeit mit M."

„Ist M', M'', M''', ... eine endliche oder einfach unendliche Reihe von Mannigfaltigkeiten, von denen jede die Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe besitzt, so hat auch die Mannigfaltigkeit M, welche aus der Zusammenfassung von M', M'', M''', ... entsteht, dieselbe Mächtigkeit."

Im Folgenden sollen nun die sogenannten stetigen, n-fachen Mannigfaltigkeiten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit untersucht werden.

Die Forschungen, welche *Riemann* *) und *Helmholtz* **) und nach ihnen andere ***) über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, angestellt haben, gehen bekanntlich von dem Begriffe einer n-fach ausgedehnten, stetigen Mannigfaltigkeit aus und setzen das wesentliche Kennzeichen derselben in den Umstand, dass ihre Elemente von n von einander unabhängigen, reellen, stetigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen, so dass zu jedem Elemente der Mannigfaltigkeit ein zulässiges Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$, aber auch umgekehrt zu jedem zulässigen Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein gewisses Element der Mannigfaltigkeit gehört. Meist stillschweigend wird, wie aus dem Verlaufe jener Untersuchungen hervorgeht, ausserdem die *Voraussetzung* gemacht, dass die zu Grunde gelegte *Correspondenz* der Elemente der Mannigfaltigkeit und des Werthsystemes $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine stetige sei, so dass jeder unendlich kleinen Aenderung des Werthsystemes $x_1, x_2 \ldots x_n$ eine unendlich kleine Aenderung des entsprechenden Elementes und umgekehrt jeder unendlich kleinen Aenderung des Elementes eine ebensolche Werthänderung seiner Coordinaten entspricht. Ob diese Voraussetzung als ausreichend zu betrachten, oder ob sie durch noch speciellere Bedingungen zu ergänzen sei, damit die beabsichtigte Begriffsbildung der n-fachen, stetigen Mannigfaltigkeit als eine gegen jeden Widerspruch gesicherte, in sich gefestigte betrachtet werden kann †), — möge zunächst dahingestellt bleiben; hier soll allein gezeigt werden, dass wenn sie fallen gelassen wird, d. i. wenn hinsichtlich der Correspondenz zwischen der Mannigfaltigkeit und ihren Coordinaten keinerlei Beschränkung gemacht wird, alsdann jenes von den Autoren als wesentlich bezeichnete Merkmal (wonach eine n-fache stetige Mannigfaltigkeit eine solche ist, deren Elemente aus n von einander unabhängigen reellen, stetigen Coordinaten sich bestimmen lassen) durchaus hinfällig wird.

Wie unsere Untersuchung zeigen wird, ist es sogar möglich, die

---

*) Man vergl. *Riemanns* gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1876. S. 254 f.

**) Man vergl. *Helmholtz:* „Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie". Heidelberger Jahrbücher 1868, No. 46 und 47 und: „Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Göttinger Nachrichten 1868, No. 9; desselben Verfassers populäre Vorträge, Heft III, Braunschweig 1876, S. 21 f.

***) Man vergl. *J. Rosanes,* über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. Breslau, 1871, S. 13. — *O. Liebmann,* zur Analysis der Wirklichkeit. Strassburg, 1876, S. 58. — *B. Erdmann,* die Axiome der Geometrie. Leipzig, 1877, S. 45.

†) Die Beantwortung dieser Frage, auf welche wir bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werden, scheint mir keinen nennenswerthen Schwierigkeiten zu begegnen.

Elemente einer n-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit durch eine einzige, reelle stetige Coordinate t eindeutig und vollständig zu bestimmen. Daraus folgt alsdann, dass wenn für die Art der Correspondenz keine Voraussetzungen gestellt werden, die Anzahl der unabhängigen, stetigen, reellen Coordinaten, welche zur eindeutigen und vollständigen Bestimmung der Elemente einer n-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit zu benutzen sind, auf jede vorgegebene Zahl gebracht werden kann und also *nicht* als unveränderliches Merkmal einer gegebenen Mannigfaltigkeit anzusehen ist. Indem ich mir die Frage vorlegte, ob eine stetige Mannigfaltigkeit von n Dimensionen sich eindeutig und vollständig einer stetigen Mannigfaltigkeit von nur einer Dimension zuordnen lässt, so dass jedem Elemente der einen von ihnen ein und *nur* ein Element der andern entspricht, fand es sich, dass diese Frage bejaht werden muss.

