

ANALYSE SUR LES VARIÉTÉS. — *La signification cohomologique de l'indice trilatère d'un triplet lagrangien et de l'indice de Maslov.* Note (*) de Albert Crumeyrolle, transmise par M. Jean Leray.

On introduit l'indice d'inertie trilatère qui s'identifie à celui de Leray quand les lagrangiens sont 2 à 2 transverses. Cet indice définit un cocycle. La décomposition de l'indice trilatère à l'aide de l'indice de Maslov traduit simplement la finesse d'un faisceau.

Let us consider three lagrangian spaces in a symplectic space. We define an index called "trilateral index" which is the Leray index when the lagrangians are transversal two and two. Trilateral index is a cocycle. Its decomposition by Maslov index, simply, is the classical property of a fine sheaf cohomology.

1° E est un espace vectoriel réel de dimension $2n$, muni d'une forme symplectique F .

LEMME 1. — *Soient trois espaces lagrangiens L, L', L'' tels que $L \cap L' = L \cap L''$. Alors il existe σ , en général non unique, appartenant au groupe symplectique $\text{Sp}(2n, \mathbf{R})$ qui laisse fixe tous les éléments de L et applique L' sur L'' .*

Soit $\{e_\alpha, e_{\beta^*}\}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$, une base symplectique de E dont les vecteurs (e_α) sont dans L . Il est immédiat de voir qu'un tel σ s'exprime par

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma(e_\alpha) = e_\alpha, \\ \sigma(e_{\alpha^*}) = a_{\alpha^*}^\beta e_\beta + e_{\alpha^*}, \quad \text{avec } a_{\alpha^*}^\beta = a_{\beta^*}^\alpha. \end{cases}$$

Il est loisible de supposer que les e_α ont été choisis de manière que $(e_1, e_2, \dots, e_\lambda)$ engendrent $L \cap L'$. Alors $e_{\lambda+1}, \dots, e_n, e_{1^*}, \dots, e_{\lambda^*}$ engendrent un lagrangien L_1 avec $L_1 \cap L' = L_1 \cap L'' = 0$. Soit L_2 le lagrangien de base $(e_1, e_2, \dots, e_\lambda, e_{(\lambda+1)^*}, \dots, e_{n^*})$, il est immédiat que

$$E = L_1 \oplus L' = L_1 \oplus L'' = L_1 \oplus L_2 \quad \text{et} \quad L \cap L' = L \cap L'' = L \cap L_2.$$

Or il existe une transformation symplectique θ qui conserve L_1 point par point, les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_\lambda$, et envoie L' sur L_2 .

Si θ' envoie de la même manière L'' sur L_2 , alors $\sigma = \theta'^{-1} \circ \theta$.

Si $L \cap L'$ est non nul, on voit que σ n'est pas unique. *Par contre si $L \cap L' = L \cap L'' = 0$, (1) montre l'unicité et établit une correspondance bijective entre l'ensemble des lagrangiens transverses à L et l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$.*

2° Avec les hypothèses de lemme 1, $Q = F(., \sigma(.))$ est une forme quadratique sur L' . Il est toujours possible de choisir (e_α, e_{β^*}) de manière que :

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma(e_\alpha) = e_\alpha, \\ \sigma(e_{\alpha^*}) = t_\alpha e_\alpha + e_{\alpha^*}, \quad t = 0, 1 \text{ ou } -1, \end{cases}$$

Il faut observer que la signature de Q dépend du choix de σ , si $L \cap L' = L \cap L'' \neq 0$.

Si $L \cap L' = L \cap L'' = 0$, il existe $\sigma \in \text{Sp}(2n, \mathbf{R})$ unique, qui conserve L point par point et envoie L' sur L'' .

DÉFINITION 1. — Si $L \cap L' = L \cap L'' = 0$, et si $\sigma \in \text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ conserve L point par point et envoie L' sur L'' , la forme quadratique $x \rightarrow F(x, \sigma(x))$, $x \in L'$, admet une signature notée : $\text{Inert}(L', L, L'')$. La signature est le nombre de signes $(-)$ dans la décomposition de Sylvester. Inert est l'indice d'inertie de Leray ⁽²⁾.

