Quand Victor Maslov et Elie Cartan se rencontrent ...

Jean-Louis Clerc

8 juin 2006

1 L'indice d'orientation de trois droites dans le plan

Commençons par un exercice élémentaire.

Enoncé

Soit E un espace vectoriel de dimension 2. Soient D_1, D_2, D_3 (resp. D'_1, D'_2, D'_3) trois droites de E deux à deux distinctes (ici, droite = sous-espace vectoriel de E de dimension 1).

a) Existe-t-il une transformation linéaire f telle que $f(D_j) = D'_j$ pour $1 \leq j \leq 3$?

b) Existe-t-il une transformation linéaire f de déterminant 1 telle que $f(D_j) = D'_j$ pour $1 \leq j \leq 3$?

Solution

a) Comme D_1 et D_3 sont des droites distinctes de E, on a $E = D_1 \oplus D_3$. Choisissons un vecteur v_2 générateur de D_2. Soit $v_2 = v_1 + v_3$ la décomposition correspondante de v_2. Alors, comme $D_1 \neq D_2$ et $D_3 \neq D_2$, on a $v_3 \neq 0$ et $v_1 \neq 0$, et donc $\{v_1, v_3\}$ est une base de E telle que

$$D_1 = \mathbb{R}v_1, \quad D_2 = \mathbb{R}(v_1 + v_3), \quad D_3 = \mathbb{R}v_3 \ .$$

De même, il existe une base $\{v'_1, v'_3\}$ de E telle que

$$D'_1 = \mathbb{R}v'_1, \quad D'_2 = \mathbb{R}(v'_1 + v'_3), \quad D'_3 = \mathbb{R}v'_3 \ .$$

Soit f la transformation linéaire de E telle que $f(v_1) = v'_1, f(v_3) = v'_3$. Elle satisfait bien $f(D_j) = D'_j$ pour $1 \leq j \leq 3$. Donc la réponse à la question a) est positive.

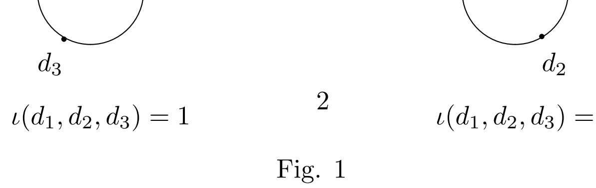
On peut même dire un peu plus. Supposons en effet que g soit une autre transformation linéaire de E telle que $g(D_j) = D'_j$ pour $1 \leq j \leq 3$. Alors $g(v_1)$ engendre D'_1 et donc $g(v_1) = \lambda_1 v'_1$, avec $\lambda_1 \neq 0$. De même $g(v_3) = \lambda_3 v'_3$, avec $\lambda_3 \neq 0$. Par suite, $g(v_2) = \lambda_1 v'_1 + \lambda_3 v'_3$, et comme ce vecteur doit être proportionnel à $v'_2 = v'_1 + v'_3$, on voit que nécessairement $\lambda_1 = \lambda_3$. D'où $g = \lambda_1 f$. En d'autres termes, la transformation linéaire f est unique à un scalaire non nul près.

b) Dans la partie a), nous n'avons pas spécifié le corps de base, et en effet la réponse à la question n'en dépend pas. Pour la partie b, il n'en est plus de même. Nous allons donc résoudre cette question en supposant que E est un espace vectoriel réel. D'après a), il existe une transformation f de E telle que $f(D_j) = D'_j$ pour $1 \leq j \leq 3$. Si g est une autre transformation linéaire possédant la même propriété, on a $g = \lambda f$, de sorte que $\det g = \lambda^2 \det f$. Par conséquent le signe de ce déterminant ne dépend pas de la transformation linéaire particulière considérée. On voit donc que si $\det f < 0$, il n'y a pas de transformation linéaire de déterminant 1 satisfaisant aux conditions de la question b), alors que, dans le cas où $\det f > 0$, la transformation $g = (\det f)^{-\frac{1}{2}} f$ fournit une solution à la question b).

En fait, la question a) est à la base de la géométrie de la droite projective, et la réponse ne dépend pas du corps de base : trois droites deux à deux distinctes correspondent à un *repère projectif* de la droite projective $\mathbb{P}(E)$, et on a démontré que les repères projectifs d'une droite projective sont en bijection avec le groupe de homographies de la droite projective (groupe noté PSL_2). La question b) a des réponses variables suivant le corps de base. Ici, nous avons supposé que ce corps est $\mathbb{R}$. Le groupe $G = PSL_2(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, et il y en fait deux orbites pour l'action de G dans les repères projectifs de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Pour les distinguer, on choisit une orientation du plan réel E, et une base directe $\{v, w\}$ de E. Alors $\big(\mathbb{R}v, \mathbb{R}(v+w), \mathbb{R}w\big)$ et $\big(\mathbb{R}v, \mathbb{R}(v-w), \mathbb{R}w\big)$ sont des représentants de ces deux orbites.