Es lässt sich demnach eine stetige Fläche eindeutig und vollständig auf eine stetige Linie beziehen, das Gleiche gilt von stetigen Körpern und von stetigen Gebilden mit beliebig vielen Dimensionen.

Unter Anwendung der oben eingeführten Ausdrucksweise können wir daher sagen, dass die Mächtigkeit eines beliebigen stetigen, n-fach ausgedehnten Gebildes *gleich* ist der Mächtigkeit einer einfach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit, wie beispielsweise einer begränzten, stetigen geraden Strecke.

§. 1.

Da zwei stetige Gebilde von *gleicher* Dimensionenzahl sich mittelst analytischer Functionen auf einander eindeutig und vollständig beziehen lassen, so kommt bei dem von uns verfolgten Zwecke (nämlich die Möglichkeit eindeutiger und vollständiger Zuordnungen von stetigen Gebilden mit verschiedener Dimensionenzahl nachzuweisen), wie man leicht einsieht, *Alles* auf den Beweis des folgenden Satzes an:

(A.) „Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ n von einander unabhängige, veränderliche reelle Grössen, von denen jede alle Werthe, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, und ist t eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum ($0 \leqq t \leqq 1$), so ist es möglich, die eine Grösse t dem Systeme der n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so zuzuordnen, dass zu jedem bestimmten Werthe von t ein bestimmtes Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ und umgekehrt zu jedem bestimmten Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein gewisser Werth von t gehört."

Als Folge dieses Satzes stellt sich alsdann der von uns in Aussicht genommene andere dar:

(B.) „Eine nach n Dimensionen ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit lässt sich eindeutig und vollständig einer stetigen Mannigfaltigkeit von einer Dimension zuordnen; zwei stetige Mannigfaltigkeiten, die eine von n, die andere von m Dimensionen, wo $n \gtreqless m$, haben gleiche Mächtigkeit; die Elemente einer nach n Dimensionen ausgedehnten, stetigen Mannigfaltigkeit lassen sich durch eine einzige stetige, reelle Coordinate t eindeutig bestimmen, sie lassen sich aber auch durch ein System von m stetigen Coordinaten $t_1, t_2, \ldots t_m$ eindeutig und vollständig bestimmen."

§. 2.

Zum Beweise von (A.) gehen wir von dem bekannten Satze aus, dass jede *irrationale* Zahl $e \gtrless {0 \atop 1}$ sich auf eine völlig bestimmte Weise in der Form eines unendlichen Kettenbruches:

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \cdots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$$

darstellen lässt, wo die α_ν positive, ganze rationale Zahlen sind.

Zu jeder irrationalen Zahl $e \gtrless {0 \atop 1}$ gehört eine bestimmte unendliche Reihe von positiven ganzen Zahlen α_ν und umgekehrt bestimmt eine jede solche Reihe eine gewisse irrationale Zahl $e \gtrless {0 \atop 1}$.

Sind nun $e_1, e_2, \ldots e_n$ n von einander unabhängige veränderliche Grössen, von denen jede alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles $(0\ldots1)$, und einen jeden von diesen nur einmal annehmen kann, so setze man:

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_\mu &= (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,\nu}, \ldots); \end{aligned}$$

diese n irrationalen Zahlen bestimmen eindeutig eine $\overline{n+1}^{\text{te}}$ irrationale Zahl $d \gtrless {0 \atop 1}$:

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots),$$

wenn man zwischen den Zahlen α und β folgende Beziehung festsetzt:

$$(1.)\quad \beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \quad \begin{cases} \mu = 1,\ 2,\ \ldots\ n, \\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots\ \infty. \end{cases}$$

Aber auch umgekehrt: wenn man von einer irrationalen Zahl $d \gtrless {}^{0}_{1}$ ausgeht, so bestimmt dieselbe die Reihe der β_ν und vermöge (1.) auch die Reihen der $\alpha_{\mu,\nu}$, d. h. d bestimmt eindeutig das System der n irrationalen Zahlen e_1, e_2, ... e_n. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich zunächst der folgende Satz:

(C.) „Sind e_1, e_2, ... e_n n von einander unabhängige veränderliche Grössen, von denen eine jede alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles $(0\ldots1)$ annehmen kann, und ist d eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum, wie jene, so ist es möglich die eine Grösse d und das System der n Grössen e_1, e_2, ... e_n eindeutig und vollständig einander zuzuordnen."

§. 3.