(2) montre que si $r = \dim L' \cap L''$, on peut définir :

$$(3) \quad \text{Inert}(L'', L, L') = -\text{Inert}(L', L, L'') + (n - r).$$

L' et L'' étant transverse à L fixé, le choix de (e_α, e_{β^*}) identifie L' et L'' à des matrices symétriques.

Si le triplet (L', L, L'') se déforme continûment, L' et L'' restant transverses à L et $\dim(L' \cap L'')$ demeurant constante, $\text{Inert}(L', L, L'')$ garde une valeur constante.

Observons que si $r = 0$, $e_{\alpha^*} \rightarrow e_{\beta^*}$, $e_\alpha \rightarrow -e_\alpha - t_\alpha e_{\beta^*}$, définit une transformation symplectique qui conserve L' point par point et envoie L sur L'' ; donc quand

$$L' \cap L'' = L \cap L' = L \cap L'' = 0,$$

on peut poser :

$$\text{Inert}(L, L', L'') = -\text{Inert}(L', L, L'') + n$$

et Inert est invariant par permutation circulaire sur L, L', L'' .

Si $L \cap L' = L \cap L'' = 0$, avec $L' \cap L'' \neq 0$, nous poserons

$$(4) \quad \begin{cases} \text{Inert}(L, L', L'') = -\text{Inert}(L', L, L'') + n \\ \text{et} \\ \text{Inert}(L', L'', L) = -\text{Inert}(L', L, L'') + n. \end{cases}$$

On notera que notre définition de Inert n'est plus alors identique à celle de Leray, à moins que les trois lagrangiens ne soient deux à deux transverses : l'indice que nous venons de définir sera appelé indice d'inertie trilatère.

3° Indice d'inertie trilatère d'un triplet ordonné quelconque de lagrangiens.

LEMME 2. — Il existe un lagrangien M transverse simultanément à trois lagrangiens L, L', L'' donnés.

Selon Souriau ⁽³⁾ on peut identifier un lagrangien L à l'image de $a \in U(n)$ par $a \rightarrow a \bar{a}^{-1} = I$ et L transverse à M équivaut à $(I - m)$ inversible, si la matrice m représente M . Le lemme est alors immédiat; observons qu'il y a une infinité de choix possibles pour M . (Il serait aussi possible de donner une démonstration indépendante à l'aide des spineurs symplectiques).

LEMME 3. — Si L_1, L_2, L_3, L_4 sont des lagrangiens tels que L_2 et L_3 soient transverses aux trois autres :

$$(5) \quad \text{Inert}(L_1, L_2, L_3) - \text{Inert}(L_1, L_2, L_4) + \text{Inert}(L_1, L_3, L_4) - \text{Inert}(L_2, L_3, L_4) = 0.$$

Cela résulte des remarques faites au 2°.

Si maintenant L_1, L_2, L_3 sont des lagrangiens quelconques, nous choisissons M transverse à chacun d'eux, alors conformément à (5) nous posons :

$$(6) \quad \text{Inert}(L_1, L_2, L_3) = \text{Inert}(L_1, L_2, M) - \text{Inert}(L_1, L_3, M) + \text{Inert}(L_2, L_3, M).$$

Comme les trois indices d'inerties du deuxième membre sont constants quand M varie en restant transverse à L_1, L_2, L_3 fixés, la valeur du premier membre ne dépend pas du choix de M . Il est rappelé que $\text{Inert}(L_1, L_2, M) = -\text{Inert}(L_1, M, L_2) + n$, où les termes du deuxième membre sont calculés selon la définition 1.

En général l'indice trilatère n'est pas invariant par permutation circulaire. Par contre (6) montre que 4 lagrangiens quelconques L_1, L_2, L_3, L_4 satisfont une relation de cocyclicité.

4° L'indice trilatère et la décomposition d'un élément du groupe symplectique en produit de transvections.

Soit σ l'élément unique qui conserve L point par point et envoie L' sur L'' , L' et L'' transverses à L .

Introduisons ici l'algèbre de Clifford symplectique ⁽¹⁾. Au-dessus de σ on peut déterminer $\gamma \in G_s$ groupe de Clifford symplectique, modulo un scalaire, tel que

$$p(\gamma) = \sigma \text{ par projection : } p(\gamma)(x) = \gamma x \gamma^{-1}, \quad x \in E.$$

LEMME 4. — L'ensemble des éléments $\sigma \in \text{Sp}(2n, \mathbf{R})$ qui conservent L point par point s'identifie à l'ensemble $p(\exp(\sqrt{V} L))$.

