

Über fasernweise Homotopieäquivalenz von Faserräumen.

Von

ALBRECHT DOLD.

Einleitung.

Zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, X, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$ (zur Definition s. STEENROD [8]¹⁾) über der gleichen Basis X heißen fasernweise homotopieäquivalent (vgl. THOM [9], S. 164), wenn es stetige Abbildungen $h_1: B_1 \rightarrow B_2$ und $h_2: B_2 \rightarrow B_1$ gibt, die für jedes $x \in X$ die Faser über x in die Faser über x abbilden. [d.h. $h_1(p_1^{-1}(x)) \subset p_2^{-1}(x)$ und $h_2(p_2^{-1}(x)) \subset p_1^{-1}(x)$; sog. fasernweise Abbildungen] und die die Eigenschaft haben, daß die zusammengesetzten Abbildungen $h_2 \circ h_1$ und $h_1 \circ h_2$ durch fasernweise Deformationen in die Identität von B_1 resp. B_2 übergeführt werden können. Dabei ist eine fasernweise Deformation eine solche, bei der jeder Punkt nur innerhalb seiner Faser sich bewegen darf.

Es wird der Satz bewiesen (§2), daß zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, X, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$, X ein zusammenhängendes Polyeder, Y_i lokal kompakt, schon dann fasernweise homotopieäquivalent sind, wenn es eine fasernweise Abbildung $h: B_1 \rightarrow B_2$ gibt, deren Einschränkung auf eine Faser eine (gewöhnliche) Homotopieäquivalenz zwischen Bild- und Urbildfaser ist. Beim Beweis und auch bei den Anwendungen dieses Satzes in §3 spielen die in §1 untersuchten Abbildungsräume $\mathfrak{G}(Y_i, Y_k)$, $i, k = 1, 2$, eine Rolle; $\mathfrak{G}(Y_i, Y_k)$ bezeichnet die mit der „kompakt-offenen“ Topologie versehene Menge der stetigen Abbildungen von Y_i in Y_k .

Der dritte Paragraph enthält eine Klassifikation der Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$, Y lokal kompakt, S^m die m -Sphäre, bezüglich der fasernweisen Homotopieäquivalenz, die der auf FELDBAU zurückgehenden, in [8], §18 dargestellten Klassifikation dieser Faserräume bezüglich der gewöhnlichen Äquivalenz entspricht. Genauer gesagt handelt es sich beide Male nur um eine Zurückführung des Klassifikationsproblems auf die Berechnung gewisser Homotopiegruppen.

Unter Benutzung der Ergebnisse von J. P. SERRE [6] über die Gruppen $\pi_m(S^n)$ werden im Falle $Y = S^n$, $G = O_{n+1}$ = Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n , die in Frage kommenden Homotopiegruppen teilweise berechnet. Damit ergibt sich:

Eine volle Klasse fasernweise homotopieäquivalenter Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ enthält genau dann unendlich viele paarweise nicht

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

äquivalente Faserräume, wenn $m \equiv 0(4)$ und $n > \frac{m}{2}$ ist. Für $m \leq 3$ oder $n \leq 2$ ist fasernweise Homotopieäquivalenz gleichbedeutend mit Äquivalenz.

Insbesondere ist damit die von R. THOM ([9], S. 167) gestellte Frage beantwortet, ob es Faserräume mit Faser S^n und Strukturgruppe O_{n+1} gibt, die fasernweise homotopieäquivalent, aber nicht äquivalent sind.

§ 1. Eigenschaften von Abbildungsräumen.

Es werden in diesem Paragraphen gewisse Abbildungsräume untersucht, die im folgenden eine Rolle spielen. Dabei setzen wir diejenigen topologischen Räume, die mit lateinischen Buchstaben bezeichnet sind, als lokal kompakt (insbesondere Hausdorffsch) voraus. Diese Voraussetzung ist mitunter schärfer als nötig; sie vereinfacht jedoch die Darstellung und ist für die wichtigsten Ergebnisse wesentlich.

A. Es seien Y und Z topologische Räume. Die Menge der stetigen Abbildungen von Y in Z werde mit der „kompakt-offenen“ Topologie versehen (Topologie der kompakten Konvergenz bei BOURBAKI [2], § 2, Def. 1). Dadurch entstehe der topologische Raum $\mathcal{G}(Y, Z)$. Ist $g \in \mathcal{G}(Y, Z)$ und $y \in Y$, so bezeichnet $g \cdot y$ das Bild von y bei g .

B. Der Abbildungsraum $\mathcal{G}(Y, Z)$ besitzt folgende Eigenschaft (s. [2], § 2, Prop. 9):

Es sei $\mathcal{X}$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $\tilde{f}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}(Y, Z)$ ist genau dann stetig, wenn durch $f(x, y) = \tilde{f}(x) \cdot y$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in Y$ eine stetige Abbildung $f: \mathcal{X} \times Y \rightarrow Z$ definiert wird.

Hieraus folgt: Die Zuordnung $\tilde{f} \rightarrow f$ definiert eine eineindeutige Beziehung zwischen den stetigen Abbildungen $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}(Y, Z)$ und den stetigen Abbildungen $\mathcal{X} \times Y \rightarrow Z$.

C. Y und Z seien topologische Räume, $g_k: Y \rightarrow Z$, $k=0, 1$, stetige Abbildungen. g_0 und g_1 sind genau dann homotop, wenn sie sich in $\mathcal{G}(Y, Z)$ durch einen Weg verbinden lassen.

Beweis. Es sei $I = [0, 1]$ das abgeschlossene reelle Einheitsintervall. Daß sich g_0 und g_1 in $\mathcal{G}(Y, Z)$ durch einen Weg verbinden lassen, bedeutet, daß es eine stetige Abbildung $\tilde{f}: I \rightarrow \mathcal{G}(Y, Z)$ mit $\tilde{f}(0) = g_0$, $\tilde{f}(1) = g_1$ gibt. Dies ist nach B gleichwertig mit der Existenz einer stetigen Abbildung $f: I \times Y \rightarrow Z$ mit $f(0, y) = g_0 \cdot y$, $f(1, y) = g_1 \cdot y$, $y \in Y$. Dies wiederum bedeutet, daß g_0 und g_1 homotop sind.

D. Y, Z, W seien topologische Räume, $g \in \mathcal{G}(Y, Z)$, $g' \in \mathcal{G}(Z, W)$ (s. A). Die Abbildung $g' \circ g$ ist stetig, also ein Element von $\mathcal{G}(Y, W)$. Es gilt (s. [2], § 2, Prop. 10):

Die Abbildung $(g', g) \rightarrow g' \circ g$ von $\mathcal{G}(Z, W) \times \mathcal{G}(Y, Z)$ in $\mathcal{G}(Y, W)$ ist stetig. Ist insbesondere $Y = Z = W$, so ist durch $(g', g) \rightarrow g' \circ g$ eine stetige, assoziative Multiplikation in $\mathcal{G}(Y, Y)$ gegeben. Die identische Selbstabbildung von Y — wir bezeichnen sie mit e — ist Einselement bezüglich dieser Multiplikation.

²⁾ Sind $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{N}$ Mengen, $\lambda: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, $\mu: \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{N}$ Abbildungen und $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, dann bezeichnet $\mu \circ \lambda: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{N}$ die zusammengesetzte Abbildung $l \mapsto \mu(\lambda(l))$, $l \in \mathcal{L}$.

E. $\mathfrak{X}, Y, Z, W$ seien topologische Räume, $g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Z)$ (s. A) und $g': \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Z, W)$ stetige Abbildungen. Wir definieren $g' \circ g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, W)$ durch

$$(1) \quad (g' \circ g)(x) = g'(x) \circ g(x), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Die Abbildung $g' \circ g$ ist stetig, denn man kann sie durch Zusammensetzen zweier stetiger Abbildungen erhalten:

$$x \rightarrow (g'(x), g(x)) \rightarrow g'(x) \circ g(x), \quad (\text{s. D}).$$

F. Mit den Bezeichnungen von E seien $g_k: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Z)$, $g'_k: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Z, W)$, $k=0, 1$, stetige Abbildungen und $g_0 \simeq g_1$ ³⁾, $g'_0 \simeq g'_1$. Dann ist auch $g'_0 \circ g_0 \simeq g'_1 \circ g_1$. Bezeichnen wir allgemein die Homotopieklasse einer stetigen Abbildung f mit $[f]$, so können wir also das $\circ$ -Produkt von $[g'_0]$ mit $[g_0]$ durch $[g'_0] \circ [g_0] = [g'_0 \circ g_0]$ in eindeutiger Weise definieren.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es stetige Abbildungen $g: \mathfrak{X} \times I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Z)$ und $g': \mathfrak{X} \times I \rightarrow \mathfrak{G}(Z, W)$ ($I = [0, 1]$) mit

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= g_0(x), & g(x, 1) &= g_1(x), \\ g'(x, 0) &= g'_0(x), & g'(x, 1) &= g'_1(x), \quad x \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Wir bilden

$$g' \circ g: \mathfrak{X} \times I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, W) \quad (\text{s. E}).$$

Für $x \in \mathfrak{X}$ ist

$$g' \circ g(x, 0) = g'(x, 0) \circ g(x, 0) = g'_0(x) \circ g_0(x) = g'_0 \circ g_0(x).$$

Ebenso ist

$$g' \circ g(x, 1) = g'_1 \circ g_1(x), \quad \text{also} \quad g'_0 \circ g_0 \simeq g'_1 \circ g_1.$$

G. $\mathfrak{X}_0$ sei ein Teilraum des topologischen Raumes $\mathfrak{X}$. Die Menge der stetigen Abbildungen $g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ (s. A), bei welchen ganz $\mathfrak{X}_0$ in e (s. D) übergeht, ist abgeschlossen bezüglich der $\circ$ -Multiplikation [d.h. wenn g und g' solche Abbildungen sind, dann auch $g' \circ g$; dies folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung (1)].

Wie in F erhalten wir eine $\circ$ -Multiplikation der Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $g: (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_0) \rightarrow (\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ ⁴⁾. Bei der Bildung dieser Homotopieklassen werden wie üblich nur solche Deformationen zugelassen, die das Bild von $\mathfrak{X}_0$ festlassen.

Insbesondere betrachten wir den Fall, daß $\mathfrak{X}$ ein n -dimensionaler Würfel ($n > 0$), $\mathfrak{X}_0$ sein Rand, oder auch, daß $\mathfrak{X}$ eine n -Sphäre und $\mathfrak{X}_0$ ein fest gewählter Punkt darin ist. Die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $g: (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_0) \rightarrow (\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ bilden dann die Homotopiegruppe $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. [8], § 15). Über diese Gruppen beweist man fast wörtlich wie bei STEENROD ([8], 16.7 bis 16.9) den folgenden

Hilfssatz 1. Es sei Y ein lokal kompakter topologischer Raum, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(Y, Y)$ (s. A), $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ die n -te Homotopiegruppe ($n > 0$) von $\mathfrak{G}$ zum Bezugspunkt e (= Identität von Y) und $\alpha_i \in \pi_n(\mathfrak{G}, e)$, $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$1. \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 \circ \alpha_2 \quad (\text{s. G}).$$

³⁾ Das Zeichen $\simeq$ bedeutet: homotop.

⁴⁾ Die Schreibweise $g: (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_0) \rightarrow (\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ besagt, daß g eine Abbildung von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{G}(Y, Y)$ ist, bei der $\mathfrak{X}_0$ in e übergeht.

2. Die Operatorengruppe $\pi_1(\mathfrak{G}, e)$ von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ wirkt trivial, d.h. für jeden geschlossenen Weg $C: I \rightarrow \mathfrak{G}$, $C(0) = e = C(1)$ ist der induzierte Automorphismus $C^\# : \pi_n(\mathfrak{G}, e) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ (s. [8], § 16, insbesondere 16.4) die Identität.

H. Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes 1 sei $g \in \mathfrak{G}$ und $g \simeq e$. $D: I \rightarrow \mathfrak{G}$ sei ein Weg von e nach g (s. C). Der durch D induzierte Isomorphismus $D^\# : \pi_n(\mathfrak{G}, g) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ ist unabhängig von der Auswahl des Weges D (die Bogenkomponente von e in $\mathfrak{G}$ ist n -einfach nach H.S. 1; s. [8], 16.5). Wir identifizieren $\pi_n(\mathfrak{G}, g)$ mit $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ vermöge des Isomorphismus $D^\#$.

Diese Identifikation läßt sich folgendermaßen beschreiben (s. [8], § 16): Es seien $g: (S^n, x_0) \rightarrow (\mathfrak{G}, e)$ resp. $g': (S^n, x_0) \rightarrow (\mathfrak{G}, g)$ Abbildungen aus $\alpha \in \pi_n(\mathfrak{G}, e)$ resp. $\alpha' \in \pi_n(\mathfrak{G}, g)$, (S^n, x_0) die n -Sphäre mit Bezugspunkt x_0 . α und α' werden genau dann identifiziert, wenn g und g' ineinander deformiert werden können.

I. $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ seien beliebige topologische Räume. Eine stetige Abbildung $\gamma: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $\gamma^-: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Y}$ gibt derart, daß $\gamma^- \circ \gamma$ und $\gamma \circ \gamma^-$ der Identität von $\mathfrak{Y}$ resp. $\mathfrak{Z}$ homotop sind. γ^- heißt dann ein *Homotopieinverses* von γ . Man sagt $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ seien *vom gleichen Homotopietyp*, wenn es eine Homotopieäquivalenz $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ gibt.

Sind Y und Z lokal kompakte topologische Räume, dann bezeichnet $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ die mit der induzierten Topologie versehene Menge der Homotopieäquivalenzen in $\mathfrak{G}(Y, Z)$ (s. A).

J. Es sei $g: Y \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz und g^- ein Homotopieinverses von g (s. I).

1. Ist $'g$ eine stetige Abbildung von Y in Z und $'g \simeq g$, dann ist auch $'g$ eine Homotopieäquivalenz, und g^- ist ein Homotopieinverses von $'g$.

2. Ist $'g^-: Z \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $'g^- \circ g \simeq e_Y$ (= Identität von Y), dann ist $'g^- \simeq g^-$.