Nachdem im vorigen Paragraphen der Satz (C.) bewiesen worden ist, muss es nun unsere Sache sein, den Beweis des folgenden Satzes zu führen:

(D.) „Eine veränderliche Grösse e, welche alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles $(0\ldots1)$ annehmen kann, lässt sich eindeutig einer Veränderlichen x zuordnen, welche alle reellen, d. h. rationalen und irrationalen Werthe, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, erhält, so dass zu jedem irrationalen Werthe von $e \gtrless {}^{0}_{1}$ ein und nur ein reeller Werth von $x \begin{smallmatrix} \geqq 0 \\ \leqq 1 \end{smallmatrix}$ und umgekehrt zu jedem reellen Werthe von x ein gewisser irrationaler Werth von e gehört."

Denn ist einmal dieser Satz (D.) bewiesen, so denke man sich *nach ihm* den im §. 2 mit e_1, e_2, ... e_n und d bezeichneten $n+1$ veränderlichen Grössen entsprechend die anderen Veränderlichen x_1, x_2, ... x_n und t eindeutig und vollständig zugeordnet, wo jede dieser Veränderlichen ohne Beschränkung jeden reellen Werth, der $\geqq 0$ und $\leqq 1$, anzunehmen hat. Da zwischen der Veränderlichen d und dem System der n Veränderlichen e_1, e_2, ... e_n im §. 2 eine eindeutige und vollständige Correspondenz hergestellt ist, so erhält man auf diese Weise eine eindeutige und vollständige

Zuordnung der einen stetigen Veränderlichen t und des Systemes von n stetigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, womit die Richtigkeit des Satzes (A.) nachgewiesen sein wird. —

Wir werden uns also im Folgenden nur noch mit dem Beweise des Satzes (D.) zu beschäftigen haben; dabei möge eine einfache Symbolik, welche wir zunächst beschreiben wollen, Kürze halber, zur Anwendung kommen.

Unter einer *linearen* Mannigfaltigkeit reeller Zahlen wollen wir jede wohldefinirte Mannigfaltigkeit reeller, von einander verschiedener, d. i. ungleicher, Zahlen verstehen, so dass eine und dieselbe Zahl in einer linearen Mannigfaltigkeit nicht öfter, als einmal als Element vorkommt.

Die reellen Veränderlichen, welche im Laufe dieser Untersuchung vorkommen, sind alle von der Art, dass der Spielraum einer jeden von ihnen, d. h. die Mannigfaltigkeit der Werthe, welche sie annehmen kann, eine gegebene lineare Mannigfaltigkeit ist; wir wollen daher auch diese, überall stillschweigend gemachte, Voraussetzung in dem Folgenden nicht mehr besonders hervorheben. Von zweien solchen Veränderlichen a und b wollen wir sagen, dass sie *keinen Zusammenhang* haben, wenn kein Werth, welchen a annehmen kann, gleich ist einem Werthe von b; d. h. die beiden Mannigfaltigkeiten der Werthe, welche die Veränderlichen a, b annehmen können, haben keine gemeinschaftlichen Elemente, wenn gesagt werden soll, dass a und b *ohne Zusammenhang* sind *).

Hat man eine endliche oder unendliche Reihe $a', a'', a''', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ wohldefinirter Veränderlichen oder Constanten, die paarweise keinen Zusammenhang haben, so lässt sich eine Veränderliche a dadurch definiren, dass ihr Spielraum aus der Zusammenfassung der Spielräume von $a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ entsteht; umgekehrt lässt sich eine gegebene Veränderliche a nach den verschiedensten Modis in andere $a', a'', \ldots$ zerlegen, die paarweise keinen Zusammenhang haben; in diesen beiden Fällen drücken wir die Beziehung der Veränderlichen a zu den Veränderlichen $a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ durch folgende Formel aus:

$$a \equiv \{a', \quad a'', \quad \ldots, \quad a^{(\nu)}, \quad \ldots\}.$$

---

*) Zwei Mannigfaltigkeiten M und N haben entweder *keinen Zusammenhang*, wenn sie nämlich kein ihnen gemeinschaftlich angehöriges Element haben; oder sie hängen durch eine bestimmte dritte Mannigfaltigkeit P zusammen, nämlich durch die Mannigfaltigkeit der ihnen gemeinschaftlichen Elemente.