Présentons encore différemment la situation. La droite projective réelle peut être regardée comme un cercle. Plus précisément, fixons un produit scalaire dans E. On sait que le groupe $PSO(2) = SO(2)/\{\pm 1\}$ (isométries directes de E modulo $\{\pm 1\}$) opère simplement transitivement sur les droites de E. Mais on sait que $PSO(2)$ est isomorphe au groupe $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, ce qu'on peut aussi obtenir en introduisant la notion d'angle de droites.

Dans ce schéma, la droite projective se présente donc comme un cercle, et on choisit une orientation. Les droites distinctes (D_1, D_2, D_3) sont représentées par trois points distincts (d_1, d_2, d_3) du cercle. On part de d_1 et on se déplace sur le cercle en suivant le sens positif. Le premier point rencontré sur le cercle est soit d_2, soit d_3, et l'on distingue ainsi les deux orbites sous l'action du groupe $G = PSL_2(\mathbb{R})$. Dans le premier cas, on dit que l'*indice d'orientation* du triplet (d_1, d_2, d_3) vaut 1, alors que cet indice vaut -1 dans le deuxième cas (voir Fig. 1).



$\iota(d_1, d_2, d_3) = 1$ $\qquad$ $\iota(d_1, d_2, d_3) = -1$

Fig. 1

L'indice d'orientation $\iota(d_1, d_2, d_3)$ ainsi défini sur les triplets de points du cercle deux à deux distincts satisfait les propriétés suivantes :

i) antisymétrie par permutation de variables, i.e.

$$\iota(d_{\sigma(1)}, d_{\sigma(2)}, d_{\sigma(3)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\ \iota(d_1, d_2, d_3)$$

pour toute permutation σ sur trois élements.

ii) invariance par le groupe $G = PSL_2(\mathbb{R})$, i.e.

$$\iota\big(g(d_1), g(d_2), g(d_3)\big) = \iota(d_1, d_2, d_3)$$

pour tout $g \in PSL_2(\mathbb{R})$.

iii) propriété de cocycle, i.e.

$$\iota(d_1, d_2, d_3) = \iota(d_1, d_2, d_4) + \iota(d_2, d_3, d_4) + \iota(d_3, d_1, d_4)$$

pour tous d_1, d_2, d_3, d_4 deux à deux distincts.

La propriété *i*) est immédiate à vérifier. Pour la propriété *ii*), on note que pour des raisons topologiques simples, l'indice d'orientation est en fait invariant par tout difféomorphisme préservant l'orientation du cercle. La propriété *iii*) peut se vérifier élémentairement ("cas par cas"), même si c'est une démonstration peu satisfaisante. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

On complète la définition de l'indice en posant qu'il vaut 0 si deux (au moins) des trois points sont confondus. Les propriétés ci-dessus sont encore vérifiées par l'extension.

Voici encore une version, plus sophistiquée, de la définition de cet indice. Pour cela, on réalise le cercle comme l'ensemble S des nombres complexes de module 1, regardé comme la frontière du disque-unité $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Le groupe des difféomorphismes holomorphes de $\mathcal{D}$ est le groupe

$$PSU(1,1) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \quad .$$

Ce groupe est isomorphe au groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ (et ceci justifie de noter encore G ce groupe).[1] L'action sur $\mathcal{D}$ est donnée par

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \quad .$$

On munit $\mathcal{D}$ de la métrique de Poincaré-Bergmann, donnée par $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{(1 - |z|^2)^2}$ $(z = x + iy)$, qui est invariante par l'action de $PSU(1,1)$. Chaque difféomorphisme holomorphe de $\mathcal{D}$ s'étend à un voisinage de S, et en particulier

[1] On peut voir cet isomorphisme à l'aide de la transformée de Cayley, qui réalise une équivalence conforme entre le disque-unité et le demi-plan supérieur.

G opère sur S. Trois points (deux à deux distincts) déterminent un *triangle géodésique idéal*, dont les côtés sont des arcs de cercle orthogonaux au cercle-unité : ce sont des géodésiques (infinies) joignant les sommets. Un résultat classique est que l'aire de ces triangles (pour la métrique de Poincaré) vaut π. Cela résulte d'un passage à la limite à partir de la formule

$$\mathcal{A} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

qui donne l'aire d'un triangle géodésique, α, β et γ étant les angles aux trois sommets du triangle (comme la métrique de Poincaré est conforme à la métrique euclidienne, ce sont les angles au sens euclidien).

Utilisons de préférence la notion d'*aire orientée*. L'aire orientée du triangle idéal de sommet $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ vaut π si $\iota(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$, et $-\pi$ si $\iota(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -1$. Autrement dit,

$$\iota(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\pi}\mathcal{A}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad .$$

Cette formule permet maintenant facilement de démontrer la propriété de cocycle, puisque celle-ci traduit la *propriété d'additivité* de la notion d'aire.

Pour une utilisation de l'indice d'orientation dans l'étude des difféomorphismes du cercle, voir [1].