Hieraus und aus C folgt: $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. I) besteht aus vollen Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}(Y, Z)$. Alle Homotopieinversen von $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ liegen in der gleichen Bogenkomponente von $\mathfrak{G}(Z, Y)$.

Beweis. e_Y, e_Z seien die identischen Selbstabbildungen von Y, Z .

1. Aus $'g \simeq g$ folgt $g^- \circ 'g \simeq g^- \circ g \simeq e_Y$, ebenso $'g \circ g^- \simeq e_Z$.

2. Aus $'g^- \circ g \simeq e_Y$ folgt $g^- = e_Y \circ g^- \simeq ('g^- \circ g) \circ g^- = 'g^- \circ (g \circ g^-) \simeq 'g^- \circ e_Z = 'g^-$.

K. Sind Y, Z, W topologische Räume, $g_1: Y \rightarrow Z$ und $g_2: Z \rightarrow W$ Homotopieäquivalenzen (s. I) und g_1^- resp. g_2^- Homotopieinverse von g_1 resp. g_2 , dann ist $g_2 \circ g_1$ eine Homotopieäquivalenz und $g_1^- \circ g_2^-$ ein Homotopieinverses von $g_2 \circ g_1$. Insbesondere ist $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) abgeschlossen bezüglich der $\circ$ -Multiplikation.

Beweis. e_Y, e_Z, e_W seien die Identitäten von Y, Z, W . Dann ist $(g_2 \circ g_1) \circ (g_1^- \circ g_2^-) = g_2 \circ (g_1 \circ g_1^-) \circ g_2^- \simeq g_2 \circ e_Z \circ g_2^- = g_2 \circ g_2^- \simeq e_W$, ebenso $(g_1^- \circ g_2^-) \circ (g_2 \circ g_1) \simeq e_Y$.

L. Für $k = 0, 1$, seien $g_k, g'_k \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ (s. A), $g_0 \simeq g_1, g'_0 \simeq g'_1$. Dann ist $g'_0 \circ g_0 \simeq g'_1 \circ g_1$. Bezeichnet allgemein $\bar{g}$ die Bogenkomponente von $g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$

($\bar{g}$ ist nach C gerade die Homotopieklasse von g), so können wir also das $\circ$ -Produkt von $\bar{g}_0$ mit $\bar{g}_1$ durch $\bar{g}_0 \circ \bar{g}_1 = \overline{g_0 \circ g_1}$ in eindeutiger Weise definieren.

Bezüglich dieser Multiplikation bilden die Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ [die nach J auch Bogenkomponenten von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ sind] eine Gruppe, die wir in Analogie zu [8], 16.10 mit $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ bezeichnen.

Beweis. Es seien g, g', g'' beliebige Elemente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$, g^- ein Homotopieinverses von g , e die Identität von Y . 1. Abgeschlossenheit bezüglich der $\circ$ -Multiplikation: Nach K ist $g \circ g' \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$, also $\bar{g} \circ \bar{g}' = \overline{g \circ g'}$ eine Bogenkomponente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$.

2. Assoziativität: $\bar{g} \circ (\bar{g}' \circ \bar{g}'') = \overline{g \circ (g' \circ g'')} = \overline{(g \circ g') \circ g''} = (\bar{g} \circ \bar{g}') \circ \bar{g}''$.

3. Existenz der Linkseins: $\bar{e} \circ \bar{g} = \overline{e \circ g} = \bar{g}$.

4. Existenz des Linksinversen: $\bar{g}^- \circ \bar{g} = \overline{g^- \circ g} = \bar{e}$.

M. Es seien Y und Z topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, $g_1 \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ und g_1^- ein Homotopieinverses von g_1 (s. I). Wir definieren eine stetige Abbildung $\mathfrak{G}(Y, Y) \rightarrow \mathfrak{G}(Z, Z)$ (s. A) durch

$$g \rightarrow g_1 \circ g \circ g_1^-, \quad g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$$

und nennen sie *eine Transformation mit g_1* .

N. Y, Z, W seien topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, g resp. $'g$ sei eine Transformation mit $g_1 \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ resp. $'g_1 \in \mathfrak{G}_1(Z, W)$. Dann ist $'g \circ g$ eine Transformation mit $'g_1 \circ g_1$.

Beweis. g resp. $'g$ sei durch $g \rightarrow g_1 \circ g \circ g_1^-, g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ resp. $'g \rightarrow 'g_1 \circ 'g \circ 'g_1^-, 'g \in \mathfrak{G}(Z, Z)$ gegeben (g_1^- resp. $'g_1^-$ homotopieinvers zu g_1 resp. $'g_1$). Nach K ist $'g_1 \circ g_1 \in \mathfrak{G}_1(Z, W)$ und $g_1^- \circ 'g_1^-$ homotopieinvers zu $'g_1 \circ g_1$. Die Abbildung $g \rightarrow ('g_1 \circ g_1) \circ g \circ (g_1^- \circ 'g_1^-)$ (d. i. $'g \circ g$) ist also eine Transformation mit $'g_1 \circ g_1$.

O. Ist $g_k: \mathfrak{G}(Y, Y) \rightarrow \mathfrak{G}(Z, Z)$, $k=0, 1$, eine Transformation mit $g_k \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. M) und ist $g_0 \simeq g_1$, dann ist auch $g_0 \simeq g_1$.

Beweis. g_k sei durch $g \rightarrow g_k \circ g \circ g_k^-, g \in \mathfrak{G}(Y, Y)$ gegeben (g_k^- homotopieinvers zu g_k). Aus $g_0 \simeq g_1$ folgt $g_0^- \simeq g_1^-$ (s. J). $\hat{C}: I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Z)$ resp. $C^-: I \rightarrow \mathfrak{G}(Z, Y)$ sei ein Weg, der g_0 mit g_1 resp. g_0^- mit g_1^- verbindet (s. C). Dann ist

$$(g, t) \rightarrow C(t) \circ g \circ C^-(t), \quad g \in \mathfrak{G}(Y, Y), \quad t \in I$$

eine Deformation von g_0 in g_1 .

P. Jede Transformation mit einem Element aus $\mathfrak{G}_1(Y, Z)$ (s. M) ist eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere: Sind Y und Z topologische Räume vom gleichen Homotopietyp, dann auch $\mathfrak{G}(Y, Y)$ und $\mathfrak{G}(Z, Z)$ (s. A).

Beweis. Es seien g eine Transformation mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Z)$, g^- ein Homotopieinverses von g und g^- eine Transformation mit g^- . Nach N ist $g^- \circ g$ eine Transformation mit $g^- \circ g$. Die Identität von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ ist eine Transformation mit e (= Identität von Y), also wegen $e \simeq g^- \circ g$ in $g^- \circ g$ deformierbar (s. O). Entsprechend kann $g \circ g^-$ in die Identität von $\mathfrak{G}(Z, Z)$ deformiert werden. g ist also eine Homotopieäquivalenz und g^- ein Homotopieinverses von g .

Q. Eine Transformation mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. M) ist eine stetige Selbstabbildung von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(Y, Y)$, bei der e , die Identität von Y , in $g \circ g^-$ übergeht (g^- ein gewisses Homotopieinverses von g). Sie induziert daher einen Homomorphismus $g_*: \pi_n(\mathfrak{G}, e) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}, g \circ g^-)$, $n \geq 1$ (s. [8], 15.5). Wegen $g \circ g^- \sim e$

können wir $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ und $\pi_n(\mathfrak{G}, g \circ g^-)$ in natürlicher Weise identifizieren (s. H). g_* wird damit zu einem Endomorphismus von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$.

Transformationen mit Elementen aus der gleichen Bogenkomponente von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ sind homotope Abbildungen (s. O) und induzieren daher den gleichen Endomorphismus g_* . Bezeichnet $\bar{g}$ die Bogenkomponente von g , so können wir also durch die Festsetzung $\bar{g}_* = g_*$ in eindeutiger Weise jeder Bogenkomponente $\bar{g}$ von $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$, d.h. jedem Element von $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ (s. L), einen Endomorphismus $\bar{g}_*$ von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$ zuordnen.

Eine Transformation erst mit $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$, dann mit $g' \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ ergibt eine Transformation mit $g' \circ g$ (s. N). Also ist $(g' \circ g)_* = \bar{g}'_* \circ \bar{g}_*$. Daraus folgt $(\bar{g}' \circ \bar{g})_* = \bar{g}'_* \circ \bar{g}_*$. Die Identität von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ ist eine Transformation mit e , also $\bar{e}_*$ die Identität von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$. Wir erhalten somit:

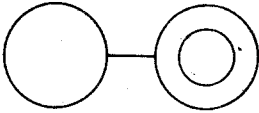


Fig. 1.

Durch die Zuordnung $\bar{g} \rightarrow \bar{g}_*$ wird $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ zur Operatorengruppe von $\pi_n(\mathfrak{G}, e)$, $n > 0$.

Diese Aussage bleibt richtig für $n=0$, wenn wir dann unter $\bar{g}_*$ den durch $\bar{g}$ bestimmten inneren Automorphismus von $\pi_0(\mathfrak{G}, e)$ verstehen.

Bemerkung 1. Die Menge der Homöomorphismen von Y auf sich ist in $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) enthalten. Das Beispiel der Sphären könnte vielleicht zur Vermutung führen, daß allgemein jede Homotopieäquivalenz $Y \rightarrow Y$ sich in einen Homöomorphismus deformieren läßt, zumindest wenn Y zusammenhängend ist. Wir geben folgendes Gegenbeispiel:

Y bestehe aus einem abgeschlossenen Kreisring, einer Kreislinie und einer Strecke, die beide verbindet (s. Fig. 1). Die Abbildung $g: Y \rightarrow Y$ bestehe darin, daß man zunächst den Kreisring radienweise auf den äußeren Randkreis drückt und dann das so entstehende Gebilde an der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke spiegelt. Dann ist $g \circ g \simeq e$, aber g nicht in eine topologische Abbildung deformierbar.

§ 2. Fasernweise Abbildungen und fasernweise Homotopieäquivalenz.

R. Es sei $\mathfrak{B}$ ein Faserraum (fibre bundle bei STEENROD [8], § 2). Durch die Schreibweise $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ bringen wir zum Ausdruck, daß B der gefaserte Raum (bundle space), X die Basis (base space), $p: B \rightarrow X$ die Projektion (projection), und G die Strukturgruppe (group of the bundle) von $\mathfrak{B}$ ist.

Ist A ein Teilraum von X , dann bezeichnet $\mathfrak{B}|A = \{p^{-1}(A), p_A, A, Y, G\}$ den über A gelegenen Teil von $\mathfrak{B}$; $p_A: p^{-1}(A) \rightarrow A$ ist dabei die durch p definierte Abbildung⁵⁾ (vgl. [8], 9.2).

Definition 1. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung. Unter einer fasernweisen

⁵⁾ $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ seien Mengen, $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ eine Abbildung, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ und $\mu(\mathfrak{M}') \subset \mathfrak{N}'$. Wir nennen die Abbildung $\mu': \mathfrak{M}' \rightarrow \mathfrak{N}'$, die durch $\mu'(m) = \mu(m)$, $m \in \mathfrak{M}'$ gegeben ist, die durch μ definierte Abbildung.

Abbildung $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ (kurz: f -Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$) verstehen wir eine stetige Abbildung $h: B \rightarrow B'$ mit der Eigenschaft

$$(2) \quad \bar{h} \circ p = p' \circ h.$$

Ist insbesondere $X = X'$ und $\bar{h}$ die Identität, dann sprechen wir von f -Abbildungen schlechthin (ohne den Zusatz: zur Abbildung $\bar{h}$).

Eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$ bildet also für jedes $x \in X$ die Faser $p^{-1}(x)$ stetig in die Faser $p'^{-1}(h(x))$ ab, im Gegensatz zu einer fasertreuen Abbildung (s. [8], 2.5) jedoch im allgemeinen nicht topologisch.

Definition 2. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung und $\mathfrak{B} \times I = \{B \times I, q, X \times I, Y, G\}$ das Produkt von $\mathfrak{B}$ mit $I = [0, 1]$ (s. [8], 11.1). $q: X \times I \rightarrow X$ sei durch $q(x, t) = x$, $x \in X$, $t \in I$ definiert. Eine f -Abbildung $\mathfrak{h}: \mathfrak{B} \times I \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h} = \bar{h} \circ q$ (s. Def. 1) heißt f -Homotopie zur Abbildung $\bar{h}$.

Ist insbesondere $X = X'$ und $\bar{h}$ die Identität, dann sprechen wir von f -Homotopien schlechthin (ohne den Zusatz: zur Abbildung $\bar{h}$).

Definition 3. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung. Zwei f -Abbildungen $h_k: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$, $k=0, 1$, zur Abbildung $\bar{h}$ (s. Def. 1) heißen f -homotop, in Zeichen $h_0 \sim_f h_1$, wenn es eine f -Homotopie $\mathfrak{h}: \mathfrak{B} \times I \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ (s. Def. 2) gibt mit

$$\mathfrak{h}(b, 0) = h_0(b), \quad \mathfrak{h}(b, 1) = h_1(b), \quad b \in B.$$

$\mathfrak{h}$ selbst heißt dann auch eine f -Deformation von h_0 in h_1 ; m. a. W.: Bei einer f -Deformation von h_0 in h_1 beschreibt der Bildpunkt von $b \in B$ einen stetig von b abhängenden Weg, der $h_0(b)$ mit $h_1(b)$ verbindet und der ganz in der Faser $p'^{-1}(x')$, $x' = \bar{h} \circ p(b)$, verläuft.

S. Folgendes ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen 1 bis 3: Sind $\mathfrak{B}_k = \{B_k, p_k, X_k, Y_k, G_k\}$, $k=1, 2, 3$, Faserräume und h_i und $\bar{h}_i$ f -Abbildungen $\mathfrak{B}_i \rightarrow \mathfrak{B}_{i+1}$ zu den Abbildungen $\bar{h}_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$, $i=1, 2$, dann ist $h_2 \circ h_1$ eine f -Abbildung $\mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_3$ zur Abbildung $\bar{h}_2 \circ \bar{h}_1$, und aus $h_i \sim_f h'_i$ folgt $h_2 \circ h_1 \sim_f h'_2 \circ h'_1$. Die identische Selbstabbildung von $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ ist eine f -Abbildung (zur Identität der Basis).