Zum Bestehen dieser Formel gehört also: 1) dass jeder Werth, welchen irgend eine der Veränderlichen $a^{(\nu)}$ annehmen kann, auch ein der Veränderlichen a zustehender Werth ist; 2) dass jeder Werth, welchen a erhalten kann, auch von einer und nur einer der Grössen $a^{(\nu)}$ angenommen wird. Um diese Formel zu erläutern, sei beispielsweise φ eine Veränderliche, welche alle rationalen Zahlwerthe, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, e eine Veränderliche, welche alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalls $(0 \dots 1)$, und endlich x eine Veränderliche, welche alle reellen, rationalen und irrationalen Zahlwerthe, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, so ist:

$$x \equiv \{\varphi,\ e\}.$$

Sind a und b zwei veränderliche Grössen von der Art, dass es möglich ist, dieselben eindeutig und vollständig einander zuzuordnen, haben, mit anderen Worten, ihre beiden Spielräume gleiche Mächtigkeit, so wollen wir a und b einander *äquivalent* nennen und dies durch eine der beiden Formeln

$$a \sim b \quad \text{oder} \quad b \sim a$$

ausdrücken. Nach dieser Definition der Aequivalenz zweier veränderlichen Grössen folgt leicht, dass $a \sim a$; ferner dass, wenn $a \sim b$ und $b \sim c$, alsdann auch immer $a \sim c$ ist.

In der folgenden Untersuchung wird der nachstehende Satz, dessen Beweis wir wegen seiner Einfachheit übergehen dürfen, an verschiedenen Stellen zur Anwendung kommen:

(E.) „Ist $a', a'', \dots, a^{(\nu)}, \dots$ eine endliche oder unendliche Reihe von Veränderlichen oder Constanten, welche paarweise keinen Zusammenhang haben, $b', b'', \dots, b^{(\nu)}, \dots$ eine andere Reihe von derselben Beschaffenheit, entspricht jeder Veränderlichen $a^{(\nu)}$ der ersten Reihe eine bestimmte Veränderliche $b^{(\nu)}$ der zweiten und sind diese entsprechenden Veränderlichen stets einander äquivalent, d. h. ist: $a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$, so ist auch immer

$$a \sim b,$$

wenn

$$a \equiv \{a',\ a'',\ \dots,\ a^{(\nu)},\ \dots\}$$

und

$$b \equiv \{b',\ b'',\ \dots,\ b^{(\nu)},\ \dots\}.“$$

§. 4.

Unsere Untersuchung ist nun so weit geführt, dass es uns nur noch auf den Beweis des Satzes (D.) in §. 3 ankommt. Um zu diesem Ziele zu gelangen, gehen wir davon aus, dass die sämmtlichen rationalen Zahlen, welche $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, sich in der Form einer einfach unendlichen Reihe:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \ldots, \quad \varphi_\nu, \quad \ldots$$

mit einem allgemeinen Gliede φ_ν schreiben lassen. Dies lässt sich am einfachsten wie folgt darthun: Ist $\frac{p}{q}$ die *irreductible* Form für eine rationale Zahl, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ ist, wo also p und q ganze, nicht negative Zahlen mit dem grössten gemeinschaftlichen Theiler 1 sind, so setze man $p+q=N$. Es gehört alsdann zu jeder Zahl $\frac{p}{q}$ ein bestimmter, ganzzahliger, positiver Werth von N, umgekehrt gehört zu einem solchen Werthe von N immer nur eine endliche Anzahl von Zahlen $\frac{p}{q}$. Werden nun die Zahlen $\frac{p}{q}$ in einer solchen Reihenfolge gedacht, dass die zu kleineren Werthen von N gehörigen denen vorangehen, für welche N einen grösseren Werth hat, dass ferner die Zahlen $\frac{p}{q}$, für welche N einen und denselben Werth hat, ihrer Grösse nach einander folgen, die grösseren auf die kleineren, so kommt jede der Zahlen $\frac{p}{q}$ an eine ganz bestimmte Stelle einer einfach unendlichen Reihe, deren allgemeines Glied mit φ_ν bezeichnet werde. Dieser Satz kann aber auch aus dem s. Z. von mir*) gebrachten geschlossen werden, wonach der Inbegriff (ω) aller reellen *algebraischen* Zahlen sich in der Form einer unendlichen Reihe:

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_\nu, \quad \ldots$$

mit dem allgemeinen Gliede ω_ν auffassen lässt; diese Eigenschaft des Inbegriffes (ω) überträgt sich nämlich auf den Inbegriff aller rationalen Zahlen, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$, weil diese Mannigfaltigkeit ein *Theil* von jener ist. Sei nun e die im Satze (D.) vorkommende Veränderliche, welche alle reellen Zahlwerthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ anzunehmen hat, mit Ausnahme der Zahlen φ_ν.

