ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 73, No. 2, March, 1961
Printed in Japan

ÜBER DIE STEENRODSCHEN KOHOMOLOGIEOPERATIONEN

VON ALBRECHT DOLD

(Received March 1, 1960)

Einleitung

Die Steenrodschen Kohomologieoperationen werden in [23] für reguläre Zellenkomplexe konstruiert, aber es ist bekannt, dass eine "simpliziale Struktur" zusammen mit einer "Diagonale" dafür bereits genügen (s. [13, Préface, S. V]). In Teil I der vorliegenden Arbeit wird eine solche Konstruktion für freie FD-Komplexe mit Diagonale durchgeführt (§ 1–4). Grob gesprochen besteht die Methode darin, dass die azyklischen Träger in [23] durch azyklische Modelle ersetzt werden; anstelle der diagonalen Approximation in [23] tritt eine Form des Satzes von Eilenberg-Zilber (s. 1. 12).

In Teil II (§ 6–10) verfolgen wir Ideen von Steenrod [25] und stellen mit Hilfe des Norm- (oder Transfer-) Homomorphismus' (§ 6) eine direkte Verbindung zwischen seinen Kohomologieoperationen und den Eilenberg-MacLaneschen Gruppen $H^*(A, q)$ her. Als Eilenberg-MacLanesche Komplexe fungieren dabei unendliche symmetrische Produkte (§ 9). Wir beweisen den Satz (10. 1, 10. 3), dass sich jede Kohomologieoperation (singuläre Kohomologie) mitend lich erzeugten Koeffizientengruppen als Summe von Steenrodschen Operationen darstellen lässt. Dieses Ergebnis, von Steenrod [24] vermutet, wurde bereits von J. C. Moore auf einem ganz anderen Wege gefunden (unveröffentlicht), nämlich über die Cartansche Theorie der Konstruktionen. Zusammen mit der Analyse [23], [26] der Steenrodschen Operationen ergibt dieser Satz ein verhältnismässig kleines und überschaubares Erzeugendensystem für die Menge aller Kohomologieoperationen (s. 10. 6).—Ein direkter Zusammenhang zwischen Steenrod-Operationen und Eilenberg-MacLaneschen Gruppen wurde kürzlich auch von Nakamura [17] angekündigt.

Der Teil III (§ 11–15) enthält die Beweise der Sätze 2.6 und 6.7.

Ich danke Herrn D. Puppe für zahlreiche klärende Diskussionen; insbesondere schulde ich ihm den ersten Beweis des Satzes 8.3. Gespräche mit Herrn P. Cartier waren mir vor allem bei den Betrachtungen über den Satz von Eilenberg-Zilber (§ 1) sehr nützlich.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit wurden beim Colloquium des CNRS in Lille im Juni 1959 angekündigt (s. Bull. de la Soc. Math. de France 1959).

Teil I. Reduzierte Potenzen in FD-Komplexen mit Diagonale.

1. Der Satz von Eilenberg-Zilber

Es seien $K_1, K_2, \cdots, K_n$ FD-Komplexe (s. [9], 2; bei Godement [13], 3.1 heissen sie "complexes de chaînes semi-simplicials"). Der Satz von Eilenberg-Zilber besagt, dass das Tensorprodukt $K_1 \otimes K_2 \otimes \cdots K_n$ und das kartesische Produkt $K_1 \times K_2 \times \cdots K_n$ in natürlicher Weise homotopie-äquivalent sind (s. [10], 2 oder [13], 3. 9. 1). Der Beweis dieses Satzes mit azyklischen Modellen ([12], [13]) zeigt ausserdem, dass jede graderhöhende natürliche Kettenabbildung zwischen diesen Produkten nullhomotop ist. Zur rationellen Formulierung dieser Tatsachen benutzen wir nach dem Muster von P. Cartier den "Funktionalkomplex" Hom (s. [2], 2).

Es sei $\mathfrak{K}$ die Kategorie der (geordneten) n-tupel $(K_1, K_2, \cdots, K_n)$ von FD-Komplexen. Tensorprodukt $K_1 \otimes K_2 \otimes \cdots K_n$ und kartesisches Produkt $K_1 \times K_2 \times \cdots K_n$ sind kovariante Funktoren von $\mathfrak{K}$ in die Kategorie der Kettenkomplexe. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichne jeweils einen dieser beiden Funktoren (es darf auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ sein); $\mathfrak{A}_p$ bezw. $\mathfrak{B}_p$ sei die p-dimensionale Komponente von $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$; für $p < 0$ ist $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{B}_p = 0$ zu setzen. Wir betrachten die Gruppen $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_p)$ der natürlichen Transformationen des Funktors $\mathfrak{A}_p$ in den Funktor $\mathfrak{B}_q$ und bilden damit einen *Funktionalkomplex* $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wie folgt: Ein Element $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_r$ ist eine Folge von natürlichen Transformationen $f_m \colon \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_{m+r}$, $m = \cdots -1, 0, 1, \cdots,$ d.h.

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_r = \textstyle\prod_m \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_{m+r}) \; . \tag{1.1}$$

Ferner definieren wir den Randoperator

$$\begin{aligned} d \colon \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_r &\to \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_{r-1} \\ d(f) &= d^{\mathfrak{B}} \circ f + (-1)^{r+1} f \circ d^{\mathfrak{A}} \, , \end{aligned} \tag{1.2}$$

wobei $d^{\mathfrak{A}}$ bezw. $d^{\mathfrak{B}}$ den Rand in $\mathfrak{A}$ bezw. $\mathfrak{B}$ bezeichnet.

Man überzeugt sich sofort, dass $dd = 0$ ist, also wirklich ein Komplex vorliegt.

1.3. Die *r-Zyklen* von $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ sind die Folgen $f_m \colon \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_{m+r}$ mit $df = (-1)^r fd$, d.h. *die natürlichen Kettenabbildungen* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *vom Grade* r. Ein r-Zykel f von $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist genau dann *nullhomolog*, wenn es eine Folge $s \colon \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_{m+r+1}$ gibt mit $f = d(s) = ds + (-1)^r sd$, d.h. wenn f als Kettenabbildung aufgefasst *in natürlicher Weise nullhomotop* ist, in Zeichen $f \simeq 0$. *Die Homologiegruppe* $H_r \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *ist also die Gruppe der Homotopieklassen von natürlichen Kettenabbildungen* $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *vom Grade* r.

1.4. In der Dimension 0 stimmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ überein, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0$, und jede natürliche Transformation $\mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}_0$ ist gegeben durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl (dies ist offenbar so, wenn $K_1 = K_2 = \cdots = K_n$ der FD-Komplex eines Punktes ist—dann ist $\mathfrak{A}_0(K_1, \cdots, K_n) = \mathbf{Z}$—und überträgt sich wegen der Natürlichkeit auf beliebige K_i). Wir können also $\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$ mit der Gruppe $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen identifizieren. Daraus ergibt sich eine *Ergänzung* (augmentation)

$$\varepsilon : \operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \to \mathbf{Z} \tag{1.5}$$

wie folgt: ε bildet $\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_r$ in 0 ab für $r \neq 0$ und ordnet jedem $f \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_0$ die Komponente $f_0 \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) \cong \mathbf{Z}$ zu. Man überzeugt sich leicht (am besten indem man wie oben für K_i den Punktkomplex nimmt), dass $\varepsilon d = 0$ ist, also wirklich eine Ergänzung vorliegt, oder was dasselbe ist, eine Kettenabbildung in den Komplex $(\mathbf{Z}, 0)$.[1]

1.6. SATZ von Eilenberg-Zilber. $\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *ist ein azyklischer Komplex über* $\mathbf{Z}$, d.h. $H_r\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$ *für* $r > 0$, *und*

$$\varepsilon_*: H_0\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \cong \mathbf{Z}\ .$$

In der Tat setzt sich der Beweis mit azyklischen Modellen ([12], [13], 3. 9. 1) aus den beiden folgenden Schritten zusammen:

(i) Sind $f, g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ natürliche Kettenabbildungen vom Grade r und ist $f_{-r} = g_{-r}: \mathfrak{A}_{-r} \to \mathfrak{B}_0$, dann ist $f \simeq g$. Daraus folgt: $H_r\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$ für $r > 0$, und ε_* ist monomorph.

(ii) Jedes $f_0 \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$ lässt sich zu einer natürlichen Kettenabbildung $f \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_0$ erweitern, d.h. ε_* ist epimorph.

Übrigens gilt auch $H_r\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$ für $r < 0$, ist aber unwichtig für das folgende.

1.7. *Die symmetrische Gruppe* $S(n)$ *operiert in* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *und damit auch in* $\operatorname{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Wir formulieren dies etwas genauer und ziehen einige Folgerungen.

Sei $\omega \in S(n)$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots n$. Durch Vertauschung der Faktoren liefert sie natürliche Isomorphismen, die wir ebenfalls mit ω bezeichnen:

$$\begin{aligned} \omega &: K_1 \times K_2 \times \cdots K_n \to K_{\omega(1)} \times K_{\omega(2)} \times \cdots K_{\omega(n)} \\ \omega(a_1 \times a_2 \times &\cdots a_n) = a_{\omega(1)} \times a_{\omega(2)} \times \cdots a_{\omega(n)} \end{aligned} \tag{1.8}$$

und

$$\begin{aligned} \omega &: K_1 \otimes K_2 \otimes \cdots K_n \to K_{\omega(1)} \otimes K_{\omega(2)} \otimes \cdots K_{\omega(n)} \\ \omega(a_1 \otimes a_2 \otimes &\cdots a_n) = (-1)^* a_{\omega(1)} \otimes a_{\omega(2)} \otimes \cdots a_{\omega(n)}\ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

[1] Ist G eine abelsche Gruppe und q eine ganze Zahl, dann bezeichnet (G, q) den Komplex, der in der Dimension q mit G übereinstimmt und in allen anderen Dimensionen null ist.

Das Vorzeichen $(-1)^*$ in 1.9 hängt in bekannter Weise von ω und der Dimension der a_i: Bei festen $a_1, a_2, \cdots a_n$ hängt es multiplikativ von ω ab, und für eine Transposition benachbarter Elemente $(i, i+1)$ ist der Exponent $\dim(a_i)\dim(a_{i+1})$.

Es sei nun $f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Dann ist auch die Zusammensetzung

$$\mathfrak{A}(K_1, \cdots, K_n) \xrightarrow{\omega^{-1}} \mathfrak{A}(K_{\omega^{-1}(1)}, \cdots, K_{\omega^{-1}(n)}) \xrightarrow{f}$$
$$\mathfrak{B}(K_{\omega^{-1}(1)}, \cdots, K_{\omega^{-1}(n)}) \xrightarrow{\omega} \mathfrak{B}(K_1, \cdots, K_n)$$

in $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$; wir bezeichnen sie mit $\omega \circ f \circ \omega^{-1}$. Die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}(n)$ und damit auch jede Untergruppe $\pi \subset \mathcal{S}(n)$ operiert also (von links) in $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$:

$$(1.10) \qquad \omega \cdot f = \omega \circ f \circ \omega^{-1}, \qquad \omega \in \mathcal{S}(n),\ f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \ .$$

Man sieht sofort, dass diese Operation mit der Ergänzung 1.5 verträglich ist, d.h. $\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *ist ein π-Komplex über* $\mathbf{Z}$, und zwar ein azyklischer nach 1.6.

Betrachten wir nun ausserdem einen (positiven) π-freien π-Komplex W über $\mathbf{Z}$. (Wir erinnern an die Bedeutung der Bezeichnungen:

positiv = null in negativen Dimensionen; der Randoperator vom Grade -1

π-Komplex=Komplex, in dem π(von links) operiert.