Bemerkung 2. Wir werden uns im folgenden fast ausschließlich mit f -Abbildungen resp. f -Homotopien zur Identität der Basis beschäftigen (insbesondere werden also Bild- und Urbildfaserraum die gleiche Basis haben). Diese Beschränkung kann in folgendem Sinne als unwesentlich angesehen werden:

Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, $\bar{h}: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung, $\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}') = \{\tilde{B}, \tilde{p}, X, Y', G'\}$ der induzierte Faserraum, $h^0: \bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}') \rightarrow \mathfrak{B}'$ die induzierte fasertreue Abbildung (s. [8], § 10) und $h_x^0: \tilde{p}^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(\bar{h}(x))$ die durch h^0 definierte Abbildung⁵⁾.

Wir ordnen jeder f -Abbildung $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ die f -Abbildung $h': \mathfrak{B} \rightarrow \bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ zu, die durch $h'(b) = (h_x^0)^{-1}(h(b))$, $b \in B$, $x = p(b)$ gegeben ist.

Einer f -Abbildung $h': \mathfrak{B} \rightarrow \bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ hingegen ordnen wir die f -Abbildung $h^0 \circ h': \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$ zu.

Die beiden Zuordnungen sind invers zueinander und stiften eine eindeutige, f -Homotopien erhaltende Beziehung zwischen den f -Abbildungen $h': \mathfrak{B} \rightarrow \bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ und den f -Abbildungen $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ zur Abbildung $\bar{h}$.

Definition 4. Es seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Faserräume über der gleichen Basis. Eine f -Abbildung $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ (s. Def. 1) heißt f -Homotopieäquivalenz, wenn es eine f -Abbildung $h': \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$ gibt mit (s. Def. 3)

$$h' \circ h \sim e, \quad h \circ h' \sim e', \quad e, e' \text{ die Identitäten von } \mathfrak{B}, \mathfrak{B}'.$$

Definition 5. Zwei Faserräume $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ über der gleichen Basis heißen f -homotopieäquivalent (oder vom gleichen f -Homotopietyp), wenn es eine f -Homotopieäquivalenz $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ (s. Def. 4) gibt.

Wir wollen ein einfaches Kriterium dafür angeben, daß eine f -Abbildung eine f -Homotopieäquivalenz ist. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Betrachtungen einschließlich Hilfssatz 2.

T. Es seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ beliebige, Y, Y' lokal kompakte topologische Räume. Wir bilden die (trivialen) Faserräume $\mathfrak{X} \times Y, \mathfrak{X}' \times Y'$ (Basis $\mathfrak{X}$ resp. $\mathfrak{X}'$). $\pi: \mathfrak{X}' \times Y' \rightarrow Y'$ sei durch $\pi(x', y') = y', x' \in \mathfrak{X}', y' \in Y'$ gegeben. $\xi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ sei eine stetige Abbildung.

Ist $\xi: \mathfrak{X} \times Y \rightarrow \mathfrak{X}' \times Y'$ eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{\xi}$ (s. Def. 1), dann ist $\pi \circ \xi: \mathfrak{X} \times Y \rightarrow Y'$ stetig, also auch (s. B) die durch $\tilde{\xi}(x) \cdot y = \pi \circ \xi(x, y), x \in \mathfrak{X}, y \in Y$ definierte Abbildung $\tilde{\xi}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y')$.

Es sei umgekehrt $\eta: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y')$ eine stetige Abbildung. Die Abbildung $(x, y) \rightarrow \eta(x) \cdot y$ von $\mathfrak{X} \times Y$ in Y' ist stetig (s. B), also auch die durch $\eta^*(x, y) = (\tilde{\xi}(x), \eta(x) \cdot y)$ definierte Abbildung $\eta^*: \mathfrak{X} \times Y \rightarrow \mathfrak{X}' \times Y'$. η^* bildet die Faser $x \times Y$ in die Faser $\tilde{\xi}(x) \times Y'$ ab, ist also eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{\xi}$ (s. Def. 1).

Es ist $(\tilde{\xi})^*(x, y) = (\tilde{\xi}(x), \tilde{\xi}(x) \cdot y) = (\tilde{\xi}(x), \pi \circ \xi(x, y)) = \xi(x, y)$, also $(\tilde{\xi})^* = \xi$, ebenso $(\eta^*) = \eta$. Die beiden Zuordnungen $\xi \rightarrow \tilde{\xi}$ und $\eta \rightarrow \eta^*$ sind also invers zueinander und stiften somit eine eindeutige Beziehung zwischen den f -Abbildungen $\xi: \mathfrak{X} \times Y \rightarrow \mathfrak{X}' \times Y'$ zur Abbildung $\bar{\xi}$ und den stetigen Abbildungen $\tilde{\xi}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y')$.

Hilfssatz 2. V sei eine abgeschlossene n -dimensionale Vollkugel ($n > 0$), S ihre Randsphäre. Y, Y' seien lokal kompakte topologische Räume. $V \times Y, V \times Y', S \times Y$, und $S \times Y'$ werden als (triviale) Faserräume über der Basis V resp. S aufgefaßt. Es seien gegeben:

$\alpha)$ Eine f -Abbildung (s. Def. 1) $H: V \times Y \rightarrow V \times Y'$ mit der Eigenschaft: Die durch H definierte Abbildung $h_v: v \times Y \rightarrow v \times Y'$ ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $v \in V$,

$\beta)$ eine f -Abbildung $h': S \times Y' \rightarrow S \times Y$,

$\gamma)$ eine f -Homotopie (s. Def. 2) $\varphi: S \times Y \times I \rightarrow S \times Y, I = [0, 1]$, mit $\varphi(x, y, 0) = h'(H(x, y)), \varphi(x, y, 1) = (x, y), x \in S, y \in Y$.

Dann gibt es eine f -Abbildung $H': V \times Y' \rightarrow V \times Y$ und eine f -Homotopie $\Phi: V \times Y \times I \rightarrow V \times Y$ mit

$$\begin{aligned} H'(x, y') &= h'(x, y'), & \Phi(x, y, t) &= \varphi(x, y, t), & \Phi(v, y, 0) &= H' \circ H(v, y), \\ \Phi(v, y, 1) &= (v, y), & x \in S, & & v \in V, & y' \in Y', \quad t \in I. \end{aligned}$$

Beweis. Wir übersetzen entsprechend der in T gegebenen eindeutigen Beziehung die Voraussetzungen $\alpha)$ bis $\gamma)$ und die Behauptung des Hilfssatzes 2.

Es seien gegeben die stetigen Abbildungen

$$\tilde{\alpha}) \tilde{H}: V \rightarrow \mathcal{G}(Y, Y') \text{ mit } \tilde{H}(V) \subset \mathcal{G}_1(Y, Y') \text{ (s. I),}$$

$$\tilde{\beta}) \tilde{h}': S \rightarrow \mathcal{G}(Y', Y),$$

$\tilde{\gamma}) \tilde{\varphi}: S \times I \rightarrow \mathcal{G}(Y, Y)$ mit $\tilde{\varphi}(x, 0) = \tilde{h}'(x) \circ \tilde{H}(x)$, $\tilde{\varphi}(x, 1) = e$, $x \in S$, e die Identität von Y .

Dann gibt es stetige Abbildungen $\tilde{H}': V \rightarrow \mathcal{G}(Y', Y)$ und $\tilde{\Phi}: V \times I \rightarrow \mathcal{G}(Y, Y)$ mit

$$\tilde{H}'|_S = \tilde{h}', \quad \tilde{\Phi}(v, 0) = \tilde{H}'(v) \circ \tilde{H}(v), \quad \tilde{\Phi}(v, 1) = e, \quad \tilde{\Phi}|_{S \times I} = \tilde{\varphi}, \quad v \in V.$$

[Die der Abbildung ξ in T entsprechenden Abbildungen $\bar{H}, \bar{h}', \bar{H}'$ sind gleich der Identität, während $\bar{\Phi}$ und $\bar{\varphi}$ durch $\bar{\Phi}(v, t) = v$, $\bar{\varphi}(x, t) = x$, $v \in V$, $x \in S$, $t \in I$ gegeben sind.]

Es sei x_0 ein fester Punkt aus S . $\tilde{H}(x_0)$ ist eine Homotopieäquivalenz (s. $\tilde{\alpha}$) und $\tilde{h}'(x_0) \circ \tilde{H}(x_0) \simeq e$ (s. $\tilde{\gamma}$), also $\tilde{H}(x_0) \circ \tilde{h}'(x_0) \simeq e$ (s. J). Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{h}' &= \tilde{h}' \circ e^6 & \text{s. (I)} \\ &\simeq \tilde{h}' \circ (\tilde{H}(x_0) \circ \tilde{h}'(x_0)) & \text{s. F} \\ &= (\tilde{h}' \circ \tilde{H}(x_0)) \circ \tilde{h}'(x_0) \\ &\simeq (\tilde{h}' \circ (\tilde{H}|_S)) \circ \tilde{h}'(x_0) & \text{wegen } \tilde{H}|_S \simeq \tilde{H}(x_0)^6 \text{ und F} \\ &\simeq e \circ \tilde{h}'(x_0) = \tilde{h}'(x_0) & \text{s. } \tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

$\tilde{h}'$ ist also homotop einer konstanten Abbildung, d.h. stetig auf V erweiterbar. Sei

$$(3) \quad \tilde{H}': V \rightarrow \mathcal{G}(Y', Y), \quad \tilde{H}'|_S = \tilde{h}'$$

eine solche Erweiterung. Ferner sei $S^n = V \times 0 \cup V \times 1 \cup S \times I$ die Rand-sphäre von $V \times I$ und $\tilde{\Phi}: S^n \rightarrow \mathcal{G}(Y, Y)$ durch

$$(4) \quad \tilde{\Phi}(v, 0) = \tilde{H}'(v) \circ \tilde{H}(v), \quad \tilde{\Phi}(v, 1) = e, \quad \tilde{\Phi}|_{S \times I} = \tilde{\varphi}, \quad v \in V$$

definiert. Diese Definition ist widerspruchsfrei. Nach $\tilde{\gamma}$ ist nämlich $\tilde{\varphi} \equiv e$ in $S \times 1$, und in $S \times 0$ ist $\tilde{\varphi}(x, 0) = \tilde{h}'(x) \circ \tilde{H}(x) = \tilde{H}'(x) \circ \tilde{H}(x)$, letzteres nach (3).

⁶⁾ Wir verwenden hier wie auch später manchmal dasselbe Zeichen für einen Punkt eines topologischen Raumes und die entsprechende konstante Abbildung in diesen Raum.

' $\tilde{\Phi}$ repräsentiert ein gewisses Element α aus $\pi_n(\mathcal{G}(Y, Y), e)$ [wir denken uns S^n orientiert und nehmen als Bezugspunkte etwa $(x_0, 1)$]. Wir wählen nun eine Abbildung " $\tilde{\Phi}: (S^n, (x_0, 1)) \rightarrow (\mathcal{G}(Y, Y), e)$ aus der Homotopieklasse $-\alpha$ derart, daß

$$(5) \quad ''\tilde{\Phi} \mid S \times I \cup V \times 1 = e^6)$$

ist. Das ist immer möglich; sollte " $\tilde{\Phi}$ die Eigenschaft (5) zunächst noch nicht besitzen, so kann dies durch eine einfache Deformation (durch „Konzentration“ der Abbildung " $\tilde{\Phi}$ in $V \times 0$) erreicht werden.

Die Abbildung " $\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Phi}$ repräsentiert nach Hilfssatz 1 das Element $\alpha - \alpha = 0$ aus $\pi_n(\mathcal{G}(Y, Y), e)$, kann also auf $V \times I$ stetig erweitert werden. Es sei

$$(6) \quad \tilde{\Phi}: V \times I \rightarrow \mathcal{G}(Y, Y), \quad \tilde{\Phi} \mid S^n = ''\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Phi}$$

eine solche Erweiterung.

Definieren wir $\tilde{H}': V \rightarrow \mathcal{G}(Y', Y)$ durch

$$(7) \quad \tilde{H}'(v) = ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ \tilde{H}(v), \quad v \in V,$$

dann sind $\tilde{H}'$ und $\tilde{\Phi}$ die gesuchten Abbildungen. Ist nämlich $x \in S$, $v \in V$, so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{H}'(x) &= ''\tilde{\Phi}(x, 0) \circ \tilde{H}(x) && \text{s. (7)} \\ &= \tilde{h}'(x) && \text{s. (5) und (3),} \\ \tilde{\Phi}(v, 0) &= ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ \tilde{\Phi}(v, 0) && \text{s. (6) und (1)} \\ &= ''\tilde{\Phi}(v, 0) \circ \tilde{H}(v) \circ \tilde{H}(v) && \text{s. (4)} \\ &= \tilde{H}'(v) \circ \tilde{H}(v) && \text{s. (7),} \\ \tilde{\Phi}(v, 1) &= ''\tilde{\Phi}(v, 1) \circ \tilde{\Phi}(v, 1) && \text{s. (6) und (1)} \\ &= e && \text{s. (5) und (4),} \\ \tilde{\Phi} \mid S \times I &= (''\tilde{\Phi} \mid S \times I) \circ (''\tilde{\Phi} \mid S \times I) && \text{s. (6)} \\ &= \tilde{\varphi} && \text{s. (5) und (4).} \end{aligned}$$

Satz 1. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X, Y', G'\}$ Faserräume, Y und Y' lokal kompakt, X ein Polyeder. $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ sei eine f -Abbildung (s. Def. 1) und $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(x)$, $x \in X$, die durch h definierte Abbildung⁵⁾.

h ist genau dann eine f -Homotopieäquivalenz (s. Def. 4), wenn h_x eine Homotopieäquivalenz (s. I) ist für jedes $x \in X$.

