Periodica Mathematica Hungarica Vol. 7 (3–4), (1976), pp. 263–289.

ALGÈBRE DE CLIFFORD SYMPLECTIQUE. REVÊTEMENTS DU GROUPE SYMPLECTIQUE. INDICES DE MASLOV ET SPINEURS SYMPLECTIQUES

par

ALBERT CRUMEYROLLE (Toulouse)

I. Algèbre de Clifford symplectique. Définition et généralités

E est un espace vectoriel de dimension $n = 2r$ sur un corps $\mathbf{K}$. Comme dans les applications $\mathbf{K}$ sera $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, nous supposerons $\mathbf{K}$ commutatif de caractéristique nulle.

F est une forme bilinéaire antisymétrique de rang maximal (forme symplectique). Le groupe symplectique $Sp(n, \mathbf{K})$ est le sous-groupe des éléments s de $GL(n, \mathbf{K})$ tels que $F(sx, sy) = F(x, y)$, $\forall x, y \in E$.

On construit l'algèbre associative, quotient de l'algèbre tensorielle de E, $\otimes E$, par l'idéal bilatère $\mathfrak{J}(F)$ engendré par l'ensemble des éléments de la forme:

(1) $$x \otimes y - y \otimes x - F(x, y), \qquad x, y \in E.$$

$\otimes E/\mathfrak{J}(F)$, notée $C_S(F)$ sera appelée *algèbre de Clifford symplectique*. Soit ϱ_F l'homomorphisme canonique,

$$\varrho_F : \otimes E \to C_S(F),$$

comme E engendre $\otimes E$, $C_S(F)$ est engendrée par $\varrho_F(E)$. (1) entraîne:

(2) $$\varrho_F(x)\varrho_F(y) - \varrho_F(y)\varrho_F(x) = F(x, y).$$

Comme $x \otimes y - y \otimes x$ et $F(x, y)$ sont des éléments pairs de $\otimes E$, on a une décomposition en somme directe de $C_S(F) = C_S^+(F) \otimes C_S^-(F) = C^+ \oplus C^-$, avec $\varrho_F(\otimes^{\pm} E) = C_S^{\pm}(F)$, l'algèbre construite est donc semi-graduée, $C_S^+(F)$ est une sous-algèbre.

This article is the developed text of a talk given at the Symposium on Differential Geometry in Debrecen, Hungary, on August 28–September 3, 1975.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 15A66; Secondary 22E70, 53C15.

Key words and phrases. Symplectic Clifford algebra, tensor algebra, symplectic spinors Banach algebra, representation of the Clifford algebra, spinorial group, Maslov index, Lagrangian differentiable manifolds.

REMARQUE. Si on introduisait l'algèbre de Lie H de dimension $2r+1$, d'espace sous-jacent $E \oplus \mathbf{K}$, avec le crochet:

$$[x,y] = F(x,y), \quad [x,1] = 0, \quad x,y \in E,$$

(algèbre de Heisenberg), $C_S(F)$ apparaîtrait comme isomorphe à l'algèbre enveloppante de H. Cependant pour mieux souligner les analogies avec les algèbres de Clifford «orthogonales», on oubliera systématiquement ce point de vue. En particulier on démontrera indépendamment plus loin la proposition 2 qui est un cas particulier du théorème de Poincaré—Birkhoff—Witt.

PROPOSITION 1 (Propriété universelle). *Soit A une algèbre associative sur $\mathbf{K}$, avec loi multiplicative $*$ et u une application linéaire de E dans A telle que: $u(x) * u(y) - u(y) * u(x) = F(x,y)$; il existe un homomorphisme $\bar{u}$ et un seul de $C_S(F)$ dans A tel que $u = \bar{u} \circ \varrho_F$.*

$\bar{u}$ est unique, s'il existe, car $\varrho_F(E)$ engendre $C_S(F)$. u se prolonge en un homomorphisme unique v de $\otimes E$ dans A avec $v(x_1 \otimes \ldots \otimes x_h) = u(x_1) * \ldots * u(x_h)$, $x_i \in E$; de $u(x) * u(y) - u(y) * u(x) = F(x,y)$ résulte que $v(x \otimes y - y \otimes x - F(x,y)) = 0$, donc v s'annule sur $\mathfrak{I}(F)$, d'où $\bar{}$ par passage au quotient, qui de manière évidente convient.

En particulier:

Si $A = C_S(F)$, $u = -\varrho_F$, on en déduit qu'il existe α (*automorphisme principal*) avec $\alpha = \mathrm{Id}$ sur C^+, $\alpha = -\mathrm{Id}$ sur C^-, $\alpha^2 = \mathrm{Id}$ sur $C_S(F)$.

Si $A = C_S^0(F)$, algèbre opposée de $C_S(F)$; considérons sur E une base symplectique $(e_\alpha, e_{\beta *})$ $\alpha, \beta = 1, \ldots, r$ telle que:

$$F(e_\alpha, e_\beta) = F(e_{\alpha *}, e_{\beta *}) = 0, \quad F(e_\alpha, e_{\beta *}) = \delta_{\alpha\beta}; \tag{3}$$

$E = E_1 \oplus E_2$, E_1 engendré par les (e_α) et E_2 par les $(e_{\beta *})$.

Prenons $u(e_\alpha) = \varrho(e_{\alpha *})$, $u(e_{\alpha *}) = \varrho(e_\alpha)$. Il existe β (*anti-automorphisme principal*) tel que

$$\beta(\varrho_F e_\alpha) = (\varrho_F e_{\alpha *}), \ \beta(\varrho_F e_{\alpha *}) = (\varrho_F e_\alpha), \ \beta^2 = \mathrm{Id} \ \text{ sur } \ C_S(F)$$

(toutefois β dépend de la base choisie).

Plus particulièrement si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, $E = E'$ on pourra introduire un anti-automorphisme β avec $\beta \mid \varrho_F(E') = i\,\mathrm{Id}$ qui a une signification intrinsèque.

PROPOSITION 2. *$C_S(F)$ est linéairement isomorphe à l'algèbre symétrique $\vee E$.*

1° Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E, (2) montre que les $\varrho(e_1)^{k_1} \varrho(e_2)^{k_2} \ldots$ $\ldots \varrho(e_n)^{k_n}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{N}$, engendrent $C_S(F)$.

2° Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels munis de formes antisymétriques non dégénérées F_1 et F_2, on définit sur le produit tensoriel $C_S(F_1) \otimes C_S(F_2)$ une structure d'algèbre associative en posant:

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$$

et étendant cette définition par linéarité.

3° Si F_1 et F_2 sont non dégénérées, il existe une application linéaire surjective de $C_S(F_1 \oplus F_2)$ sur $C_S(F_1) \otimes C_S(F_2)$. $F_1 \oplus F_2$ est une forme bilinéaire sur $E_1 \oplus E_2$, qui est une somme directe symplectique. Posons:

$$u(x_1 + x_2) = \varrho_{F_1}(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \varrho_{F_2}(x_2), \quad (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2.$$

$$u(x_1 + x_2)\, u(y_1 + y_2) - u(y_1 + y_2)\, u(x_1 + x_2) = (F_1 \oplus F_2)(x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

donc il existe $\bar{u}$ homomorphisme de $C_S(F_1 \oplus F_2)$ dans $C_S(F_1) \otimes C_S(F_2)$ avec $u = \bar{u} \circ \varrho_{F_1} \oplus \varrho_{F_2}$; comme $C_S(F_1) \otimes C_S(F_2)$ est engendré par les $\varrho_{F_1}(x_1) \otimes 1$ et $1 \otimes \varrho_{F_2}(x_2)$ le résultat est établi.

4° $C_S(F_1 \oplus F_2)$ et $C_S(F_1) \otimes C_S(F_2)$ sont isomorphes. φ_1 injection canonique de E_1 dans $E_1 \oplus E_2$ passe à un homomorphisme de $C_S(F_1)$ dans $C_S(F_1 \oplus F_2)$, de même pour $\varphi_2 : E_2 \to E_1 \oplus E_2$. Posons: $\bar{v}(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = \varphi_1(\alpha_1)\, \varphi_2(\alpha_2)$, $\alpha_i \in C_S(F_i)$; il est immédiat que $\bar{v}$ est un homomorphisme de $C_S(F_1) \otimes C_S(F_2)$ dans $C_S(F_1 \oplus F_2)$ et on vérifie aisément que $\bar{u} \circ \bar{v}$ et $\bar{v} \circ \bar{u}$ sont égaux à l'identité.

5° Raisonnons par récurrence sur la dimension de E. Posons $E = E_1 \oplus E_2$, avec $\dim E_2 = 2$. E_2 est engendré par les $\varrho(e_1)^{k_1} \varrho(e_2)^{k_2}$, $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$, ϱ étant l'homomorphisme canonique. Il suffit de montrer que ces éléments sont linéairement indépendants, autrement dit que toute somme d'un nombre fini de termes non nuls

$$\Sigma \lambda_{k_1 k_2} (e_1)^{k_1} \otimes (e_2)^{k_2} \in \mathfrak{J}(F_2) \Rightarrow \lambda_{k_1 k_2} = 0\,.$$

Supposons $F_2(e_1, e_2) = 1$; $\mathfrak{J}(F_2)$ est l'ensemble des sommes

$$\Sigma s_i \otimes (x_i \wedge y_i - \Phi(x_i \wedge y_i)) \otimes t_i, \qquad x_i, y_i \in E_2,$$

Φ à valeurs dans $\mathbf{K}$, Φ linéaire, $s_i, t_i \in \otimes E_2$, ou encore l'ensemble des sommes:

$$\Sigma s_i \otimes (e_1 \wedge e_2 - \Phi(e_1 \wedge e_2)) \otimes t_i\,,$$

soit en changeant un peu les notations:

$$\Sigma s_i \otimes (e_1 \wedge e_2 = 1) \otimes t_i\,.$$

Soit $\lambda_{j_1 j_2}$ le coefficient du terme de degré minimum dans $\Sigma \lambda_{k_1 k_2}(e_1)^{k_1} \otimes (e_2)^{k_2}$. Si $\lambda_{j_1 j_2} \neq 0$, $\lambda_{j_1 j_2}(e_1)^{j_1} \otimes (e_2)^{j_2}$ est nécessairement de la forme

$$\Sigma s_j \otimes e_1 \wedge e_2 \otimes t_j \tag{3}$$

avec degré de $(s_j \otimes t_j)$ maximum, comme s_j doit être une puissance tensorielle de (e_1) et t_j de (e_2), que $e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$, il apparaît des termes en $(e_1)^{j_1-1} \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes (e_2)^{j_2-1}$ que ne contient pas $\sum_i \lambda_{k_1 k_2}(e_1)^{k_1} \otimes (e_2)^{k_2}$, donc les s_j et t_j sont nuls ainsi que $\lambda_{j_1 j_2}$: il y a contradiction. $C_S(F_2)$ a bien pour base les $\varrho(e_1)^{k_1} \varrho(e_2)^{k_2}$. L'application de l'hypothèse de récurrence et du 4° à E_1 et E_2 donne le résultat.