π-frei=frei als Modul über dem Gruppenring $\mathbf{Z}\pi$.

über $\mathbf{Z}$=versehen mit einer π-Abbildung $\varepsilon : W \rightarrow (\mathbf{Z}, 0)$,[1] der Ergänzung.

Dabei operiert π trivial in $\mathbf{Z}$.

Nach dem Fundamentallemma der homologischen Algebra ([4], V, 1.1) *gibt es eine bis auf π-Homotopie bestimmte π-Abbildung*

$$(1.11) \qquad F' : W \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \qquad \text{mit } \varepsilon F' = \varepsilon \ .$$

Auf Grund der bekannten Isomorphie

$$\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \cong \mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$$

(die auch für Kettenkomplexe besteht; man hat nur einige Vorzeichen bei den Randoperatoren zu kontrollieren) ergibt sich hieraus der

1.12. SATZ. *Es gibt eine natürliche Transformation*

$$F : W \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

mit

$$F(w \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) = \varepsilon(w) a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n$$

für $w \in W$, $a_i \in K_i$, $\dim(w) = \dim(a_i) = 0$, *und so, dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} W \otimes \mathfrak{A}(K_1, \cdots, K_n) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\omega\otimes\omega"'] & \mathfrak{B}(K_1, \cdots, K_n) \arrow[d, "\omega"] \\ W \otimes \mathfrak{A}(K_{\omega(1)}, \cdots, K_{\omega(n)}) \arrow[r, "F"'] & \mathfrak{B}(K_{\omega(1)}, \cdots, K_{\omega(n)}) \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

kommutativ ist für jedes $\omega \in \pi$.

Ist $\bar{F}: W \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *eine zweite solche Transformation, dann gibt es eine natürliche Homotopie* $s: W \otimes \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *zwischen* F *und* $\bar{F}$, *so dass wieder alle Diagramme* 1.13 *mit* s *statt* F *kommutativ sind.*

Die Abbildungen F von 1.12 und F' von 1.11 hängen durch die Gleichung

$$F(w \otimes a) = F'(w)(a), \qquad w \in W,\ a \in \mathfrak{A}(K_1, \cdots, K_n) \tag{1.14}$$

zusammen; entsprechend für Homotopien zwischen Abbildungen F und Abbildungen F'.

Für $\pi = 1$ und $W = (\mathbf{Z}, 0$, ist 1.12 der Satz von Eilenberg-Zilber in der üblichen Formulierung.

2. Der Fall $K_1 = K_2 = \cdots = K_n$

Wir betrachten den Satz 1.12 für den Fall, dass alle FD-Komplexe K_i übereinstimmen, $K_1 = K_2 = \cdots = K_n = K$. Vermöge 1.8 bezw. 1.9 sind $\mathfrak{A}(K, \cdots, K)$, $\mathfrak{B}(K, \cdots, K)$ dann π-Komplexe. Dasselbe gilt für $W \otimes \mathfrak{A}(K, \cdots, K)$ vermöge der *diagonalen Operation*

$$\omega(w \otimes a) = \omega(w) \otimes \omega(a), \qquad \omega \in \pi .$$

Die Kommutativität von 1.13 bringt zum Ausdruck, dass

$$F: W \otimes \mathfrak{A}(K, \cdots, K) \to \mathfrak{B}(K, \cdots, K)$$

ein π-*Homomorphismus* ist (d. h. *äquivariant* im Sinne von [23]).

Insbesondere interessieren wir uns für den (bis auf π-Homotopie bestimmten) natürlichen π-Homomorphismus

$$F: W \otimes K^n \to K^{(n)} , \tag{2.1}$$

der sich hieraus ergibt, und für sein Duales (vgl. [23], 2.8)

$$\Phi: W \otimes K^{(n)*} \to K^{n*} . \tag{2.2}$$

Dabei bedeutet K^n bezw. $K^{(n)}$ die n^{te} kartesische bezw. tensorielle Potenz von K. Ist C irgendein Kettenkomplex, dann setzen wir

$$C^* = \operatorname{Hom}(C, (G, 0)^1) , \tag{2.3}$$

wo Hom(C, D) für Kettenkomplexe C, D wie in 1.1–1.2 zu definieren ist. Die abelsche Gruppe G ist beliebig aber fest in allen folgenden Betrachtungen—daher die abkürzende Schreibweise C^*. C^* ist nichts anderes als der Komplex der Koketten von C mit Koeffizienten in G, jedoch mit einem (wie es scheint zweckmässigen) Vorzeichen für den Randoperator (nämlich $\delta\varphi = (-1)^{1+\dim(\varphi)}\varphi \circ \partial$; vgl. 1.2). Wir benutzen die Vereinbarung $C^*_{-r} = C^{*r}$ (s. [4], IV. 3), also $H_{-r}(C^*) = H^r(C^*) = r^{\text{te}}$ Kohomologiegruppe von C mit Koeffizienten in G.

In Formeln ist Φ wie folgt gegeben

$$\Phi(w \otimes x^*)\cdot x = (-1)^{pq} x^* \cdot F(w \otimes x) \tag{2.4}$$
$$w \in W,\ x^* \in K^{(n)*},\ x \in K^n,\ p = \dim(w),\ q = \dim(x^*)$$

(2.4 unterscheidet sich von [23], 2.8 durch das Vorzeichen; dies liegt an unserer Definition von C^*).

Da K^n, $K^{(n)}$ π-Komplexe sind, gilt dasselbe für K^{n*}, $K^{(n)*}$ (durch Dualität) und $W \otimes K^{(n)*}$ (diagonale Operation). Φ ist eine (bis auf π-Homotopie bestimmte) natürliche π-Abbildung. Wir können daher durch π dividieren (d.h. mit $\mathbf{Z} \otimes_\pi$ multiplizieren) und erhalten eine bis auf Homotopie bestimmte Kettenabbildung

$$\Phi/\pi : W \otimes_\pi K^{(n)*} \to K^{n*}/\pi\ . \tag{2.5}$$

In den für uns später interessanten Fällen besitzt Φ/π ein Rechts-Homotopieinverses; genauer gilt

2.6. Satz. *Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt.*

(α) *W ist ein azyklischer (freier, positiver) π-Komplex über* $\mathbf{Z}$.

(β) *K ist ein freier* FD-*Komplex* (d.h. *jedes K_i ist eine freie abelsche Gruppe*).

(γ) *Für jedes i ist $H_i(K)$ endlich erzeugt.*

(δ) *Es ist entweder $\pi = \mathcal{S}(n)$ oder $\pi = \mathcal{S}(n, p)$ eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathcal{S}(n)$ (p eine beliebige Primzahl).*

Dann gibt es eine Kettenabbildung

$$\Psi : K^{n*}/\pi \to W \otimes_\pi K^{(n)*}$$

mit $(\Phi/\pi)\Psi \simeq$ id. *Insbesondere induziert Φ/π Epimorphismen der Homologie.*

Der Beweis wird in Teil III (§ 11ff) gegeben. Es ist mir nicht bekannt, ob die Voraussetzungen (γ) oder (δ) überflüssig sind.

3. Äussere Steenrodsche Potenzen

Wir erinnern daran, dass zwischen der Kategorie der positiven Kettenkomplexe und der FD-Komplexe eine Äquivalenz besteht, die die Homotopierelation erhält (s. [14], [5]). Wir dürfen daher, wenn wir Sätze über FD-Komplexe benötigen, einfach die entsprechenden Sätze über Kettenkomplexe zitieren.

Alle im folgenen vorkommenden FD-Komplexe werden als frei vorausgesetzt.

Es sei A eine abelsche Gruppe, $q \geqq 0$ eine ganze Zahl. Ein FD-Komplex M heisst vom Typ (A, q), wenn $H_i(M) = 0$ ist für $i \neq q$ und $H_q(M) = A$.[2] Dann besitzt M eine fundamentale Kohomologieklasse $\iota = \iota_M \in H^q(M, A)$ mit den folgenden Eigenschaften. (s. [6], 5.6).

(3.1) *Ist K ein beliebiger (freier)* FD-*Komplex, dann induziert die Zuordnung $\alpha \to a = \alpha^*(\iota)$ eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Homotopieklassen von* FD-*Abbildungen α: $K \to M$ und den Kohomologieklassen $a \in H^q(K, A)$.*

Es sei nun $a \in H^q(K, A)$ und $\alpha : K \to M$ die bis auf Homotopie bestimmte zugehörige FD-Abbildung. Die n^{te} kartesische Potenz K^n ist ein FD-Komplex, in dem π operiert (s. 1.8), und die n^{te} Potenz von α, α^n: $K^n \to M^n$, ist eine π-Abbildung. Sind $\alpha, \alpha' : K \to M$ homotop, dann sind $\alpha^n, \alpha'^n : K^n \to M^n$ π-homotop (s. [5], 5.6; dort wird zwar ein kommutativer Grundring angenommen, aber die Kommutativität wird beim Beweis nicht benutzt. Vgl. auch [8], I). Dann sind auch die transponierten Abbildungen

$$\alpha^{n*},\ \alpha'^{n*}\colon M^{n*} \to K^{n*}$$

(s. 2.3) π-homotop, also

$$\alpha^{n*}/\pi,\ \alpha'^{n*}/\pi\colon M^{n*}/\pi \to K^{n*}/\pi$$

homotop. Wir haben also jedem $a \in H^q(K, A)$ eine bis auf Homotopie bestimmte Abbildung

$$\alpha^{n*}/\pi\colon M^{n*}/\pi \to K^{n*}/\pi \tag{3.2}$$

zugeordnet. Insbesondere ist der induzierte Homomorphismus der Homologie (für den wir dasselbe Zeichen verwenden)

$$\alpha^{n*}/\pi\colon H(M^{n*}/\pi) \to H(K^{n*}/\pi) \tag{3.3}$$

durch a eindeutig bestimmt.

Wir betrachten nun die zusammengesetzte Abbildung (s. 2.5 und 3.2)

$$W \otimes_\pi M^{(n)*} \xrightarrow{\Phi/\pi} M^{n*}/\pi \xrightarrow{\alpha^{n*}/\pi} K^{n*}/\pi\,. \tag{3.4}$$

Dabei setzen wir W wie in 2.6 als azyklisch voraus (wodurch es

---

[2] Diese abkürzende Schreibweise soll ausdrücken, dass ein Isomorphismus $H_q(M) \cong A$ ausgezeichnet ist.

bekanntlich bis auf π-Homotopieäquivalenz bestimmt ist). Der durch 3.4 induzierte Homomorphismus der Homologie

$$(3.5) \qquad (\alpha^{n*}/\pi)(\Phi/\pi) : H(W \otimes_\pi M^{(n)*}) \to H(K^{n*}/\pi)$$

ist eindeutig durch a bestimmt. Dies gestattet die folgende

3.6. Defintion. Die Elemente $Q \in H^r(W \otimes_\pi M^{(n)*})$ heissen *reduzierte π-Potenzen (vom Typ (A, q, G, r))*. Das Element $(\alpha^{n*}/\pi)(\Phi/\pi)(Q) \in H^r(K^{n*}/\pi)$ bezeichnen wir mit $Q \models a$ ($Q \models$ ist die zu Q gehörige äussere Operation; vgl. [11], 7). Die Elemente $Q \models a$ heissen die *äusseren reduzierten π-Potenzen von a* (vom Typ (A, q, G, r)).

Der folgende Satz zeigt, dass $Q \models$ wirklich eine äussere Kohomologieoperation ist (in der Kategorie der freien FD-Komplexe).