2 La variété lagrangienne et l'indice triple de Maslov

Nous venons d'étudier une situation géométrique dans laquelle un groupe G opère sur un espace S, de telle sorte que G admet un nombre fini d'orbites ouvertes dans $S \times S \times S$ (on dira que G opère *presque* 3*-transitivement* sur S). La variété lagrangienne sous l'action du groupe symplectique est un autre exemple de ce phénomène, dont on va voir d'ailleurs que la situation précédente est un cas particulier.

Soit (E, ω) un espace symplectique. Donc E est un espace vectoriel réel de dimension paire $2r$, et ω est une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur E. Un sous-espace vectoriel l est appelé un *sous-espace lagrangien* (ou simplement un lagrangien) si

$$l^\perp := \{x \in E, \omega(x, y) = 0, \forall y \in l\} = l \ .$$

La dimension d'un lagrangien est nécessairement r. Ceci permet de réaliser l'ensemble des lagrangiens comme une sous-variété de la grassmannienne des sous-espaces de dimension r dans l'espace E de dimension $2r$. On l'appelle la *variété lagrangienne* (notée Λ dans la suite) associée à E.

Le groupe symplectique $G = Sp(E)$ est le groupe des transformations linéaires qui conservent la forme ω. C'est un sous-groupe de Lie de $GL(E)$. Si $g \in G$ et si $l \in \Lambda$, alors $g(l)$ est encore un lagrangien, de sorte que G opère naturellement sur Λ.

Deux lagrangiens l et m sont dits *transverses* si $l \cap m = \{0\}$. C'est la situation générique pour un couple de lagrangiens. Si (l, m) est un tel couple transverse, la forme ω induit alors une dualité entre l et m. Si $e_1, e_2, \ldots, e_r$ est une base de l, il lui correspond une base duale $f_1, f_2, \ldots, f_r$ de m. La réunion de ces deux systèmes de vecteurs forme une base symplectique de E. Mais deux bases symplectiques de E sont toujours conjuguées par un élément du groupe symplectique (théorème de Darboux). On en déduit facilement que deux couples de lagrangiens transverses sont toujours conjugués par un élément de G. En d'autre termes, le groupe G possède une orbite ouverte dans $S \times S$ (pour l'action diagonale de G), à savoir le sous-ensemble des couples de lagrangiens transverses.

Considérons maintenant un triplet de lagrangiens l_1, l_2, l_3. La situation générique est celle où les lagrangiens sont deux à deux tranverses. On a alors en particulier $E = l_1 \oplus l_3$. Soit π_1 (resp. π_3) la restriction à l_2 de la projection sur l_1 (resp. l_3) parallèlement à l_3 (resp. l_1). Alors π_1 et π_3 sont des isomorphismes, et soit $T = \pi_3 \circ \pi_1^{-1}$ l'isomorphisme qui en résulte de l_1 sur l_3. Soit $x_2, y_2 \in l_2$ et soit $x_2 = x_1 + x_3, y_2 = y_1 + y_3$ leurs décompositions respectives. Alors

$$0 = \omega(x_2, y_2) = \omega(x_1, y_3) + \omega(x_3, y_1) \ ,$$

où on utilise le fait que l_1, l_2 et l_3 sont des sous-espaces totalement isotropes pour ω. Compte-tenu de ce que $x_3 = Tx_1, y_3 = Ty_1$, ce dernier résultat peut encore se réécrire

$$\omega(x_1, Ty_1) = \omega(y_1, Tx_1) \ .$$

La forme bilinéaire

$$l_1 \times l_1 \ni (x, y) \longmapsto \omega(x, Ty)$$

est donc symétrique, et on voit facilement qu'elle est non-dégénérée. La signature de la forme quadratique associée est un entier $\iota(l_1, l_2, l_3)$, et on a ainsi défini un invariant pour l'action du groupe G dans les triplets de lagrangiens 2 à 2 transverses. Avec un peu plus de travail, on peut montrer que c'est un invariant caractéristique, en ce sens que deux triplets de lagrangiens deux à deux transverses (l_1, l_2, l_3) et $l'_1, l'_2, l'_3)$ sont conjugués par un élément du groupe symplectique si et seulement si $\iota(l_1, l_2, l_3) = \iota(l'_1, l'_2, l'_3)$.

La définition de cet invariant a été généralisée par M. Kashiwara (voir [12]) pour couvrir la situation générale (i.e sans hypothèse de tranversalité). Soit l_1, l_2, l_3 trois lagrangiens, et considérons sur $l_1 \times l_2 \times l_3$ la forme quadratique définie par

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, x_3) + \omega(x_3, x_1) \ .$$

La signature de cette forme quadratique est par définition l'*indice triple de Maslov* $\iota(l_1, l_2, l_3)$. Cet indice satisfait les propriétés suivantes :

i) antisymétrie par permutation de variables, i.e.

$$\iota(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\ \iota(l_1, l_2, l_3)$$

pour toute permutation σ sur trois élements.

ii) invariance par le groupe $G = SP(E)$, i.e.

$$\iota\big(g(l_1), g(l_2), g(l_3)\big) = \iota(l_1, l_2, l_3)$$

pour tout $g \in G$.

iii) propriété de cocycle, i.e.

$$\iota(l_1, l_2, l_3) = \iota(l_1, l_2, l_4) + \iota(l_2, l_3, l_4) + \iota(l_3, l_1, l_4)$$

pour tous $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \Lambda$.