Dans la suite on écrira $\varrho_F(a) = a$, $a \in \mathbf{K}$ et $\varrho_F(x) = x$, $x \in E$, ce que justifie cette démonstration.

Remarque. Dans l'espace E, il n'existe, modulo un isomorphisme, qu'une seule algèbre de Clifford symplectique, car il en est ainsi pour la forme symplectique F.

Proposition 3. *Le centre de $C_S(F)$ est trivial.*

Choisissons une base symplectique $(e_\alpha, e_{\beta *})$. e_α étant choisi, les éléments de $C_S(F)$ qui s'expriment en combinaison linéaire des éléments d'une base autres que $e_{\alpha *}$ commutent avec e_α. Soit u un élément du centre, $u = u_1 + v$, où v ne contient aucune puissance de $e_{\alpha *}$. Comme $u_1 e_\alpha - e_\alpha u_1 = 0$, si u_1 contient un terme en $(e_{\alpha *})^k$, et vu que

$$(e_{\alpha *})^k e_\alpha - e_\alpha (e_{\alpha *})^k = -k(e_{\alpha *})^{k-1}$$

nécessairement u_1 est nul, u ne contient donc aucune puissance de $e_{\alpha *}$. On peut faire le même raisonnement avec tout e_i, $i = 1, \ldots, n$. Donc le centre est trivial.

La formule que l'on vient d'écrire permet d'exprimer de proche en proche $(e_{\alpha *})^k (e_\alpha)^l$, lorsque les $(e_\alpha, e_{\beta *})$ constituent une base symplectique. En effet, on établit par récurrence:

$$(P)\begin{cases} (e_{\alpha *})^k (e_\alpha)^l = \\ = (e_\alpha)^l (e_{\alpha *})^k - lk(e_\alpha)^{l-1} (e_{\alpha *})^{k-1} + \dfrac{l(l-1)}{2} k(k-1) (e_\alpha)^{l-2} (e_{\alpha *})^{k-2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^p \dfrac{l(l-1)\ldots(l-p+1)}{p!} k(k-1)\ldots(k-p+1) (e_\alpha)^{l-p} (e_{\alpha *})^{k-p} + \ldots \end{cases}$$

avec un nombre fini de termes $(p \leq l,\ p \leq k)$.

II. Algèbre de Clifford symplectique large: $C_S(F)_l$

Dans la suite **K** est soit **R**, soit **C**.

Il est possible d'introduire des sommes formelles d'un nombre infini de termes (séries formelles symplectiques) et d'étendre la loi de multiplication sous certaines précautions que nous allons exposer.

Envisageons pour l'instant une base symplectique $(e_\alpha, e_{\beta *})$. Par produit d'un élément u de $C_S(F)$ par un autre élément v, apparaissent des monômes qui se ramènent d'abord, modulo un facteur scalaire à:

$$\prod_{1 \leq \alpha \leq r} [(e_\alpha)^{k_\alpha} (e_{\alpha *})^{k_{\alpha^*}} (e_\alpha)^{l_\alpha} (e_{\alpha *})^{l_{\alpha^*}}], \text{ si } \prod_\alpha (e_\alpha)^{k_\alpha} \prod (e_{\alpha *})^{k_{\alpha^*}}$$

figure dans u et $\prod_\alpha (e_\alpha)^{l_\alpha} (e_{\alpha *})^{l_{\alpha^*}}$ dans v. La seule difficulté est donc de réordonner les $(e_{\alpha *})^{k_{\alpha^*}} (e_\alpha)^{l_\alpha}$ à l'aide de la formule de la fin de I.

Considérons les séries formelles symplectiques $\hat{u}$ de terme général

$$\lambda_{h_1 \ldots h_r, k_1 \ldots k_r} (e_1)^{h_1} \ldots (e_r)^{h_r} (e_{1*})^{k_1} \ldots (e_{r*})^{k_r}$$

écrit symboliquement: $\lambda_{HK^*} e^H e^{K^*}$, $e^\emptyset = 1$, avec la majoration

$$|\lambda_{HK^*}| \leq \frac{\sigma(\hat{u})\, \varrho(\hat{u})^{|H|+|K^*|}}{H!\, K^*!},$$

$\sigma(\hat{u})$, $\varrho(\hat{u})$, constantes positives, à partir d'un certain rang. On a posé:

$$|H| = \Sigma h_i, \quad |K^*| = \Sigma k_i, \quad H! = h_1!\, h_2! \ldots h_r!.$$

Il est immédiat que la somme de deux telles séries a ses coefficients majorés de manière analogue; quant au produit, si on pose:

$$\hat{u} = \frac{\Sigma a_{k_1}}{k_1!} (e_1^*)^{k_1}, \quad \hat{v} = \frac{\Sigma b_{l_1}}{l_1!} (e_1)^{l_1},$$

le coefficient λ_{lk} de $(e_1)^l (e_1^*)^k$ s'obtient de:

$$\frac{1}{k!\, l!} \left(a_k b_l - a_{k+1} b_{l+1} + \frac{a_{k+2} b_{l+2}}{2!} + \ldots + (-1)^p \frac{a_{k+p} b_{l+p}}{p!} + \ldots \right),$$

c'est une série absolument convergente dont la somme est majorée par $\frac{1}{k!\, l!} (\varrho(\hat{u}))^k (\varrho(\hat{v}))^l \sigma(\hat{u})\, \sigma(\hat{v}) \exp\, (\varrho(\hat{u})\, \varrho(\hat{v})) \leq A \frac{a^k a^l}{k!\, l!}$ A, a étant des constantes.

L'ensemble de ces séries constitue donc une algèbre associative, de plus il est clair que le produit $\hat{u}\hat{v}$ ainsi calculé, dont les coefficients sont sommes de séries numériques absolument convergentes, ne dépendra pas de la base choisie pour exprimer les approximations successives de $\hat{u}$ et $\hat{v}$ car les produits de ces approximations en sont indépendants.

L'algèbre de ces séries formelles symplectiques sera appelée algèbre de Clifford symplectique large et notée $C_S(F)_l$. $C_S(F)_l$ est linéairement isomorphe à une sous-algèbre des séries formelles construites sur $\vee E$. Dans la suite on appellera encore $C_S(F)_l$ le complété de l'algèbre précédente.

PROPOSITION 4. *Par complétion $C_S(F)_l$ admet une structure d'algèbre de Banach.*

En effet $(e_\alpha, e_{\beta*})$ ayant toujours le même sens, on peut définir sur $C_S(F)^l$ une structure d'espace de Banach en posant $\|\hat{u}\|_1^2 = \sum_{H,K^*} |\lambda_{HK^*}|^2$ et passant au complété. Le produit $\hat{u}\hat{v}$ est une fonction continue séparément par rapport à $\hat{u}$ et à $\hat{v}$; d'après un résultat de GEL'FAND[1] on peut donc munir $C_S(F)_l$ d'une nouvelle norme équivalente à la première, $\| \;\|$, de manière que $\|\hat{u}\hat{v}\| \leq \|\hat{u}\| \, \|\hat{v}\|$ (on pose $A = C_S(F)_l \oplus \mathbf{K}$,

$$\|\hat{u}\| = \|L_{\hat{u}}\| = \sup_{\begin{cases} \hat{v} \in C_S(F)_l \\ \alpha \in \mathbf{K} \\ \hat{v} \oplus \alpha \neq 0 \end{cases}} \frac{\|\hat{u}\hat{v} + \alpha\hat{u}\|_1}{\|\hat{v}\|_1 + |\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbf{K}$$

et $L_{\hat{u}}(\hat{v} \oplus \alpha) = \hat{u}\hat{v} + \alpha\hat{u}$).

Pour définir un espace de représentation de $C_S(F)_l$, introduisons sur l'ensemble des indices composés tels que K^* une relation d'ordre partiel, si $K^* = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ et $H^* = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ $K^* \leq H^*$ signifie que $\beta_1 \leq \gamma_1, \ldots, \beta_r \leq \gamma_r$. Soit maintenant la suite des idéaux à gauche $C_S(F)_l e^{K^*}$, on définit une application surjective $f_{K^*}^{H^*} : C_S(F)_l e^{H^*} \to C_S(F)_l e^{K^*}$, $K^* \leq H^*$, qui à $\sum_J \lambda_{JH^*} e^J e^{H^*}$, associe $\sum_J \lambda_{JH^*} e^J e^{K^*}$. On construit ainsi un système projectif d'ensembles et d'applications surjectives; il existe une limite projective pour cette suite d'idéaux à gauche, elle est notée $\mathfrak{J}_g = C_S(F)_l \Phi^*$ (pour mieux garder l'analogie avec les spineurs orthogonaux). A l'élément $\lambda_{JH^*} e^J e^{H^*}$, J et H^* fixés, est associé sur la limite algébrique $\lambda_{JH^*} e^J \Phi^*$. On observe que $\mathfrak{J}_g$ s'identifie linéairement à la sous-algèbre de $C_S(F)_l$ construite sur les (e_α), un élément de $\mathfrak{J}_g$

[1] I. M. GEL'FAND et M. A. NAÏMARK, Anneaux normés avec involution et leurs représentations, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **12** (1948), 445–480 (en russe). *MR* **10** – 199.

a bien, comme il convient, son coefficient général, venant de $\hat{u} = \sum_{H,K^*} \lambda_{HK^*} e^H e^{K^*}$, majoré en module à partir d'un certain rang par

$$\frac{\sigma(\hat{u})\,(\varrho(\hat{u}))^{|H|}}{H!}\,\|\hat{u}\|_1 .$$

La limite projective de la suite des représentations régulières à gauche dans les $C_S(F)_l e^{K^*}$ donne une représentation de $C_S(F)_l$ dans $\mathfrak{J}_g$. Pratiquement, on l'obtient par produit à gauche, on fait glisser à droite toutes les puissances de $(e_{\alpha *})$ que l'on remplace par le symbole Φ^*.

Proposition 5. *$C_S(F)_l$ est une algèbre simple, centrale.*

Nous montrons que tout idéal bilatère fermé $\mathfrak{J}$ est trivial, car la deuxième propriété est immédiate.

Soit $\hat{u}$ un élément de $\mathfrak{J}$, $\hat{u} = \sum_{H,K^*} \alpha_{HK^*} e^H e^{K^*}$. Notons $\hat{\alpha}_{H_0 K_0^*} e^{H_0} e^{K_0^*}$ un terme de degré minimal relativement aux e^H seuls, multipliant à gauche par $e^{H_0^*}$ on fait apparaître un terme $\pm \hat{\alpha}_{H_0 K_0^*} (H_0)!\, e^{K_0^*}$ dans le développement d'un élément de $\mathfrak{J}$. Multipliant alors à droite par e^{K_0}, on obtient un élément $\hat{v}$ de $\mathfrak{J}$, dont le développement contient un terme constant $A_0 = \pm \hat{\alpha}_{H_0 K_0^*} (H_0)!\,(K_0)!$. Nous avons utilisé ici la formule (P). Il est loisible de supposer, en multipliant au préalable par e^L à gauche que $H_0!$ est arbitrairement grand, observant que $\|e^L\| = 1$, $\dfrac{\hat{v}}{|A_0|}$ peut être écrit sous la forme $1 + \widehat{W}$ avec $\|\widehat{W}\| \leqq 1/2$ par exemple, de sorte que $\dfrac{\hat{v}}{|A_0|} \in \mathfrak{J}$ est inversible.