3.7. Satz. *Ist $f \colon K' \to K$ eine* FD-*Abbildung und Q eine reduzierte π-Potenz, dann ist*

$$Q \models f^*(a) = (f^{n*}/\pi)(Q \models a) \text{ für } a \in H^q(K, A) .$$

Beweis. Sei $\alpha' = \alpha \circ f \colon K' \to M$. Dann ist

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ K \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd}$$

kommutativ, also auch

$$\begin{tikzcd} K'^{n*}/\pi & & \\ & M^{n*}/\pi \arrow[ul, "\alpha'^{n*}/\pi"'] \arrow[dl, "\alpha^{n*}/\pi"] & W \otimes_\pi M^{(n)*} \arrow[l, "\Phi/\pi"'] \\ K^{n*}/\pi \arrow[uu, "f^{n*}/\pi"] & & \end{tikzcd} .$$

Daraus folgt die Behauptung, weil ja α' zur Kohomologieklasse

$$f^*(a) \in H^q(K', A)$$

gehört (s. 3.1).

3.8. Bemerkung. Offenbar können schon die Elemente von $H(M^{n*}/\pi)$ als äussere Kohomologieoperationen interpretiert werden; man braucht nicht erst die Abbildung Φ/π davor zu schalten. Dasselbe wird für die in § 4 definierten (wichtigeren) "inneren" Operationen gelten. Indessen sind die Gruppen $H(M^{n*}/\pi)$ schwer zugänglich, während $H(W\otimes_\pi M^{(n)*})$ als eine Art "Homologie der Gruppe π" betrachtet und mit den Methoden dieser Theorie behandelt werden kann (s. [22], [23]). Ausserdem zeigt der Satz 2.6, dass man aus $H(M^{n*}/\pi)$ nicht mehr Kohomologieoperationen erhalten kann als aus $H(W\otimes_\pi M^{(n)*})$, jedenfalls nicht in dem wichtigsten Fall $\pi = \mathcal{S}(n)$ (und A endlich erzeugt).

3.9. BEMERKUNG. Für die tatsächliche Berechnung der vorkommenden Homologiegruppen sind die FD-Komplexe K unangenehm "gross". Man kann aber überall zu den *normalisierten* Kettenkomplexen $\mathfrak{N}K$ (s. [9], 4) übergehen:

(i) Die Kettenkomplexe K und $\mathfrak{N}K$ sind homotopieäquivalent. Daraus folgt analog zu [23], Abschnitt 5, dass auch $W\otimes_\pi K^{(n)*}$ und $W\otimes_\pi(\mathfrak{N}K)^{(n)*}$ homotopieäquivalent sind.

(ii) Die Homotopieäquivalenz zwischen FD-Komplex K und normalisiertem Kettenkomplex $\mathfrak{N}K$ ist natürlich. Daraus ergibt sich, dass K^n und $\mathfrak{N}(K^n)$ sogar π-homotopieäquivalent sind. Dann folgt aber, dass auch K^{n*}/π und $\mathfrak{N}(K^{n*})/\pi$ homotopieäquivalent sind.

4. Diagonale und innere Steenrodsche Potenzen

Der Übergang von den äusseren zu den inneren reduzierten π-Potenzen wird, analog wie beim Cup-Produkt, durch eine "Diagonale" bewerkstelligt.

4.1. DEFINITION. Eine *π-Diagonale* in einem FD-Komplex K ist eine FD-Abbildung

$$\Delta : K \to K^n \ ,$$

die invariant ist bei den Operatoren aus der Gruppe π. Mit anderen Worten, lassen wir π trivial auf K operieren (jedes $\omega \in \pi$ operiert identisch), dann ist Δ eine π-Abbildung.

Durch Dualisieren ergibt sie eine π-Abbildung Δ^*: $K^{n*} \to K^*$ und durch Übergang zum Quotienten

$$\Delta^*/\pi\colon K^{n*}/\pi \to K^*/\pi = K^* \ . \tag{4.2}$$

4.3. DEFINITION. Die Δ^*/π-Bilder der äusseren reduzierten π-Potenzen von $a \in H^q(K, A)$ heissen (*innere*) *reduzierte π-Potenzen von a* (K ein freier FD-Komplex mit π-Diagonale). Ist $Q \in H^r(W\otimes_\pi M^{(n)*})$, dann bezeichnen wir das Element $(\Delta^*/\pi)(Q \vDash a) \in H^r(K, G)$ mit $Q \vdash a$ (lies "Q angewendet auf a").

4.4. SATZ. *Die $Q \vdash$ sind Kohomologieoperationen in der Kategorie* *der* FD-*Komplexe mit* π-*Diagonale.* D.h. *ist* $f\colon K' \to K$ *eine* FD-*Abbildung, für welche das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[d, "f"'] & K'^n \arrow[d, "f^n"] \\ K \arrow[r, "\Delta"'] & K^n \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

kommutativ ist (Bezeichnung: FD-*Abbildung mit* π-*Diagonale*), *dann gilt*

$$Q \vdash f^*(a) = f^*(Q \vdash a) \qquad \text{für } a \in H^q(K, A)\ .$$

Beweis. Mit 4.5 ist auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K'^* & K'^{n*}/\pi \arrow[l, "\Delta'^*/\pi"'] \\ K^* \arrow[u, "f^*"] & K^{n*}/\pi \arrow[l, "\Delta^*/\pi"] \arrow[u, "f^{n*}/\pi"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Wenden wir das auf $Q \models a \in H(K^{n*}/\pi)$ an, so ergibt sich wegen 3.7 die Behauptung.

4.6. *Diagonale unabhängig von* π. In allen praktisch vorkommenden Fällen gehen die π-Diagonalen für alle möglichen π aus einer einzigen Abbildung (einer "Komultiplikation")

$$d : K \to K \times K$$

hervor, die *kommutativ* und *assoziativ* ist, d.h. für die die Diagramme

$$\begin{tikzcd} & K \times K \arrow[dd, "T"] \\ K \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "d"'] & \\ & K \times K\,, \end{tikzcd} \qquad T(x \times y) = y \times x\,, \tag{4.7}$$

und

$$\begin{tikzcd} & K \times K \arrow[dr, "\mathrm{id} \times d"] & \\ K \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "d"'] & & K \times K \times K \\ & K \times K \arrow[ur, "d \times \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

kommutativ sind.

Die Zusammensetzung

$$K \xrightarrow{d} K \times K \xrightarrow{\mathrm{id} \times d} K \times K \times K \to \cdots K^{n-1} \xrightarrow{\mathrm{id}^{n-2} \times d} K^n$$

(jede andere "Klammerung" würde wegen 4.8 dieselbe Zusammensetzung ergeben) ist in diesem Falle eine $\mathcal{S}(n)$-Diagonale $K \to K^n$, also erst recht eine π-Diagonale für jedes $\pi \subset \mathcal{S}(n)$. Unabhängig von n und π nennen wir sie künftig *Diagonale* schlechthin und bezeichnen sie mit

$$\Delta : K \to K^n .$$

Insbesondere heisst also d selbst Diagonale und und wird künftig mit Δ bezeichnet.

Für $n = 1$ ist die Diagonale $K \to K^n = K$ *vereinbarungsgemäss die identische Abbildung*. Für $n = 0$ vgl. 4.14.

4.9. BEISPIELE.

(i) Das kartesische Produkt $K \times K'$ zweier FD-Komplexe mit Diagonale besitzt eine natürliche Diagonale

$$K \times K' \xrightarrow{\Delta \times \Delta'} K \times K \times K' \times K' \approx (K \times K') \times (K \times K') .$$

(ii) Der FD-Komplex $C(X)$ eines semi-simplizialen Komplexes X (s. [5], S. 55; in [13] heisst ein solcher FD-Komplex *complexe de chaînes semi-simplicial basique*) besitzt eine natürliche Diagonale, nämlich

$$\Delta(x) = x \times x , \qquad x \in X .$$

Jede semi-simpliziale Abbildung $\varphi : X \to Y$ induziert eine FD-Abbildung $C(\varphi) : C(X) \to C(Y)$ mit Diagonale.

(iii) Es sei K ein FD-Komplex mit *Ergänzung* $\varepsilon : K \to P$. Darunter versteht man eine FD-Abbildung *auf* den FD-Komplex P eines Punktes ($P_k = \mathbf{Z}$, $\partial_i = s_i = \mathrm{id}$). Von einer Diagonale verlangt man in diesem Falle i.a. noch, dass die beiden zusammengesetzten Abbildungen

$$\text{(4.10)} \qquad \begin{array}{l} K \xrightarrow{\Delta} K \times K \xrightarrow{\mathrm{id} \times \varepsilon} K \times P \approx K \\ K \xrightarrow{\Delta} K \times K \xrightarrow{\varepsilon \times \mathrm{id}} P \times K \approx K \end{array}$$

mit der identischen Abbildung von K übereinstimmen (wegen der Kommutativität genügt eine Bedingung).

Wählen wir nun einen "Grundpunkt" in K, d.i. eine FD-Abbildung $\xi : P \to K$ mit $\varepsilon\xi = \mathrm{id}$. Dann wird $K = P \oplus K^0$, wobei K^0 den Kern von ξ (= Elemente mit Ergänzung 0) bezeichnet. Entsprechend ist

$$K \times K = K^0 \times K^0 \oplus K^0 \oplus K^0 \oplus P ,$$

und Δ zerfällt in Komponenten. Die Bedingung 4.10 besagt, dass die Komponenten $P \to P$, $K^0 \to K^0$ identische Abbildungen und dass $P \to K^0$, $K^0 \to P$ Nullabildungen sind, während Δ^0: $K^0 \to K^0 \times K^0$ eine beliebige

Diagonale für K^0 ist; von der letzten Komponente $P \to K^0 \times K^0$ schliesslich verlangt man im allgemeinen noch, dass sie null ist, d.h. dass Δ eine Abbildung "mit Grundpunkt" ist. *Damit ist also eine Diagonale Δ für K mit den genannten Nebenbedingungen genau dasselbe wie eine gewöhnliche Diagonale für K^0.*

Auch die reduzierten Potenzen $Q \vdash$ in K können im wesentlichen schon in K^0 berechnet werden. Betrachten wir nämlich die natürliche Projektion $p: K \to K^0$ ($p \mid K^0 = \mathrm{id}$, $p \mid P = 0$). Sie ist eine FD-Abbildung mit Diagonale, its also mit $Q \vdash$ vertauschbar (s. 4.4), d.h. $Q \vdash a$ für $a \in H^q(K, A) \cong H^q(K^0, A)$, $q > 0$, kann schon in K^0 mit der Diagonale Δ^0 berechnet werden.

Z.B. besitzt der FD-Komplex $C(X)$ eines semi-simplizialen Komplexes X eine natürliche Ergänzung. Sie wird induziert durch die Projektion von X auf den semi-simplizialen Komplex eines Punktes. Jede Auswahl eines Grundpunktes $b \in X_0$ induziert einen Grundpunkt $P \to C(X)$, und die Diagonale Δ aus (ii) hat die oben genannten Eigenschaften.

(iv) Ist K ein beliebiger FD-Komplex, dann ist die symmetrische Algebra $S(K)$ (s. [5], 10) ein ergänzter FD-Komplex mit Diagonale (sogar eine FD-Hopf-Algebra). Die Diagonale von $S(K)$ wird erhalten, indem man auf die FD-Abbildung

$$K \to K \oplus K, \qquad k \to (k, k), \qquad k \in K$$

den Funktor S anwendet und beachtet, dass

$$S(K \oplus K) \cong S(K) \times S(K)$$

(s. [5], 10.9). Diese Diagonale in $S(K)$ wird sich beim Vergleich der reduzierten Potenzen mit den Eilenberg-MacLaneschen Gruppen (s. §§ 7–10) als nützlich erweisen.