Les démonstrations relèvent de l'algèbre linéaire. Soulignons toutefois que la démonstration de la propriété de cocycle est longue et finalement peu éclairante.

L'indice triple de Maslov est apparu à la suite des travaux de V. Maslov, un spécialiste de physique mathématique, mais par une approche toute différente. On fixe d'abord un lagrangien de référence. On considère une famille continue de lagrangiens, qu'on peut voir comme une courbe tracée dans Λ, c'est-à-dire une application continue

$$[0,1] \ni t \longmapsto l_t \in \Lambda\ .$$

On associe à ce chemin un indice $Mas(l_t)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (appelé indice de Maslov du chemin, dépendant du lagrangien de référence). Si l'on déforme le chemin par homotopie en respectant les extrêmités l_0 et l_1, l'indice est inchangé. Cela revient à dire que l'indice est en fait défini sur $\tilde{\Lambda} \times \tilde{\Lambda}$, en posant $Mas(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2) = Mas(l_t)$, où l_t est la projection sur Λ d'un chemin quelconque tracé sur $\tilde{\Lambda}$ et joignant $\tilde{l}_1$ à $\tilde{l}_2$. Une variante de cette définition a été proposée par J-M. Souriau : elle associe plus directement un indice $m(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2)$ à tout couple de points de $\tilde{S} \times \tilde{S}$. L'indice de Souriau a l'avantage de ne pas dépendre d'un lagrangien de référence, d'être invariant sous l'action du groupe symplectique et d'être antisymétrique en les deux arguments, . On montre ensuite que, si $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$ sont trois points de $\tilde{\Lambda}$, alors la quantitié $m(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2) + m(\tilde{l}_2, \tilde{l}_3) + m(\tilde{l}_3, \tilde{l}_1)$ ne dépend que des projections l_1, l_2, l_3 de $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3$ sur Λ. La fonction ainsi définie sur $\Lambda \times \Lambda \times \Lambda$ est essentiellement ce que nous avons appelé l'indice triple de Maslov. Nous avons quelque peu simplifié l'histoire, puisque la mise au point précise des concepts et résultats exposés (notamment pour couvrir les cas non-transverses) a nécessité, au-delà du travail de V. Maslov, des contributions de V. Arnold, J-M. Souriau, J. Leray, pour ne citer que les principaux. Dans ces démarches, la démonstration de la condition de cocyle est aisée, car la fonction à deux points apparaît comme une primitive du cocycle au sens des théories cohomologiques [2]

[2] Ce point de vue peut d'ailleurs également se généraliser au cadre géométrique que nous exposerons au paragraphe 5 (cf [5]).

Lorsque l'espace E est de dimension 2, il n'y a, à un scalaire non nul près, qu'une seule forme symplectique, et elle est donnée par le déterminant (par rapport à une base de référence), toute droite de E est un lagrangien, et le groupe symplectique coïncide avec le groupe $SL_2(\mathbb{R})$. Dans ce cas l'indice triple de Maslov coïncide avec l'indice d'orientation défini au premier paragraphe.

3 L'invariant d'Elie Cartan

En 1932 (cf [3]), Elie Cartan (à l'âge de 63 ans) publie un court article où il introduit un invariant pour les triplets de points sur ce qu'il appelle l' "hypersphère", c'est-à-dire la sphère-unité de $\mathbb{C}^2$. L'invariance s'entend pour la géométrie hypersphérique, c'est-à-dire la géométrie complexe-conforme de cette sphère. Plus précisément, soit

$$S = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1]\right\} .$$

Pour voir l'action du groupe conforme, il est agréable de disposer d'une autre réalisation de S. Pour cela, considérons $\mathbb{C}^3$ muni de la forme hermitienne

$$h(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2) = -|\zeta_0|^2 + |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 ,$$

qui est de signature $(2, 1)$. La correspondance

$$z = (z_1, z_2) \longmapsto D_z = \mathbb{C}(1, z_1, z_2)$$

associe à tout point de S une droite isotrope de $\mathbb{C}^3$ (relativement à la forme h), et on vérifie facilement que c'est une bijection entre S et l'ensemble Σ des droites isotropes de $\mathbb{C}^3$. De plus Σ peut être regardée comme une sous-variété du projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$, et la bijection précédente est un difféomorphisme de S sur Σ. Maintenant, une isométrie pour la forme h transforme une droite isotrope en une autre droite isotrope, et donc le groupe $G = SU(1, 2)$ opère sur Σ. D'après le théorème de Witt, on peut même affirmer que l'action est transitive. Par transport de structure, on obtient une action (dite conforme) de G sur S, qui est donnée par des transformations homographiques complexes.