Korollar 1. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faserräume, Y und Y' lokal kompakt, X ein Polyeder. $\bar{h}: X \rightarrow X'$ sei eine stetige Abbildung, $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$ (s. Def. 1), und für jedes $x \in X$ sei die durch h definierte Abbildung $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(\bar{h}(x))$ ⁵⁾ eine Homotopieäquivalenz (s. I).

Dann sind $\mathfrak{B}$ und der induzierte Faserraum $\bar{h}^{-1}(\mathfrak{B}')$ (s. [8], § 10) f -homotopieäquivalent (s. Def. 5).

Korollar 1 folgt aus Satz 1 auf Grund der Bemerkung 2, S. 117

Korollar 2. Ein Faserraum $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$, X ein Polyeder, Y lokal kompakt, ist genau dann dem Produkt $X \times Y$ f -homotopieäquivalent (s. Def. 5), wenn es eine stetige Abbildung $h: B \rightarrow Y$ gibt derart, daß $h|p^{-1}(x)$ eine Homotopieäquivalenz ist für jedes $x \in X$.

Zu Korollar 2. $\pi: X \times Y \rightarrow Y$ sei durch $\pi(x, y) = y$, $x \in X$, $y \in Y$ definiert.

$H: \mathfrak{B} \rightarrow X \times Y$ sei eine f -Homotopieäquivalenz. Dann ist $h = \pi \circ H$ eine stetige Abbildung von B in Y . Die durch H definierte Abbildung $H_x: p^{-1}(x) \rightarrow x \times Y$ ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$ (s. Satz 1), also auch $h|p^{-1}(x) = (\pi|x \times Y) \circ H_x$, denn $\pi|x \times Y$ ist ein Homöomorphismus.

Umgekehrt sei $h: B \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $h|p^{-1}(x)$ eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$. Dann ist durch $b \rightarrow (p(b), h(b))$, $b \in B$ eine f -Abbildung $H: \mathfrak{B} \rightarrow X \times Y$ gegeben, und die durch H definierte Abbildung $H_x: p^{-1}(x) \rightarrow x \times Y$ ist eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$. H ist also eine f -Homotopieäquivalenz (s. Satz 1).

Korollar 3. Es sei X ein Polyeder, Y ein lokal kompakter topologischer Raum. Die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $X \rightarrow \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I) bilden eine Gruppe bezüglich der $\odot$ -Multiplikation (s. F).

Zu Korollar 3. Die Assoziativität der $\odot$ -Multiplikation folgt unmittelbar aus ihrer Definition. Die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $x \rightarrow e$ (= Identität von Y) ist Einselement. Es bleibt die Existenz des Links-inversen nachzuweisen.

$\tilde{h}: X \rightarrow \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ sei eine stetige Abbildung. Durch $(x, y) \rightarrow (x, \tilde{h}(x) \cdot y)$, $x \in X$, $y \in Y$ definieren wir eine f -Selbstabbildung h von $X \times Y$ (s. T). $\tilde{h}(x)$ ist eine Homotopieäquivalenz, also auch die durch h definierte Abbildung von $x \times Y$ in sich⁵⁾. h selbst ist also nach Satz 1 eine f -Homotopieäquivalenz. Wir wählen (s. Def. 4) eine f -Abbildung $h': X \times Y \rightarrow X \times Y$ und eine f -Deformation $\varphi: X \times Y \times I \rightarrow X \times Y$ von $h' \circ h$ in die Identität von $X \times Y$. Die in T hergestellte eindeutige Beziehung liefert dann eine stetige Abbildung $\tilde{h}': X \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ und eine Deformation $\tilde{\varphi}: X \times I \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ von $\tilde{h}' \odot \tilde{h}$ in die konstante Abbildung $x \rightarrow e$, $x \in X$. Wegen $\tilde{h}(x) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ und $\tilde{h}'(x) \circ \tilde{h}(x) \simeq e$ ist $\tilde{h}'(x) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. J), wegen $\tilde{\varphi}(x, t) \simeq \tilde{\varphi}(x, 1) = e$ ist $\tilde{\varphi}(x, t) \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. J). $\tilde{h}'$ ist also eine Abbildung von X in $\mathfrak{G}_1(Y, Y)$ und die Homotopieklasse von $\tilde{h}'$ ist linksinvers zu der von $\tilde{h}$.

Beweis des Satzes 1. Es sei h eine f -Homotopieäquivalenz. Aus Definition 4 und aus I folgt, daß dann h_x für jedes $x \in X$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Umgekehrt sei jetzt h_x eine Homotopieäquivalenz für jedes $x \in X$.

1. Es bezeichne X_n , $n = 0, 1, \dots$ das n -dimensionale Gerüst einer festen Zellenzerlegung von X , $h_n: \mathfrak{B}|X_n \rightarrow \mathfrak{B}'|X_n$ (s. R) die durch h definierte f -Abbildung⁵⁾. Wir konstruieren für jedes $n \geq 0$ eine f -Abbildung $h'_n: \mathfrak{B}'|X_n \rightarrow \mathfrak{B}|X_n$ und eine f -Deformation φ_n von $h'_n \circ h_n$ in die Identität von $\mathfrak{B}|X_n$ derart, daß $h'_n(b') = h'_{n-1}(b')$ und $\varphi_n(b, t) = \varphi_{n-1}(b, t)$ ist für $b \in p^{-1}(X_{n-1})$, $b' \in p'^{-1}(X_{n-1})$.

$t \in I$. Die f -Abbildungen h'_n setzen sich dann zu einer f -Abbildung $h': \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$ zusammen, die f -Deformationen φ_n zu einer f -Deformation φ von $h' \circ h$ in die Identität von $\mathfrak{B}$.

Um den Fall $n=0$ zu erledigen, nehmen wir für jede Ecke $x \in X$ ein Homotopieinverses h'_x von h_x (s. I) und eine Deformation von $h'_x \circ h_x$ in die Identität von $p^{-1}(x)$. h'_0 resp. φ_0 ist dann einfach die Gesamtheit dieser Abbildungen resp. Deformationen.

Wir nehmen nun an (Induktionsvoraussetzung), h'_{n-1} und φ_{n-1} ($n \geq 1$) seien bereits konstruiert. V sei eine n -Zelle von X_n , S ihr Rand. Da V in einen Punkt zusammenziehbar ist, kann $\mathfrak{B}|V$ (s. R) resp. $\mathfrak{B}'|V$ als das Produkt $V \times Y$ resp. $V \times Y'$ aufgefaßt werden (s. [8], 11.6). Durch h_n , h'_{n-1} und φ_{n-1} werden dann f -Abbildungen $h'_V: V \times Y \rightarrow V \times Y'$, $h'_S: S \times Y' \rightarrow S \times Y$ und eine f -Deformation $\varphi_S: S \times Y \times I \rightarrow S \times Y$ definiert⁵⁾, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 genügen. Es gibt also eine f -Abbildung $h'_V: V \times Y' \rightarrow V \times Y$ und eine f -Deformation φ_V von $h'_V \circ h_V$ in die Identität von $V \times Y$ mit $h'_V(x, y') = h'_S(x, y')$ und $\varphi_V(x, y, t) = \varphi_S(x, y, t)$, $x \in S$, $y \in Y$, $y' \in Y'$, $t \in I$.

Wir schreiben jetzt wieder $\mathfrak{B}|V$ resp. $\mathfrak{B}'|V$ statt $V \times Y$ resp. $V \times Y'$. Dann lautet das Ergebnis: Es gibt eine f -Abbildung $h'_V: \mathfrak{B}'|V \rightarrow \mathfrak{B}|V$ und eine f -Deformation φ_V von $h'_V \circ h_V$ ($h_V: \mathfrak{B}|V \rightarrow \mathfrak{B}'|V$ die durch h definierte f -Abbildung⁵⁾) in die Identität von $\mathfrak{B}|V$ mit $h'_V(b') = h'_{n-1}(b')$ und $\varphi_V(b, t) = \varphi_{n-1}(b, t)$ für $b \in p^{-1}(S)$, $b' \in p'^{-1}(S)$, $t \in I$.

Wir wählen für jede n -Zelle V ein solches Paar h'_V , φ_V und erklären h'_n und φ_n durch $h'_n(b') = h'_V(b')$, $\varphi_n(b, t) = \varphi_V(b, t)$ für $b \in p^{-1}(V)$, $b' \in p'^{-1}(V)$, $t \in I$.

2. $h'_x: p'^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(x)$, $x \in X$ sei die durch h' definierte Abbildung. Nach Konstruktion von h' ist $h'_x \circ h_x$ in die Identität von $p^{-1}(x)$ deformierbar. h'_x ist also eine Homotopieäquivalenz (s. J). Wir können demnach auf h' den im ersten Teil dieses Beweises durchgeführten Schluß anwenden und erhalten eine f -Abbildung $h'': \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ mit $h'' \circ h' \sim_{\downarrow} e'$ ($=$ Identität von $\mathfrak{B}'$). Dann ist aber $h'' \sim_{\downarrow} h'' \circ (h' \circ h) = (h'' \circ h') \circ h \sim_{\downarrow} h$, also $h \circ h' \sim_{\downarrow} e'$. Satz 1 ist damit bewiesen.

Bemerkung 3. Die Voraussetzungen des Satzes 1 lassen sich abschwächen. Es genügt z. B. anzunehmen, daß X ein CW-Komplex ist im Sinne von J. H. C. WHITEHEAD ([11], S. 223); der Beweis wird dadurch nicht wesentlich komplizierter. Auch auf die Eigenschaft von Y , lokal kompakt zu sein, kann man verzichten, allerdings nicht, ohne den Beweis erheblich zu ändern. Schließlich läßt sich die Voraussetzung über die Abbildungen h_x mit Hilfe des unten folgenden Satzes 2 reduzieren.

Dagegen wird der Satz 1 falsch, wenn man über X keinerlei einschränkende Voraussetzungen macht. Wir geben als Beispiel⁷⁾ eine f -Selbstabbildung h eines Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ mit lokal kompakter Faser Y an, die keine f -Homotopieäquivalenz ist, obwohl für jedes $x \in X$ durch h ein Homöomorphismus $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(x)$ definiert wird⁵⁾.

⁷⁾ Das angeführte Beispiel findet sich in anderem Zusammenhang bei ARENS [1], S. 601.

X und Y sind Teilräume der reellen Zahlengeraden. X besteht aus den Punkten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ und 0 , Y aus den Punkten $0, 1, 2, \dots$ und $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Die Gruppe G besteht nur aus der Identität von Y , $\mathfrak{B}$ ist also das Produkt $X \times Y$, p die Projektion auf den Faktor X .

Für $k=1, 2, 3, \dots, \infty$, $m=0, 1, 2, \dots$ sei

$$h\left(\frac{1}{k}, m\right)^8 = \begin{cases} \left(\frac{1}{k}, m\right) & \text{für } m < k^9 \\ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) & \text{für } m = k \neq 1 \\ \left(\frac{1}{k}, m-1\right) & \text{für } m > k \end{cases}$$

$$h\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m}\right) & \text{für } 0 < m < k \\ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{m+1}\right) & \text{für } m \geq k \end{cases}$$

h ist stetig. $(0, 0)$ ist die einzige Stelle, an der dies fraglich scheinen könnte. Wenn aber $x \in X$ und $y \in Y$ gegen 0 konvergieren, dann konvergiert $h(x, y)$ gegen $(0, 0) = h(0, 0)$. h ist also eine f -Abbildung. Die durch h definierte Abbildung $h_x: x \times Y \rightarrow x \times Y$ ist ein Homöomorphismus für jedes $x \in X$.

Wäre h eine f -Homotopieäquivalenz, dann gäbe es (s. Def. 4) eine f -Selbstabbildung h' von $X \times Y$ mit $h \circ h' \sim e$ und $h' \circ h \sim e$ (e = Identität von $X \times Y$). In $X \times Y$ sind aber keine zwei verschiedenen Punkte durch einen Weg verbindbar. Bei einer Deformation kann sich also eine stetige Abbildung in $X \times Y$ nicht ändern. Es müßte also $h \circ h' = e$ und $h' \circ h = e$ sein, d. h. h ein Homöomorphismus und $h' = h^{-1}$. Nun ist zwar h eineindeutig, aber h^{-1} an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig. Durchläuft nämlich k die Folge $1, 2, 3, \dots$, so konvergiert $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ gegen $(0, 0)$ aber $h^{-1}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k}, k\right)$ nicht gegen $h^{-1}(0, 0) = (0, 0)$.

Als Ergänzung zu Satz 1 beweisen wir den.

Satz 2. Es seien $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ und $\mathfrak{B}' = \{B', p', X', Y', G'\}$ Faser-räume, X bogenweise zusammenhängend. $\bar{h}: X \rightarrow X'$ sei eine stetige Abbildung, $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ eine f -Abbildung zur Abbildung $\bar{h}$ (s. Def. 1) und $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(\bar{h}(x))$, $x \in X$, die durch h definierte Abbildung⁵⁾. Für ein gewisses $\bar{x} \in X$ sei $h_{\bar{x}}$ eine Homotopieäquivalenz.

Dann ist h_x für jedes $x \in X$ eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Es sei x ein beliebiger Punkt aus X . $C: I \rightarrow X$, $C(0) = \bar{x}$, $C(1) = x$ sei ein Weg von $\bar{x}$ nach x und $\mathfrak{C}_t: p^{-1}(\bar{x}) \rightarrow p^{-1}(C(t))$ resp. $\mathfrak{C}'_t: p'^{-1}(\bar{h}(\bar{x})) \rightarrow p'^{-1}(\bar{h} \circ C(t))$, $t \in I$ eine Verschiebung von $p^{-1}(\bar{x})$ resp. $p'^{-1}(\bar{h}(\bar{x}))$ längs C resp. $\bar{h} \circ C$ (s. [8], 13.1).

Durch $(\mathfrak{C}'_t)^{-1} \circ h_{C(t)} \circ \mathfrak{C}_t$, $0 \leq t \leq 1$ ist eine Deformation von $h_{\bar{x}}$ in $(\mathfrak{C}'_1)^{-1} \circ h_x \circ \mathfrak{C}_1$ gegeben. Nach Voraussetzung ist $h_{\bar{x}}$ eine Homotopieäquivalenz, also auch $(\mathfrak{C}'_1)^{-1} \circ h_x \circ \mathfrak{C}_1$ (s. J) und damit h_x (denn $\mathfrak{C}'_1$ und $\mathfrak{C}_1$ sind Homöomorphismen).