Proposition 6. *La représentation dans $C_S(F)_l \Phi^*$ de l'algèbre de Clifford large est irréductible.*

Soit $w = \sum_J \lambda_J e^J \Phi^*$ un élément appartenant à un sous-espace propre S invariant pour la représentation.

En procédant comme dans la démonstration de la proposition 5, on obtient un élément u de S dont le développement contient un terme constant différent de 0. Si S est invariant par tous les polynômes symplectiques quel que soit leur degré, il est invariant par multiplication par les polynômes en les (e_α) seuls, donc par les séries symplectiques formelles en les (e_α), on peut alors inverser u dans cette sous-algèbre, on obtient donc $1 \cdot \Phi^* \in S$, donc $S = C_S(F)_l \Phi^*$, il y a contradiction.

Définition. Nous appellerons spineur symplectique tout élément d'un espace de représentation irréductible de l'algèbre de Clifford large $C_S(F)_l$.

En particulier $C_S(F)_l \Phi^*$, d'élément général $\lambda_J e^J \Phi^*$ est un espace standard de spineurs symplectiques.

III. Groupes de Clifford et groupes spinoriels symplectiques

DÉFINITION. Nous appellerons groupe de Clifford symplectique G_S, le sous-groupe des éléments γ de $C_S(F)_l^*$ tels que $\gamma x \gamma^{-1} \in E$, $\forall x \in E$.

PROPOSITION 7. *Si* $p_\gamma(x) = \gamma x \gamma^{-1}$, $p : \gamma \to p_\gamma$ *est une représentation de* G_S *dans* $Sp(n, \mathbf{K})$.

$$F(\gamma x \gamma^{-1}, \gamma y \gamma^{-1}) = (\gamma x \gamma^{-1})(\gamma y \gamma^{-1}) - (\gamma y \gamma^{-1})(\gamma x \gamma^{-1}) = \\ = \gamma(xy - yx)\gamma^{-1} = F(x, y).$$

PROPOSITION 8. *La suite:*

$$1 \to \mathbf{K}^* \to G_S \xrightarrow{p} Sp(n, \mathbf{K}) \to 1 \tag{4}$$

est exacte.

En effet, le noyau de p est $\mathbf{K}^*$. Cela résulte de l'étude de centre $C_S(F)$ et de ce que E engendre $C_S(F)$. p est surjective; considérons la série formelle:

$$1 + ta^2 + \frac{t^2(a^2)^2}{2!} + \ldots + t^n \frac{(a^2)^n}{n!} + \ldots,$$

notée $\exp(ta^2)$, $t \in \mathbf{K}$, $a \in E$, dont l'inverse est $\exp(-ta^2)$.

Un calcul purement algébrique montre que $(\exp ta^2) x \exp(-ta^2) = x - 2F(x, a)ta = x - t[x, a^2]$ où nous avons écrit $[x, a^2] = xa^2 - a^2x = \mathrm{ad}(a^2)(x)$ $\big($on a $(\mathrm{ad}(a^2))^2 = 0\big)$. Ce calcul direct est d'ailleurs inutile car dans le cas analytique ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$) ce résultat s'obtiendrait en dérivant pour $t = 0$ et utilisant un résultat classique sur l'exponentielle.

Selon un résultat connu (DIEUDONNÉ [8], ARTIN [2]) tout élément de $Sp(n, \mathbf{K})$ est un produit fini de transvections symplectiques. Or $x \to x - 2F(x, a)ta$ est précisément la transvection symplectique déterminée par $a \in E$ et $t \in \mathbf{K}$.

DÉFINITION. Soit $\gamma \in G_s$ et prenons $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, nous appellerons «norme» spinorielle symplectique le produit $\beta(\gamma)\gamma = N(\gamma)$ où β est l'antiautomorphisme principal: $\beta \mid E' = i\mathrm{Id}$.

PROPOSITION 9. $N(\gamma)$ *appartient à* $\mathbf{C}^*$ *et* $\gamma \to N(\gamma)$ *est une représentation de* G_s *dans* $\mathbf{C}^*$.

Si $\quad x' = \gamma x \gamma^{-1}$

$$\beta(x') = ix' = i\beta(\gamma^{-1})x\beta(\gamma) \Rightarrow \gamma^{-1}\beta(\gamma^{-1})x\beta(\gamma)\gamma = x$$

donc: $\beta(\gamma)\gamma \in \mathbf{C}^*$ (proposition 8).

$$N(\gamma\gamma') = \beta(\gamma\gamma')\gamma\gamma' = \beta(\gamma')\beta(\gamma)\gamma\gamma' = N(\gamma)N(\gamma').$$

Considérons l'espace $E_{\mathbf{C}} = E'$ complexifié de E réel et l'algèbre $C_S(F')$ complexifiée de $C_S(F)$ (qui est d'ailleurs $C_S(F')$ construite sur $E_{\mathbf{C}}$ muni de F' complexifiée de F). Considérons maintenant le sous-groupe des éléments γ de $(G_s)'$, groupe de Clifford de $C_S(F')_l$, tels que $\gamma x \gamma^{-1} \in E$, $\forall x \in E$.

Définition. Nous appellerons groupe métaplectique (au sens de Leray [7]) et nous désignerons par $Mp(r)$ l'ensemble des éléments γ de $(G_s)'$ tels que:

$$\gamma x \gamma^{-1} \in E, \quad \forall x \in E \quad \text{et} \quad |N(\gamma)| = 1.$$

La suite:

$$1 \to S^1 \to Mp(r) \to Sp(2r, \mathbf{R}) \to 1 \tag{5}$$

est exacte.

Plus particulièrement, nous désignerons par $Sp_2(r)$ le sous-groupe de $Mp(r)$ constitué par les éléments γ avec $N(\gamma) = 1$, de sorte que la suite

$$1 \to \mathbf{Z}_2 \to Sp_2(r) \to Sp(2r, \mathbf{R}) \to 1 \tag{6}$$

est exacte.

Le lecteur qui connaît la théorie des algèbres de Clifford notera que $Sp_2(r)$ est l'analogue d'un *groupe spinoriel*, mais ce n'est pas le revêtement universel de $Sp(n, \mathbf{R})$ dont le groupe de Poincaré est $\mathbf{Z}$.

Dans la suite les ensembles construits par complexification seront désignés par accentuation des symboles utilisés pour E réel.

IV. Le groupe U(r, C) comme sous-groupe de Sp(2r, R)

E étant réel de dimension $n = 2r$, E' est le complexifié de E.

Il est bien connu que l'on peut introduire sur E une métrique elliptique $(.\,,.)$ et un opérateur $\mathbf{R}$-linéaire orthogonal pour cette métrique, J, tels que: $J^2 = -1$, $(Jx, y) = F(x, y)$, ce qui implique $F(Jx, Jy) = F(x, y)$. J est donc symplectique et orthogonal.

On sait aussi qu'il existe une décomposition de E' en $E' = \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ étant complexes conjugués de bases respectives (ε_α) et $(\varepsilon_{\alpha*})$, $\alpha = 1, \ldots, r$, satisfaisant aux conditions:

$$(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = (\varepsilon_{\alpha*}, \varepsilon_{\beta*}) = 0, \qquad (\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta*}) = \delta_{\alpha\beta},$$
$$F(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = F(\varepsilon_{\alpha*}, \varepsilon_{\beta*}) = 0, \qquad F(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta*}) = i\delta_{\alpha\beta}.$$

L'ensemble des $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta*})$ constitue une base de Witt «réelle» de E'[2]; on sait également que:

$$J \mid \mathscr{E}_1 = i\,\mathrm{Id}, \quad J \mid \mathscr{E}_2 = -i\,\mathrm{Id}.$$

[2] Au sens orthogonal.

Si l'on définit: $e_\alpha = \dfrac{\varepsilon_{\alpha*} + \varepsilon_\alpha}{\sqrt{2}}$, $e_{\alpha*} = \dfrac{\varepsilon_{\alpha*} - \varepsilon_\alpha}{i\sqrt{2}}$, les $(e_\alpha, e_{\beta*})$ constituent une base symplectique de E, $E = E_1 \oplus E_2$, $e_\alpha \in E_1$, $e_{\alpha*} \in E_2$.

Nous appellerons unitaire tout élément du groupe symplectique qui commute avec J. $U(r, \mathbf{C})$ est l'ensemble des éléments unitaires. Il est immédiat de vérifier que $U(r, \mathbf{C})$ est l'ensemble des éléments de $SO(2r, \mathbf{R})$ qui commutent avec J, car si $u \in GL(r, \mathbf{C})$:

$$F(u(x), uJ(y)) = F(x, Jy), \quad \forall x, y \in E \text{ traduit que } u \in Sp(2r, \mathbf{R}).$$

$$F(u(x), Ju(y)) = F(x, Jy), \quad \forall x, y \in E, \text{ traduit que } u \in SO(2r, \mathbf{R}).$$

$U(r, \mathbf{C})$ est l'intersection 2 à 2 des groupes $Sp(2r, \mathbf{R})$, $SO(2r, \mathbf{R})$, $GL(r, \mathbf{C})$.

PROPOSITION 10. *p exp $(t(\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}))$ induit $x \to e^{-it}x$ sur $\mathscr{E}_1$ et $x \to e^{it}x$ sur $\mathscr{E}_2$.*

Observons que si $ab - ba = i$, comme la série formelle

$$\exp(tab) = 1 + tab + \frac{t^2}{2}(ab)^2 + \ldots$$

a pour inverse $\exp(-tab)$, que $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}$ commute avec $\varepsilon_\beta \varepsilon_{\beta*}$, $\alpha \neq \beta$, que $\exp(t(\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}))$ a pour inverse $\exp(-t \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*})$ et

$$\exp(t \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}) = \prod_\alpha \exp(t\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}).$$

Cette factorisation ramène la démonstration à un espace de dimension 2, espace déterminé par a, b avec $ab - ba = i$. Or un calcul direct montre que

$$\exp(tab)a \exp(-tab) = e^{-it}a.$$

COROLLAIRE 2.

$$p \circ \exp(\pi \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}) = -\mathrm{Id} \qquad \text{sur } E',$$

$$p \circ \exp(2\pi \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}) = \mathrm{Id} \qquad \text{sur } E',$$

$$p \circ \exp\left(-\frac{\pi}{2} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}\right) = J.$$

PROPOSITION 11. *Le groupe unitaire est dans l'image par p de l'ensemble des produits d'éléments de $Mp(r)$ de la forme:* $\exp\lambda \exp(a^{\alpha\beta*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta*})$, *(sans sommation en $\alpha, \beta*$) $a^{\alpha\beta*} \in \mathbf{C}$,*

$$a^{\alpha\beta*} = \bar{a}^{\beta\alpha*}, \quad \lambda = -i\frac{\Sigma a^{\alpha\alpha*}}{2}.$$

Il suffit d'exprimer une condition de réalité, d'autre part de remarquer que $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta*}$ commute avec $\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta*}$ et utiliser le corollaire 2. Il sera établi plus bas que cette image est identique à $U(r, \mathbf{C})$.