Considérons maintenant trois points de S, deux à deux distincts, ou ce qui revient au même trois droites isotropes D_1, D_2, D_3 deux à deux distinctes. Choisissons des vecteurs générateurs v_1, v_2, v_3 de chacune de ces droites, et considérons la quantité

$$H(v_1, v_2, v_3) = h(v_1, v_2)h(v_2, v_3)h(v_3, v_1) .$$

Si on modifie les générateurs, on remplace v_1 par $\lambda_1 v_1$, où $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$, et de même v_2 par $\lambda_2 v_2$, et v_3 par $\lambda_3 v_3$. On a

$$H(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3) = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 |\lambda_3|^2 H(v_1, v_2, v_3) .$$

Remarquons par ailleurs que, pour $i \neq j$, $h(v_i, v_j) \neq 0$, sinon le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}v_i \oplus \mathbb{C}v_j$ serait un plan totalement isotrope pour la forme h, ce qui est impossible (car la dimension d'un tel sous-espace est au plus 1). Donc, en posant

$$j(D_1, D_2, D_3) = \frac{H(v_1, v_2, v_3)}{|H(v_1, v_2, v_3)|}$$

on définit un nombre complexe de module 1 qui ne dépend pas des vecteurs directeurs (v_j) choisis, mais uniquement de D_1, D_2 et D_3. De plus il est clairement invariant par le groupe G, et satisfait une propriété d'antisymétrie[3] par permutation des trois arguments. Enfin (ceci n'est pas dans le travail d'Elie Cartan, mais la vérification est facile) cet invariant satisfait l'analogue multiplicatif de la relation de cocycle, à savoir

$$j(D_1, D_2, D_3) = j(D_1, D_2, D_4)\ j(D_2, D_3, D_4)\ j(D_3, D_1, D_4)$$

pour tout quadruplet de droites isotropes (D_1, D_2, D_3, D_4) deux à deux distinctes. Nous ne sommes toutefois plus dans la situation presque 3-homogène, puisqu'on vérifie facilement que cet invariant a pour valeur un nombre complexe de module 1 arbitraire. Il y a donc une famille continue d'orbites dans $\Sigma \times \Sigma \times \Sigma$ sous l'action de G.

Les travaux d'Elie Cartan sont très abondants, et beaucoup de ses idées ont été comprises et réellement assimilées bien après leur publication. On sait que c'est le cas de ses travaux sur les algèbres de Lie de dimension infinie de champs de vecteurs, mais il en est de même de cet article de 1932. Son invariant n'était guère connu que des spécialistes de géométrie hyperbolique complexe (voir [10]). A notre connaissance, aucune tentative d'extension (au-delà de l'extension évidente à la sphère-unité de $\mathbb{C}^n$) n'a été envisagée.

4 Un cadre géométrique commun : les domaines bornés symétriques et leur frontière de Shilov

D'un point de vue géométrique, il existe un point commun entre la lagrangienne (sous l'action du groupe symplectique) et la sphère-unité de $\mathbb{C}^2$ (sous l'action du groupe conforme $SU(1,2)$) : ce sont deux exemples de *frontière distinguée d'un domaine borné symétrique* (sous l'action du groupe des difféomorphismes holomorphes du domaine).

Soit $\mathcal{D}$ un ouvert $\mathbb{C}^N$, borné, que nous supposerons de plus connexe. Il existe une métrique hermitienne, appelée *métrique de Bergmann*, qui présente l'intérêt que tout difféomorphisme holomorphe de $\mathcal{D}$ est automatiquement une isométrie pour cette métrique. Un tel domain borné est dit *symétrique* si, pour tout point z de $\mathcal{D}$, la symétrie géodésique s_z (qui est localement bien définie) s'étend en une isométrie holomorphe de $\mathcal{D}$. En général, s_z ne s'étend pas globalement à $\mathcal{D}$, et n'a pas de raison d'être une isométrie (même locale). Losque $\mathcal{D}$ est un domaine symétrique, ce que nous supposerons désormais, on dispose donc de nombreuses

[3]C'est une conséquence des égalités $\frac{h(v_2,v_1)}{|h(v_2,v_1)|} = \overline{\frac{h(v_1,v_2)}{|h(v_1,v_2)|}} = \left(\frac{h(v_1,v_2)}{|h(v_1,v_2)|}\right)^{-1}$.

isométries holomorphes de $\mathcal{D}$. Il en résulte assez facilement que le groupe des difféomorphismes holomorphes de $\mathcal{D}$ est transitif sur $\mathcal{D}$, et c'est même vrai de sa composante connexe neutre, que nous noterons dorénavant G. Le domaine $\mathcal{D}$ sous l'action du groupe G est un cas particulier d'*espace riemannien symétrique de type non compact*. Plus précisément fixons une origine $o \in \mathcal{D}$, et soit K le stabilisateur de o dans G. Alors $\mathcal{D} \simeq G/K$, le groupe G est semi-simple, K est un sous-groupe compact maximal de G, l'application