Man nehme ferner im Intervalle $(0 \ldots 1)$ irgend eine unendliche Reihe irrationaler Zahlen ε_ν an, welche nur an die Bedingungen gebunden ist, dass allgemein $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ und dass $\lim \varepsilon_\nu = 1$ für $\nu = \infty$; beispielsweise sei $\varepsilon_\nu = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}$.

*) Man vergleiche: *G. Cantor*, „Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", dieses Journal, Bd. 77, S. 258 f.

Man bezeichne mit f eine Veränderliche, welche alle reellen Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ annehmen kann, mit Ausnahme der Werthe ε_ν, mit g eine andere Veränderliche, welche alle reellen Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ anzunehmen hat, mit Ausnahme der ε_ν und der φ_ν.

Wir behaupten, dass:

$$e \sim f.$$

In der That ist nach der Bezeichnungsweise des §. 3:

$$e \equiv \{g, \quad \varepsilon_\nu\},$$
$$f \equiv \{g, \quad \varphi_\nu\},$$

und da $g \sim g$; $\varepsilon_\nu \sim \varphi_\nu$, so schliessen wir nach Satz (E.) dass:

$$e \sim f.$$

Der zu beweisende Satz (D.) ist daher zurückgeführt auf folgenden Satz:

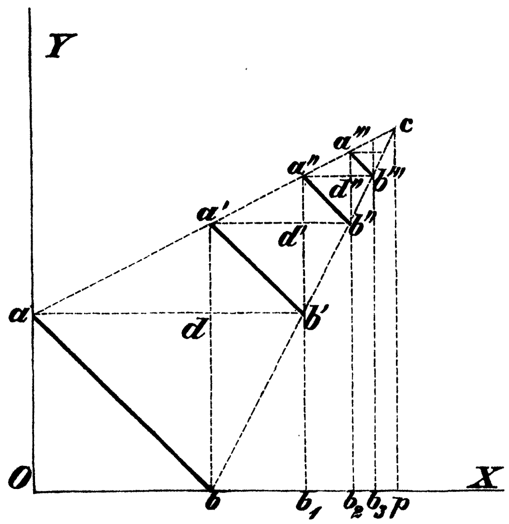
(F.) „Eine Veränderliche f, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ annehmen kann, mit Ausnahme der Werthe einer gegebenen Reihe ε_ν, welche an die Bedingungen gebunden ist, dass $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ und dass $\lim \varepsilon_\nu = 1$ für $\nu = \infty$, lässt sich eindeutig und vollständig einer Veränderlichen x zuordnen, welche alle Werthe $\geqq 0$ und $\leqq 1$ anzunehmen hat; es ist, mit anderen Worten $f \sim x$."

§. 5.

Den Beweis von (F.) gründen wir auf die folgenden Sätze (G.), (H.), (J.):

(G.) „Ist y eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ mit Ausnahme des einen 0 anzunehmen hat, x eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$, ohne Ausnahme erhält, so ist:

$$y \sim x."$$



Der Beweis dieses Satzes (G.) wird am einfachsten durch die Betrachtung nebenstehender Curve geführt, deren Abscissen von O aus die Grösse x, deren Ordinaten die Grösse y repräsentiren. Diese Curve besteht aus den unendlich vielen einander parallelen, mit ins Unendliche wachsendem ν unendlich klein werdenden Strecken:

$$\overline{ab},\quad \overline{a'b'},\quad \ldots,\quad \overline{a^{(\nu)}b^{(\nu)}},\quad \ldots$$

und aus dem isolirten Punkte c, welchem sich jene Strecken asymptotisch nähern. Hierbei sind aber die Endpunkte $a, a', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots$ als *zur Curve gehörig*, dagegen die Endpunkte $b, b', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots$ als *von ihr ausgeschlossen* zu betrachten.

Die in der Figur vertretenen Längen sind:

$$\overline{Op} = \overline{pc} = 1\,;\quad \overline{Ob} = \overline{bp} = \overline{Oa} = \tfrac{1}{2}\,;$$
$$\overline{a^{(\nu)}d^{(\nu)}} = \overline{d^{(\nu)}b^{(\nu)}} = \overline{b_{\nu-1}b_\nu} = \frac{1}{2^{\nu+1}}\,.$$

Man überzeugt sich, dass während die Abscisse x alle Werthe von 0 bis 1 annimmt, die Ordinate y alle diese Werthe mit *Ausschluss* des einen Werthes 0 erhält.