⁸⁾ Wir vereinbaren: $\frac{1}{\infty} = 0$, $\infty > m$.

Bemerkung 4. Der Begriff der f -Homotopieäquivalenz wurde neuerdings auch von M. L. CURTIS (Ann. of Math. **60**, 304) untersucht. Daneben führte CURTIS den Begriff der a -Abbildung und der a -Äquivalenz von Faserräumen ein. Eine a -Abbildung ist eine f -Abbildung $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ (Bezeichnungen s. Def. 1) mit der Eigenschaft: Die durch h definierte Abbildung $h_x: p^{-1}(x) \rightarrow p'^{-1}(h(x))$ induziert in allen Homotopiegruppen Isomorphismen auf. Wenn die Fasern CW -Komplexe sind, so ist dies gleichbedeutend damit, daß h_x eine Homotopieäquivalenz ist für jedes $x \in X$ (s. [11], Theorem 1, S. 215). Eine a -Abbildung h zur Identität der Basis (d. h. $p = p' \circ h$) ist dann also nach Satz 1 eine f -Homotopieäquivalenz (zumindest wenn X ein Polyeder ist). Da nach CURTIS zwei Faserräume $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ über der gleichen Basis a -äquivalent heißen, wenn es a -Abbildungen $h: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ und $h': \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$ zur Identität der Basis gibt, folgt hieraus insbesondere:

Sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Faserräume (im Sinne von STEENROD [8]; bei CURTIS werden allgemeinere Faserräume zugelassen) mit CW -Komplexen als Fasern und einem Polyeder als gemeinsamer Basis und sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ a -äquivalent, dann sind sie sogar f -homotopieäquivalent (A -äquivalent bei CURTIS).

§ 3. Faserräume über Sphären.

U. Es sei G eine topologische Transformationengruppe des lokal kompakten topologischen Raumes Y . Das bedeutet: G ist eine topologische Gruppe von Homöomorphismen von Y auf sich, und die Abbildung $\eta: G \times Y \rightarrow Y$, die dem Paar (g, y) , $g \in G$, $y \in Y$ das Bild von y bei g zuordnet ($\eta(g, y) = g \cdot y$), ist stetig (vgl. [8], 2.2).

Die Elemente von G sind Homöomorphismen, also insbesondere stetige Abbildungen. Indem wir so die Elemente von G als Elemente von $\mathfrak{G}(Y, Y)$ (s. A) auffassen, erhalten wir die „Injektion“ $j: G \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$. Aus der Stetigkeit von η folgt nach B die Stetigkeit von j . j induziert daher einen Homomorphismus $j^*: \pi_n(G, e) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, e die Identität von Y , $n \geq 0$.

Wir beschreiben den Homomorphismus j^* für den Fall $n=0$ (für $n > 0$ s. [8], 15.5):

Ist $g \in G$, so bezeichnet $\bar{g}$ die Bogenkomponente von g in G , $\overline{j(g)}$ die Bogenkomponente von $j(g)$ in $\mathfrak{G}(Y, Y)$. Wegen der Stetigkeit von j ist $j(\bar{g}) \subset \overline{j(g)}$. Da die Elemente von G Homöomorphismen sind, ist $j(G) \subset \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ (s. I), also $\overline{j(g)} \in \pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. L). Die Elemente von $\pi_0(G, e)$ sind die Bogenkomponenten von G (s. [8], 16.10) und $j^*: \pi_0(G, e) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ ist durch $j^*(\bar{g}) = \overline{j(g)}$, $g \in G$ gegeben. Es ist leicht einzusehen, daß die so definierte Abbildung j^* ein Homomorphismus ist.

V. $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ sei ein Faserraum über der m -Sphäre S^m , $m > 0$, E_1 resp. E_2 sei die „obere“ resp. „untere“ abgeschlossene Hemisphäre von S^m , $S^{m-1} = E_1 \cap E_2$ der „Äquator“, x_0 ein fester Punkt aus S^{m-1} .

Da E_k , $k=1, 2$, in einen Punkt zusammenziehbar ist, gibt es fasertreue Abbildungen $\Phi_k: E_k \times Y \rightarrow \mathfrak{B}|E_k$ (s. [8], 11.6). Für $x \in S^{m-1}$, $y \in Y$ ist $\Phi_1^{-1}(\Phi_2(x, y)) = (x, g_x \cdot y)$, $g_x \in G$, und durch $T(x) = g_x$ ist eine stetige Ab-

bildung $T: S^{m-1} \rightarrow G$ gegeben. Ist $T(x_0) = e$ (das kann durch geeignete Wahl von Φ_1 stets erreicht werden), dann heißt T eine *charakteristische Abbildung* von $\mathfrak{B}$.

Jede stetige Abbildung $T: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$ kommt als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ vor (s. [8], 18.2).

Zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, Y, G\}$, $i = 1, 2$, mit den charakteristischen Abbildungen T_i sind genau dann äquivalent, wenn es ein $a \in G$ gibt, für welches die Abbildungen $x \rightarrow T_2(x)$ und $x \rightarrow a T_1(x) a^{-1}$ von S^{m-1} in G homotop sind (s. [8], 18.3). Wir beweisen den analogen

Satz 3. *Es seien $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$, Faserräume über der m -Sphäre S^m , $m > 0$, Y_i lokal kompakt und $T_i: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G_i, e_i)$ (e_i die Identität von Y_i) charakteristische Abbildungen von $\mathfrak{B}_i$ (s. V). j_i bezeichne die „Injektion“ von G_i in $\mathfrak{G}(Y_i, Y_i)$ (s. U).*

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind genau dann f -homotopieäquivalent (s. Def. 5), wenn es ein Element $g \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$ (s. I) gibt, für welches die Abbildungen $x \rightarrow j_2 \circ T_2(x)$ und $x \rightarrow g \circ (j_1 \circ T_1(x)) \circ g^{-1}$ von S^{m-1} in $\mathfrak{G}(Y_2, Y_2)$ homotop sind (g^{-1} ein Homotopieinverses von g ; s. I).

Korollar. *Y sei ein lokal kompakter topologischer Raum. $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ bezeichne die Ordnung der Gruppe $\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, $m > 0$, (s. G und L).*

Es gibt höchstens $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ paarweise nicht f -homotopieäquivalente (s. Def. 5) Faserräume mit Basis S^m (= m -Sphäre) und Faser Y .

Beweis des Korollars. ($\mathfrak{B}_\lambda = \{B_\lambda, p_\lambda, S^m, Y, G_\lambda\}$), $\lambda \in A$ sei eine Familie von Faserräumen, $j_\lambda: G_\lambda \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ bezeichne die „Injektion“ (s. U).

Sei $T_\lambda: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G_\lambda, e)$ eine charakteristische Abbildung von $\mathfrak{B}_\lambda$ (s. V). Aus $j_{\lambda_1} \circ T_{\lambda_1} \simeq j_{\lambda_2} \circ T_{\lambda_2}$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in A$) folgt nach Satz 3, daß $\mathfrak{B}_{\lambda_1}$ und $\mathfrak{B}_{\lambda_2}$ f -homotopieäquivalent sind. Es gibt also höchstens $[\pi_{m-1}(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ paarweise nicht f -homotopieäquivalente Faserräume in der Familie $(\mathfrak{B}_\lambda)$. Der letzte Schluß ist auch für $m = 1$ richtig: Aus der Definition von $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. L) folgt leicht, daß es höchstens $[\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)]$ paarweise nicht homotope Abbildungen $(S^0, x_0) \rightarrow (\mathfrak{G}_1(Y, Y), e)$ gibt.

Beweis des Satzes 3. Es seien $\Phi_k^i: E_k \times Y_i \rightarrow \mathfrak{B}_i|E_k$, $i, k = 1, 2$, fasertreue Abbildungen mit (s. V)

$$(8) \quad (\Phi_1^i)^{-1}(\Phi_2^i(x, y_i)) = (x, T_i(x) \cdot y_i) = (x, j_i \circ T_i(x) \cdot y_i), \quad x \in S^{m-1}, \quad y_i \in Y_i.$$

1. Es sei $h: \mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_2$ eine f -Homotopieäquivalenz. $h_k: \mathfrak{B}_1|E_k \rightarrow \mathfrak{B}_2|E_k$ sei die durch h definierte f -Abbildung⁵⁾. Dann ist $g_k = (\Phi_k^2)^{-1} \circ h_k \circ \Phi_k^1$ eine f -Abbildung von $E_k \times Y_1$ in $E_k \times Y_2$ und es ist

$$(9) \quad h_k = \Phi_k^2 \circ g_k \circ (\Phi_k^1)^{-1}.$$

Da h_1 und h_2 auf $\mathfrak{B}_1|S^{m-1}$ übereinstimmen, ergibt sich aus (9)

$$(10) \quad \Phi_1^2 \circ g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(b) = \Phi_2^2 \circ g_2 \circ (\Phi_2^1)^{-1}(b), \quad b \in p_1^{-1}(S^{m-1})$$

oder

$$(11) \quad g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(\Phi_2^1(x, y_1)) = (\Phi_1^2)^{-1}(\Phi_2^2 \circ g_2(x, y_1)), \quad x \in S^{m-1}, \quad y_1 \in Y_1.$$

Wir definieren $\pi_k: E_k \times Y_2 \rightarrow Y_2$ durch $\pi_k(v, y_2) = y_2$, $y_2 \in Y_2$ und $\tilde{g}_k: E_k \rightarrow \mathcal{G}(Y_1, Y_2)$ durch $\tilde{g}_k(v) \cdot y_1 = \pi_k \circ g_k(v, y_1)$, $v \in E_k$, $y_1 \in Y_1$. Nach B ist $\tilde{g}_k$ stetig, und es ist

$$(12) \quad g_k(v, y_1) = (v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1), \quad v \in E_k, \quad y_1 \in Y_1.$$

Damit wird die rechte Seite von (11) zu $(\Phi_1^2)^{-1}(\Phi_2^2(x, \tilde{g}_2(x) \cdot y_1))$ und dies nach (8) zu $(x, (j_2 \circ T_2(x)) \circ \tilde{g}_2(x) \cdot y_1)$. Die linke Seite von (11) wird bei entsprechender Behandlung zu $(x, \tilde{g}_1(x) \circ (j_1 \circ T_1(x)) \cdot y_1)$. Es ist also

$$(13) \quad \tilde{g}_1(x) \circ (j_1 \circ T_1(x)) = (j_2 \circ T_2(x)) \circ \tilde{g}_2(x), \quad x \in S^{m-1}$$

oder (s. E)

$$(14) \quad (\tilde{g}_1|S^{m-1}) \circ (j_1 \circ T_1) = (j_2 \circ T_2) \circ (\tilde{g}_2|S^{m-1}).$$

Nun ist $\tilde{g}_k$ auf ganz E_k definiert, also $\tilde{g}_k|S^{m-1}$ in die konstante Abbildung $\tilde{g}_k(x_0)^6$ deformierbar, also (s. F)

$$(15) \quad \tilde{g}_1(x_0) \circ (j_1 \circ T_1) \simeq (j_2 \circ T_2) \circ \tilde{g}_2(x_0) = (j_2 \circ T_2) \circ \tilde{g}_1(x_0).$$

Bei der letzten Gleichung haben wir $\tilde{g}_1(x_0) = \tilde{g}_2(x_0)$ benutzt; dies ergibt sich aus (13) wegen $j_i \circ T_i(x_0) = e_i$.

h ist nach Voraussetzung eine f -Homotopieäquivalenz, also auch h_k und damit $g_k = (\Phi_k^2)^{-1} \circ h_k \circ \Phi_k^1$. Die durch g_k definierte Abbildung $v \times Y_1 \rightarrow v \times Y_2$, $v \in E_k$, führt (v, y_1) in $(v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1)$ über [s. (12)] und ist nach Satz 1 eine Homotopieäquivalenz, d.h. $\tilde{g}_k(v) \in \mathcal{G}_1(Y_1, Y_2)$ (s. I). Es sei g^- ein Homotopieinverses (s. I) von $g = \tilde{g}_1(x_0)$. Dann folgt aus (15)

$$g \circ (j_1 \circ T_1) \circ g^- \simeq j_2 \circ T_2.$$

2. Es sei umgekehrt $g \circ (j_1 \circ T_1) \circ g^- \simeq j_2 \circ T_2^6$ für geeignetes $g \in \mathcal{G}_1(Y_1, Y_2)$ (g^- ein Homotopieinverses von g).

Wir multiplizieren diese Homotopierelation von links mit $(j_2 \circ T_2^{-1})^9$, von rechts mit g und erhalten (s. F)

$$(j_2 \circ T_2^{-1}) \circ g \circ (j_1 \circ T_1) \simeq g^6.$$

Die Abbildung auf der linken Seite dieser Relation ist also homotop einer konstanten Abbildung, d.h. stetig auf E_2 erweiterbar. Wir wählen eine solche Erweiterung $\tilde{g}_2: E_2 \rightarrow \mathcal{G}(Y_1, Y_2)$ und bezeichnen mit $\tilde{g}_1: E_1 \rightarrow \mathcal{G}(Y_1, Y_2)$ die konstante Abbildung $\tilde{g}_1(E_1) = g$. Dann gilt:

$$(16) \quad \begin{aligned} \tilde{g}_2|S^{m-1} &= (j_2 \circ T_2^{-1}) \circ (\tilde{g}_1|S^{m-1}) \circ (j_1 \circ T_1) \quad \text{oder} \\ (\tilde{g}_1|S^{m-1}) \circ (j_1 \circ T_1) &= (j_2 \circ T_2) \circ (\tilde{g}_2|S^{m-1}). \end{aligned}$$

Wir definieren eine f -Abbildung $g_k: E_k \times Y_1 \rightarrow E_k \times Y_2$ durch

$$(17) \quad g_k(v, y_1) = (v, \tilde{g}_k(v) \cdot y_1), \quad v \in E_k, \quad y_1 \in Y_1.$$

(Zur Stetigkeit von g_k vgl. B.)