4.10. Bemerkung. Die reduzierten Potenzen in einem FD-Komplex mit Diagonale Δ sind *nicht invariant* bei homotoper Abänderung von Δ. Betrachten wir z.B. die Einhängung EX eines semi-simplizialen Komplexes X (mit Grundpunkt; vgl. [16]). $K = C(EX)$ sei sein FD-Komplex, K^0 wie oben (s. 4.9, iii) der Kern der Ergänzung $\varepsilon: K \to P$. Dann ist die Diagonale Δ^0: $K^0 \to K^0 \times K^0$ nullhomotop (duale Formulierung: In einer Einhängung sind alle Cup-Produkte trivial); dies sieht man z.B., wenn man Δ^0 mit der Alexander-Whitney-Abbildung

$$K^0 \times K^0 \to K^0 \otimes K^0$$

(s. [10], (2.8)) zusammensetzt (man erhält null), die ja eine Homotopieäquivalenz ist (s. [10], 2.1). Andereseits sind bekanntlich die reduzierten Potenzen in EX i. a. nicht trivial (s. [22], 6.16., 6.10).

Nehmen wir nun aber an, die beiden Diagonale Δ_0, Δ_1: $K \to K \times K$ (wie in 4.6) seien homotop *als Diagonalen,* d.h. es gebe eine Homotopie

$$h : I \times K \to K \times K$$

zwischen Δ_0 und Δ_1, für die die beiden folgenden Diagramme kommutativ sind

$$(4.11)\qquad \begin{tikzcd} & K \times K \arrow[dd, "T"] \\ I \times K \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & K \times K \end{tikzcd} \qquad (\textit{Kommutativität})$$

$$(4.12)\qquad \begin{tikzcd} & I \times K \times K \arrow[dr, "h \times \mathrm{id}"] & \\ I \times K \arrow[ur, "h'"] \arrow[dr, "h'"'] & & K \times K \times K \\ & I \times K \times K \arrow[ur, "h''"'] & \end{tikzcd} \qquad (\textit{Assoziativität}).$$

Dabei ist h' bezw. h'' die Zusammensetzung der Abbildungen

$$I \times K \xrightarrow{\Delta^I \times \mathrm{id}} I \times I \times K \xrightarrow{\mathrm{id} \times h} I \times K \times K$$

bezw.

$$I \times K \times K \xrightarrow{T \times \mathrm{id}} K \times I \times K \xrightarrow{\mathrm{id} \times h} K \times K \times K \xrightarrow{T \times \mathrm{id}} K \times K \times K$$

T die Vertauschung der Faktoren (s. 4.7) und Δ^I die Diagonale von I (s. 4.9, ii).

Die Zusammensetzung

$$I \times K \xrightarrow{h'} I \times K^2 \xrightarrow{h' \times \mathrm{id}} I \times K^3 \to \cdots \to I \times K^{n-1} \xrightarrow{h' \times \mathrm{id}^{n-2}} K^n$$

ist eine Homotopie $I \times K \to K^n$ zwischen Δ_0 und Δ_1, die invariant ist bei den Permutationen der Faktoren von K^n. Durch Vorschalten einer Eilenberg-Zilber Abbildung $I \otimes K \to I \times K$ erhalten wir eine ebenfalls π-invariante Kettenhomotopie $I \otimes K \to K^n$ und durch Dualisieren (analog zu 2.4) und Übergang zum Quotienten eine Kettenhomotopie $I \otimes K^{n*}/\pi \to K^*$ zwischen Δ_0^*/π und Δ_1^*/π, also

4.13. SATZ. *Sind Δ_0, Δ_1 homotop als Diagonalen, dann stimmen die zugehörigen (inneren) reduzierten Potenzen überein.*

4.14. *Vereinbarungen für $n=0$.* Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, ist es mitunter zweckmässig, den bisherigen Bezeichnungen auch für $n = 0$ noch einen Sinn zu geben. Wir definieren daher: Die 0^{te} (kartesische oder tensorielle) Potenz eines FD-Komplexes K ist der FD-Komplex P eines Punktes (s. 4.9, iii), also $K^0 = K^{(0)} = P$; die 0^{te} Potenz einer FD-

Abbildung $f: K \to K'$ ist die identische Abbildung, $f^0 = f^{(0)} = \mathrm{id}: K^0 \to K'^0$. Die "Permutationsgruppe" π ist trivial für $n = 0$, und für W kann man den Komplex $(\mathbf{Z}, 0)$ nehmen. Die "Diagonale" $\Delta : K \to K^0 = P$ stimmt mit der Ergänzung ε (s. 4.9, iii) überein, falls K ergänzt ist (andernfalls ist sie beliebig, etwa $= 0$).

4.15. BEMERKUNG. Alle bisherigen Betrachtungen mit Ausnahme des Satzes 2.6 übertragen sich wörtlich auf FD-Moduln über beliebigen (kommutativen) Ringen Λ mit Einselement (bei nicht-kommutativen Ringen muss man Bimoduln betrachten, damit die Potenzen K^n usw. Sinn haben).

Diese Bemerkung erweist sich auch bei der Untersuchung spezieller reduzierter Potenzen über dem Ring $\mathbf{Z}$ als nützlich. Z.B. lassen sich die Steenrodschen Quadrate Sq^i, die zu $A = G = \mathbf{Z}_2$, $\pi = \mathcal{S}(2)$ gehören, schon für FD-Komplexe (mit Diagonale) über $\Lambda = \mathbf{Z}_2$ definieren (in einem Komplex K über $\mathbf{Z}$ hängen sie also nur von $K \otimes \mathbf{Z}_2$ ab). Über $\mathbf{Z}_2$ hat der Modellkomplex $M(\mathbf{Z}_2, q)$ aber eine wesentlich einfachere Gestalt als über $\mathbf{Z}$. Dadurch vereinfacht sich sowohl die Definition der Sq^i als auch die Herleitung einiger ihrer Eigenschaften (z.B. der Cartanschen Produktformel).

5. Vergleich mit Steenrods Definition

Es sei X ein simplizialer Komplex, den wir vermöge einer lokalen Eckenordung als semi-simplizialen Komplex auffassen. $K = C(X)$ sei der zugehörige FD-Komplex (der Kettenkomplex von X). Nach Steenrod [23] sind die π-reduzierten Potenzen von $a \in H^q(X, A)$ die Homologiebilder bei der zusammengesetzten Abbildung

$$(5.1) \qquad W \otimes_\pi M'^{(n)} \xrightarrow{\psi} W \otimes_\pi K^{*(n)} \xrightarrow{\xi} W \otimes_\pi K^{(n)*} \xrightarrow{\varphi} K^* .$$

Die entscheidende Abbildung darin ist φ; sie ist dual zu einer *diagonalen Approximation* φ': $W \otimes K \to K^{(n)}$, d.i. eine Kettenabbildung mit dem Träger $w \otimes \sigma \to |\sigma|^n$, σ ein (nicht-ausgeartetes) Simplex aus X (s. [23], 2.6). Für die Definition des "elementaren Kokettenkomplexes M'" und der Abbildungen ψ, ξ werde auf [23] verwiesen. Wir betrachten hier nur den Fall der Koeffizientengruppe $G = \mathbf{Z}$, der allgemeine Fall entsteht daraus im wesentlichen durch Tensorieren mit G (s. [23], 2.9. Vgl. auch 11.5).

Die in den vorstehenden Paragraphen gegebene Definition der reduzierten Potenzen benutzt dagegen die Zusammensetzung

$$(5.2) \qquad W \otimes_\pi M^{(n)*} \xrightarrow{\Phi/\pi} M^n/\pi^* \xrightarrow{\alpha^{n*}/\pi} K^{n*}/\pi \xrightarrow{\Delta^*/\pi} K^*.$$

Wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} W\otimes_\pi M^{(n)*} & \xrightarrow{\Phi/\pi} & M^{n*}/\pi \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes_\pi \alpha^{(n)*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{n*}/\pi} \\ W\otimes_\pi K^{(n)*} & \xrightarrow[\Phi/\pi]{} & K^{n*}/\pi \end{array} \tag{5.3}$$

(folgt aus der Natürlichkeit von F bezw. Φ; s. 1.12, 2.4) können wir statt 5.2 auch die Zusammensetzung

$$W\otimes_\pi M^{(n)*} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_\pi\alpha^{(n)*}} W\otimes_\pi K^{(n)*} \xrightarrow{\Phi/\pi} K^{n*}/\pi \xrightarrow{\Delta^*/\pi} K^* \tag{5.4}$$

benutzen.

Wir haben schon gesehen (s. 3.9), dass man in 5.4 überall zu den normalisierten Komplexen übergehen kann. Nehmen wir nun an (wie in [23]), die Koeffizientengruppe A sei zyklisch von der Ordung Θ (evtl. ∞), dann können wir M so wählen, dass für den normalisierten Komplex $\mathfrak{N}(M)$ gilt: $(\mathfrak{N}M)_i = 0$ für $i \neq q,\ q+1$, $(\mathfrak{N}M)_q = \mathbf{Z}$, $(\mathfrak{N}M)_{q+1} = \mathbf{Z}$ oder 0, je nachdem ob Θ endlich ist oder nicht. Im ersten Fall ist der Randoperator $(\mathfrak{N}M)_{q+1} \rightarrow (\mathfrak{N}M)_q$ durch Multiplikation mit Θ gegeben. Der Komplex $(\mathfrak{N}M)^*$ stimmt dann offenbar mit Steenrods M' überein, und die Abbildung

$$(\mathfrak{N}\alpha)^*\colon (\mathfrak{N}M)^* \rightarrow (\mathfrak{N}K)^*$$

ist eine "Kokettendarstellung" von a (s. [23], S. 197). Daher stimmen bis auf Homotopieäquivalenz auch die Abbildungen

$$\xi\psi : W\otimes_\pi M'^{(n)} \rightarrow W\otimes_\pi K^{(n)*}$$

aus 5.1 und

$$\mathrm{id}\otimes_\pi \alpha^{(n)*}\colon W\otimes_\pi M^{(n)*} \rightarrow W\otimes_\pi K^{(n)*}$$

aus 5.4 überein.

Wir zeigen nun noch, dass auch φ: $W\otimes_\pi K^{(n)*} \rightarrow K^*$ und

$$(\Delta^*/\pi)(\Phi/\pi)\colon W\otimes_\pi K^{(n)*} \rightarrow K^*$$

im wesentlichen dasselbe sind. Dazu betrachten wir die zusammengesetzte Abbildung

$$\zeta'\colon W\otimes K \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta} W\otimes K^n \xrightarrow{F} K^{(n)}\,. \tag{5.5}$$

Sie ist eine π-Abbildung und ist natürlich auf der Kategorie der semisimplizialen Komplexe (sogar auf der Kategorie der FD-Komplexe mit Diagonale). Ist σ ein r-Simplex aus K und σ': $K(r) \rightarrow K$ die zugehörige FD-Abbildung des Standard Simplexes $K(r)$ (s. [9], S. 58), dann ist demnach das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W \otimes K(r) & \xrightarrow{\zeta'} & (K(r))^{(n)} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\sigma'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma'^{(n)}} \\ W \otimes K & \xrightarrow[\zeta']{} & K^{(n)} \end{array}$$

kommutativ. Daraus folgt, dass ζ' den *diagonalen Träger* ([23], S. 199), hat, d.h. ζ' ist eine diagonale Approximation. Die zu ζ' duale Abbildung (s. 2.4 oder [23], 2.8) ζ: $W \otimes_\pi K^{(n)*} \to K^*$ stimmt also bis auf Homotopie mit φ überein. Eine leichte Rechnung zeigt schliesslich, dass $\zeta = (\Delta^*/\pi)(\Phi/\pi)$ ist, also

5.6. SATZ. *Für einen simplizialen Komplex X stimmen die π-reduzierten Potenzen aus* § 4 *mit denen aus* [23] *überein.*

5.7. Da die Kohomologieoperationen $Q \vdash$ in dieser Arbeit in einer grösseren Kategorie definiert werden als dies in [23] der Fall ist, erhebt sich natürlich die Frage, ob die bekannten Eigenschaften etwa der Sq^i oder $\mathscr{P}^i$ weiterhin gültig sind. Für die meisten ist dies der Fall, aber nicht für alle. Z.B. ist i.a. $\mathrm{Sq}^0 \neq \mathrm{id}$, wie man am Beispiel einer Nulldiagonale $\Delta = 0$ sieht. Selbst bei einer so "natürlichen" Diagonale wie der aus 4.9, iv ist i.a. $\mathrm{Sq}^0 \neq \mathrm{id}$ (s. 10.7). Ich habe kein einfaches Axiom für Δ gefunden, das $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{id}$, allgemeiner $\mathscr{P}^0 = \mathrm{id}$ zur Folge hat.