Nachdem auf diese Weise der Satz (G.) bewiesen ist, erhält man zunächst durch die Anwendung der Transformationsformeln:

$$y = \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\,;\quad x = \frac{u-\alpha}{\beta-\alpha}\,;$$

die folgende Verallgemeinerung von (G.):

(H.) „Eine Veränderliche z, welche alle Werthe eines Intervalles $(\alpha\ldots\beta)$, wo $\alpha \gtrless \beta$, mit Ausnahme des einen Endwerthes α annehmen kann, ist äquivalent einer Veränderlichen u, welche alle Werthe desselben Intervalles $(\alpha\ldots\beta)$ ohne Ausnahme erhält."

Von hier aus gelangen wir zunächst zu folgendem Satze:

(J.) „Ist w eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(\alpha\ldots\beta)$ mit Ausnahme der beiden Endwerthe α und β desselben anzunehmen hat, u dieselbe Veränderliche wie in (H.), so ist:

$$w \sim u."$$

In der That: es sei γ irgend ein Werth zwischen α und β; man führe hülfsweise vier neue Veränderliche w', w'', u'' und z ein.

z sei dieselbe Veränderliche wie in (H.), w' nehme alle Werthe des Intervalles $(\alpha\ldots\gamma)$ an, mit Ausnahme der beiden Endwerthe α und γ; w'' erhalte alle Werthe des Intervalles $(\gamma\ldots\beta)$ mit Ausnahme des einen Endwerthes β, u'' sei eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(\gamma \ldots \beta)$ mit Einschluss der Endwerthe anzunehmen hat.

Es ist alsdann:

$$w \equiv \{w', \quad w''\},$$
$$z \equiv \{w', \quad u''\}.$$

In Folge des Satzes (H.) ist aber:

$$w'' \sim u'';$$

wir schliessen daher, dass:

$$w \sim z.$$

Nach Satz (H.) ist aber auch:

$$z \sim u;$$

folglich hat man auch: $w \sim u$, womit Satz (J.) bewiesen ist.

Nun können wir den Satz (F.) wie folgt beweisen:

Indem wir auf die Bedeutung der Veränderlichen f und x in der Ankündigung des Satzes (F.) verweisen, führen wir gewisse Hülfsveränderliche:

$$f', \quad f'', \quad \ldots, \quad f^{(\nu)}, \quad \ldots$$

und

$$x'', \quad x^{\mathrm{IV}}, \quad \ldots, \quad x^{(2\nu)}, \quad \ldots$$

ein, und zwar seien:

f' eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots \varepsilon_1)$ mit Ausnahme des einen Endwerthes ε_1 erhält, $f^{(\nu)}$ für $\nu > 1$ eine Veränderliche, die alle Werthe des Intervalles $(\varepsilon_{\nu-1} \ldots \varepsilon_\nu)$ mit Ausnahme der beiden Endwerthe $\varepsilon_{\nu-1}$ und ε_ν anzunehmen hat; $x^{(2\nu)}$ sei eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(\varepsilon_{2\nu-1} \ldots \varepsilon_{2\nu})$ ohne Ausnahme erhält.

Fügt man zu den Veränderlichen $f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots$ noch die constante Zahl 1, so haben alle diese Grössen zusammengenommen denselben Spielraum wie f, d. h. man hat:

$$f \equiv \{f', \quad f'', \quad \ldots, \quad f^{(\nu)}, \quad \ldots, \quad 1\}.$$

Ebenso überzeugt man sich, dass:

$$x \equiv \{f', \quad x'', \quad f''', \quad x^{\mathrm{IV}}, \quad \ldots, \quad f^{(2\nu-1)}, \quad x^{(2\nu)}, \quad \ldots, \quad 1\}.$$

Dem Satze (J.) zufolge ist aber:

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)};$$

ferner ist:

$$f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}; \quad 1 \sim 1;$$

daher ist, wegen des Satzes (E.) §. 3:

$$f \sim x,$$

w. z. b. w.

§. 6.

Ich will nun für den Satz (D.) noch einen kürzeren Beweis geben; wenn ich mich auf diesen allein nicht beschränkt habe, so geschah es aus dem Grunde, weil die Hülfssätze (F.), (G.), (H.), (J.), welche bei der complicirteren Beweisführung gebraucht wurden, an sich von Interesse sind.

Unter x verstehen wir, wie früher, eine Veränderliche, welche alle reellen Werthe des Intervalles $(0\ldots1)$, mit Einschluss der Endwerthe, anzunehmen hat, e sei eine Veränderliche, welche nur die irrationalen Werthe des Intervalles $(0\ldots1)$ erhält; und zu beweisen ist, dass $x \sim e$.