Ce lemme résulte de la formule (1) et des remarques suivantes :

si $p(\gamma) = \sigma$ conserve L point par point il se factorise en produit de transvections symplectiques;

si $a \in L$:

$$\exp \frac{ta^2}{2} x \exp \left(-\frac{ta^2}{2} \right) = x + F(a, x) ta, \quad t \in \mathbf{R}^*,$$

et on peut choisir a de manière que $t = \pm 1$.

Prenant

$$\gamma = \prod_i \exp \frac{t_i(a_i)^2}{2} = \exp \left(\sum_i \frac{t_i(a_i)^2}{2} \right), \quad a_i \in L, \quad t_i = \pm 1,$$

un choix convenable des a_i, t_i permet d'atteindre tout élément σ défini par la formule (1). En particulier on voit que l'on peut choisir la base symplectique (e_α, e_{β^*}) de manière que σ se traduise par la formule (2) :

$$\gamma = \prod_\alpha \exp \left(\frac{t_\alpha (e_\alpha)^2}{2} \right),$$

ainsi : tout $\gamma \in G_s$ qui conserve L point par point peut se factoriser en

$$(7) \quad \gamma = \prod_\alpha \exp \frac{t_\alpha (e_\alpha)^2}{2}, \quad t_\alpha = \pm 1;$$

la suite des (t_α) est intrinséquement attachée à γ et si $L' \oplus L = E$, $L'' = \gamma(L')$, la signature de cette suite est l'indice d'inertie de Leray : $\text{Inert}(L', L, L'')$.

5° Considérons une variété réelle V paracompacte, de dimension $2n$, à structure presque symplectique et le préfaisceau $\mathcal{P}_Z$ des applications quelconques d'ouverts de V dans $\mathbf{Z}$. Si Pr et Fs désignent respectivement les foncteurs « préfaisceau » et « faisceau »,

construisons $Fs \mathcal{P}_Z = \mathcal{F}_Z$; selon un résultat classique ce faisceau est fin, donc compte tenu de la paracompacité de V :

$$(8) \quad H^q(V, \mathcal{F}_Z) \simeq H^q(V, \text{Pr } Fs \mathcal{P}_Z) \simeq H^q(V, \mathcal{P}_Z) = 0, \quad \text{pour } q \geq 1.$$

Si on introduit un recouvrement de V par des ouverts U_α domaines de définition de sections lagrangiennes $L_\alpha : x \in U_\alpha \rightarrow L_\alpha(x)$, suffisamment petits pour être munis de sections $\lambda_\alpha : x \rightarrow \lambda_\alpha(x)$ dans le revêtement de la grassmannienne lagrangienne, on peut définir un cocycle par

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow \text{Inert}(L_\alpha(x), L_\beta(x), L_\gamma(x)),$$

encore noté $\text{Inert}(\lambda_\alpha(x), \lambda_\beta(x), \lambda_\gamma(x))$.

Mais en raison de (8) ce cocycle est un cobord, il existe donc m :

$$x \in U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow m(\lambda_\alpha(x), \lambda_\beta(x)) \in \mathbb{Z}$$

tel que

$$\text{Inert}(\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma) = m(\lambda_\alpha, \lambda_\beta) + m(\lambda_\beta, \lambda_\gamma) - m(\lambda_\alpha, \lambda_\gamma).$$

Ainsi : la décomposition du cocycle d'inertie au moyen de l'indice de Maslov, donnée par Leray, résulte de la trivialité de la cohomologie $H^q(V, \mathcal{P}_Z)$, pour $q \geq 1$.

Introduisant les divers revêtement du groupe symplectique et de la grassmannienne lagrangienne, il est évident qu'on obtient des résultats analogues avec des indices mod q , $q \in \mathbb{Z}$.

(*) Séance du 14 mars 1977.

(¹) A. CRUMEYROLLE, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 1689.

(²) J. LERAY, *R.C.P.*, 25, 18, Strasbourg, 1973.

(³) J. M. SOURIAU, *Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications Group Theoretical Methods in Physics* n° 50 (Springer-Verlag) p. 117.

Université de Toulouse III,
118, route de Narbonne,
31077 Toulouse.