V. Problèmes de revêtement

La topologie de $Sp_2(r)$ étant induite par la topologie d'espace normé de $C_S(F')_l$, il est immédiat que $Sp_2(r)$ constitue un revêtement à deux nappes de $Sp(2r, \mathbf{R})$. On peut introduire sur $Sp_2(r)$ une structure de groupe de Lie à partir de celle de $Sp(2r, \mathbf{R})$ par transport par image réciproque séparant localement les deux nappes.

L'exponentielle formelle s'identifie à l'exponentielle de l'algèbre de Lie de $Sp_2(r)$, notée $\underline{Sp_2(r)}$. Les détails sont laissé au lecteur.

Proposition 12. *$Sp_2(r)$ est un groupe topologique connexe, revêtement non trivial, d'ordre 2, de $Sp(2r, \mathbf{R})$.*

Il suffit d'établir que $Sp_2(r)$ est connexe et pour cela de montrer qu'un chemin continu relie (-1) à (1) dans $Sp_2(r)$. $t \to \exp\left(-\frac{rit}{2}\right) \exp\,(t \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}) = \alpha(t)$ est de norme spinorielle 1 et c'est un chemin continu de $Sp_2(r)$. Or $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(2\pi) = \exp\,(-i\pi) \exp\,(2\pi \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*})$.

a. *Si r est impair:* $p \circ \alpha(2\pi) = \mathrm{Id}$, par le corollaire 2, donc $\alpha(2\pi) = \pm 1$ et par raison de continuité (ce qui pourrait aussi se vérifier par un calcul purement algébrique):

$$\exp\,(2\pi \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha*}) = 1 \tag{7}$$

et $\alpha(2\pi) = -1$. (On remarquera que si $\exp\,(a^{\alpha\beta*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta*}) = 1$, en prenant la norme spinorielle, nécessairement $\Sigma a^{\alpha\alpha*} = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.)

b. *Si r est pair:* raisonner par récurrence sur la dimension de E. $E = E_1 \oplus E_2$ en somme directe symplectique; on prend $\alpha_1(t)$ induisant l'identité dans E_1 et $\alpha_2(t)$ comme $\alpha(t)$ ci-dessus, l'hypothèse de récurrence permet de supposer que $r = 2r'$ avec r' impair.

Si on considère le groupe métaplectique, il existe un ouvert U_α contenant $u \in Sp(n, \mathbf{R})$ tel que $p^{-1}(U_\alpha)$ dans $Mp(r)$ soit en bijection avec $U_\alpha \times S^1$. Cela permet de définir sur $Mp(r)$ une structure de groupe de Lie, $Sp_2(r)$ étant fermé dans $Mp(r)$. $Sp(n, \mathbf{R})$ est isomorphe à $Mp(r)/S^1$, donc $Mp(r)$ est connexe.

Lemme 2. *Si $ad_u(x) = ux - xu$, $u \in C_S(F)$, $x \in E$, pour que $ad_u(x) \in E$, $\forall x \in E$, il faut et il suffit que u soit la somme de termes de degré 0 et 2; ad_u est dans l'algèbre de Lie du groupe symplectique et $u \in (\mathbf{R} \oplus \overset{2}{\vee} E) \to ad_u \in Sp(n, \mathbf{R})$ est surjective, de noyau $\mathbf{R}$.*

Il est immédiat de vérifier que $F(\mathrm{ad}_u x, y) + F(x, \mathrm{ad}_u y) = 0$ et que $ux - xu \in E$, $\forall x \in E$, équivaut à $u \in \boldsymbol{R} \oplus \overset{2}{\vee} E$. Le noyau est bien $\mathbf{R}$. Les éléments $\mathrm{ad}_{(e_i)^2}$, $\mathrm{ad}_{(e_i e_j)}$, $i < j$, sont atteints, ils sont linéairement indépendants sur $\mathbf{R}$, en raison de la dimension connue de $Sp(n, \mathbf{R})$ ils constituent une base de l'algèbre de Lie $\underline{Sp(n,\mathbf{R})}$ de $Sp(n,\mathbf{R})$.

Il en résulte immédiatement:

PROPOSITION 13. *L'algèbre de Lie* $\underline{Mp(r)}$ *de* $Mp(r)$ *admet la base* $(e_i)^2$, $e_i e_j$, 1, $(i < j)$, *où les* (e_i) *constituent une base de* E, *c'est une sous-algèbre de Lie de* $C_S(F)$ *munie du crochet* $[u, v] = uv - vu$.

L'algèbre de Lie de $Sp_2(r)$ est l'algèbre de Lie quotient de $\underline{Mp(r)}$ par $\mathbf{R}$. Il faut se garder de croire que les $r(2r + 1)$ éléments $(e_i)^2$, $(e_i e_j)$, $(i < j)$, en constituent une base.

Introduisant $E' = E_{\mathbf{C}}$ on voit que les $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$, $\varepsilon_{\alpha^*} \varepsilon_{\beta^*}$ $(\alpha < \beta)$, $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*}$, 1, constituent une base de $\underline{Mp'(r)}$ algèbre de Lie du groupe métaplectique complexe. Les éléments de $\underline{Mp(r)}$, $a^{ij}\varepsilon_i \varepsilon_j$, sont caractérisés par

$$a^{\alpha\beta} = \bar{a}^{\alpha^*\beta^*},\ a^{\alpha\beta^*} = \bar{a}^{\beta\alpha^*},\ \lambda - \bar{\lambda} = -i\Sigma a^{\alpha\alpha^*}, \tag{8}$$

si λ est leur dernière composante (sur 1).

PROPOSITION 14. *Les éléments de* $U(r, \mathbf{C})$ *s'identifient aux éléments* $p \circ \exp \lambda \exp (a^{\alpha\beta^*}\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*})$, *avec* $a^{\alpha\beta^*} \in \mathbf{C}$,

$$a^{\alpha\beta^*} = \bar{a}^{\beta\alpha^*}, \quad \lambda = -i\frac{\Sigma a^{\alpha\alpha^*}}{2}.$$

Il suffit de considérer $p \circ \exp (t\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*})$; l'application tangente à l'identité est une surjection sur l'ensemble des $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*}$, qui engendrent un sous-espace de dimension $r^2 = \dim U(r, \mathbf{C})$, on tient compte de la valeur de la norme et on sait que l'exponentielle est surjective sur tout groupe de Lie compact connexe.

COROLLAIRE 3. $Sp_2(r)$ *est engendré par les éléments de la forme* $\exp\left(-\frac{\alpha^{ij}}{2} F(e_i, e_j)\right) \exp (\alpha^{ij} e_i e_j)$, α^{ij} *réels*, e_i *base de* E, *(sans sommation en* i *et* j*)* $i \leq j$.

$Mp_2(r)$ *est engendré par les éléments de la forme* $\exp(\alpha^{ij} e_i e_j)$ *dans les mêmes hypothèses.*

Cela résulte de la connexité de ces groupes et de l'étude de leurs algèbres de Lie.

VI. Indices de Maslov (ordre 4 et 2)

Introduisons à nouveau les complexifiés E', $Mp'(r)$.

Lemme 3. *Le sous-groupe G_1' des éléments de $Mp'(r)$ qui conservent $\mathscr{E}_1$ point par point est engendré par les* $\exp u$, $u \in \mathbf{C} \oplus \overset{2}{\vee} \mathscr{E}_1$.

En effet, l'ensemble des éléments u forme une sous-algèbre de Lie commutative de $\underline{Mp'(r)}$ et il est immédiat que $\exp u$ conserve $\mathscr{E}_1$ point par point. Réciproquement tout élément de $C'_S(F)_l$ qui commute avec tout élément de $\mathscr{E}_1$ est une série entière en les ε_α. On peut donc écrire:

$$\underline{Mp'(r)} = \underline{GL(r, \mathbf{C})} \oplus (\underline{G_1'} + \underline{G_2'}),$$

$\underline{G_2'}$ construit à l'aide de $\mathbf{C} \oplus \overset{2}{\vee} \mathscr{E}_2$.

Il est immédiat que $\underline{GL(r, \mathbf{C})} \oplus \underline{G_1'}$ est une sous-algèbre de Lie de $\underline{Mp'(r)}$ et $\underline{G_1'}$ un idéal de cette sous-algèbre. Les algèbres de Lie $\underline{G_1'}$ et $\underline{G_2'}$ sont commutatives, G_1' et G_2' sont connexes, donc G_i' est distingué dans le sous-groupe engendré par $\underline{GL(r, \mathbf{C})} \oplus \underline{G_i'}$, $i = 1, 2$.

Revenant au groupe $Mp(r)$, ses éléments sont des produits d'exponentielles d'éléments de $\underline{U(r, \mathbf{C})}, \underline{G_1'}, \underline{G_2'}$; l'étude que nous venons de faire nous permet de faire glisser en tête les exponentielles d'éléments de $\underline{U(r, \mathbf{C})}$, et ensuite d'obtenir la factorisation de $\gamma \in Sp_2(r)$ sous forme:

$$\gamma = \sigma \tau_2' \tau_1', \quad \tau_i' \in \exp \overset{2}{\vee} \mathscr{E}_i, \quad i = 1, 2, \quad p(\sigma) \in U(r, \mathbf{C}),$$

et par une méthode analogue:

$$\gamma = \sigma \tau_2 \tau_1, \quad \tau_i \in \exp \overset{2}{\vee} E_i,$$

qui n'est autre qu'une factorisation de Cartan, $U(r, \mathbf{C})$ étant sous-groupe compact maximal de $Sp(n, \mathbf{R})$, les E_i étant définis au n° IV. L'exponentielle étant surjective dans tout groupe connexe compact, comme d'ailleurs dans tout groupe abélien

$$(10) \qquad \begin{cases} \sigma = \exp \left(\dfrac{-i \Sigma a^{\alpha\alpha^*}}{2} \right) \exp a^{\alpha\beta^*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*}, \quad a^{\alpha\beta^*} = \bar{a}^{\beta\alpha^*}, \\ \tau_2 = \exp a^{\alpha^* \beta^*} e_{\alpha^*} e_{\beta^*}, \quad \tau_1 = \exp (a^{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta). \end{cases}$$

De $[a^{\alpha\beta^*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta^*}, \varepsilon_\gamma] = -i a^{\alpha\gamma^*} \varepsilon_\alpha$, on déduit que: $\det (p(\sigma)) = \exp(i \Sigma a^{\alpha\alpha^*})$ si $p(\sigma)$ opère dans l'espace des ε_{α^*}. $U(r, \mathbf{C})$ s'introduit par le choix d'un repère réel à la fois symplectique et orthogonal, défini modulo une conjugaison dans

$Sp(n, \mathbf{R})$; modifiant ce choix, dans les factorisations de $\gamma_0 = \nu^{-1} \circ \gamma \circ \nu$ ($\nu \in Sp_2(r)$) et γ apparaît le même facteur complexe, on utilisera cette remarque plus loin.

