ANALYSE GLOBALE SUR LES VARIÉTÉS. — *Le cocycle d'inertie trilatère d'une variété à structure presque symplectique et la première classe de Chern.* Note (*) de **Albert Crumeyrolle**, présentée par M. Jean Leray.

On montre que la première classe de Chern d'une variété presque symplectique est représentée localement par le cocycle d'inertie d'un triplet de lagrangiens deux à deux transverses. On donne quelques applications immédiates.

We prove that the first Chern class of an almost symplectic manifold, consequently also almost-complex, is locally represented by the inertial cocycle of a lagrangian triplet with transversal elements two and two. We give some immediate applications.

1. PRÉAMBULE ET RAPPELS. — Soit une variété V , réelle, paracompacte, de dimension $n = 2r$, à structure presque symplectique. La donnée d'une telle variété équivaut à celle d'une structure presque complexe, car on sait qu'étant donnée une 2-forme extérieure F de rang $2r$, on peut toujours construire, modulo une homotopie, à partir d'une métrique riemannienne arbitraire une autre métrique échangeable avec F et par suite une structure hermitienne admettant F comme 2-forme fondamentale.

De manière indépendante soit un fibré en droites complexes (F.D.C.) au-dessus d'une variété V , les $a_{\alpha\beta}$ étant les fonctions de transitions pour un système d'ouverts de trivialisations (U_α) formant un atlas contractile, posant

$$f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi} \log a_{\alpha\beta},$$

alors $c_{\alpha\beta\gamma} = f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} - f_{\alpha\gamma}$, définit un 2-cocycle de Čech à valeurs dans $\mathbf{Z}$. A l'élément de $H^1(V, \mathbf{C}^*)$ qui définit le F.D.C. on peut associer biunivoquement un élément de $H^2(V, \mathbf{Z})$. En particulier s'il s'agit du F.D.C. associé à un fibré complexe ξ , au moyen des déterminants des matrices unitaires de changements de trivialisations locales, l'élément de $H^2(V, \mathbf{Z})$ obtenu est la première classe de Chern $c_1(\xi)$ de ξ .

2. Sur la variété V du préambule, dont le fibré tangent est muni de la structure complexe J , considérons un recouvrement par des ouverts (U_α) , domaines de définition de sections lagrangiennes réelles : $x \rightarrow (L_\alpha)_x$. Munissons $(L_\alpha)_x$ d'un repère orthogonal $\{\xi_\alpha\}_x$ alors le système des sections locales $(\xi_\alpha, J\xi_\alpha)$ détermine au-dessus de chaque (U_α) un repère de $T(V)$. Envoyant les $(\xi_\alpha, J\xi_\alpha)$, respectivement, sur les $(\xi_\beta, J\xi_\beta)$, quand $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, on obtient un cocycle à valeurs dans $U(r, \mathbf{C})$; les $u_{\alpha\beta}(x)$ étant fonctions de transitions en $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, posons

$$a_{\alpha\beta}(x) = \det u_{\alpha\beta}(x)$$

et introduisons comme plus haut le cocycle des $c_{\alpha\beta\gamma}$, que nous appellerons aussi *trilatère*.

Les considérations qui suivent sont d'abord purement algébriques. Soient L, L', L'' des lagrangiens deux à deux transverses. Il est possible de munir L et L' de bases $\{(e_\alpha), (e_{\beta^*})\}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, constituant une base symplectique adaptée à la somme directe $E = L \oplus L'$, et L'' d'une base $\{f_\alpha\}$ telle que

$$f_\alpha = e_\alpha + t_\alpha e_{\alpha^*}, \quad t_\alpha \neq 0,$$

où la signature de la suite des t_α : $\text{sgn}(t_\alpha)$ représente l'indice d'inertie de Leray, Inert (L, L', L'') $[(^3), (^1 \alpha)]$. L'indice d'inertie est invariant par transformation symplectique, on peut donc supposer que l'on fait une telle transformation de manière que $\{e_\alpha, e_{\beta^*}\}$ constitue une base orthogonale. Alors

$$\left\{ F_\alpha = \frac{e_\alpha + t_\alpha e_{\alpha^*}}{\sqrt{1+t_\alpha^2}} \right\}$$

est aussi une base orthogonale de L'' .