Die meisten der bekannten Relationen jedoch (Cartans Produktformel, Adéms Relationen u.a.) bestehen bereits im wesentlichen in den Gruppen $H(W \otimes_\pi M^{(n)*})$, die wie wir gesehen haben hier und bei Steenrod [23] dieselben sind. Sie übertragen sich daher ohne wesentliche Änderung des Beweises auf die Kategorie der FD-Komplexe mit Diagonale (von der unter 4.6 beschriebenen Art). Im Einzelnen bleiben die folgenden Eigenschaften und Sätze weiterhin bestehen: [22] 4.8, 6.10–6.15; [23] 3.4, 3.5, 3.7, 4.1–4.4 (Main theorem); die Ergebnisse aus [26] und [1], während [22], 6.9 wie schon gesagt falsch wird.

5.8. Eine Bemerkung zu [22], 6.15 scheint angebracht, weil der Beweis dort spezielle Eigenschaften der Diagonale benutzt.

Wir betrachten einen (freien) FD-Komplex K mit Diagonale und einen Unterkomplex $L \subset K$ mit der Eigenschaft

$$\Delta(L) \subset L \times L \subset K \times K\,,$$

d.h. einen *Unterkomplex mit Diagonale*. Dann induziert Δ: $K \to K \times K$ durch Übergang zum Quotienten eine Diagonale $K/L \to K/L \times K/L$ für den Quotienten K/L. Wir verlangen, dass auch K/L wieder frei ist, d.h. dass L als Untergruppe (nicht als Unterkomplex!) ein direkter Summand ist. Dann sind reduzierte Potenzen in K, L, K/L erklärt, und es gilt (s. [22], 6.15).

5.9. *Ist* $\delta : H^q(L, A) \to H^{q+1}(K/L, A)$ *der verbindende Homomorphismus, dann ist*

$$\mathcal{P}^s\delta = \delta\mathcal{P}^s \ .$$

Wir wollen diesen Satz hier nicht beweisen, sondern lediglich eine Formulierung angeben (s. 5.11), in der die Diagonale offensichtlich keine Rolle mehr spielt.

Die kurze exakte Folge

$$0 \to L \to K \to K/L \to 0$$

induziert ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^n \arrow[r] & K^n \arrow[r] & K^n/L^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & & & (K/L)^n & \end{tikzcd}$$

mit exakter Zeile und durch Dualisieren und Übergang zum Quotienten ein Diagramm

(5.10)
$$\begin{tikzcd} 0 & L^{n*}/\pi \arrow[l] & K^{n*}/\pi \arrow[l] & (K^n/L^n)^*/\pi \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\ & & & (K/L)^{n*}/\pi \arrow[u, "\zeta"] & \end{tikzcd}$$

mit exakter Zeile. Nun gilt

(5.11)
$$\tilde{\delta}(\mathcal{P}^s \models a) = \zeta\mathcal{P}^s \models (\delta a) \ , \qquad a \in H^q(L, A) \ ;$$

$\tilde{\delta}$ der zur exakten Zeile 5.10 gehörige verbindende Homomorphismus. Mein Beweis dieser Formel ist recht mühsam und wird hier nicht ausgeführt. Um 5.9 aus 5.11 zu erhalten, betrachte man das kommutative Diagramm

(5.12)
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & K/L \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ L^n \arrow[r] & K^n \arrow[r] & K^n/L^n \arrow[r] & (K/L)^n \end{tikzcd}$$

(γ durch Δ induziert), bezw. sein duales

(5.13)
$$\begin{tikzcd} L^* & K^* \arrow[l] & (K/L)^* \arrow[l] & \\ L^{n*}/\pi \arrow[u, "\Delta^*/\pi"] & K^{n*}/\pi \arrow[l] \arrow[u, "\Delta^*/\pi"] & (K^n/L^n)^*/\pi \arrow[l] \arrow[u, "\gamma^*/\pi"] & (K/L)^{n*}/\pi \ . \arrow[l, "\zeta"'] \arrow[ul, "\Delta^*/\pi"'] \end{tikzcd}$$

5.13 und 5.11 ergeben

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^s \vdash \delta a &= (\Delta^*/\pi)\mathcal{P}^s \models \delta a = (\gamma^*/\pi)\zeta\mathcal{P}^s \models \delta a = (\gamma^*/\pi)\tilde{\delta}(\mathcal{P}^s \models a) \\ &= \delta(\Delta^*/\pi)(\mathcal{P}^s \models a) = \delta\mathcal{P}^s \vdash a\ , \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Eine 5.11 entsprechende Relation lässt sich auch schon in den Komplexen $W \otimes_\pi K^{(n)*}$ (statt in K^{n*}/π) formulieren und dann die Steenrodsche Definition der reduzierten Potenzen anwenden.

Teil II. Reduzierte Potenzen und Eilenberg-MacLane Komplexe.

6. Der Normhomomorphismus N

Wir untersuchen den Normhomomorphismus N der eine Verbindung zwischen den reduzierten Potenzen und den symmetrischen Produkten und damit schliesslich den Eilenberg-MacLaneschen Komplexen herstellen wird. Ein solches Verfahren wurde bereits von Steenrod [25], 22 benutzt; vgl. auch [18].

Wie oben sei $\pi \subset \mathcal{S}(n)$ eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe, K ein freier FD-Komplex, K^n seine n^{te} kartesische Potenz, K^{n*} deren Kokettenkomplex (mit Werten in einer festen Koeffizientengruppe G). K^n und K^{n*} werden als π-Komplexe aufgefasst. Die Gruppe der bei π invarianten Elemente bezeichnen wir durch einen oberen Index π, also K^{n^π} bezw. K^{n*^π}. Die natürliche Injektion $K^{n^\pi} \to K^n$ bezw. Projektion $K^n \to K^n/\pi$ induziert durch Dualisieren und Übergang zum Quotienten bezw. zu den Invarianten einen Isomorphismus

$$(6.1) \qquad (K^{n^\pi})^* = K^{n*}/\pi$$

bezw.

$$(6.2) \qquad (K^n/\pi)^* = K^{n*^\pi}\ .$$

Die zweite dieser Isomorphien ist fast selbstverständlich. Für die erste nehme man etwa eine Basis $\{x_\lambda\}$ von K_i; dann ist $\{x_{\lambda_1} \times \cdots \times x_{\lambda_n}\}$ eine Basis für K_i^n. Die von einem Basiselement $x_{\lambda_1} \times \cdots \times x_{\lambda_n}$ und seinen Transformierten (bei π) erzeugte Untergruppe von K_i^n ist ein π-Untermodul von K_i^n, und K_i^n ist direkte Summe aller dieser π-Untermoduln. Man braucht die Behauptung daher nur für einen solchen π-Modul zu beweisen, was keine Schwierigkeiten bereitet.

Der Normhomomorphismus (s. [4], XII, 1)

$$(6.3) \qquad N: K^n \to K^n, \qquad N(x) = \textstyle\sum_{\gamma\in\pi}\gamma\cdot x, \qquad x \in K^n\ ,$$

induziert durch Übergang zum Quotienten eine FD-Abbildung

$$N_*\colon K^n/\pi \to K^{n^\pi} . \tag{6.4}$$

Dual dazu hat man

$$N\colon K^{n*} \to K^{n^*} \tag{6.5}$$

und

$$N^*\colon K^{n*}/\pi \to (K^n/\pi)^* . \tag{6.6}$$

Bis auf Homotopieäquivalenz können wir überall zu den normalisierten Komplexen übergehen (vgl. hierzu die Bemerkung 3.9) und erhalten zu 6.3–6.6 homotopieäquivalente Kettenabbildungen

(6.3′) $N\ \colon \mathfrak{N}(K^n) \to \mathfrak{N}(K^n)$

(6.4′) $N_*\colon \mathfrak{N}(K^n)/\pi \to \mathfrak{N}(K^n)^\pi$

(6.4′) $N\ \colon \mathfrak{N}(K^n)^* \to \mathfrak{N}(K^n)^*$

(6.5′) $N^*\colon \mathfrak{N}(K^n)^*/\pi \to \mathfrak{N}(K^n/\pi)^*$.

6.7. Satz. *Es sei K ein freier* FD-*Komplex, $H_0(K) = 0$ und $H_i(K)$ endlich erzeugt für jedes i. Ferner sei* (wie in 2.6) $\pi = \mathcal{S}(n)$ oder $\pi = \mathcal{S}(n, p)$ *eine p-Sylow-Untergruppe von $\mathcal{S}(n)$ (p eine beliebige Primzahl). Dann gibt es eine Kettenabbildung*

(6.8) $\chi : K^{n^\pi} \to K^n/\pi$ *mit* $\chi N_* \simeq \mathrm{id}$.

Dual dazu gibt es eine Kettenabbildung

(6.9) $\chi^*\colon (K^n/\pi)^* \to K^{n*}/\pi$ *mit* $N^*\chi^* \simeq \mathrm{id}$.

Insbesondere induziert N^* Epimorphismen der Homologie.

Der Beweis wird in Teil III gegeben. Es ist mir nicht bekannt, ob die Voraussetzungen über π und über die endliche Erzeugtheit von $H_i(K)$ wesentlich sind.

7. Symmetrische Algebra und Normhomomorphismus

Für $\pi = \mathcal{S}(n)$ liefert die symmetrische Algebra $S(K)$ eine andere Deutung des Normhomomorphismus'. Wir erinnern an die Definition (s. [5], 10)

$$S(K) = P \oplus K \oplus SP^2K \oplus SP^3K \oplus \cdots = \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} SP^rK . \tag{7.1}$$

Dabei ist $SP^rK = K^r/\mathcal{S}(r)$ das *r-fache symmetrische Produkt* von K, $P = SP^0K$ der FD-Komplex eines Punktes.

Die Abbildung

$$K \to K \oplus K, \qquad y \to (y, y), \qquad y \in K ,$$

gibt nach Anwenden des Funktors S eine Diagonale (s. 4.9, iv)

(7.2) $$\Delta\colon SK \to S(K \oplus K) \cong SK \times SK$$

(s. [5], 10.9).

Ferner seien

(7.3) $$i_r\colon SP^rK \to SK$$

bezw.

(7.4) $$p_r\colon SK \to SP^rK$$

die natürliche Injektion bezw. Projektion (die die direkte Summen-Darstellung 7.1 definieren).

7.5. Satz. *Für jeden* FD-*Komplex* K *ist die zusammengesetzte Abbildung*

(7.6) $$K^r \xrightarrow{q} SP^rK \xrightarrow{i_r} SK \xrightarrow{\Delta} (SK)^n \xrightarrow{(p_1)^n} K^n$$

null, falls $r \neq n$ *ist, und sie stimmt mit dem Normhomomorphismus überein falls* $r = n$ *ist.*

Durch Dualisieren und Übergang zum Quotienten erhalten wir hieraus.