$$g \longmapsto s_o \circ g \circ s_o$$

est une involution (dite de Cartan) de G, dont l'ensemble des points fixes est exactement K. L'espace $\mathcal{D}$ possède en plus une structure complexe, compatible avec l'action de G, on dit que c'est un espace *hermitien symétrique*. Sans entrer dans les détails, il y a une réciproque, puisque tout espace hermitien symétrique de type non compact peut être réalisé comme domaine borné symétrique (plongement d'Harish Chandra). Ces domains bornés symétriques ont en fait une structure très riche, que nous ne pouvons pas présenter dans le cadre de cet exposé (on pourra consulter [9], [11] ou [13] pour un exposé général sur ces domaines) . On montre en particulier qu'il existe une réalisation biholomorphiquement équivalente de $\mathcal{D}$ comme boule-unité ouverte pour une norme de Banach complexe sur $\mathbb{C}^N$. Donnons quelques exemples, liés à notre propos principal.

Le premier exemple est la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour la norme hilbertienne habituelle $|z| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| < 1\} \; .$$

Le groupe des difféomorphismes holomorphes du domaine correspondant est le groupe $PSU(1, n)$, dont l'action sur $\mathcal{D}$ se décrit comme nous l'avons fait au paragraphe 3 (dans le cas $n = 2$). On introduit la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^{n+1}$ donnée par

$$h(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = -|\zeta_0|^2 + |\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2 \; .$$

L'application $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \longmapsto D_z = \mathbb{C}(1, z_1, z_2, \dots, z_n)$ associe à tout point de $\mathcal{D}$ une droite vectorielle D_z telle que la restriction de h à D_z soit définie négative. L'application $z \longmapsto D_z$ est bijective de $\mathcal{D}$ sur l'ouvert du projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ formé des droites D telles que $h_{|D} \ll 0$. On transmute alors l'action naturelle de $SU(1, n)$ sur l'ensemble de ces droites en une action (par homographies complexes) sur $\mathcal{D}$.

Notre deuxième exemple est appelé le *disque de Siegel*. On considère l'espace vectoriel complexe $Sym(r, \mathbb{C})$ des matrices symétriques complexes $r \times r$, muni de la norme opérateur. La boule-unité correspondante est le domaine

$$\mathcal{D} = \{z \in Sym(r, \mathbb{C}) \mid |z|_{op} < 1\} = \{z \in Sym(r, \mathbb{C}) \mid 1 - zz^* \gg 0\} \; .$$

Le groupe des difféomorphismes holomorphes de $\mathcal{D}$ se décrit bien dans une autre réalisation de ce domaine. Soit $\mathbb{E} = \mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^r$ muni de la forme symplectique complexe

$$\omega((\xi_+,\xi_-),(\eta_+,\eta_-)) = \xi_+^t\eta_- - \xi_-^t\eta_+ \ .$$

Considérons la conjuguaison σ de $\mathbb{E}$ donnée par

$$\sigma(\xi_+,\xi_-) = (\overline{\xi}_-,\overline{\xi}_+) \ ,$$

qui satisfait l'identité

$$\omega(\sigma\xi,\sigma\eta) = -\overline{\omega(\eta,\xi)}$$

pour tout $\xi,\eta \in \mathbb{E}$. Soit h la forme hermitienne donnée par

$$h(\xi,\eta) = \omega(\xi,\sigma\eta)$$

de sorte que (en notant pour $\xi \in \mathbb{C}^r$ $h(\xi) = h(\xi,\xi)$)

$$h\big((\xi_+,\xi_-)\big) := h\big((\xi_+,\xi_-),(\xi_+,\xi_-)\big) = |\xi_+|^2 - |\xi_-|^2 \ .$$

À tout $a \in Sym(\mathbb{C},r)$ on associe son graphe

$$W_a = \{(\xi_+,a\xi_+),\xi_+ \in \mathbb{C}^r\} \ .$$

Comme a est symétrique, on voit que W_a est un sous-espace vectoriel complexe totalement isotrope pour la forme ω, et comme il est de dimension r, c'est un lagrangien de $\mathbb{E}$. Si maintenant $a \in \mathcal{D}$, alors $|a\xi_+|^2 < |\xi_+|^2$ pour $\xi \in \mathbb{C}^r, \xi \neq 0$, et donc la restriction de h à W_a est définie-positive. L'ensemble des lagrangiens de $\mathbb{E}$ est une sous-variété complexe de la Grassmannienne des r-sous-espaces de $\mathbb{E} \simeq \mathbb{C}^{2r}$, et le sous-ensemble $\mathcal{L}^+$ des lagrangiens W tel que la restriction de h à W est définie-positive en est clairement un ouvert. On vérifie que l'application $a \longmapsto W_a$ est un difféomorphisme biholomorphe de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{L}^+$. Soit $E = \mathbb{E}^\sigma$ l'espace vectoriel réel des points fixes de σ. Par restriction, $\frac{1}{i}\omega(v,w)$ est une forme symplectique réelle sur E. Le groupe symplectique correspondant $G = Sp(E)$ opère (par extension $\mathbb{C}$-linéaire) sur $\mathbb{E}$, en conservant à la fois la forme ω et la forme h. Il s'en suit qu'il opère (holomorphiquement) sur le disque de Siegel.