Nous envoyons L sur L' par J , J considérée comme une application unitaire, $\det J = \exp(i\pi r/2)$ et nous prenons $\log(\det J) = i\pi r/2$. Nous envoyons ensuite L' sur L'' par

$$\varphi(e_{\alpha^*}) = F_\alpha \quad \text{et} \quad \varphi(e_\alpha) = -\varphi(J e_{\alpha^*}) = -J(F_\alpha) = \frac{-e_{\alpha^*} + t_\alpha e_\alpha}{\sqrt{1+t_\alpha^2}},$$

obtenant une matrice unitaire avec

$$\det \varphi = \prod_\alpha \frac{t_\alpha - i}{\sqrt{1+t_\alpha^2}} = \exp\left(i \sum \text{Arg}\left(\frac{t_\alpha - i}{\sqrt{1+t_\alpha^2}}\right)\right).$$

L ira alors sur L'' par ψ avec $\det \psi = \det J \det \varphi$.

Pour les calculs de logarithmes nous nous plaçons sur $S^1 - \{-i\}$.

$$\text{Arg} \frac{t_\alpha - i}{1+t_\alpha^2} = \theta + 2k\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Si $t_\alpha > 0$, nous prenons pour

$$\log \left[\exp \left(i \text{Arg} \left(\frac{t_\alpha - i}{\sqrt{1+t_\alpha^2}} \right) \right) \right]$$

la valeur $i\theta$ et pour

$$\log \left[\exp \left(-i \text{Arg} \left(\frac{t_\alpha - i}{\sqrt{1+t_\alpha^2}} \right) \right) \right]$$

la valeur $-i\theta$.

Si $t_\alpha < 0$,

$$\log \left[\exp \left(i \text{Arg} \left(\frac{t_\alpha - i}{\sqrt{1+t_\alpha^2}} \right) \right) \right]$$

étant égal à $i\theta$, le logarithme de l'inverse sera $i(2\pi - \theta)$.

Dans le calcul de $\log \det J + \log \det \varphi + \log(\det \psi)^{-1}$, apparaîtra donc $2\pi i \text{sgn}(t_\alpha)$; nous avons donc prouvé, revenant à la variété V :

PROPOSITION 1. — Pour tout $x \in V$, on peut trouver trois voisinages $U_{\alpha'}$, $U_{\beta'}$, $U_{\gamma'}$ de x , munis respectivement de sections lagrangiennes $L_{\alpha'}$, $L_{\beta'}$, $L_{\gamma'}$, deux à deux transverses sur $U_{\alpha'} \cap U_{\beta'} \cap U_{\gamma'}$, tels qu'il existe des fonctions de transition du fibré presque complexe :

$$u_{\alpha' \beta'}(x) : L_{\alpha'}(x) \rightarrow L_{\beta'}(x)$$

(et permutation circulaire α', β', γ') avec

$$\begin{aligned} \text{Inert}(L_{\alpha'}, L_{\beta'}, L_{\gamma'}) &= \frac{1}{2\pi i} [\log(\det(u_{\alpha' \beta'})) \\ &\quad + \log(\det(u_{\beta' \gamma'})) - \log(\det(u_{\alpha' \gamma'}))] = c_{\alpha' \beta' \gamma'}. \end{aligned}$$

Ainsi le cocycle trilatère est représenté au-dessus de $U_{\alpha'} \cap U_{\beta'} \cap U_{\gamma'}$ par l'indice d'inertie du triplet de lagrangiens $L_{\alpha'}, L_{\beta'}, L_{\gamma'}$ deux à deux transverses, autrement dit la première classe de Chern de V est représentée localement par cet indice.