$\mu = (\exp a^{\alpha\beta^*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta*})\tau_2\tau_1$ est l'élément de $Mp'(r)$ associé naturellement à γ par la factorisation. Si on pose: $\det p(\sigma) = N(\mu) = \mathrm{Ind}\,(\gamma) \in S^1$, cet indice de γ ne dépend pas de l'écriture de γ dans une base de l'algèbre de Clifford symplectique construite sur une base de E' telle que $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta*})$ adaptée à la décomposition $E' = \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$. Nous avons donc:

Proposition 15. *Les notations étant celles du n° IV: $\gamma \in Sp_2(r)$ s'écrit de manière unique:*

$$\gamma = \sigma\tau_2\tau_1, \quad p(\sigma) \in U(r, \mathbf{C}), \quad \tau_i \in \overset{2}{\vee} \exp(E_i), \quad i = 1, 2,$$

$$\sigma = \exp\left(\frac{-i\Sigma a^{\alpha\alpha^*}}{2}\right)(\exp a^{\alpha\beta^*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta*}).$$

$$\exp(i\Sigma a^{\alpha\alpha^*}) = \det p(\sigma) \in S^1, \tag{11}$$

noté Ind γ, *ne dépend que de la donnée de γ dans $Sp_2(r)$.*

Remarque. La factorisation de Cartan n'est pas un produit direct, donc en général $\mathrm{Ind}\,(\gamma\gamma') \neq \mathrm{Ind}\,\gamma\ \mathrm{Ind}\,\gamma'$. Cette inégalité vient de ce que la permutation d'éléments intervenant dans γ et γ' de la forme τ_1, τ_2 fait apparaître des éléments de S^1. Il est possible de montrer que cela revient à observer que les crochets de Lie correspondants d'éléments du 2ème degré, font apparaître des éléments de degré 0. Cependant, si

$$\mu = \exp a^{\alpha\beta^*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta*} \tau_2 \tau_1, \quad \mu' = \exp b^{\alpha\beta^*} \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\beta*} \tau_2' \tau_1',$$

sont les éléments de $Mp'(r)$ associés à γ et γ' respectivement, $\tau_i, \tau_i' \in \exp \overset{2}{\vee} E_i$, alors, oubliant ici la condition de réalité: $\mathrm{Ind}\,(\gamma\gamma') = \mathrm{Ind}\,\gamma \mathrm{Ind}\,\gamma'$, si γ ne contient pas d'élément τ_1 ou bien si τ' ne contient pas d'éléments τ_2' et en raison de la connexité cette remarque est équivalente à la propriété correspondante dans l'algèbre de Lie.

Proposition 16 (Arnold [1]). *Le groupe unitaire $U(r, \mathbf{C})$ opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces lagrangiens avec stabilisateur $O(r, \mathbf{R})$.*

On sait que l'on appelle sous-espace lagrangien (sous-entendu réel) un sous-espace totalement isotrope maximal au sens symplectique. Dès lors, selon l'auteur cité, si $E = E_1 \oplus E_2$ est une décomposition de Witt symplectique, comme $(Jx, y) = F(x, y)$, $J(E_1)$ est orthogonal à E_1. Soit E_1^* un autre lagrangien, Si (ξ_α), (ξ_α^*) sont des repères orthogonaux de E_1 et E_1^*, on envoie ξ_α sur ξ_α^*.

$J(\xi_\alpha)$ sur $J(\xi_\alpha^*)$, on obtient ainsi une transformation orthogonale et symplectique, donc unitaire.

L et L' sont lagrangiens transverses si $E = L \oplus L'$.

Nous étudions maintenant une condition nécessaire pour que le transformé de L par $\gamma \in Sp_2(r)$ soit transverse à L.

Il existe $\nu \in Sp_2(r)$ qui envoie une base symplectique $(e_\alpha, e_{\beta *})$ attachée à $E_1 \oplus E_2$ sur les éléments correspondants d'une base symplectique $(E_\alpha, E_{\beta *})$ attachée à $L \oplus L'$.

Posons $\gamma_0 = \nu^{-1} \circ \gamma \circ \nu$, γ_0 envoie E_1 sur E_2. Il est possible de choisir $p(\gamma_0) \in U(r, \mathbf{C})$, $p(\gamma_0)$ commute avec J, donc J et $p(\gamma_0)$ sont simultanément diagonalisables; les $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta *})$ du IV sont vecteurs propres de J et de $p(\gamma_0)$. Utilisant les formules du IV reliant les $(e_\alpha, e_{\beta *})$ aux $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta *})$ on voit que pour que γ_0 envoie E_1 sur E_2 il faut et il suffit que les valeurs propres de $p(\gamma_0)$ soient imaginaires pures, on a alors: $p(\gamma_0)\, e_\alpha = t_\alpha e_{\alpha *}$, $t_\alpha = \pm 1$.

On voit ensuite que $p(\gamma)(E_\alpha) = t_\alpha E_\alpha^*$, mais comme $p(\gamma_0)$ et J commutent, on a aussi $p(\gamma_0)(e_{\alpha *}) = -t_\alpha e_\alpha$ et $p(\gamma)(E_{\alpha *}) = -t_\alpha E_\alpha$. Naturellement $\operatorname{Ind}\gamma = \operatorname{Ind}\gamma_0$.

D'après la proposition 10, $\exp\left(\sum_\alpha -\frac{\pi}{2} t_\alpha \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha *}\right)$ donne par projection γ_0. Mais si $\gamma_0' \in Sp_2(r)$ envoie E_1 sur E_2, $\gamma_0' = v_2 \circ \gamma_0$, v_2 conservant globalement E_2. v_2 se ramène au produit d'un changement de repère symplectique adapté à la décomposition $E_1 \oplus E_2$ par une transformation associée à u_2 conservant E_2 point par point; on est donc ramené à considérer $\gamma_0'' = u_2 \circ \gamma_0$, $u_2 \in \overset{2}{\vee} E_2$.

La remarque qui suit la proposition 15, nous assure que $\operatorname{Ind}\gamma_0'' = \operatorname{Ind}\gamma_0' = \operatorname{Ind}\gamma_0$. Nous avons obtenu:

PROPOSITION 17. *Si $\gamma \in Sp_2(r)$ envoie le lagrangien L sur le lagrangien transverse L':*

1° *Il existe r nombres $t_\alpha = \pm 1$, tels que*

$$\operatorname{Ind}\gamma = \exp\left(-\frac{\pi i}{2}\Sigma t_\alpha\right) \in \mathbf{Z}_4. \tag{12}$$

2° *Il existe $\gamma' \in Sp_2(r)$ tel que $p(\gamma') \in \tilde{U}(r, \mathbf{C})$, que si $(e_\alpha, e_{\beta *})$ est une base symplectique adaptée à la décomposition $E = L \oplus L'$,*

$$\gamma'(e_\alpha) = t_\alpha e_{\alpha *}$$
$$\gamma'(e_{\alpha *}) = -t_\alpha e_\alpha,$$

($\tilde{U}(r, \mathbf{C})$ conjugué de $U(r, \mathbf{C})$ dans $Sp(2r, \mathbf{R})$) et $\operatorname{Ind}\gamma = \operatorname{Ind}\gamma'$.

Observons que si L et L' sont orientés et si γ respecte les orientations, Ind γ prend ses valeurs dans un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_2$.

Définition. Nous appellerons

$$m_2(\gamma) = -\frac{r}{2} - \frac{1}{i\pi}\log(\operatorname{Ind}\gamma) \pmod 4 \tag{13}$$

indice de Maslov de $\gamma \in Sp_2(r)$, transformant le lagrangien L en L' lagrangien transverse.

Nous nous proposons maintenant de relier ces résultats à ceux de J. Leray [10].

Soient L et L' lagrangiens transverses, $(e_\alpha, e_{\beta*})$ une base de Witt adaptée à la somme directe $L \oplus L'$. Si L'' est un autre sous-espace lagrangien tel que $L'' \oplus L' = E$ il existe $\gamma \in Sp_2(r)$, qui conserve L' point par point et envoie L sur L'', on a:

$$p(\gamma)(e_{\alpha*}) = e_\alpha, \; p(\gamma)(e_\alpha) = a_\alpha^{\lambda*} e_{\lambda*} + a_\alpha^\lambda e_\lambda,$$

où nous sommons par rapport aux indices répétés. Écrivant que $p(\gamma)$ est symplectique on a:

$$p(\gamma)(e_\alpha) = a_\alpha^{\lambda*} e_{\lambda*} + e_\alpha \quad \text{avec} \quad a_\beta^{\alpha*} = a_\alpha^{\beta*}. \tag{14}$$

Pour que L et L'' soient transverses il faut et il suffit que la matrice $\|a_\beta^{\alpha*}\|$ soit régulière.

Selon Leray [10], introduisons $z \in L, z' \in L', z'' \in L''$ avec $z + z' + z'' = 0$, quand L, L', L'' sont 2 à 2 transverses.

Si $z = x^\alpha e_\alpha$, et $z' = x^{\alpha*} e_{\alpha*}$, on voit que:

$$x^{\alpha*} = a_\lambda^{\alpha*} x^\lambda, \quad \|a_\beta^{\alpha*}\| \text{ étant la matrice précédente.}$$

Donc $z \to z'$ est un isomorphisme de L sur L' et $F(z, z') = b_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$, avec $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = a_\beta^{\alpha*}$, est une forme quadratique sur L. Il est loisible d'introduire deux autres formes quadratiques de même indice d'inertie car $F(z, z') = F(z', z'') = F(z'', z)$.

On peut voir que $F(z, z') = F(z, p\gamma(z)), z \in L$. Si on remarque que lorsque L'' est donné, il existe γ conservant L' point par point et envoyant L sur L'', *on peut définir la forme quadratique précédente par*:

$$z \to F(z, p\gamma(z)), \quad z \in L, \quad E = L \oplus L',$$

γ conservant L' point par point et $p(\gamma)$ — Id, *considérée comme application de L dans L', inversible.*

Désignons $p\gamma(e_\alpha)$ par $e_{\alpha**}$, alors $F(e_\alpha, e_{\beta**}) = b_{\alpha\beta}$ et $F(e_{\alpha*}, e_{\beta**}) = \delta_{\alpha\beta}$. L et L' s'identifient à des espaces duaux, $(e_{\beta*})$ base duale de (e_α). Il est possible de réduire dans le groupe spécial orthogonal la matrice de $||a_\beta^{\alpha*}||$ à une forme canonique de Sylvester. On peut aussi obtenir deux nouvelles bases (e'_α) dans L et $(e'_{\alpha*})$ dans L' dans la même orientation positive que (e_α) et $(e_{\alpha*})$ respectivement et : $(p\gamma)(e'_\alpha) = t'_\alpha e'_{\alpha*} + e'_\alpha$. Soit $\operatorname{Tr} u$ la trace de la matrice de u associée à $\varrho - \mathrm{Id}$, c'est-à-dire trace $||a_\beta^{\alpha*}||$.