Revenons à la situation générale. Introduisons la *frontière de Shilov* S du domaine (borné symétrique) $\mathcal{D}$: c'est le plus petit fermé (son existence est un théorème) contenu dans la frontière topologique $\partial\mathcal{D}$, pour laquelle le principe du maximum du module pour les fonctions holomorphes est encore vrai. Pour le cas de la boule-unité de $\mathbb{C}^n$, on montre facilement que la frontière de Shilov coïncide avec la frontière topologique qui n'est autre que la sphère unité de $\mathbb{C}^n$. Pour le disque de Siegel, dès que $n \geq 2$, la frontière distinguée ne coïncide plus avec la frontière topologique. C'est la sous-variété de $Sym(r,\mathbb{C})$ donnée par

$$S = \{z \in Sym(r,\mathbb{C}) \mid z^*z = 1_r\} \ .$$

Dans l'autre réalisation du disque de Siegel, la frontière de Shilov consiste en les sous-espaces lagrangiens W de $\mathbb{E}$, tels que la restriction de h à W est identiquement 0. Un tel sous-espace est stable par σ et est exactement le complexifié d'un lagrangien de E. Cela fournit un isomorphisme de S avec la lagrangienne de E.

On dispose donc désormais d'un cadre géométrique qui est commun aux deux exemples précédents : l'hypersphère d'E. Cartan est la frontière de Shilov de la boule-unité complexe, et la lagrangienne réelle est la frontière de Shilov du disque de Siegel. Le décor est en place, E. Cartan et V. Maslov peuvent se rencontrer...

5 Quand V. Maslov et E. Cartan se rencontrent

Fixons donc un domaine borné symétrique $\mathcal{D}$, G la composante connexe neutre du groupe des difféomorphismes holomorphes de $\mathcal{D}$, et soit S la frontière de Shilov de $\mathcal{D}$. Chaque difféomorphisme g de $\mathcal{D}$ s'étend à un voisinage de $\overline{\mathcal{D}}$ (dépendant de g), de sorte que l'action de G s'étend à S. On cherche à construire un invariant pour l'action de G sur $S \times S \times S$. La stratégie est la suivante : construisons un invariant $A(z_1, z_2, z_3)$ pour l'action de G dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, puis considérons pour $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in S \times S \times S$

$$\lim_{z_j \to \sigma_j} A(z_1, z_2, z_3) \ .$$

Il est *a priori* facile de construire des invariants dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, puisque la géométrie riemannienne en fournit des quantités, mais bien sûr il n'y a pas de limite en général.

La métrique de Bergmann dont nous avons muni le domaine $\mathcal{D}$ possède une propriété supplémentaire : elle est *kählerienne*. Autrement dit, elle possède une forme différentielle réelle de degré 2, invariante par G, appelée forme de Kähler, notée Ω, naturellement construite à partir de la métrique hermitienne et dont la propriété essentielle est qu'elle est *fermée*.

La métrique introduite sur $\mathcal{D}$ étant à courbure négative, on sait qu'il existe un unique arc géodésique joigant deux points donnés de $\mathcal{D}$. Ainsi trois points z_1, z_2, z_3 de $\mathcal{D}$ déterminent un triangle géodésique $T(z_1, z_2, z_3)$ orienté. Considérons une surface Σ dans $\mathcal{D}$ dont le bord orienté est $T(z_1, z_2, z_3)$. La quantité

$$A(z_1, z_2, z_3) = \int_\Sigma d\Omega$$

(*aire symplectique* du triangle géodésique) ne dépend pas de la surface choisie Σ, puisque la forme Ω est fermée, et définit donc bien une fonction de (z_1, z_2, z_3). Comme la notion de géodésique et la forme de Kähler sont invariantes par l'action de G, la fonction A est bien invariante par l'action de G. Il se trouve qu'il est possible de calculer explicitement cette fonction (cf [8], [7]), l'expression faisant intervenir comme ingrédient essentiel le *noyau de Bergmann* du domain $\mathcal{D}$.

A partir de l'expression obtenue, le passage à la limite est aisée dans le cas générique, c'est-à-dire lorsque les points $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont mutuellement transverses. La transversalité de deux points σ et τ de S a de nombreuses définitions équivalentes, mais la plus parlante est sans doute la définition géométrique suivante :

σ et τ sont dits *transverses* s'il existe une géodésique γ_t de $\mathcal{D}$ telle que

$$\sigma = \lim_{t\to-\infty} \gamma_t, \quad \tau = \lim_{t\to+\infty} \gamma_t \ .$$

Dans le cas générique, on a donc une généralisation du triangle idéal géodésique et on peut passer à la limite sans restriction sur l'approche (cf [6]) pour définir son aire symplectique. Par contre, la situation est plus délicate lorsque deux des points ne sont pas transverses, puisqu'il faut restreindre l'approche à la frontière. On pose en définitive

$$\iota(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\pi} \lim_{z_j\to\sigma_j} A(z_1, z_2, z_3) \ ,$$

où la limite doit être entendue au sens d'une limite Γ-radiale (voir [4] pour une définition complète de cette notion de convergence).