⁹⁾ T_2^{-1} ist die Abbildung $x \rightarrow (T_2(x))^{-1}$ von S^{m-1} in G_2 .

Die Formeln (16) und (17) stimmen mit (14) und (12) überein. Wir können die Rechnung, die von (10) über (12) zu (14) geführt hat, rückwärts verfolgen und erhalten:

$$\Phi_1^2 \circ g_1 \circ (\Phi_1^1)^{-1}(b) = \Phi_2^2 \circ g_2 \circ (\Phi_2^1)^{-1}(b), \quad b \in p_1^{-1}(S^{m-1}).$$

Die beiden f -Abbildungen $\Phi_k^2 \circ g_k \circ (\Phi_k^1)^{-1}: \mathfrak{B}_1|E_k \rightarrow \mathfrak{B}_2|E_k$, $k=1, 2$, stimmen also auf $\mathfrak{B}_1|S^{m-1}$ überein und setzen sich daher zu einer f -Abbildung $h: \mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{B}_2$ zusammen.

h ist eine f -Homotopieäquivalenz. Nach Satz 1 genügt es zu zeigen, daß die durch h definierte Abbildung $h_*: p_1^{-1}(v) \rightarrow p_2^{-1}(v)$ eine Homotopieäquivalenz ist für jedes $v \in S^m$. Das ist nach Satz 2 der Fall, wenn h_{x_0} eine Homotopieäquivalenz ist. Da Φ_i^1 die Faser $x_0 \times Y_i$ homöomorph auf $p_i^{-1}(x_0)$ abbildet, genügt es zu zeigen, daß die durch g_1 definierte Abbildung $x_0 \times Y_1 \rightarrow x_0 \times Y_2$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dies folgt wegen (17) aus $\tilde{g}_1(x_0) = g \in \mathfrak{G}_1(Y_1, Y_2)$.

W. Es sei Y ein lokal kompakter topologischer Raum, $\mathfrak{G}(Y, Y)$ der Raum der stetigen Selbstabbildungen von Y (s. A).

Zwei Elemente α_1 und α_2 von $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, $n \geq 0$, heißen *äquivalent bezüglich der Operatorengruppe* $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ (s. Q), wenn es einen Operator $\gamma \in \pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ gibt, der α_1 in α_2 überführt (γ^{-1} führt dann α_2 in α_1 über; die Definition ist also symmetrisch).

Es seien $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, Y, G\}$, $i=1, 2$, Faserräume mit den charakteristischen Abbildungen $T_i: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$ (s. V). $j: G \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ bezeichne die „Injektion“ (s. U). Nach Satz 3 sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ genau dann f -homotopieäquivalent, wenn es ein $g \in \mathfrak{G}_1(Y, Y)$ gibt, für welches die Abbildungen $x \rightarrow j \circ T_2(x)$ und $x \rightarrow g \circ (j \circ T_1(x)) \circ g^{-1}$ von S^{m-1} in $\mathfrak{G}(Y, Y)$ homotop sind (g^{-1} ein Homotopieinverses von g). Dies bedeutet aber gerade, daß die durch $j \circ T_1$ und $j \circ T_2$ repräsentierten Elemente von $\pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ äquivalent sind bezüglich $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$. Da nach [8], 18.2 jede stetige Abbildung $T: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$ als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ vorkommt, ergibt sich hieraus der

Satz 4. Y sei ein lokal kompakter Raum, G eine topologische Transformationsgruppe von Y (s. U). Es bezeichne $\mathfrak{G}(Y, Y)$ den Raum der stetigen Selbstabbildungen von Y (s. A), $j: G \rightarrow \mathfrak{G}(Y, Y)$ die „Injektion“, $j^*: \pi_n(G, e) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$, $n \geq 0$, den durch j induzierten Homomorphismus (s. U) und S^m , $m > 0$, die m -Sphäre.

Die Klassen f -homotopieäquivalenter (s. Def. 5) Faserräume mit Basis S^m , Faser Y und Strukturgruppe G stehen in eineindeutiger Beziehung zu den Klassen von Elementen von $j^*(\pi_{m-1}(G, e))$, die bezüglich $\pi_0(\mathfrak{G}(Y, Y), e)$ äquivalent sind (s. W). Man erhält eine solche Beziehung, wenn man jedem $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ das durch $j \circ T$ ($T: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (G, e)$ eine charakteristische Abbildung von $\mathfrak{B}$; s. V) repräsentierte Element von $j^*(\pi_{m-1}(G, e))$ zuordnet.

Wir betrachten im folgenden Faserräume über der m -Sphäre S^m mit einer n -Sphäre als Faser ($m > 0, n > 0$). Dabei setzen wir zur Abkürzung $\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}(S^n, S^n)$ (s. A); e bezeichnet die identische Selbstabbildung von S^n .

Hilfssatz 3. *Es sei $y_0 \in S^n$ ein fester Punkt. Durch $p(g) = g \cdot y_0$, $g \in \mathfrak{G}^n$ ist eine stetige Abbildung $p: \mathfrak{G}^n \rightarrow S^n$ gegeben. p ist Projektion eines Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ mit der Faser $G^n = p^{-1}(y_0)$ und der orthogonalen Gruppe in n -Variablen als Strukturgruppe.*

Beweis. Die Identität von $\mathfrak{G}^n$ ist stetig. Nach B ist also die Abbildung $(g, y) \rightarrow g \cdot y$ von $\mathfrak{G}^n \times S^n$ in S^n stetig, also erst recht die Abbildung p .

Es sei O_{n+1} die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n , $j: O_{n+1} \rightarrow \mathfrak{G}^n$ die „Injektion“ (s. U). Die Abbildung $p \circ j$ ist Projektion eines Faserraumes $\{O_{n+1}, p \circ j, S^n, O_n, O_n\}$ mit Faser und Gruppe $O_n = (p \circ j)^{-1}(y_0)$ (s. [8], 7.6).^{*} Es gibt also ein System offener Mengen $V_k \subset S^n$ und stetiger Abbildungen $\varphi_k: V_k \rightarrow O_{n+1}$ mit $\bigcup_k V_k = S^n$ und $x = (p \circ j)(\varphi_k(x)) = (j \circ \varphi_k(x)) \cdot y_0$, $x \in V_k$ (d. s. lokale Schnittflächen in O_{n+1}).

Wir machen O_n zur topologischen Transformationsgruppe von G^n (s. U), indem wir die Elemente r von O_n als „Linksverschiebungen“ von G^n auffassen: $r \cdot g = j(r) \circ g$, $g \in G^n$. Wir müssen nachweisen, daß $r \cdot g$ stetig ist in beiden Variablen. Das ist aber der Fall, weil j und die $\circ$ -Multiplikation stetig sind (s. D).

Wir definieren nun $\Phi_k: V_k \times G^n \rightarrow p^{-1}(V_k)$ durch $\Phi_k(x, g) = (j \circ \varphi_k(x)) \circ g$, $x \in V_k$, $g \in G^n$. Φ_k ist stetig, weil j , φ_k und die $\circ$ -Multiplikation stetig sind. Entsprechend ist die durch $\Phi_k^-(b) = (p(b), (j \circ \varphi_k^{-1}(p(b))) \circ b)^{10}$, $b \in p^{-1}(V_k)$, definierte Abbildung $\Phi_k^-: p^{-1}(V_k) \rightarrow V_k \times G^n$ stetig.

Für $x \in V_k$, $g \in G^n$ ist

$$p \circ \Phi_k(x, g) = p((j \circ \varphi_k(x)) \circ g) = (j \circ \varphi_k(x)) \circ g \cdot y_0 = x,$$

und daher für $x \in V_i \cap V_k$, $g \in G^n$:

$$\Phi_i^-(\Phi_k(x, g)) = (x, (j \circ \varphi_i^{-1}(x)) \circ (j \circ \varphi_k(x)) \circ g) = (x, (j(\varphi_i^{-1}(x) \varphi_k(x))) \circ g).$$

Daraus geht hervor

1. $\Phi_k^- \circ \Phi_k(x, g) = (x, g)$, $x \in V_k$, $g \in G^n$. Man beweist entsprechend: $\Phi_k \circ \Phi_k^-(b) = b$, $b \in p^{-1}(V_k)$. Φ_k ist also ein Homöomorphismus, $\Phi_k^- = \Phi_k^{-1}$.

2. Für $x \in V_i \cap V_k$, $g \in G^n$ ist $\Phi_i^{-1}(\Phi_k(x, g)) = (x, g_{ik}(x) \cdot g)$, $g_{ik}(x) = \varphi_i^{-1}(x) \varphi_k(x) \in O_n$, und $g_{ik}(x)$ hängt stetig von x ab.

Durch $\mathfrak{G}^n$, S^n , p , G^n , O_n , V_k , Φ_k ist also ein „Koordinatenbündel“ (s. [8], 2.3) eines Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ gegeben, und der Hilfssatz ist bewiesen.

Wir betrachten die Homotopiefolge des Faserraumes $\{\mathfrak{G}^n, p, S^n, G^n, O_n\}$ (s. [8], § 17):

$$(18) \quad \rightarrow \pi_{m+1}(S^n, y_0) \xrightarrow{\Delta} \pi_m(G^n, e) \xrightarrow{i^*} \pi_m(\mathfrak{G}^n, e) \xrightarrow{p^*} \pi_m(S^n, y_0) \rightarrow, m > 0.$$

(Wir hätten uns zur Herleitung dieser Folge auch auf das allgemeine Theorem 4 in [3] berufen können.)

Die Folge (18) ist exakt, also

$$\pi_m(\mathfrak{G}^n, e) / i^*(\pi_m(G^n, e)) \approx p^*(\pi_m(S^n, y_0)).$$

¹⁰⁾ φ_k^{-1} ist die Abbildung $x \rightarrow (\varphi_k(x))^{-1}$ von V_k in O_{n+1} .

Bezeichnen wir allgemein die Ordnung einer Gruppe π mit $[\pi]$, so folgt hieraus

$$(19) \quad \begin{cases} [\pi_m(\mathbb{G}^n, e)] = [i^*(\pi_m(G^n, e))] \cdot [p^*(\pi_m(\mathbb{G}^n, e))] \\ \leq [\pi_m(G^n, e)] \cdot [\pi_m(S^n, y_0)], \quad m > 0. \end{cases}$$

G_1^n sei der Teilraum von G^n , der aus den stetigen Abbildungen vom Grade 1 besteht. Eine Selbstabbildung von S^n vom Grade 1, die den Punkt y_0 festläßt, kann so in die Identität von S^n deformiert werden, daß der Bildpunkt von y_0 während der ganzen Deformation fest bleibt; m. a. W. G_1^n ist die Bogenkomponente von e in G^n (s. C). Wir können daher $\pi_m(G^n, e)$ und $\pi_m(G_1^n, e)$, $m > 0$, in natürlicher Weise identifizieren. Nach [10], 2.10 läßt sich ein Isomorphismus $I_1: \pi_m(G_1^n, e) \rightarrow \pi_{m+n}(S^n, y_0)$ angeben. Auf Grund der Identifikation $\pi_m(G^n, e) = \pi_m(G_1^n, e)$ wird hieraus

$$(20) \quad I_1: \pi_m(G^n, e) \approx \pi_{m+n}(S^n, y_0), \quad m, n > 0.$$

Aus (20) und (19) folgt

$$(21) \quad [\pi_m(\mathbb{G}^n, e)] \leq [\pi_{m+n}(S^n, y_0)] \cdot [\pi_m(S^n, y_0)], \quad m, n > 0.$$

Hieraus und aus dem Korollar zu Satz 3 folgt

Satz 5. *Es gibt höchstens $[\pi_{m+n-1}(S^n)] \cdot [\pi_{m-1}(S^n)]$ paarweise nicht f -homotopieäquivalente (s. Def. 5) Faserräume mit Basis S^n , $m > 1$, und Faser S^n , $n > 0$. ($[\pi_i(S^n)]$ bezeichnet die Ordnung der Gruppe $\pi_i(S^n, y_0)$.)*

Satz 5 gewinnt wesentlich an Inhalt durch die Ergebnisse von J. P. SERRE über die Gruppen $\pi_m(S^n)$. Bekanntlich ist $\pi_m(S^n) = 0$ für $m < n$ und $\pi_n(S^n)$ frei zyklisch (s. LEFSCHETZ: Introduction to Topology, S. 176). Hieraus und aus [6], S. 498, Prop. 5 ergibt sich:

$$(22) \quad \begin{cases} \text{Die Gruppen } \pi_m(S^n) \text{ sind endlich mit Ausnahme von } \pi_k(S^k) \text{ und} \\ \pi_{4k-1}(S^{2k}), k, m, n = 1, 2, \dots. \pi_k(S^k) \text{ ist frei zyklisch und } \pi_{4k-1}(S^{2k}) \\ \text{ist direkte Summe einer frei zyklischen und einer endlichen Gruppe.} \end{cases}$$

Wir gehen nun auf die Frage ein, für welche (m, n) es Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ (O_{n+1} = Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen von S^n) gibt, die f -homotopieäquivalent (s. Def. 5) aber nicht äquivalent sind. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in Satz 6 zusammengefaßt.

Hilfssatz 4. *Es sei O_{n+1} die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen der n -Sphäre S^n , $\mathbb{G}^n = \mathbb{G}(S^n, S^n)$ (s. A).*

Die Gruppen $\pi_m(O_{n+1}, e)$ und $\pi_m(\mathbb{G}^n, e)$, e = Identität von S^n , $m, n > 0$, sind endlich erzeugt, und wenn $p_{m,n}$ resp. $\mathfrak{p}_{m,n}$ den Rang von $\pi_m(O_{n+1}, e)$ resp. $\pi_m(\mathbb{G}^n, e)$ bezeichnet (Rang = Rang des freien Anteils), so gilt

1. für $m \equiv 0 \pmod{2}$ $p_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n}$,
2. für $m \equiv 1 \pmod{4}$ $p_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n}$ für $n \neq m$,
 $p_{m,m} = 1 = \mathfrak{p}_{m,m}$,

$$\begin{aligned}
 3. \text{ für } m \equiv -1 \quad (4) \quad & \dot{p}_{m,n} = 0 = \mathfrak{p}_{m,n} \quad \text{für } n < \frac{m+1}{2}, \\
 & \dot{p}_{m, \frac{m+1}{2}} = 1 = \mathfrak{p}_{m, \frac{m+1}{2}}, \\
 & \dot{p}_{m,n} = 1, \quad \mathfrak{p}_{m,n} = 0 \quad \text{für } n > \frac{m+1}{2}, \quad m \neq n, \\
 & \dot{p}_{m,m} = 2, \quad \mathfrak{p}_{m,m} = 1.
 \end{aligned}$$

Der Kern von $j^*: \pi_m(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n, e)$ (s. U) hat den Rang 1 für $m \equiv -1$ (4), $n > \frac{m+1}{2}$ und den Rang 0 in allen anderen Fällen.