7.7. Korollar. *Die zusammengesetzte Abbildung*

$$K^{n*}/\mathcal{S}(n) \xrightarrow{(p_1)^{n*}/\mathcal{S}(n)} (SK)^{n*}/\mathcal{S}(n) \xrightarrow{\Delta^*/\mathcal{S}(n)} (SK)^* \xrightarrow{i_r^*} (SP^rK)^*$$

ist null für $r \neq n$ *und stimmt mit* N^* (s. 6.6) *überein für* $r = n$.

Beweis für 7.5. Wir haben

$$\begin{aligned} (SK)^n &= S(K \oplus K \oplus \cdots K) \qquad (n \text{ Summanden in der Klammer}) \\ &= \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} SP^r(K \oplus K \oplus \cdots \oplus K) \\ &= \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\Sigma r_i = r} SP^{r_1}K \times SP^{r_2}K \times \cdots \times SP^{r_n}K \end{aligned}$$

(s. [5], 8.8), und $(p_1)^n$ ist nichts anderes als die Projektion dieser direkten Summe auf den Summanden K^n (d.i. $r_1 = r_2 = \cdots r_n = 1$). Da Δ den Summanden SP^rK in $SP^r(K \oplus \cdots \oplus K)$ abbildet, folgt sofort, dass die Zusammensetzung 7.6 null ist für $r \neq n$.

Es sei nun $x_1 \times x_2 \times \cdots x_n \in K^n$. Dann ist sein $\Delta i_n q$-Bild die Äquivalenzklasse in $SP^n(K \oplus \cdots \oplus K)$ von

$$(x_1 \oplus x_1 \oplus \cdots) \times (x_2 \oplus x_2 \oplus \cdots) \times \cdots \times (x_n \oplus x_n \oplus \cdots) \in (K \oplus K \oplus \cdots)^n,$$

also gleich

$$\textstyle\sum_{\gamma \in \mathcal{S}(n)} \gamma \cdot (x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n) + R\,,$$

wobei der Rest R aus Termen besteht, die in von K^n verschiedenen Summanden von $(SK)^n$ liegen, also

$$(p_1)^n \Delta i_n q(x_1 \times \cdots \times x_n) = \textstyle\sum_{\gamma \in \mathcal{S}(n)} \gamma \cdot (x_1 \times \cdots \times x_n) = N(x_1 \times \cdots \times x_n), \qquad \text{q.e.d.}$$

8. Unendliches symmetrisches Produkt und Normhomomorphismus

Es sei X ein semi-simplizialer Komplex mit Grundpunkt, SPX sein unendliches symmetrisches Produkt (s. [19], S. 400), $C(X)$ bezw. $C(SPX)$ der zugehörige FD-Komplex. Dann besteht ein natürlicher Isomorphismus (s. [5], 10.10)

$$C(SPX) \cong S(K) \tag{8.1}$$

wobei $K = C(X)^0$ den Kern der Ergänzung $\varepsilon : C(X) \to P$ bezeichnet (s. 4.9, iii). Die rechte Seite von 8.1 besitzt eine rein algebraisch definierte Diagonale Δ_1 (s. 7.2), die linke Seite dagegen als semi-simplizialer Komplex eine geometrische Diagonale Δ_2 (s. 4.9, ii). Wegen des Zusammenhangs von SPX mit der Theorie der Eilenberg-MacLaneschen Komplexe (s. [7]) sind wir vor allem an letzterer interessiert. Wir beweisen nun, dass sie wenigstens "ein Stück weit" mit Δ_1 übereinstimmt und übertragen einen Teil von 7.5 bezw. 7.7.

Dazu betrachten wir die durch 7.1 definierte Graduierung von $S(K)$, d.h. die homogenen Elemente vom Grade r in $S(K)$ sind gerade die Bilder bei i_r: $SP^rK \to S(K)$ (s. 7.3). Bei der Multiplikation in $S(K)$ ([5], 10) addieren sich die Grade, d.h. wir haben es mit einer graduierten FD-Algebra zu tun. Ebenso ist $(SK)^n = S(K \oplus \cdots \oplus K)$ eine graduierte FD-Abgebra, und Δ_1 (s. 7.2) ist ein Homomorphismus von graduierten FD-Algebren.

8.2. Satz. *Es sei x ein homogenes Element vom Grade r aus $S(K) = C(SPX)$. Dann ist*

$$R(x) = \Delta_2(x) - \Delta_1(x)$$

eine Summe von Elementen vom Grade $>r$.

8.3. Korollar. *Die zusammengesetzte Abbildung*

$$K^r \xrightarrow{q} SP^rK \xrightarrow{i_r} SK \xrightarrow{\Delta_2} (SK)^n \xrightarrow{(p_1)^n} K^n \tag{8.4}$$

bezw.

$$K^{n*}/S(n) \xrightarrow{(p_1)^{n*}/S(n)} (SK)^{n*}/S(n) \xrightarrow{\Delta_2^*/S(n)} (SK)^* \xrightarrow{i_r^*} (SP^rK)^* \tag{8.5}$$

ist null für $r>n$ und stimmt mit N bezw. *N^* überein für $r=n$.*

Die erste Behauptung von 8.3 folgt aus 8.2 und 7.5, weil $(p_1)^n$ Elemente vom Grade $>n$ annulliert, die zweite aus der ersten durch Dualisieren.

Beweis für 8.2. Wir haben schon bemerkt, dass Δ_1 eine *multiplikative Abbildung* ist. Dasselbe gilt auch für Δ_2 (Δ_2 ist allerdings nicht graderhaltend!); es genügt, dies für eine Basis, nämlich die Simplexe von SPX

nachzuweisen. Die Simplexe von SP^rX schreiben sich als ungeordnete r-tupel $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$ von Simplexen aus X, und es ist

$$\Delta_2(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) = (\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \times (\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \times \cdots \times (\sigma_1, \cdots, \sigma_r) .$$

Daraus folgt sofort, dass Δ_2: $C(SPX) \to C(SPX)^n$ multiplikativ ist, wenn man in $C(SPX)^n$ die multiplikative Struktur des kartesischen Produkts verwendet (d.h. $(y_1 \times \cdots \times y_n)(y_1' \times \cdots \times y_n') = (y_1y_1' \times \cdots \times y_ny_n')$). Man hat sich nun nur noch davon zu überzeugen, dass die Isomorphie

$$(SK)^n \cong S(K \oplus \cdots \oplus K)$$

sich auch auf die multiplikative Struktur erstreckt. Wir übergehen diesen leichten Nachweis.

Nehmen wir nun an, die Behauptung gelte für zwei Elemente x, y vom Grade r, s. Dann ist

$$\begin{aligned}\Delta_2(xy) &= \Delta_2(x)\Delta_2(y) = \big(\Delta_1(x) + R(x)\big)\big(\Delta_1(y) + R(y)\big)\\ &= \Delta_1(xy) + \text{Elemente vom Grade} > (r + s),\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung gilt dann auch für xy. Weil die Algebra $S(K)$ erzeugt wird von (1 und) den Elementen vom Grade 1 (sie ist die "freie" von K erzeugte kommutative Algebra mit 1), genügt es also, die Behauptung für diese Elemente zu beweisen.

Der Komplex $K = C(X)^0$ besitzt als Basis die Elemente $x = \sigma - e$, wobei e den "Grundpunkt" bezeichnet und σ die übrigen Simplexe von X durchläuft. Wir identifizieren K mit seinem Bild bei i_1: $K \to SK$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Delta_2(x) &= \Delta_2(\sigma - e) = (\sigma \times \sigma \times \cdots \times \sigma) - (e \times e \times \cdots \times e)\\ &= (x + e) \times (x + e) \times \cdots \times (x + e) - e \times e \times \cdots \times e\\ &= \textstyle\sum_i (e \times \cdots \times x_i \times \cdots \times e) + R(x) = \Delta_1(x) + R(x),\end{aligned}$$

wobei $R(x)$ aus Termen besteht, die mindestens zwei Faktoren x enthalten, die also mindestens den Grad 2 haben. q.e.d.

8.6. Bemerkung. Man kann zeigen (s. [8], 11.9), dass die beiden Diagonalen

$$\Delta_1, \Delta_2: S(K) \to S(K) \times S(K), \qquad K = C(X)^0,$$

homotop sind (jedoch *nicht als Diagonalen* im Sinne von 4.10!), falls X eine Einhängung ist, $X = EX'$.

9. Zur Homologie der symmetrischen Produkte

Wir stellen in diesem Paragraphen einige Ergebnisse über die (Ko-) Homologie der symmetrischen Produkt zusammen (s. [8], 12; vgl. auch

[18], App.). Es sei K ein freier FD-Komplex und $H_0(K) = 0$. Dann ist

$$H_i(SP^rK) = 0 \qquad \text{für } i < r. \tag{9.1}$$

Ist $H_i(K) = 0$ für $i < q$ und $q > 1$, dann gilt sogar

$$H_i(SP^rK) = 0 \qquad \text{für } i < q + 2r - 2. \tag{9.2}$$

Auf Grund der universellen Koeffizientenformel (s. [4], VI, 3.3a) sind dann auch die Kohomologiegruppen in diesen Dimensionen null. Wir benötigen davon nur die beiden folgenden Konsequenzen

$$H^i(SP^rK; G) = 0 \qquad \text{für grosse } r, \text{ falls } H_0(K) = 0. \tag{9.3}$$

$$H^q(SP^rK; G) = 0 \quad \text{falls } H_i(K)=0 \text{ für } i<q,\ q>0 \text{ und } r>1. \tag{9.4}$$

Aus ihnen ergibt sich für die symmetrische Algebra $SK = \sum SP^rK$

$$H^j(SK; G) = \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} H^j(SP^rK; G), \qquad \text{falls } H_0(K) = 0; \tag{9.5}$$

die direkte Summendarstellung (im Sinne von [4], S. 4) *wird induziert durch die Abbildungen* i_r, p_r (7.3, 7.4). Ferner

$$p_1^* : H^q(SK; G) \cong H^q(K; G), \quad \text{falls } H_i(K)=0 \text{ für } i<q,\ q>0. \tag{9.6}$$

Wir führen noch die zu 9.5 gehörige Filterung F von $H^*(SK; G)$ ein:

$$F_pH^j(SK; G) = \textstyle\sum_{r=0}^{p} H^j(SP^rK; G)\ . \tag{9.7}$$

10. Die Steenrod-Operationen erzeugen alle Kohomologieoperationen

Wir betrachten Kohomologieoperationen, die in der Kategorie der semisimplizialen Komplexe und -Abbildungen (und damit in der singulären Kohomologie topologischer Räume und stetiger Abbildungen) definiert sind. Darunter fallen insbesondere (innere) reduzierte Potenzen, die ja in einer etwas grösseren Kategorie erklärt sind (s. § 4, insbesondere 4.9, ii). Wir zeigen nun, dass sie im wesentlichen alle Kohomologieoperationen geben, genauer

10.1. SATZ. *Es sei A eine endlich erzeugte, G eine beliebige abelsche Gruppe. Jede Kohomologieoperation vom Typ* (A, q, G, t) (s. [25]) *lässt sich als Summe von Steenrodschen reduzierten Potenzen darstellen.*

Die Gruppe aller Kohomologieoperationen $\mathfrak{O}(A, q, G, t)$ vom Typ (A, q, G, t) ist nach [20], 28 oder [11], 1 isomorph zu $H^t(A, q; G) = H^t(K(A, q); G)$, der t^{ten} Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in G eines Eilenberg-MacLane Komplexes $K(A, q)$, d.h. eines Raumes (semi-simplizialen Komplexes) mit $\pi_iK(A, q) = 0$ für $i \neq q$, $\pi_qK(A, q) = A$. Ein solcher Komplex $K(A, q)$ besitzt eine fundamentale Kohomologieklasse $b \in H^q(A, q; A)$, und der

Isomorphismus $\mathfrak{O}(A, q, G, t) \cong H^t(A, q; G)$ ordnet jeder Kohomologieoperation k den Wert $k(b)$ auf der fundamentale Klasse b zu. Zum Beweis des Satzes 10.1 müssen wir also zeigen, dass sich jedes $x \in H^t(A, q; G)$ als Summe von Elementen der Form $Q \vdash b$ schreiben lässt, wobei Q eine reduzierte Potenz bezeichnet.