L'indice d'inertie de la forme quadratique $z \to F(z, \varrho(z))$, $\varrho = p(\gamma)$, c'est-à-dire le nombre de signes $(-)$ dans la décomposition de Sylvester, noté $\operatorname{Inert}(L, L', L'')$ est égal à $\dfrac{r - \operatorname{Tr} u}{2}$, car les éléments diagonaux sont de module 1.

$$E'_{\alpha**} = t'_\alpha e'_\alpha + e'_{\alpha*},$$

est une base de L''.

$$F(e'_\alpha, \; E'_{\beta**}) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Si γ a le même sens que dans la proposition 17, posons:

$$M_\gamma(L, L') = \exp\left(-\frac{i\pi r}{2}\right) \exp\left(\frac{\pi i}{2} \Sigma t_\alpha\right). \tag{15}$$

Envoyons L sur L' par γ_2 avec $\begin{cases} \gamma_2(e_\alpha) = e_{\alpha*} \\ \gamma_2(e_{\alpha*}) = -e_\alpha , \end{cases}$

puis L' sur L'' par γ_0 avec $\begin{cases} \gamma_0(e_{\alpha*}) = e_{\alpha**} \\ \gamma_0(e_{\alpha**}) = -e_{\alpha*} , \end{cases}$

enfin L'' sur L par γ_1 avec $\begin{cases} \gamma_1(E'_{\alpha**}) = -t'_\alpha e'_\alpha \\ \gamma_1(e'_\alpha) = t'_\alpha E'_{\alpha**} . \end{cases}$

$$M_{\gamma_2}(L, L') = 1, \quad M_{\gamma_0}(L', L'') = 1,$$

$$M_{\gamma_1}(L'', L) = \exp\left(\frac{-i\pi r}{2}\right) \exp\left(-\frac{\pi i}{2} \Sigma t'_\alpha\right) = \exp\left(-\frac{i\pi}{2}(r + \operatorname{Tr} u)\right),$$

$$P = M_{\gamma_2}^{-1}(L', L)\, M_{\gamma_0}(L', L'')\, M_{\gamma_1}(L'', L) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}(r - \operatorname{Tr} u)\right). \tag{16}$$

$$\frac{1}{i\pi} \log P = \frac{r - \operatorname{Tr} u}{2} + 2k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

donc

$$\operatorname{Inert}(L, L', L'') = \frac{1}{i\pi} \log P, \quad (\operatorname{mod} 2). \tag{17}$$

Ainsi $m_2(\gamma)$ est l'indice de Maslov, mod 4, de $\gamma \in Sp_2(r)$, tel qu'il est défini par LERAY [11].

Selon LERAY [11] $Sp_2(r)$ opère transitivement et effectivement sur le revêtement $\wedge_4(r)$ de la grassmannienne lagrangienne $\wedge(r)$. On peut donc définir pour λ_4, $\lambda'_4 \in \wedge_4(r)$ et $\gamma \in Sp_2(r)$:

$$m_2(\lambda_4, \gamma\lambda_4) = m_2(\lambda_4, \lambda'_4) = m_2(\gamma) \in \mathbf{Z}_4,$$

sous la condition que λ_4 et λ'_4 se projettent sur des lagrangiens transverses L et L' et $p\gamma(L) = L'$.

Si on impose aux lagrangiens d'être orientés, alors $m_2(\gamma)$ prend ses valeurs dans un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_2$, le revêtement d'ordre 4 de l'ensemble des lagrangiens orientés s'identifie au revêtement $\wedge_2(r)$, d'où la définition de

$$m_2(\lambda_2, \gamma\lambda_2) = m_2(\lambda_2, \lambda'_2) \in \mathbf{Z}_2.$$

VII. Les revêtements d'ordre q du groupe symplectique

Considérons l'ensemble des éléments de $Mp(r)$, produits dans un ordre quelconque de facteurs (en nombre fini) $\exp i\theta$, $\exp(a_k^{\alpha\beta^*}\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\beta^*})$, τ_k, $\theta \in \mathbf{R}$, $a_k^{\alpha\beta^*} \in \mathbf{C}$, $\tau_k \in \exp \overset{2}{\vee} E_1$ ou $\exp \overset{2}{\vee} E_2$, avec: $\exp i\theta = \exp\left(-\dfrac{i}{q}\Sigma a_k^{\alpha\alpha^*}\right)$, et sommation en α et k, q fixé, entier différent de 0. Cet ensemble est un sous-groupe fermé de $Mp(r)$ dont l'élément général peut s'écrire selon le début du § (VI):

$$\exp\left(-\frac{i}{q}\Sigma a^{\alpha\alpha^*}\right)\exp(a^{\alpha\beta^*}\varepsilon_\alpha\varepsilon_{\beta^*})\,\tau_2\,\tau_1$$

soit $(\exp i\theta)\gamma$ avec $\exp i\theta = (N(\gamma))^{-1/q}$.

Ce sous-groupe de $Mp(r)$ sera noté $Sp_q(r)$.

$Sp_q(r)$ est un revêtement non trivial, d'ordre q, du groupe symplectique $Sp(2r, \mathbf{R})$.

En effet, si $p(\gamma \exp i\theta) = \mathrm{Id}$, nécessairement $\gamma \exp i\theta$ est un élément de S^1. Prenant $\Sigma a^{\alpha\alpha^*} = -2k\pi$, alors d'après (7) les q éléments $\exp\left(\dfrac{2k\pi i}{q}\right)$ sont dans le noyau de la restriction de p à $Sp_q(r)$. On peut montrer que ce sont là tous les éléments de ce noyau.

La connexité de $Sp_q(r)$ s'établirait comme celle de $Sp_2(r)$.

On définira comme plus haut si $\gamma \in Sp_q(r)$:

$$\mathrm{Ind}\,\gamma = \exp\left(\frac{2i}{q}\Sigma a^{\alpha\alpha^*}\right),$$

et si γ applique L sur L' transverse:

$$\operatorname{Ind}\gamma = \exp\left(-\frac{\pi i}{q}\Sigma t_\alpha\right) \in \mathbf{Z}_{2q}.$$

$$M_\gamma(L, L') = \exp\left(-\frac{\pi r i}{q}\right)\exp\left(\frac{\pi i}{q}\Sigma t_\alpha\right) = \exp\left(-\frac{\pi r i}{q}\right)(\operatorname{Ind}\gamma)^{-1}.$$

P étant défini comme dans (16):

$$P = \exp\left(\frac{i\pi}{q}(r - \operatorname{Tr} u)\right),$$

$$\frac{q}{2i\pi}\log P = \frac{r - \operatorname{Tr} u}{2} + kq, \quad k \in \mathbf{Z},$$

(18) $$\operatorname{Inert}(L, L', L'') = \frac{q}{2i\pi}\log P \pmod q$$

et l'indice de Maslov, mod $2q$, de $\gamma \in Sp_q(r)$ serait:

(19) $$m_q(\gamma) = -\frac{r}{2} - \frac{q}{2i\pi}\log(\operatorname{Ind}\gamma) \pmod{2q}.$$

Enfin, comme plus haut, et toujours selon [11], $Sp_q(r)$ opère transitivement et effectivement sur le revêtement d'ordre $2q$, de la grassmannienne lagrangienne Λ_{2q}, on définira donc pour λ_{2q}, λ'_{2q} se projetant sur L et L' transverses, γ envoyant λ_{2q} sur λ'_{2q}:

$$m_q(\lambda_{2q}, \lambda'_{2q}) = m_q(\lambda_{2q}, \gamma(\lambda_{2q})) = m_q(\gamma) \in \mathbf{Z}_{2q}.$$

Par la considération de lagrangiens orientés on définira ensuite $m_q(\lambda_q, \lambda'_q) \in \mathbf{Z}_q$.

Il restera à définir le revêtement universel de $Sp(2r, \mathbf{R})$ et l'indice de Maslov à valeurs dans $\mathbf{Z}$, on considèrera le sous-groupe des éléments de $Mp(r)$ avec $\Sigma a^{\alpha\alpha^*}/\theta$ rationnel.

L'indice de Maslov sera:

$$m_\infty(\gamma) = -\frac{r}{2} + \frac{\Sigma t_\alpha}{2} \in \mathbf{Z},$$

sa réduction mod $2q$ redonnera donc m_q.

VIII. Signification cohomologique des indices de Maslov et essai de généralisation

V étant une variété différentiable réelle de dimension $2r$, à structure presque symplectique, on peut chercher s'il existe des sous-fibrés lagrangiens de $T(V)$, c'est-à-dire des sous-fibrés vectoriels ξ de $T(V)$ dont la fibre ξ_x est en chaque point x, un sous-espace lagrangien de $T_x(V)$. Pour retrouver et généraliser une situation bien connue en mécanique théorique, on envisage une décomposition de $T_x(V)$ en somme directe de 2 lagrangiens transverses, ce qui permet d'introduire au moyen d'une transformation de Fourier la dualité «ondes-corpuscules».

Soit $\gamma \in Sp_q(r)$ qui transforme le lagrangien L' en le lagrangien L'', L' et L'' tous deux transverses à L. L'étude faite antérieurement montre que l'on peut définir $\mathrm{Inert}(L', L'', L)$, $m_q(\lambda', \lambda'')$, en remplaçant dans les calculs r par $r - \dim(L' \cap L'')$, de sorte que l'on a encore, mod q:

$$\mathrm{Inert}\ (L', L'', L) = m_q(\lambda'', \lambda) - m_q(\lambda', \lambda) + m_q(\lambda', \lambda''),$$

λ, λ', λ'' sont ici des éléments de $\wedge_{2q}$; évidemment on ne peut plus permuter circulairement L', L'', L, si L' et L'' ne sont pas transverses, cependant $m_q(\lambda', \lambda'')$ est défini sans ambiguité.

Une sous-variété $\mathfrak{L}$ de dimension r de V, telle que $L_x = T_x(\mathfrak{L})$ soit pour tout x un sous-espace lagrangien est dite sous-variété lagrangienne.

Considérons donc un recouvrement de $\mathfrak{L}$ par des ouverts connexes (U_α) et au-dessus de chaque (U_α) un sous-fibré lagrangien L_α tel que:

$$\text{(A)} \qquad T_x(V) = L_x \oplus L_\alpha(x), \qquad \forall x \in U_\alpha.$$

Au-dessus de chaque U_α, il est loisible de choisir, en passant au besoin à un recouvrement plus fin, de manière différentiable, λ_x, $\lambda_\alpha(x) \in \wedge_{2q}(T_x(V))$, se projetant respectivement sur L_x et $L_\alpha(x)$.