Beweis. Wir betrachten den Faserraum $\tilde{\mathbb{G}}^n = \{\mathbb{G}^n, \dot{p}, S^n, G^n, O_n\}$ des Satzes 3. Die Abbildung $\dot{p} \circ j: O_{n+1} \rightarrow S^n$ (s. U) ist Projektion eines Faserraumes $\tilde{O}_{n+1} = \{O_{n+1}, \dot{p} \circ j, S^n, O_n, O_n\}$ (s. [8], 7.6). j ist also eine f -Abbildung von $\tilde{O}_{n+1}$ in $\tilde{\mathbb{G}}^n$ (s. Def. 1) und induziert daher einen Homomorphismus der Homotopiefolge von $\tilde{O}_{n+1}$ in die von $\tilde{\mathbb{G}}^n$ (vgl. hierzu [8], 17.5; dort werden zwar fasertreue Abbildungen betrachtet, benutzt wird jedoch nur, daß es sich um fasernweise Abbildungen handelt):

$$(23) \quad \begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{i_1^*} & & \\
 & \swarrow & \Delta_1 & \searrow & \\
 & \pi_{m+1}(S^n) & \xrightarrow{j_0^*} & \pi_m(O_n) & \xrightarrow{i_1^*} & \pi_m(O_{n+1}) & \xrightarrow{\dot{p}_1^*} & \pi_m(S^n) & \searrow \\
 & \swarrow & \Delta_2 & \searrow & & \downarrow j^* & & \downarrow \dot{p}_2^* & \\
 & & \pi_m(G^n) & \xrightarrow{i_2^*} & \pi_m(\mathbb{G}^n) & & & & \\
 & & \downarrow I_1 & & & & & & \\
 & & \pi_{m+n}(S^n) & & & & & &
 \end{array}$$

Wir haben bei der Bezeichnung der Homotopiegruppen in (23) die Bezugspunkte weggelassen. Der Bezugspunkt ist γ_0 bei $\pi_i(S^n)$ und e bei den übrigen vorkommenden Homotopiegruppen. $j_0: O_n \rightarrow G^n$ bezeichnet die durch j definierte Abbildung⁵⁾, j_0^* den durch j_0 induzierten Homomorphismus.

Ist $L \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\mu} N$ eine exakte Folge abelscher Gruppen und sind L und N endlich erzeugt, dann ist auch M endlich erzeugt, und es ist $\text{Rang}(M) = \text{Rang}(\lambda(L)) + \text{Rang}(\mu(M)) \leq \text{Rang}(L) + \text{Rang}(N)$. Dies wird im folgenden ohne besonderen Hinweis benutzt werden. Der Beweis dafür ist sehr einfach; wir führen ihn für die erste Behauptung durch:

L und N sind endlich erzeugt, also auch $\lambda(L)$ (als Faktorgruppe von L) und $\mu(M)$ (als Untergruppe von N). $\{l_i\}, \{M_k\}$ seien endliche Erzeugendensysteme von $\lambda(L), \mu(M)$. Für jedes k sei $m_k \in M$ so gewählt, daß $\mu(m_k) = M_k$ ist. Dann ist $\{l_i\} \cup \{m_k\}$ ein Erzeugendensystem von M . Sei nämlich α ein beliebiges Element aus M . Es ist $\mu(\alpha) = \sum_k b_k M_k$ mit gewissen ganzen Zahlen b_k .

Setzen wir $\alpha' = \alpha - \sum_k b_k m_k$, so ist $\mu(\alpha') = 0$, also $\alpha' \in \lambda(L)$, also $\alpha' = \sum_i a_i l_i$ mit gewissen ganzen Zahlen a_i . Hieraus ergibt sich aber $\alpha = \sum_i a_i l_i + \sum_k b_k m_k$.

Nach (20) und (22) sind $\pi_m(G^n)$ und $\pi_m(S^n)$ endlich erzeugt. Aus der zweiten Zeile von (23) folgt dann, daß $\pi_m(\mathbb{G}^n)$ endlich erzeugt ist. Entsprechend folgt

aus der ersten Zeile von (23) durch vollständige Induktion nach n , daß $\pi_m(O_{n+1})$ endlich erzeugt ist. Den Anfang der Induktion liefert $\pi_m(O_2) \approx \pi_m(S^1)$ (s. [8], § 22).

1. $m \equiv 0 \pmod{2}$.

Nach (21) und (22) ist $\pi_m(\mathbb{G}^n)$ endlich außer eventuell für $n=m$. Ferner ist $p_2^*: \pi_m(\mathbb{G}^m) \rightarrow \pi_m(S^m)$ Null. Wäre nämlich $p_2^* \neq 0$, gäbe es also eine stetige Abbildung $\tilde{f}: (S^m, y_0) \rightarrow (\mathbb{G}^m, e)$ derart, daß $p \circ \tilde{f}$ ein von 0 verschiedenes Element $\alpha \in \pi_m(S^m)$ repräsentierte, so wäre $f: S^m \times S^m \rightarrow S^m$, definiert durch $f(x, x') = \tilde{f}(x) \cdot x'$, eine wegen B stetige Abbildung vom Typus $(\alpha, 1)$ (s. [4], S. 434). Eine solche gibt es aber nicht nach [4], Satz III und Satz I, S. 427. $i_2^*: \pi_m(G^m) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^m)$ ist also ein Homomorphismus auf. Daraus folgt aber nach (20) und (22), daß $\pi_m(\mathbb{G}^m)$ endlich ist.

Aus der ersten Zeile von (23) schließt man durch Induktion nach n und unter Benutzung von (22), daß $\pi_m(O_{n+1})$ endlich ist für $n < m$. Ferner ist $p_1^*: \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(S^m)$ Null, denn $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ und $p_2^* = 0$. Also ist $\pi_m(O_{m+1})$ endlich, und durch vollständige Induktion nach n folgt aus der ersten Zeile von (23): $\pi_m(O_{n+1})$ ist endlich für $n \geq m$.

Da $\pi_m(O_{n+1})$ endlich ist für $m \equiv 0 \pmod{2}$, muß auch der Kern von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n)$ endlich sein.

2. und 3. $m \equiv 1 \pmod{2}$.

Nach [8], 23.4 ist $p_1^*: \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(S^m)$ nicht Null [mindestens alle durch zwei teilbaren Elemente von $\pi_m(S^m)$ sind Bild]. Daher ist $\text{Rang}(\pi_m(O_{m+1})) = \text{Rang}(i_1^*(\pi_m(O_m))) + 1$. Nun ist $\pi_{m+1}(S^m)$ endlich nach (22), also $\text{Rang}(\pi_m(O_m)) = \text{Rang}(i_1^*(\pi_m(O_m)))$, somit

$$(24) \quad p_{m,m} = p_{m,m-1} + 1, \quad m \equiv 1 \pmod{2}.$$

Aus $p_1^*(\pi_m(O_{m+1})) \neq 0$ und $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ folgt:

a) $p_2^*: \pi_m(\mathbb{G}^m) \rightarrow \pi_m(S^m)$ ist nicht Null. Da $\pi_m(G^m)$ endlich ist nach (20) und (22), ergibt sich aus der zweiten Zeile von (23)

$$(25) \quad p_{m,m} = 1, \quad m \equiv 1 \pmod{2}.$$

b) Der Kern von $j^*: \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^m)$ hat höchstens den Rang $p_{m,m} - 1$. Wegen $p_{m,m} = 1$ hat er mindestens den Rang $p_{m,m} - 1$, d.h.

$$(26) \quad \text{der Kern von } j^*: \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^m), \quad m \equiv 1 \pmod{2}, \text{ hat den Rang } p_{m,m} - 1.$$

Der Homomorphismus $p_1^*: \pi_{m+1}(O_{m+2}) \rightarrow \pi_{m+1}(S^{m+1})$ ist Null wegen $m+1 \equiv 0 \pmod{2}$ (s. 1. Teil dieses Beweises). $\Delta_1: \pi_{m+1}(S^{m+1}) \rightarrow \pi_m(O_{m+1})$ ist also ein Isomorphismus und der Kern von $i_1^*: \pi_m(O_{m+1}) \rightarrow \pi_m(O_{m+2})$ hat den Rang 1. Dasselbe gilt für den Kern von $i_2^*: \pi_m(G^{m+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^{m+1})$. Wegen $\pi_m(S^{m+1}) = 0$ folgt hieraus und aus der ersten Zeile von (23)

$$(27) \quad p_{m,m+1} = p_{m,m} - 1, \quad m \equiv 1 \pmod{2},$$

aus der zweiten Zeile $\text{Rang}(\pi_m(\mathbb{G}^{m+1})) = \text{Rang}(\pi_m(G^{m+1})) - 1$, also wegen (20) und (22)

$$(28) \quad p_{m,m+1} = 0, \quad m \equiv 1 \pmod{2}.$$

Wir unterscheiden nun

2. $m \equiv 1 \pmod{4}$.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n : $p_{m,n} = 0$ für $n < m$, aus (24) $p_{m,m} = 1$, aus (27) $p_{m,m+1} = 0$ und wiederum durch vollständige Induktion nach n aus der ersten Zeile von (23): $p_{m,n} = 0$ für $n \geq m+1$.

Hieraus und aus (26) folgt die über den Rang des Kernes von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n)$ im Falle $m \equiv 1 \pmod{4}$ gemachte Aussage.

Nach (21) und (22) ist $p_{m,n} = 0$ außer eventuell für $n = m$ oder $n = m+1$. Nach (25) und (28) ist $p_{m,m} = 1$, $p_{m,m+1} = 0$.

3. $m \equiv -1 \pmod{4}$.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n : $p_{m,n} = 0$ für $n < \frac{m+1}{2}$. Für diese n ist dann auch der Kern von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n)$ endlich, wie behauptet.

$\pi_{m-1}\left(O_{\frac{m+1}{2}}\right)$ ist endlich wegen $m-1 \equiv 0 \pmod{2}$ (s. 1. Teil dieses Beweises), und $\pi_m\left(S^{\frac{m+1}{2}}\right)$ hat den Rang 1 [s. (22)]. Der Kern von $\Delta_1: \pi_m\left(S^{\frac{m+1}{2}}\right) \rightarrow \pi_{m-1}\left(O_{\frac{m+1}{2}}\right)$, d. i. $p_1^*\left(\pi_m\left(O_{\frac{m+1}{2}}+1\right)\right)$, muß also den Rang 1 haben. $\pi_m\left(O_{\frac{m+1}{2}}\right)$ ist endlich, also $p_{m,\frac{m+1}{2}} = 1$.

Aus Rang $\left(p_1^*\left(\pi_m\left(O_{\frac{m+1}{2}}+1\right)\right)\right) = 1 = p_{m,\frac{m+1}{2}}$ und $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ folgt:

a) Rang $\left(p_2^*\left(\pi_m\left(\mathbb{G}^{\frac{m+1}{2}}\right)\right)\right) = 1$. Da $\pi_m\left(G^{\frac{m+1}{2}}\right)$ endlich ist nach (20) und (22), ergibt sich aus der zweiten Zeile von (23)

$$(29) \quad p_{m,\frac{m+1}{2}} = 1, \quad m \equiv -1 \pmod{4}.$$

b) Der Kern von $j^*: \pi_m\left(O_{\frac{m+1}{2}}+1\right) \rightarrow \pi_m\left(\mathbb{G}^{\frac{m+1}{2}}\right)$ hat den Rang 0.

Aus der ersten Zeile von (23) und aus (22) ergibt sich durch Induktion nach n : $p_{m,n} = 1$ für $\frac{m+1}{2} \leq n < m$, aus (24) $p_{m,m} = 2$, aus (27) $p_{m,m+1} = 1$ und wiederum durch vollständige Induktion nach n aus der ersten Zeile von (23): $p_{m,n} = 1$ für $n \geq m+1$.

Nach (21) und (22) ist $p_{m,n} = 0$ außer eventuell für $n = \frac{m+1}{2}$, $n = m$ oder $n = m+1$. Nach (29), (25) und (28) ist $p_{m,\frac{m+1}{2}} = 1$, $p_{m,m} = 1$, $p_{m,m+1} = 0$.

Der Rang des Kernes von $j^*: \pi_m(O_{n+1}) \rightarrow \pi_m(\mathbb{G}^n)$ ist 1 für $n > \frac{m+1}{2}$. Dies folgt für $n \neq m$ aus $p_{m,n} = 1$, $p_{m,n} = 0$ und für $n = m$ aus $p_{m,m} = 2$ und (26).

Bemerkung 5. Nach [7], Prop. 3, Coroll. 2, S. 289 ist $p_{m,n}$ gleich der m -ten Bettischen Zahl von R_{n+1} (= Gruppe der Drehungen der S^n). Die

Bettischen Zahlen von R_{n+1} sind von PONTRJAGIN [5] u. a. bestimmt worden. Wir hätten uns also, was die $p_{m,n}$ betrifft; auf diese Ergebnisse berufen können. Der Beweis des Hilfssatzes 4 wäre dadurch jedoch nicht wesentlich einfacher geworden.

Satz 6. Es seien m und n natürliche Zahlen, O_{n+1} die Gruppe der orthogonalen Selbstabbildungen der n -Sphäre S^n .