Als Eilenberg-MacLane Komplexe können wir nach [5] oder [19] oder [21] unendliche symmetrische Produkte wählen. Genauer sei X ein zusammenhängender semi-simplizialer Komplex mit Grundpunkt, für den $H_i(X) = 0$ ist für $i \neq 0, q$ und $H_q(X) = A$ $(q > 0)$. Dann ist SPX ein Eilenberg-MacLane Komplex $K(A, q)$. Daher gilt

$$(10.2) \qquad H^t(A, q; G) = H^t(SPX; G) = H^t(C(SPX); G) = H^t(SM; G),$$

wobei $C(SPX)$, $M = \text{Kern}(\varepsilon : C(X) \to P)$ und SM wie in § 8 erklärt sind; wegen unserer Voraussetzung über $H(X)$ ist der Kern der Ergänzung $\varepsilon : C(X) \to P$ ein FD-Komplex vom Typ (A, q) (s. § 3)—daher die Schreibweise M statt K wie in § 8. Die Filterung 9.7 gibt jetzt eine Filterung von $H^t(A, q; G) = \mathfrak{O}(A, q, G, t)$, und wir werden tatsächlich die folgende Verschärfung von 10.1 beweisen.

10.3. SATZ. *Es seien A, G wie in* 10, 1. *Jede Kohomologieoperation vom Typ (A, q, G, t) und von der Filterung $\leqq n$ lässt sich als Summe von reduzierten $\mathcal{S}(m)$-Potenzen mit $m \leqq n$ darstellen.*

BEWEIS durch Induktion nach n. Aus 9.6 folgt

$$(10.4) \qquad p_1^*(\iota) = b\,,$$

wobei $\iota \in H^q(M; A)$ bezw. $b \in H^q(SM; A)$ die fundamentale Klasse von M (s. § 3) bezw. SM (s. oben) bezeichnet. Für jede reduzierte Potenz $Q \in H^t(W \otimes_{\mathcal{S}(n)} M^{(n)*})$ gilt daher (s. 3.6 und 4.3)

$$(10.5) \qquad Q \vdash b = (\Delta_2^*/\mathcal{S}(n))(p_1^{n*}/\mathcal{S}(n))(\Phi/\mathcal{S}(n))(Q)\,.$$

Es sei nun $x \in H^t(SM; G)$ von der Filterung $\leqq n$, d.h. $i_r^*(x) = 0$ für $r > n$. Da die Abbildungen

$$H^t(W \otimes_{\mathcal{S}(n)} M^{(n)*}) \xrightarrow{\Phi/\mathcal{S}(n)} H^t(M^{n*}/\mathcal{S}(n)) \xrightarrow{N^*} H^t(SP^n M; G)$$

epimorph sind (s. 2.6 und 6.7), gibt es ein $Q \in H^t(W \otimes_{\mathcal{S}(n)} M^{(n)*})$ mit

$$(N^*)(\Phi/\mathcal{S}(n))(Q) = i_n^*(x)\,.$$

Dann hat aber $x - Q \vdash b$ eine Filterung $< n$. Es ist nämlich

$$i_r^*(x - Q \vdash b) = i_r^*(x) - \{(i_r^*)(\Delta_2^*/\mathcal{S}(n))(p_1^{n*}/\mathcal{S}(n))\}(\Phi/\mathcal{S}(n))(Q);$$

die geschweifte Klammer auf der rechten Seite ist nach 8.3 null für $r > n$

und $= N^*$ für $r = n$, also

$$i_r^*(x - Q \vdash b) = 0 \qquad \text{für } r \geqq n,$$

wie behauptet.

Nach Induktionsvoraussetzung ist also $x - Q \vdash b$ eine Summe von reduzierten $\mathcal{S}(m)$-Potenzen von b mit $m < n$. Da sich aus der Vereinbarung 4.14 sofort der Induktionsanfang $n = 0$ ergibt, ist der Satz damit bewiesen.

10.6. Bemerkung. Steenrod-Thomas [26] zeigen, dass sich alle reduzierten Potenzen (mit endlich erzeugten Koeffizientengruppen A, G) aus den zyklischen Steenrod-Potenzen

$$\mathcal{P}^i\colon H^q(X; \mathbf{Z}_p) \to H^{q+2i(p-1)}(X; \mathbf{Z}_p),$$

den Pontrjagin-Thomas-Potenzen

$$\mathfrak{P}_p\colon H^{2q}(X; \mathbf{Z}_{p^k}) \to H^{2pq}(X; \mathbf{Z}_{p^{k+1}})$$

und den primitiven Operationen (Addition, Koeffizientenhomomorphismen, Bockstein-Operatoren, Cup-Produkte) zusammensetzen lassen. Nach 10.1 gilt dasselbe für alle Kohomologieoperationen (mit endlich erzeugten Koeffizientengruppen)

10.7. Bemerkung. Wie schon festgestellt (s. 5.7) ist bei Benutzung einer beliebigen Diagonale i.a. $\mathrm{Sq}^0 \neq \mathrm{id}$. Nehmen wir z.B. die algebraische Diagonale Δ_1 in SM (s. 7.2) und $A = G = \mathbf{Z}_2$, dann ist $\mathrm{Sq}^0(b) = 0$. Beweis: Wegen $\mathrm{Sq}^0(b) \in H^q(SM; \mathbf{Z}_2)$ und 9.6 genügt es $i_1^* \mathrm{Sq}^0(b) = 0$ zu zeigen. Dies folgt aus

$$\mathrm{Sq}^0 \vdash b = \left(\Delta_1^*/\mathcal{S}(2)\right)\left(p_1^{2*}/\mathcal{S}(2)\right)\left(\Phi/\mathcal{S}(2)\right)(\mathrm{Sq}^0)$$

(vgl. 10.5) und

$$(i_1^*)\left(\Delta_1^*/\mathcal{S}(2)\right)\left(p_1^{2*}/\mathcal{S}(2)\right) = 0$$

(s. 7.7).

Teil III. Beweis der Sätze 2.6 und 6.7.

11. Vorbemerkungen, Hilfsbetrachtungen

Der Beweis dieser Sätze erfolgt in mehreren Schritten. Abgesehen vom Fall $\pi = \mathcal{S}(p, p)$, der allerdings am meisten Raum beansprucht, handelt es sich dabei immer nur um Variationen entsprechender Beweisschritte in [23]. Wir beginnen mit einigen Reduktionen des Problems.

11.1. Es sei $f\colon K \to L$ eine FD-Abbildung. Sie induziert kommutative Diagramme

$$
(11.2)\qquad
\begin{array}{ccc}
W \otimes_\pi K^{(n)*} & \xrightarrow{\Phi/\pi} & K^{n*}/\pi \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes_\pi f^{(n)*}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^{n*}/\pi} \\
W \otimes_\pi L^{(n)*} & \xrightarrow[\Phi/\pi]{} & L^{n*}/\pi
\end{array}
$$

und

$$
(11.3)\qquad
\begin{array}{ccc}
K^n/\pi & \xrightarrow{N_*} & K^{n\pi} \\
{\scriptstyle f^n/\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{n\pi}} \\
L^n/\pi & \xrightarrow[N_*]{} & L^{n\pi}
\end{array} .
$$

Ist $f \simeq g$, dann ist $\mathrm{id} \otimes f^{(n)*}$ π-homotop zu $\mathrm{id} \otimes g^{(n)*}$ (s. [23], 5), und f^n ist π-homotop zu g^n (s. [5], 5.6). Daraus folgt

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{id} \otimes_\pi f^{(n)*} \simeq \mathrm{id} \otimes_\pi g^{(n)*}, & f^n/\pi \simeq g^n/\pi, \\
f^{n*}/\pi \simeq g^{n*}/\pi, & f^{n\pi} \simeq g^{n\pi} .
\end{array}
$$

Insbesondere sind alle vertikalen Abbildungen in 11.2 und 11.3 Homotopieäquivalenzen, falls f eine Homotopieäquivalenz ist. *Wir dürfen also K zum Beweis von* 2.6 *oder* 6.7 *durch einen homotopieäquivalenten* FD-*Komplex ersetzen.*

11.4. Weil alle $H_i(K)$ endlich erzeugt sind (und weil K frei ist), gibt es einen zu K homotopieäquivalenten freien FD-Komplex L, in welchem alle L_i endlich erzeugt sind (es gibt offenbar einen endlich erzeugten freien Kettenkomplex mit den gleichen Homologiegruppen wie K, also nach [5], 2.6 einen ebensolchen FD-Komplex, der dann nach [5], 3.4 zu K homotopieäquivalent ist). *Wir können also annehmen, dass alle K_i endlich erzeugte* (*freie*) *Gruppen sind.*

11.5. *Nun können wir uns auch auf den Fall beschränken, dass die Koeffizientengruppe G mit der Gruppe* $\mathbf{Z}$ *der ganzen Zahlen übereinstimmt.* Um dies einzusehen, betrachten wir den natürlichen Homomorphismus

$$
(11.6)\qquad
\begin{array}{ll}
\tau\colon \mathrm{Hom}(Y, \mathbf{Z}) \otimes G \to \mathrm{Hom}(Y, G) & \\
\tau(\varphi \otimes g)\cdot y = \varphi(y)g, & y \in Y,\ g \in G,\ \varphi \in \mathrm{Hom}(Y, \mathbf{Z}).
\end{array}
$$

Dies ist offenbar ein Isomophismus, wenn $Y = \mathbf{Z}$ ist, allgemeiner wenn Y eine endlich erzeugte freie Gruppe ist. Daraus folgt, dass man die Koketten eines freien, endlich erzeugten (in jeder Dimension) Kettenkomplexes mit Koeffizienten in G einfach aus den ganzzahligen Koketten durch Tensorieren mit G erhält (vgl. [23], 2.9). Wenn wir also 2.6 erst einmal für die Koeffizientengruppe $\mathbf{Z}$ bewiesen haben, so erhalten wir den allgemeinen Fall daraus einfach, indem wir überall mit G tensorieren. *Von nun an bezeichne der Stern* * (s.B. *an* K^{n*}) *stets den Komplex der ganzzahligen Koketten.*

Eine weitere gelegentlich nützliche Reduktion liefert der folgende.

11.7. HILFSSATZ. *Es sei* $f: C \to D$ *ein Kettenabbildung zwischen freien Kettenkomplexen* C, D. *Notwendig und hinreichend dafür, dass es eine Kettenabbildung* $g: D \to C$ *mit* $gf \simeq \mathrm{id}$ *gibt, ist, dass*

$$f^*: H^*(D, G) \to H^*(C, G)$$

epimorph ist für alle Koeffizientengruppen G. *Allgemeiner genügt schon, dass* $f^*: H^k(D, H_k(C)) \to H^k(C, H_k(C))$ *epimorph ist für alle* k.