Remarques. — Notons que l'on pourrait dans la démonstration précédente supposer que $L' \cap L'' = L' \cap L = 0$ et $L \cap L'' \neq 0$, et $t_{\alpha} = 0$ pour $\alpha = r_1 + 1, \dots, r$, $r_1 = \dim L \cap L''$. On aurait alors à supposer L'_{β} transverse à $L_{\alpha'}$ et $L_{\gamma'}$ et $\dim(L_{\alpha'} \cap L_{\gamma'})$ constante sur $U_{\alpha'} \cap U_{\beta'} \cap U_{\gamma'}$ pour l'exactitude de l'énoncé.

En termes de cohomologie à valeurs dans un faisceau, on sait que l'indice d'inertie trilatère définit un cocycle au-dessus de V qui est également un cobord (1 b), on voit que localement le cocycle trilatère s'identifie au cocycle d'inertie, exactement comme dans la cohomologie de De Rham tout cocycle s'identifie localement à un cobord.

3. CONSÉQUENCES. — Si $\forall x \in V$, il est toujours possible d'envisager $L_{\alpha'}, L_{\beta'}, L_{\gamma'}$ avec un indice d'inertie de parité fixe (que l'on peut supposer pair en modifiant au besoin l'un des $t_{\alpha} \neq 0$, en $(-t_{\alpha})$), alors on peut définir le cocycle trilatère de V par des $c_{\alpha' \beta' \gamma'}(x)$ pairs, $\forall x \in V$. Il existe $\tilde{c}_1 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ tel que $c_1 = 2\tilde{c}_1$ si c_1 est la première classe de Chern du fibré tangent, donc selon (2) et (4) une structure $Sp_2(r)$ -spinorielle symplectique. Réciproquement s'il existe une telle structure spinorielle symplectique il existe $\tilde{c}_1$ tel que $c_1 = 2\tilde{c}_1$ et on peut envisager pour les $c_{\alpha' \beta' \gamma'}$ des valeurs paires; donc :

PROPOSITION 2. — Pour qu'il existe sur V une structure $Sp_2(r)$ -spinorielle symplectique il faut et il suffit qu'en tout point l'indice d'inertie du triplet local de lagrangiens soit pair, autrement dit par abus que le cocycle d'inertie, Inert, soit pair.

On voit, indépendamment de toute considération étrangère à cet article que pour qu'une variété à structure presque symplectique admette une structure spinorielle orthogonale attachée à la métrique hermitienne associée il faut et il suffit que sa deuxième classe de Stiefel-Whitney w_2 soit nulle ($w_2 = 0$).

En effet si le cocycle Inert. est pair il est évident que $w_2 = 0$, puisque w_2 est la réduction mod 2 de c_1 . Réciproquement si $w_2 = 0$, il existe un 1-cocycle $b_{\alpha\beta}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$\bar{c}_{\alpha\beta\gamma} = \bar{b}_{\alpha\beta} + \bar{b}_{\beta\gamma} - \bar{b}_{\alpha\gamma},$$

où les barres désignant les classes modulo 2, alors $a_{\alpha\beta\gamma}$ est cohomologue à $b_{\alpha\beta\gamma}$ avec les $b_{\alpha\beta\gamma}$ pairs, on peut donc représenter localement le cocycle trilatère par des fonctions à valeurs dans $2\mathbb{Z}$.

Plus généralement : Si on peut relever le groupe structural $U(r, \mathbb{C})$ du fibré tangent à $Sp_q(r)$, la première classe de Chern (mod q) de V est nulle et réciproquement. Pour $q = 2$ on retrouve directement la propriété de w_2 car l'anti-image de $U(r, \mathbb{C})$ dans $Sp_2(r)$ est celle d'un groupe de spinorialité élargi.

(*) Séance du 9 mai 1977.

(1) A. CRUMEYROLLE (a) *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 1753. (b) *Comptes rendus*, 284, série A, 1977, p. 1129.

(2) B. KOSTANT, *Symplectic Spinors (Symposia Mathematica, XIV, p. 139-152, Academic Press, London, 1974)*.

(3) J. LERAY, *Travaux de Maslov-Arnold*, R.C.P. 25, 18, Strasbourg, 1973.

(4) J. TIMBEAU, *Comptes rendus*, 279, série A, 1974, p. 1973.