Soit $\chi_\alpha : x \to m_q(\lambda_\alpha(x), \lambda(x)) \in \mathbf{Z}_{2q}$, application constante de U_α dans $\mathbf{Z}_{2q}$. Le système des (U_α, χ_α) est susceptible de définir un cocycle $\widehat{A}$ par la valeur, mod q, de

$$m_q(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)_x = \mathrm{Inert}\ (L_\alpha, L_\beta, L)_x - m_q(\lambda_\beta, \lambda)_x + m_q(\lambda_\alpha, \lambda)_x,$$

(si sur $U_\alpha \cap U_\beta$, $\dim (L_\alpha \cap L_\beta) =$ constante) sous la condition de cohérence évidente, pour $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$:

$$\mathrm{Inert}\ (L_\alpha, L_\beta, L)_x + \mathrm{Inert}\ (L_\beta, L_\gamma, L)_x = \mathrm{Inert}\ (L_\alpha, L_\gamma, L)_x,$$

qui sera implicitement jointe à la condition (A) et qui concerne la grassmannienne lagrangienne.

Observons que pour deux systèmes (U_α, χ_α), (U_α, χ'_α) tels que $L_\alpha(x) = L'_\alpha(x)$, pour tout α et tout x, les deux cocycles obtenus au-dessus de $\mathfrak{L}$ sont cohomologues. A la situation (A) on peut donc associer univoquement un élément $\hat{\alpha}$ de $H^1(\mathfrak{L}, \mathbf{Z}_q)$.

Définition. Soit (C) une courbe orientée de la sous-variété lagrangienne $\mathfrak{L}$, image continue d'un intervalle fermé de $\mathbf{R}$. Nous appelons indice de Maslov généralisé d'ordre q de (C) pour le cocycle $(\widehat{A})$, la valeur prise par $(\widehat{A})$ sur la courbe (C) considérée comme une chaîne. Si (C) est un cycle on pourra parler de l'indice de Maslov de $\hat{\alpha}$ sur (C) et on aura alors des propriétés classiques d'invariance.

De la même manière il est possible de définir un indice à valeurs dans $\mathbf{Z}$.

Usuellement on prend $V = \mathbf{R}^{2r}$. Écrivons donc dans ce cas $\mathbf{R}^{2r} = E = E_1 \oplus E_2$ comme au n° VI. En général il est possible de poser:

$$T_x(V) = L_x \oplus E_2^x,$$

E_2^x translaté de E_2; les $(e_{\alpha *})$ constituant une base de E_2, il existe une transformation symplectique ϱ_x telle que les

$$\varrho_x(e_\alpha) = a_\alpha^{\lambda *}(x) e_{\lambda *} \oplus e_\alpha \tag{20}$$

constituent une base naturelle de L_x, car en général L_x et E_2^x sont transverses (la matrice $a_\alpha^{\lambda *}(x)$ est régulière). Il n'existe sur $\mathfrak{L}$ pas d'autre points «singuliers» pour une telle décomposition de $T_x(V)$ que ceux pour lesquels L_x est non transverse à E_2^x. Il est immédiat que $a_\alpha^{\lambda *}(x) = \dfrac{\partial x^{\lambda *}}{\partial x^\alpha}$ et comme $\dfrac{\partial x^{\lambda *}}{\partial x^\alpha} = \dfrac{\partial x^{\alpha *}}{\partial x^\lambda}$ on pourra déterminer localement au moins une fonction S telle que:

$$x^{\lambda *} = \partial_\lambda S(x^\alpha),$$

$$a_\alpha^{\lambda *}(x) = \partial_{\lambda\mu} S(x^\alpha).$$

On observera que ces singularités sont liées à l'utilisation d'un repère particulier de E [10].

Les points «singuliers» seront donc définis par

$$J(x) = \det \left\| \frac{\partial x^{\lambda *}}{\partial x^\alpha} \right\| = 0$$

et leur ensembles Σ («contour-apparent» de $\mathfrak{L}$ relativement à E_1) contiendra une sous-variété (Σ_1) de dimension $(2r - 1)$ [1]. A la décomposition de $T_x(V)$ ainsi mise en évidence on pourra associer un cocycle $\hat{\alpha}$ au-dessus de $(\mathfrak{L} - \Sigma)$, à valeurs dans $\mathbf{Z}$ (ou $\mathbf{Z}_q$). Les sections du cocycle étant à valeurs constantes, on peut l'étendre à la fermeture de $(\mathfrak{L} - \Sigma)$ c'est-à-dire $\mathfrak{L}$.

Pour retrouver très exactement la situation que nous avons décrite dans le cas général, on prendra un voisinage tubulaire de Σ; localement de part et d'autre de Σ dans $\mathfrak{L} - \Sigma$, on choisira différentiablement $\lambda_\alpha(x)$, $\lambda_\beta(x)$, de manière que $m_q(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)_x$, pour $x \in \Sigma$, soit égal au saut de l'indice de Maslov à la traversée de Σ et que $\lambda_\alpha^{(x)}$ et $\lambda_\beta^{(x)}$ se raccordent à $\lambda_2(x)$ à la frontière du voisinage tubulaire introduit ($\lambda_2(x)$ au-dessus de E_2^x). La condition de cohérence pour que $m_q(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)_x$ définisse un cocycle sera ici évanescente. On aura donc un cocycle au-dessus de $\mathfrak{L}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_q$, et grâce à l'introduction de voisinages tubulaires sur les composantes connexes de Σ, on pourra prolonger les sections $x \to m_q(\lambda_2, \lambda)_x$, raccordées différentiablement aux $x \to m_q(\lambda_\alpha, \lambda)_x$ «au-delà des singularités». On a donc retrouvé ainsi, dans l'ordre à peu près inverse, l'idée fondamentale de Leray, Hörmander, Maslov et autres auteurs. Maslov avait précisément défini l'indice à valeurs dans $\mathbf{Z}$, d'une courbe (C) de $\mathfrak{L}$, sous-variété lagrangienne de $\mathbf{R}^{2r}$, en liaison avec les changements de signe de $J(x)$ à la traversée de Σ par la courbe (C). Ce jacobien étant un hessien on comprend pourquoi l'indice de Morse peut être interprété comme cas particulier de l'indice de Maslov [1] [10].

En dimension $n = 2r = 2$, toutes les courbes différentiables sont lagrangiennes. On visualise alors facilement les données et résultats précédents.

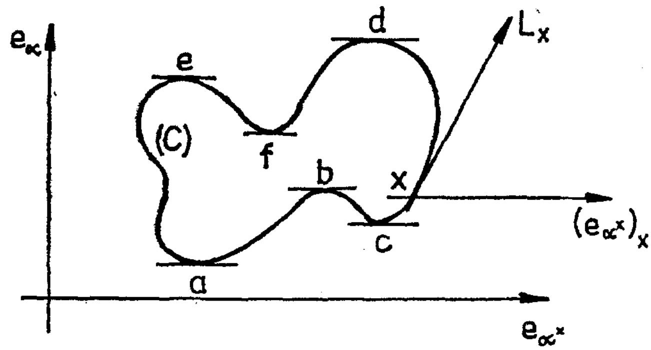

Fig. 1

Ici (a, b, c, d, e, f) constituent l'ensemble singulier Σ.

IX. Structures spinorielles symplectiques. Lien avec les structures spinorielles "orthogonales"

Nous nous bornerons à envisager le revêtement d'ordre 2, $Sp_2(r)$.

V est une variété différentiable, réelle de dimension $n = 2r$, paracompactes, munie d'une structure presque symplectique, déterminée par un champ F de 2 formes bilinéaires alternées, de rang maximum $n = 2r$ en chaque point. Il est équivalent de dire que V a une structure presque complexe car on peut toujours associer à une structure presque complexe une structure presque hermitienne. Nous ne supposons pas $dF = 0$, condition qui entraînerait que V est une variété symplectique.

On sait que V est orientable.

DÉFINITION. Il existe sur V une structure $Sp_2(r)$-spinorielle symplectique si l'on peut construire un fibré principal $\eta(P, V, Sp_2(r), q)$ et un V-morphisme principal de η sur le fibré $\xi(\widehat{E}, V, Sp(n, \mathbf{R}), \hat{\pi})$ des repères symplectiques.

Sachant que le groupe $Sp_2(r)$ est non compact, il est classique que le groupe structural peut se réduire au groupe revêtement d'ordre 2 du groupe unitaire $U(r, \mathbf{C})$, donc à celui des éléments de $Sp_2(r)$, de la forme:

$$\sigma = \exp\left(-\frac{i\Sigma a^{\alpha\alpha^*}}{2}\right)\exp\left(a^{\alpha\beta^*}\varepsilon_\alpha\,\varepsilon_{\beta^*}\right), \qquad a^{\alpha\beta^*} = \bar{a}^{\beta\alpha^*}.$$

Dans nos travaux antérieurs [4—7] nous avons obtenu $U(r, \mathbf{C})$ sous la forme d'un «groupe de spinorialité au sens large» (cas elliptique) et avec les notations de [6] les σ constituent le groupe H_e, ou du moins un groupe isomorphe. [(Avec nos notations H_e est le sous-groupe des éléments γ de Spin Q tels que $\gamma f = e^{i\theta}f$) [6].]

$U(r, \mathbf{C}) \subset SO(2r, \mathbf{R})$. Dans les conditions de la définition ci-dessus il existe donc sur V une structure spinorielle «orthogonale» au sens strict (pour la structure riemannienne sous-jacente à la structure presque-hermitienne). On a établi que pour qu'il existe une telle structure il est nécessaire et suffisant que le groupe structural $SO(2r, \mathbf{R})$ du fibré des repères orthonormés riemanniens se réduise à $SU(r, \mathbf{C})$ (après plongement dans $SO(2r, \mathbf{C})$), de sorte que nous pouvons énoncer:

Proposition 17. *Pour qu'il existe sur V une structure $Sp_2(r)$-spinorielle symplectique il faut et il suffit que le groupe structural $U(r, \mathbf{C})$ d'un fibré presque hermitien associé se réduise (dans $SO(2r, \mathbf{C})$) à $SU(r, \mathbf{C})$.*

(Sur ce point on se réfèrera aussi à [12]).

Ainsi il apparaît que les «structures spinorielles symplectiques», ne sont rien d'autre que des structures spinorielles «orthogonales» très particulières en signature elliptique.

Les variétés possédant une telle structure sont donc celles qui possèdent à la fois une structure presque complexe et une structure spinorielle naturellement associées par l'introduction d'une structure hermitienne.

Structure hilbertienne sur $C_S(F')_l\Phi^*$.

On a établi dans divers articles [4—7] que s'il existe sur V une structure spinorielle «orthogonale» au sens strict, il existe sur V un champ de r-vecteurs isotropes (signature elliptique), donc un fibré en droites complexes. Ce résultat est lié au lemme suivant:

Lemme 4. *«L'intersection» de «l'idéal» à gauche $C_S(F')_l\Phi^*$ et de «l'idéal» à droite $\Phi C_S(F')_l$ est de dimension* 1.

Il est entendu que par abus, nous appelons «intersection» de ces 2 «idéaux» l'ensemble des doubles classes d'éléments de $C_S(F')_l$. Si $\Phi u\Phi^*$ désigne une telle double classe, on a nécessairement $\Phi u\Phi^* = \Phi z\Phi^*$, $z\in\mathbf{C}$, si $u = z + \Sigma\lambda_{JK^*}\varepsilon^J\varepsilon^{K^*}$,

J ou $K^* \neq \emptyset$ (immédiat). Autrement dit: $u\Phi^* = \Phi v$ implique que $u = v = \lambda \in \mathbf{C}$. Plus généralement:

LEMME 5. *«L'intersection» de l'idéal à gauche $C_S(F')_l\Phi^*$ et de l'idéal à droite $\Phi^1 C_S(F')_l$ est de dimension* 1.