Die rationalen Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq 1$ denken wir uns, wie in §. 4, in Reihenform mit dem allgemeinen Gliede φ_ν, wo ν die Zahlenreihe 1, 2, 3, ... zu durchlaufen hat. Ferner nehmen wir eine beliebige unendliche Reihe von lauter irrationalen, von einander verschiedenen Zahlen des Intervalles $(0\ldots1)$ an; das allgemeine Glied dieser Reihe sei η_ν. $\left(\text{z. B. } \eta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}\right)$.

Unter h verstehe man eine Veränderliche, welche alle Werthe des Intervalles $(0\ldots1)$ mit Ausnahme der φ_ν sowohl, wie der η_ν anzunehmen hat.

Nach der in §. 3 eingeführten Symbolik ist alsdann:

$$(1.) \quad x \equiv \{h, \quad \eta_\nu, \quad \varphi_\nu\}$$

und

$$e \equiv \{h, \quad \eta_\nu\}.$$

Die letzte Formel können wir auch wie folgt schreiben:

$$(2.) \quad e \equiv \{h, \quad \eta_{2\nu-1}, \quad \eta_{2\nu}\}.$$

Bemerken wir nun, dass:

$$h \sim h; \quad \eta_\nu \sim \eta_{2\nu-1}; \quad \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu}$$

und wenden auf die beiden Formeln (1.) und (2.) den Satz (E.) §. 3 an, so erhalten wir:

$$x \sim e;$$

w. z. b. w.

§. 7.

Es liegt der Gedanke nahe, zum Beweise von (A.) an Stelle des von uns benutzten Kettenbruches die Darstellungsform des unendlichen Decimalbruches zu wählen; obgleich es den Anschein haben könnte, dass dieser Weg schneller zum Ziele geführt haben würde, so bringt derselbe trotzdem eine Schwierigkeit mit sich, auf welche ich hier aufmerksam machen will; sie war der Grund, weshalb ich auf den Gebrauch der Decimalbrüche bei dieser Untersuchung verzichtet habe.

Hat man beispielsweise zwei Veränderliche x_1 und x_2 und setzt:

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \cdots,$$

$$x_2 = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \cdots + \frac{\beta_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

mit der Bestimmung, dass die Zahlen α_ν, β_ν ganze Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq 9$ werden und nicht von einem gewissen ν an stets den Werth 0 annehmen (ausgenommen wenn x_1 oder x_2 selbst gleich Null sind), so werden diese Darstellungen von x_1, x_2 in allen Fällen eindeutig bestimmt sein, d. h. x_1 und x_2 bestimmen die unendlichen Zahlenreihen α_ν und β_ν, und umgekehrt. Leitet man nun aus x_1 und x_2 eine Zahl:

$$t = \frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \cdots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

her, indem man setzt:

$$\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu; \quad \gamma_{2\nu} = \beta_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots\ \infty,$$

so ist hiermit eine eindeutige Beziehung zwischen dem System x_1, x_2 und der einen Veränderlichen t hergestellt; denn *nur ein einziges* Werthsystem x_1, x_2 führt zu einem gegebenen Werthe von t. Die Veränderliche t nimmt aber, und dies ist der hier zu beachtende Umstand, nicht alle Werthe des Intervalles $(0\ldots1)$ an, sie ist in ihrer Veränderlichkeit beschränkt, während x_1 und x_2 keiner Beschränkung innerhalb desselben Intervalles unterworfen werden.

Alle Werthe der Reihensumme:

$$\frac{\gamma_1}{10} + \frac{\gamma_2}{10^2} + \cdots + \frac{\gamma_\nu}{10^\nu} + \cdots,$$

bei welchen von einem gewissen $\nu > 1$ an alle $\gamma_{2\nu-1}$ oder alle $\gamma_{2\nu}$ den Werth Null haben, müssen als von dem Veränderlichkeitsgebiet von t ausgeschlossen angesehen werden, weil sie auf ausgeschlossene, nämlich endliche Decimalbruchdarstellungen von x_1 oder x_2 zurückführen würden.

§. 8.

Nachdem in den vorangehenden Paragraphen die beabsichtigte Untersuchung zu Ende geführt ist, mögen zum Schlusse einige erweiternde Bemerkungen Platz finden. Der Satz (A.) und demgemäss der Satz (B.) sind einer Verallgemeinerung fähig, wonach auch stetige Mannigfaltigkeiten von einer unendlich grossen Dimensionenzahl dieselbe Mächtigkeit haben, wie stetige Mannigfaltigkeiten von einer Dimension; diese Verallgemeinerung ist jedoch wesentlich an eine Voraussetzung gebunden, dass nämlich die unendlich vielen Dimensionen selbst eine Mannigfaltigkeit bilden, welche die Mächtigkeit der ganzen positiven Zahlenreihe hat.