I. Genau dann, wenn $m \equiv 0 \pmod{2}$, $n = m - 1$

oder $m \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq \frac{m}{2}$ ist,

gibt es unendlich viele paarweise nicht äquivalente Faserräume

$$\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}.$$

II. Ist $m \equiv 0 \pmod{2}$, $n = m - 1$

oder $m \equiv 0 \pmod{4}$, $n = \frac{m}{2}$,

so gibt es unendlich viele paarweise nicht f -homotopieäquivalente (s. Def. 5) Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$.

Ist dagegen (m, n) ein Zahlenpaar, das keiner dieser beiden Bedingungen genügt, so gibt es nur endlich viele paarweise nicht f -homotopieäquivalente Faserräume mit Basis S^m und Faser S^n .

III. Ist $m \equiv 0 \pmod{4}$ und $n > \frac{m}{2}$ so gibt es zu jedem Faserraum

$$\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$$

unendlich viele zu $\mathfrak{B}$ f -homotopieäquivalente aber untereinander paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B}_v = \{B_v, p_v, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $v = 1, 2, \dots$

Ist dagegen $m \not\equiv 0 \pmod{4}$ oder $n \leq \frac{m}{2}$, so gibt es nur endlich viele f -homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume mit Basis S^m , Faser S^n und Gruppe O_{n+1} .

IV. Sind $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i = 1, 2$, f -homotopieäquivalente Faserräume und ist $m \leq 3$ oder $n \leq 2$, dann sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ äquivalent.

Beweis. Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(S^n, S^n)$ (s. A), $j: O_{n+1} \rightarrow \mathfrak{G}$ die „Injektion“, $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$, $n \geq 1$, $m \geq 1$ der durch j induzierte Homomorphismus (s. U), e die Identität von S^n .

O_{n+1} zerfällt in zwei Bogenkomponenten; die eine, R_{n+1} , enthält die Drehungen der S^n , die andere enthält Abbildungen vom Grade -1 . $\mathfrak{G}_1(S^n, S^n)$ (s. I) zerfällt ebenfalls in zwei Bogenkomponenten; die eine besteht aus den Selbstabbildungen der S^n vom Grade 1, die andere aus den Abbildungen vom Grade -1 . Die Gruppen $\pi_0(O_{n+1}, e)$ (s. [8], 16.10) und $\pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ (s. L) sind also zyklisch von der Ordnung 2 und $j^*: \pi_0(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ ist ein Isomorphismus auf. Wir identifizieren: $\pi_0(O_{n+1}, e) = \pi_0(\mathfrak{G}^n, e) = \pi_0$. $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ wird damit zu einem Operatorhomomorphismus bezüglich der Operatorengruppe π_0 (s. [8], 16.10 und Q).

Es seien $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i = 1, 2$, Faserräume mit den charakteristischen Abbildungen T_i (s. V). T_i^* bezeichne das durch T_i repräsentierte Element von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$.

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind genau dann äquivalent, wenn T_1^* und T_2^* äquivalent sind bezüglich π_0 (s. [8], 18.3).

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind genau dann f -homotopieäquivalent, wenn $j^*(T_1^*)$ und $j^*(T_2^*)$ äquivalent sind bezüglich π_0 (s. Satz 4).

Jede stetige Abbildung $T: (S^{m-1}, x_0) \rightarrow (O_{n+1}, e)$ kommt als charakteristische Abbildung eines geeigneten Faserraumes $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ vor (s. [8], 18.2).

Hieraus ergibt sich:

a) Ist $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ ein Isomorphismus und sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ f -homotopieäquivalent, dann sind sie sogar äquivalent.

b) Ist der Kern von $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ endlich, dann gibt es nur endlich viele f -homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$. Ist nämlich $\alpha \in \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ und α' das Bild von α bei dem einzigen eventuell nicht trivialen Operator aus π_0 , dann gibt es nur endlich viele Elemente von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$, die sich bei j^* in α oder α' abbilden.

c) Ist der Kern von $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ unendlich, dann gibt es zu jedem Faserraum $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O_{n+1}\}$ unendlich viele zu $\mathfrak{B}$ f -homotopieäquivalente aber paarweise nicht äquivalente Faserräume $\mathfrak{B}_\nu = \{B_\nu, p_\nu, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $\nu = 1, 2, \dots$. Dann gibt es nämlich zu jedem $\alpha \in j^*(\pi_{m-1}(O_{n+1}, e))$ unendlich viele $\beta_\mu \in \pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ mit $j^*(\beta_\mu) = \alpha$. Höchstens je zwei der β_μ sind äquivalent bezüglich π_0 .

Wir beweisen zunächst die Aussagen des Satzes 6 für den Fall $m = 1$. Es gibt zwei nicht äquivalente Faserräume $\{B, p, S^1, S^n, O_{n+1}\}$, denn $\pi_0(O_{n+1}, e)$ enthält zwei Elemente (s. [8], 18.5). Diese beiden Faserräume sind nicht f -homotopieäquivalent, denn $j^*: \pi_0(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ ist ein Isomorphismus [s. a)]. Es gibt nur zwei nicht f -homotopieäquivalente Faserräume mit Basis S^1 und Faser S^n , denn $\pi_0(\mathfrak{G}^n, e)$ enthält nur zwei Elemente (s. Koroll. zu Satz 3).

Wir setzen von nun an $m > 1$ voraus.

I. Die Gruppe $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ ist nach Hilfssatz 4 genau dann unendlich, wenn $m \equiv 0 \pmod{2}$, $n = m - 1$ oder $m \equiv 0 \pmod{4}$, $n \geq \frac{m}{2}$ ist. Höchstens je zwei Elemente von $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ sind äquivalent bezüglich π_0 . Hieraus und aus [8], 18.5 folgt die Behauptung.

II. Ist $m \equiv 0 \pmod{2}$, $n = m - 1$ oder $m \equiv 0 \pmod{4}$, $n = \frac{m}{2}$, so ist die Gruppe $j^*(\pi_{m-1}(O_{n+1}, e))$ nach Hilfssatz 4 unendlich. Höchstens je zwei Elemente dieser Gruppe sind äquivalent bezüglich π_0 . Hieraus und aus Satz 4 folgt die erste Behauptung von II. Genügt das Zahlenpaar (m, n) keiner der beiden eben genannten Bedingungen, so ist die Gruppe $\pi_{m-1}(\mathfrak{G}^n, e)$ endlich nach Hilfssatz 4. Hieraus und aus dem Korollar zu Satz 3 folgt die zweite Behauptung von II.

III. Nach Hilfssatz 4 ist der Kern von $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathbb{G}^n, e)$ genau dann unendlich, wenn $m \equiv 0 \pmod{4}$ und $n > \frac{m}{2}$ ist. Hieraus und aus b) und c) S. 134 folgt die Behauptung.

IV. Wir beweisen, daß $j^*: \pi_{m-1}(O_{n+1}, e) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathbb{G}^n, e)$ ein Isomorphismus ist für $m \leq 3$ oder $n \leq 2$. Dann folgt die Behauptung aus a) S. 134. Da R_{n+1} die Bogenkomponente von e in O_{n+1} ist, unterscheiden wir nicht zwischen $\pi_{m-1}(O_{n+1}, e)$ und $\pi_{m-1}(R_{n+1}, e)$.

$m=2$. Wir betrachten das Diagramm (23) mit $m=1$. Nach [10], 5.2 ist $I_1 \circ j_0^*: \pi_1(O_n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^n)$ ein Isomorphismus auf, also wegen (20) auch j_0^* . Sei $\alpha \in \pi_1(O_{n+1})$ und $j^*(\alpha) = 0$. Dann ist $p_1^*(\alpha) = p_2^* \circ j^*(\alpha) = 0$. Die erste Zeile von (23) ist exakt, also $\alpha = i_1^*(\beta)$ für geeignetes $\beta \in \pi_1(O_n)$. Nun ist $i_2^* \circ j_0^*(\beta) = j^* \circ i_1^*(\beta) = j^*(\alpha) = 0$ und die zweite Zeile von (23) exakt, also $j_0^*(\beta) = \Delta_2(\gamma)$ für geeignetes $\gamma \in \pi_2(S^n)$. Hieraus folgt $\beta = (j_0^*)^{-1} \circ \Delta_2(\gamma) = \Delta_1(\gamma)$. Die erste Zeile von (23) ist exakt, also $0 = i_1^* \circ \Delta_1(\gamma) = i_1^*(\beta) = \alpha$. $j^*: \pi_1(O_{n+1}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{G}^n)$ ist also ein Isomorphismus.

$m=3$. Nach [8], 22.10 ist $\pi_2(O_{n+1}) = 0$. $j^*: \pi_2(O_{n+1}) \rightarrow \pi_2(\mathbb{G}^n)$ ist also sicher ein Isomorphismus.

$n=1$. Wir betrachten das Diagramm (23) mit $n=1$ und $m-1$ statt m . $p_1^*: \pi_{m-1}(O_2) \rightarrow \pi_{m-1}(S^1)$ ist ein Isomorphismus auf $(\pi_{m-1}(O_2) = \pi_{m-1}(R_2), R_2 = S^1)$. Wegen $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ ist also auch $j^*: \pi_{m-1}(O_2) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathbb{G}^1)$ ein Isomorphismus.

$n=2$. Wir setzen $m > 2$ voraus und betrachten (23) mit $n=2$ und $m-1$ statt m . Nach [8], 22.2 ist $\pi_{m-1}(O_2) = 0$, also $i_1^*(\pi_{m-1}(O_2)) = 0$, also $p_1^*: \pi_{m-1}(O_3) \rightarrow \pi_{m-1}(S^2)$ ein Isomorphismus und wegen $p_1^* = p_2^* \circ j^*$ auch $j^*: \pi_{m-1}(O_3) \rightarrow \pi_{m-1}(\mathbb{G}^2)$ ein Isomorphismus.

X. Die einfachsten Beispiele von Faserräumen $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, S^m, S^n, O_{n+1}\}$, $i=1, 2$, die f -homotopieäquivalent aber nicht äquivalent sind, erhält man nach Satz 6 für $m=4$, $n=3$. Wir geben zur Erläuterung der allgemeinen Ergebnisse einen Faserraum $\mathfrak{B} = \{B, p, S^4, S^3, O_4\}$ an, der dem Produkt $S^4 \times S^3$ f -homotopieäquivalent aber nicht äquivalent ist. Wir definieren $\mathfrak{B}$ durch eine charakteristische Abbildung $T: S^3 \rightarrow O_4$ (s. V).

$\pi_3(O_3, e)$ ist frei zyklisch und ein erzeugendes Element dieser Gruppe wird durch die zweiblättrige Überlagerung $\tau: S^3 \rightarrow R_3$ repräsentiert (s. [8], 22.3). $\tau^{12}: S^3 \rightarrow O_3$ sei durch $x \rightarrow (\tau(x))^{12}$, $x \in S^3$ erklärt. τ^{12} repräsentiert das Element $12 \cdot \tau^* \in \pi_3(O_3, e)$ (s. [8], 16.7).

Wir betrachten das Diagramm (23) für $m=3$, $n=3$. Nach [7], Prop. 10, S. 284 hat $\pi_6(S^3)$ die Ordnung 12. Hieraus und aus (20) folgt $j_0^*(12 \tau^*) = 12 j_0^*(\tau^*) = 0$. Dagegen ist $i_1^*(12 \tau^*) \neq 0$, denn $i_1^*: \pi_3(O_3) \rightarrow \pi_3(O_4)$ ist ein Isomorphismus (s. [8], 22.6).

Es sei nun $\mathfrak{B} = \{B, p, S^4, S^3, O_4\}$ ein Faserraum mit charakteristischer Abbildung $T = i_1 \circ \tau^{12}$ (s. [8], 18.2), $i_1: O_3 \rightarrow O_4$ die Injektion. $\mathfrak{B}$ ist dem

Produkt $S^4 \times S^3$ nicht äquivalent (s. [8], 18.3). Wegen $j^*(i_1^*(12\tau^*)) = i_2^* \circ j_0^*(12\tau^*) = 0$ ist $j \circ T$ nullhomotop, also $\mathfrak{B}$ dem Produkt $S^4 \times S^3$ f -homotopieäquivalent¹¹⁾ (s. Satz 3).

Literatur.

- [1] ARENS, R.: Topologies for homeomorphism groups. Amer. J. Math. **68**, 593—610 (1946). — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, chap. X: Espaces fonctionnels. — [3] FOX, R. H.: On fibre spaces. II. Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 733—735 (1943). — [4] HOPF, H.: Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. Fundamenta Mathematicae **25**, 427—440 (1935). — [5] PONTRJAGIN, L.: Sur les nombres de Betti des groupes de Lie. C. R. Acad. Sci. Paris **200**, 1277—1280 (1935). — [6] SERRE, J. P.: Homologie singulière des espaces fibrés; applications. Ann. of Math. **54**, 425—505 (1951). — [7] SERRE, J. P.: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. **58**, 258—294 (1953). — [8] STEENROD, N.: The topology of fibre bundles. Princeton Math., Ser. 14. — [9] THOM, R.: Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod. Ann. École norm. sup. (3) **69**, 109—182 (1952). — [10] WHITEHEAD, G. W.: On products in homotopy groups. Ann. of Math. **47**, 460—475 (1946). — [11] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial Homotopy. I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949).

¹¹⁾ Dagegen ist der zu $\mathfrak{B}$ assoziierte Hauptfaserraum $\tilde{\mathfrak{B}} = \{\tilde{B}, \tilde{p}, S^4, O_4, O_4\}$ dem Produkt $S^4 \times O_4$ nicht f -homotopieäquivalent (vgl. M. L. CURTIS, Ann. of Math. **60**, Theorem 10.1). Sonst gäbe es nämlich eine f -Abbildung $S^4 \times O_4 \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}$. Eine Schnittfläche in $S^4 \times O_4$ ginge dabei in eine Schnittfläche in $\tilde{\mathfrak{B}}$ über. $\tilde{\mathfrak{B}}$ wäre also dem Produkt $S^4 \times O_4$ äquivalent (s. [8], 8.3), also auch $\mathfrak{B}$ äquivalent zu $S^4 \times S^3$ (s. [8], 8.2). Dies beantwortet eine Frage von R. THOM [9], S. 167.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. Dezember 1954.)