La fonction ainsi construite possède les propriétés attendues : invariance par le groupe G, antisymétrie par permutation des trois variables, propriété de cocycle. Cette dernière propriété est en particulier la conséquence immédiate de la propriété analogue pour la fonction $A(z_1, z_2, z_3)$, qui résulte immédiatement du fait que la forme de Kähler est fermée.

Dans les deux cas particuliers présentés, on retrouve essentiellement les invariants précédents. Si $\mathcal{D}$ est la boule-unité de $\mathbb{C}^n$, et S la sphère-unité, l'invariant construit est essentiellement une détermination de l'argument de l'invariant d'E. Cartan. Le disque de Siegel fait partie des domaines bornés symétriques *de type tube* : ce sont ceux qui sont holomorphiquement équivalents à un tube, c'est-à-dire un domaine (non borné) de la forme $\mathbb{R}^N + i\Gamma$, où Γ est un cône convexe propre ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ces domaines sont également caractérisés par le fait que leur frontière de Shilov S est une sous-variété totalement réelle, ou encore que S est de dimension réelle égale à la dimension complexe de $\mathcal{D}$. Cela correspond également au fait qu'il y a un nombre fini d'orbites ouvertes dans $S \times S \times S$ sous l'action de G. Dans ce cas, on démontre que l'invariant construit ne prend que des valeurs entières.

L'invariant ainsi construit est en relation avec le fait que le groupe G possède une 2-cohomologie non triviale. En effet, fixons un point-base o dans S, et posons pour g_1, g_2

$$f(g_1, g_2) = \iota\big(o, g_1(o), g_2g_1(o)\big) \ .$$

Alors f satisfait la relation suivante (dite de 2-cocycle) :

$$\delta(f)(g_1, g_2, g_3) := f(g_2, g_3) - f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2g_3) - f(g_1, g_2) = 0 \ ,$$

puisqu'elle se traduit par la relation

$$\iota(o,g_2(o),g_2g_3(o))-\iota(o,g_1g_2(o),g_1g_2g_3(o))+\iota(o,g_1(o),g_1g_2g_3(o))-\iota(o,g_1(o),g_1g_2(o))=0\ .$$

L'invariance de l'indice ι par G implique

$$\iota(o,g_2(o),g_2g_3(o))=\iota(g_1(o),g_1g_2(o),g_1g_2g_3(o))\ .$$

Posant $m_1=o, m_2=g_1(o), m_3=g_1g_2(o), m_4=g_1g_2g_3(o)$, on voit que la relation de cocycle $\delta(f)=0$ équivaut à l'identité

$$\iota(m_2,m_3,m_4)-\iota(m_1,m_3,m_4)+\iota(m_1,m_2,m_4)-\iota(m_1,m_2,m_3)=0\ ,$$

qui est une version de l'identité de cocycle pour l'indice ι (en tenant compte de l'antisymétrie).

On trouvera dans [7] quelques propriétés géométriques supplémentaires de cet invariant. Il a par ailleurs été utilisé en liaison avec l'étude des représentations du groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte dans le groupe d'isométries d'un espace hermitien symétrique (voir [2]).

Références

[1] Barge J. & Ghys E., *Cocycles d'Euler et de Maslov*, Math.Ann. **294** (1991) 235–265

[2] Burger M., Iozzi A. & Wienhard A., *Surface group representations with maximal Toledo iunvariant*, prépublication.

[3] Cartan E., *Sur le groupe de la géométrie hypersphérique*, Comm. Math. Helv. **4** (1932), 158–171.

[4] Clerc J-L., *An invariant for triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain*, à paraître in Communications in analysis and geometry

[5] Clerc J-L. & Koufany K., *Une primitive de l'indice de Maslov généralisé*, Mathematische Annalen **337** (2007), 91–138.

[6] Clerc J-L. & Ørsted B., *The Maslov index revisited*, Transformation Groups **6** (2001), 303-320.

[7] Clerc J-L. & Ørsted B., *The Gromov norm of the Kaehler class and the Maslov index*, Asian J. Math. **7** (2003), 269-296.

[8] Domic A. & Toledo D., *The Gromov norm of the Kaehler class of symmetric domains*, Math. Ann. **276** (1987) 425-432.

[9] Faraut J. et al. *Analysis and Geometry on Complex homogeneous domains*, Progress in Mathematics, **185**, Birkhäuser Verlag, Boston (2000).

[10] Goldman W.M., *Complex hyperbolic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford (1999).

[11] Helgason, S. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics **34**, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).

[12] Lion G. and Vergne M., *The Weil representation, Maslov index and Theta series*, Progress in Mathematics **6**, Birkhauser, Boston (1980).

[13] Satake I., *Algebraic structures of symmetric domains*, Kanô Memorial Lectures **4**, Iwanami Shoten and Princeton University Press, Princeton (1980).