An Stelle des Satzes (A.) tritt hier der folgende:

(A′.) „Ist $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ eine einfach unendliche Reihe von einander unabhängiger, veränderlicher, reeller Grössen, von denen jede alle Werthe, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, und ist t eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraume $(0 \leqq t \leqq 1)$ wie jene, so ist es möglich, die eine Grösse t dem Systeme der unendlich vielen $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ eindeutig und vollständig zuzuordnen."

Dieser Satz (A′.) wird mit Hülfe des Satzes (D.), §. 3 zurückgeführt auf den folgenden:

(C′.) „Ist $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$ eine unendliche Reihe von einander unabhängiger veränderlicher Grössen, von denen jede alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles $(0\ldots1)$ annehmen kann und ist d eine andere irrationale Veränderliche mit dem nämlichen Spielraum, so ist es möglich die eine Grösse d dem Systeme der unendlich vielen Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_\mu, \ldots$ eindeutig und vollständig zuzuordnen."

Der Beweis von (C′.) geschieht am einfachsten, indem man unter Anwendung der Kettenbruchentwickelung, wie in §. 2, setzt:

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \ldots, \alpha_{\mu,\nu}, \ldots) \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots \infty,$$
$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \ldots)$$

und zwischen den ganzen positiven Zahlen α und β den Zusammenhang herstellt:

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda,$$

wo

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}.$$

Es hat nämlich die Function $\mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}$, wie leicht zu zeigen, die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie alle positiven ganzen Zahlen und jede nur einmal darstellt, wenn in ihr μ und ν unabhängig von einander ebenfalls jeden positiven, ganzzahligen Werth erhalten.

Mit dem Satze (A'.) scheint aber zugleich die Grenze erreicht zu sein, bis zu welcher eine Verallgemeinerung des Satzes (A.) und seiner Folgerungen möglich ist.

Da auf diese Weise für ein ausserordentlich reiches und weites Gebiet von Mannigfaltigkeiten die Eigenschaft nachgewiesen ist, sich eindeutig und vollständig einer begränzten, stetigen Geraden oder einem Theile derselben (unter einem Theile einer Linie jede in ihr enthaltene Mannigfaltigkeit von Punkten verstanden) zuordnen zu lassen, so entsteht die Frage, wie sich die verschiedenen Theile einer stetigen geraden Linie, d. h. die verschiedenen in ihr denkbaren unendlichen Mannigfaltigkeiten von Punkten hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verhalten. Entkleiden wir dieses Problem seines geometrischen Gewandes und verstehen, wie dies bereits in §. 3 auseinandergesetzt ist, unter einer *linearen* Mannigfaltigkeit reeller Zahlen jeden denkbaren Inbegriff unendlich vieler, von einander verschiedener reeller Zahlen, so fragt es sich in *wie viel* und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher Mächtigkeit in eine und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden. Durch ein Inductionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, dass die Anzahl der nach diesem Eintheilungsprincip sich ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, dass sie gleich zwei ist.

Darnach würden die linearen Mannigfaltigkeiten aus zwei *) Klassen

*) Dass diese beiden Klassen in Wirklichkeit verschieden sind, folgt aus dem in §. 2 der vorhin citirten Arbeit (Dieses Journal Bd. 77 S. 258 f.) bewiesenen Satze, wonach, wenn eine gesetzmässige, unendliche Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ vorliegt, stets in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ Zahlen η gefunden werden können, welche nicht in der gegebenen Reihe vorkommen.

bestehen, von denen die erste alle Mannigfaltigkeiten in sich fasst, welche sich auf die Form: functio ips. ν (wo ν alle positiven ganzen Zahlen durchläuft) bringen lassen; während die zweite Klasse alle diejenigen Mannigfaltigkeiten in sich aufnimmt, welche auf die Form: functio ips. x (wo x alle reellen Werthe $\geqq 0$ und $\leqq 1$ annehmen kann) zurückführbar sind. Entsprechend diesen beiden Klassen würden daher bei den unendlichen linearen Mannigfaltigkeiten nur zweierlei Mächtigkeiten vorkommen; die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.

Halle a. S., den 11. Juli 1877.