Φ^1 étant associé à $\mathcal{E}'$, lagrangien complexe, comme Φ l'est à $\mathcal{E}_1$, il existe $\gamma \in Sp_2(r)$ tel que $\gamma\Phi\gamma^{-1} = \Phi^1$, dès lors:

$$u\Phi^* = \Phi^1 v \qquad \text{équivaut à :}$$

$$u\Phi^* = \gamma\Phi\gamma^{-1} v$$

$$\gamma^{-1}u\Phi^* = \Phi(\gamma^{-1}v), \quad \text{et} \quad u = \lambda v,\ \lambda \in \mathbf{C}.$$

De ce qui précède résulte que $\Phi\varepsilon^J\varepsilon^{K^*}\Phi^* = 0$, si J ou $K^* \neq \emptyset$. Prenant $\beta \mid E' = i\mathrm{Id}$, formons:

$$\Phi\beta(\bar{u})\, v\Phi^* = \Phi\mathcal{H}(u\Phi^*, v\Phi^*)\,\Phi^*. \tag{20}$$

$\mathcal{H}(u\Phi^*, v\Phi^*)$ est la somme d'une série absolument convergente de nombres complexes. $C_S(F')_l\Phi^*$ devient ainsi un espace préhilbertien complexe, en effet: $\mathcal{H}(u\Phi^*, v\Phi^*)$ est le conjugué de $\mathcal{H}(v\Phi^*, u\Phi^*)$. On remarquera que pour u et v ayant un degré:

$$\overline{\beta(u)} = (-1)^{d^\circ u}\beta(\bar{u}), \quad \beta^2(v) = (-1)^{d^\circ v} v.$$

De plus $\mathcal{H}$ est définie positive, car d'après la formule (P) du (II), adaptée au cas complexe:

$$(\varepsilon_{\alpha*})^k(\varepsilon_\alpha)^l = (\varepsilon_\alpha)^l(\varepsilon_{\alpha*})^k - ilk(\varepsilon_\alpha)^{l-1}(\varepsilon_{\alpha*})^{k-1} + \ldots + (-i)^p\frac{l(l-1)\ldots(l-p+1)}{p!} \times$$
$$\times\, k(k-1)\ldots(k-p+1)\,(\varepsilon_p)^{l-p}(\varepsilon_{\alpha*})^{k-p} + \ldots .$$

Si $u = \varepsilon^K$ et K de degré ϱ, alors $\beta(\varepsilon^{-K})\,\varepsilon^K = i^\varrho\,\varepsilon^{K^*}\varepsilon^K$, de sorte que:

$$\mathcal{H}((\varepsilon_\alpha)^p\Phi^*, (\varepsilon_\alpha)^p\Phi^*) = p!$$

$$\mathcal{H}(\varepsilon^H\Phi^*, \varepsilon^H\Phi^*) = H!$$

(ε^H étant l'analogue de e^H de II) et

$$\mathcal{H}(\varepsilon^H\Phi^*, \varepsilon^K\Phi^*) = 0,$$

la base $\left\{\dfrac{\varepsilon^k}{\sqrt{K!}}\Phi^*\right\}$ est donc orthonormée. On s'assure que les séries formelles symplectiques convergent pour la norme $\|\ \|_2$ introduite ici car dans le développement de $\hat{u}$:

$$\|\lambda_H\varepsilon^H\|_2 < \frac{|\sigma(\hat{u})|\,|\varrho(\hat{u})|^{|H|}}{\sqrt{H!}},$$

à partir d'un certain rang.

Une construction standard permet d'envisager un espace complet.

La représentation de $Sp_2(r)$ dans $C_S(F')_l\Phi^*$ est unitaire (immédiat).

Fibrations en spineurs symplectiques.

Supposons V munie d'une structure spinorielle symplectique au sens précédent. On peut toujours associer au fibré des repères η un fibré vectoriel de fibre-type un espace de représentation irréductible du groupe $Sp_2(r)$. Prenons l'espace $C_s(F')_l\Phi^*$ construit comme au § II, avec $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\beta^*})$ au lieu de (e_α, e_{β^*}). Par produit à gauche on obtient une représentation de $Sp_2(r)$, et l'action de $Sp_2(r)$ sur cet espace est effective. En effet, par produit et combinaisons linéaires $Sp_2(r)$ engendre $C_S^+(F')_l$, dès lors si la représentation de $C_S^+(F')_l$ dans $C_S(F')_l\Phi$ n'était pas fidèle, on aurait $v \in C_S^+(F')_l$, $v \neq 0$ avec $vu\Phi^* = 0$ pour tout u, alors la représentation de $C_S(F')_l$ dans $C_S(F')_l\Phi^*$ ne serait pas non plus fidèle, a fortiori, ce qui est impossible, l'algèbre $C_S(F')_l$ étant simple.

Nous appellerons spineur symplectique sur V toute section (éventuellement locale) du fibré vectoriel de fibre-type $C_S(F')_l\Phi^*$, groupe $Sp_2(r)$, associé au fibré principal spinoriel symplectique (donc défini par le même cocycle que ce dernier).

L'expression locale d'un tel spineur est donc une fonction différentiable à valeurs dans un ensemble de séries formelles symplectiques.

Signalons que l'on pourrait construire au-dessus de V presque-symplectique un fibré banachique, fibré en algèbres de Clifford symplectiques, nous avons en effet signalé plus haut que $C_S(F)_l$, complété, admet une structure d'algèbre de Banach.

Tous ces résultats sont formellement analogue à ceux que l'on a donnés dans le cas orthogonal [4].

La réduction des représentations de H_e et de H dans l'espace des spineurs symplectiques.

H_e et H, anti-images des groupes de spinorialité respectivement au sens large et au sens strict [6] sont localement isomorphes, l'un à $U(r, \mathbf{C})$, l'autre à $SU(r, \mathbf{C})$. Or on connaît les représentations irréductibles de degré fini de ces groupes compacts, elles se déduisent par produit tensoriel des représentations dans les composantes homogènes de l'algèbre extérieure de $\mathbf{C}^r$. H_e opérant par produit à gauche dans l'espace de dimension 2^r des spineurs orthogonaux, avec les notations de [4], si $\gamma \in H_e$, $\gamma v f = \gamma v \gamma^{-1} \gamma f = v' \gamma f = v'' f$, v'' de même degré que v, $(\gamma f = (\exp i\varphi) f$ et $\gamma f \gamma^{-1} = (\exp 2i\varphi) f)$.

Il est commode de représenter ici tout élément de $C_S(F')_l\Phi^*$ sous la forme $u(\varepsilon_1^* \varepsilon_2^* \dots \varepsilon_r^*)$, u étant une série en les (ε_α). Le symbole $\gamma\Phi^*\gamma^{-1}$ prend alors un sens précis, c'est Perm$(\gamma)\Phi^*$, Perm désignant le permanent de la matrice de γ opérant dans l'espace des $(\varepsilon_{\alpha*})$.

Si $\gamma \in H_e$, alors

$$\gamma\Phi^*\gamma^{-1} = \lambda\Phi^*, \qquad \lambda \in \mathbf{C}^*, \qquad (\lambda = 1 \text{ si } \gamma \in H).$$

$$\gamma u \Phi^* \gamma^{-1} = \gamma u \gamma^{-1} \gamma \Phi^* \gamma^{-1} = u' \Phi^* u',$$

u' de même degré que u si u est homogène. La représentation de H_e ainsi obtenue est somme directe de représentations dans les composantes homogènes de l'algèbre symétrique des séries formelles symplectiques engendrée par les (ε_α), c'est-à-dire dans les composantes homogènes des spineurs symplectiques standard.

Lorsque $r = 2$, avec H et $SU(r, \mathbf{C})$ ces représentations sont celles que les physiciens qualifient de «spinorielles». On voit que les composantes homogènes de degré p, si on se réfère à la théorie des caractères sont espaces de représentations irréductibles du produit symétrique d'ordre p de la représentation usuelle de $SU(r, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}^r$. Ainsi:

Tout spineur symplectique est somme directe (finie ou infinie) de produits symétriques de spineurs orthogonaux.

Si on appelle champ de «bosons», toute section du fibré spinoriel symplectique et champ de «fermions» toute section du fibré spinoriel orthogonal, on voit que l'on obtient les premiers par «fusion» et somme directe des seconds, résultat heuristiquement très satisfaisant.

RÉFÉRENCES

[1] V. I. ARNOLD, Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques de Maslov*, Dunod, Paris, 1972.

[2] E. ARTIN, *Geometric algebra*, Interscience Publishers Inc., New York—London, 1957, X + 214 pp. *MR* **18**—553

[3] N. BOURBAKI, Éléments de mathématique, XI, Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse, Livre II, *Algèbre*, Chapitre IV: Polynômes et fractions rationnelles, Chapitre V: Corps commutatifs, Actualités Sci. Ind., no. 1102, Hermann et Cie., Paris, 1950, II + 219 + III pp. *MR* **12**—6

[4] A. CRUMEYROLLE, Structures spinorielles, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N. S.)* **11** (1969), 19—55. *MR* **42** # 6737

[5] —, Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels des variétés différentiables de dimension paire, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N. S.)* **16** (1972), 171—201. *MR* **47** # 2947

[6] —, Spin fibrations over manifolds and generalized twistors, *Differential Geometry*, Proc. Symp. Pure Math. **27**, Part 1, Stanford, 1973, Amer. Math. Soc., 1975. *Zbl* **308.** 53037

[7] —, Fibrations spinorielles et twisteurs généralisés, *Period. Math. Hungar.* **6** (1975), 143—171. *Zbl* **282.** 53030

[8] J. DIEUDONNÉ, *Sur les groupes classiques*, Actualités Sci. Ind., no. 1040 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg (N. S.), no. 1 (1945), Hermann et Cie., Paris, 1948, III + 82 pp. *MR* **9**—494

[9] B. KOSTANT, Symplectic spinors, *Symposia Mathematica*, Vol. XIV (Convegno di Geometria Simplettica e Fisica Matematica, INDAM, Roma, Gennaio 1973), pp. 139—152, Academic Press, London, 1974. *Zbl* **321.** 58015

[10] J. LERAY, Solutions asymptotiques et groupe symplectique, *Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations*, edited by J. Chazarain, (Colloque Internat., Univ. Nice, 1974), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 459, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1975, VI + 372 pp.

[11] —, Solutions asymptotiques et physique mathématique, (Colloque d'Aix-en-Provence, Juin 1974).

[12] J. TIMBEAU, Structure spinorielle sur une variété presque-symplectique, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **279** (1974), 273—276. *MR* **50** # 8365

(Reçu le 3 septembre 1975)

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
118, ROUTE DE NARBONNE
F-31077 TOULOUSE CEDEX
FRANCE