Für den Beweis von 6.7 genügt es also zu zeigen, dass

$$N^* \otimes G: (K^{n*}/\pi) \otimes G \to K^{n*\pi} \otimes G \tag{11.6}$$

Epimorphismen der Homologie induziert für alle (endlich erzeugten) Gruppen G.

BEWEIS für 11.7. Wenn g existiert, dann ist $f^*g^* = \mathrm{id}$, also f^* epimorph. Nun zur Umkehrung. Nach [6], 7.16; 7.17 gibt es Elemente

$$\iota^k \in H^k(C, H_k(C))$$

mit der Eigenschaft: Ist C' ein freier Kettenkomplex, dann stiftet die Zuordnung $h \to \{h^*(\iota^k)\}$ eine umkehrbar eindeutige Beziehung (sogar einen Gruppenisomorphismus) zwischen den Homotopieklassen von Kettenabbildung $h: C' \to C$ und den Elementen der Gruppe $\prod_k H^k(C', H_k(C))$. Weil f^* epimorph ist, gibt es Elemente $\xi^k \in H^k(D, H_k(C))$ mit $f^*(\xi^k) = \iota^k$. Ist nun $g: D \to C$ eine Abbildung mit $g^*(\iota^k) = \xi^k$, dann folgt $(gf)^*(\iota^k) = f^*g^*(\iota^k) = \iota^k$, also $gf \simeq \mathrm{id}$, q.e.d.

Analog zu [23] behandeln wir nun nacheinander die Fälle (p eine Primzahl),

(i) $\pi = \mathcal{S}(p, p)$,

(ii) $\pi = \mathcal{S}(p^i, p)$,

(iii) $\pi = \mathcal{S}(n, p)$,

(iv) $\pi = \mathcal{S}(n)$

der Sätze 2.6 und 6.7.

12. $\pi = \mathcal{S}(p, p)$ = zyklische Gruppe von Primzahlordnung

12.1. HILFSSATZ. *Ist* $(\mathfrak{N}K)_r = 0$ ($\mathfrak{N}K$ *der normalisierte Komplex*), *dann ist* $\mathfrak{N}(K^p)_r$ *π-projektiv* (d.h. direkter Summand eines freien π-

Moduls; s. [4], I, 2.2. Mit ein wenig mehr Mühe zeigt man, dass $\mathfrak{N}(K^p)_r$ selbst π-frei ist.).

BEWEIS. Wegen $(\mathfrak{N}K)_r = 0$ besitzt K_r eine Basis von der Form $y_\alpha = s_{j(\alpha)} x_\alpha$ mit $x_\alpha \in K_{r-1}$, s_j ein Ausartungsoperator, $0 \leqq j(\alpha) < r$ (s. [3], 3.2 oder [15], S. 11). Dann ist

$$y_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} = s_{j(\alpha_1)} x_{\alpha_1} \times s_{j(\alpha_2)} x_{\alpha_2} \times \cdots \times s_{j(\alpha_p)} x_{\alpha_p}$$

eine Basis von $(K^p)_r$. Die speziellen Basiselemente $y_{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}$ erzeugen einen π-Untermodul U von $(K^p)_r$; U ist sogar ein direkter Summand und $(K^p)_r / U$ ist π-frei (weil p ein Primzahl ist!). Die Erzeugenden $y_{\alpha, \alpha, \dots, \alpha}$ von U sind offenbar ausgeartet (bezüglich $s_{j(\alpha)}$), also ist U enthalten im π-Untermodul $D(K^p)_r$ der ausgearteten Elemente von $(K^p)_r$. $D(K^p)_r$ ist ebenfalls ein direkter Summand, $(K^p)_r \cong D(K^p)_r \oplus \mathfrak{N}(K^p)_r$, (s. [15] oder [3], l.c.), also

$$(K^p)_r / U \cong D(K^p)_r / U \oplus \mathfrak{N}(K^p)_r \,.$$

Die linke Seite ist π-frei, also $\mathfrak{N}(K^p)_r$ π-projektiv. q.e.d.

Wir betrachten nun zunächst einige Spezialfälle der zu beweisenden Sätze.

12.2. *Der Satz* 2.6 *im Falle* $H_i(K) = 0$ *für* $i \neq q$, $H_q(K) =$ *zyklisch* ($\cong \mathbf{Z}$ oder $\mathbf{Z}_\Theta$).

Bis auf Homotopieäquivalenz können wir annehmen (s. [5], 3.4), dass $(\mathfrak{N}K)_i = 0$ für $i \neq q, q+1$, $(\mathfrak{N}K)_q = \mathbf{Z}$, $(\mathfrak{N}K)_{q+1} = 0$ oder $\mathbf{Z}$, je nachdem ob $H_q(K) \cong \mathbf{Z}$ oder $\cong \mathbf{Z}_\Theta$ ist. Dann ist

$$(12.3) \qquad (K^p)_i = 0, \qquad (K^p)^{*i} = 0 \qquad \text{für } i < q.$$

$$(12.4) \qquad \begin{aligned} K_q &= (\mathfrak{N}K)_q = \mathbf{Z}, \qquad (K^p)_q = (\mathfrak{N}K^p)_q = \textstyle\bigotimes^p (\mathfrak{N}K)_q = \mathbf{Z}, \\ (\mathfrak{N}K^p)^{*q} &= \mathbf{Z}\,. \end{aligned}$$

$$K_{q+1} = (\mathfrak{N}K)_{q+1} \oplus \textstyle\sum_{i=0}^q s_i (\mathfrak{N}K)_q \qquad \text{(s. [3], 3.2 oder [15], S.11)}$$

$$(12.5) \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{N}K^p)_{q+1} &= \textstyle\bigotimes^p (\mathfrak{N}K)_{q+1} \oplus \pi\text{-freier Modul} \\ &= \mathbf{Z} \oplus \pi\text{-freier Modul, falls } H_q(K) \text{ endlich.} \end{aligned}$$

$$(\mathfrak{N}K^p)^{*q+1} = \mathbf{Z} \oplus \pi\text{-freier Modul, falls } H_q(K) \text{ endlich.}$$

$$(12.6) \qquad (\mathfrak{N}K^p)^{*i} = \pi\text{-projektiv} \qquad \text{für } i > q \text{ bezw. } i > q+1,$$

wenn $H_q(K) \cong \mathbf{Z}$ bezw. $\cong \mathbf{Z}_\Theta$ (s. 12.1)

$$(\mathfrak{N}K^p)^{*i} = 0 \qquad \text{für } i > p(q+1)$$

(vgl. [8] 4.23). Wir betrachten nun das folgende Diagramm

(12.7)
$$\begin{tikzcd}
 & & & Q^{q+1} \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[dd, "\varphi^{q+1}"] & Q^q \arrow[l, "\beta_0"'] \arrow[dd, "\varphi^q"] & & \\
\cdots & (\mathfrak{R}K^p)^{*q+3} \arrow[l, "\delta"'] & (\mathfrak{R}K^p)^{*q+2} \arrow[l, "\delta"'] & & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] & 0 \cdots \arrow[l] \\
 & & & (\mathfrak{R}K^p)^{*q+1} \arrow[ul, "\delta"] & (\mathfrak{R}K^p)^{*q} \arrow[l, "\delta"] & &
\end{tikzcd}$$

Die untere Zeile ist der Kokettenkomplex $(\mathfrak{R}K^p)^*$. Die obere Zeile, die wir kurz mit Q bezeichnen, stimmt ausser an der Stelle q und evtl. $q+1$ mit der unteren überein. Ferner ist $Q^q = \mathbf{Z}\pi$ und φ^q ist die üblich Ergänzung $\mathbf{Z}\pi \to \mathbf{Z}$ (vgl. 12.4). Im Falle $H_q(K) = \mathbf{Z}_\Theta$ entsteht Q^{q+1} aus $(\mathfrak{R}K^p)^{*q+1}$, indem man den Summanden $\mathbf{Z}$ (s. 12.5) durch $\mathbf{Z}\pi$ ersetzt, und dann ist $\varphi^{q+1} =$ Ergänzung $\oplus$ id. Im Falle $H_q(K) = \mathbf{Z}$ ist $Q^{q+1} = (\mathfrak{R}K^p)^{*q+1}$ und $\varphi^{q+1} = \mathrm{id}$. Die π-Abbildungen β_0, β_1 sind so gewählt, dass das Diagramm kommutativ wird. Dann gilt: *Q ist ein π-projektiver Kettenkomplex, φ: $Q \to (\mathfrak{R}K^p)^*$ ist eine π-Abbildung* ($\varphi^i = \mathrm{id}$ für $i \neq q,\ q+1$) *und*

(12.8)
$$\varphi/\pi : Q/\pi \cong (\mathfrak{R}K^p)^*/\pi\ .$$

Andererseits haben wir die π-Abbildung

$$\Phi\colon W \otimes (\mathfrak{R}K)^{(p)*} \to (\mathfrak{R}K^p)^*$$

(wir gehen zu den normalisierten Komplexen über; s. 3.9). Φ induziert Isomorphismen der Homologie, weil $H^*((\mathfrak{R}K)^{(p)}) \cong H^*(\mathfrak{R}K^p)$ und weil W azyklisch ist. Daher gibt es nach [6], 3.2 eine π-Abbildung

(12.9)
$$\psi : Q \to W \otimes (\mathfrak{R}K)^{(p)*}\ ,$$

so dass das Diagramm

(12.10)
$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
W \otimes (\mathfrak{R}K)^{(p)*} \arrow[rr, "\Phi"'] & & (\mathfrak{R}K^p)^*
\end{tikzcd}$$

bis auf π-Homotopie kommutativ ist. Wir können daher durch π dividieren und erhalten eine Kettenabbildung

$$\Psi = \psi/\pi : (\mathfrak{R}K^p)^*/\pi = Q/\pi \to W \otimes_\pi (\mathfrak{R}K)^{(p)*}$$

mit $(\Phi/\pi)\Psi \simeq \mathrm{id}$, wie behauptet.

12.11. *Der Satz* 6.7 *im Falle* $H_i(K) = 0$ *für* $i \neq q$, $H_q(K) = \mathbf{Z}$, $q > 0$.

Wie unter 12.2 können wir $\mathfrak{R}K = (\mathbf{Z}, q)$[1] annehmen. Ist G ein π-projektiver Modul, dann induziert der Normhomomorphismus einen Isomorphismus $G/\pi \cong G^\pi$. Dies ist klar für $G = \mathbf{Z}\pi$, also für jedes π-freie G und dann für jeden direkten Summanden eines π-freien Moduls, also

$$N^*\colon (\mathfrak{N}K^p)^{*i}/\pi \cong (\mathfrak{N}K^p)^{*i^\pi}, \qquad i \neq q. \tag{12.12}$$

Ferner sieht man leicht, dass

$$\mathbf{Z} = (\mathfrak{N}K^p)^{*q} = (\mathfrak{N}K^p)^{*q}/\pi \xrightarrow{N^*} (\mathfrak{N}K^p)^{*q^\pi} = (\mathfrak{N}K^p)^{*q} = \mathbf{Z} \tag{12.13}$$

nichts anderes ist als die *Multiplikation mit* p.

Die Homologiegruppen von $W \otimes_\pi (\mathfrak{N}K)^{(p)*} \cong W \otimes_\pi \mathbf{Z}$ sind nichts anders als die gewöhnlichen Homologiegruppen der Gruppe π mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$ (mit einer ungewöhnlichen Graduierung); für $p = 2$ und q ungerade ist zu beachten, dass π mit einem Vorzeichen in der Koeffizientengruppe $\mathbf{Z} \cong (\mathfrak{N}K)^{(2)*}$ operiert. In jedem Falle ergibt sich (s. [4], S.251).

$$H^q(W \otimes_\pi (\mathfrak{N}K)^{(p)*}) = H_{(p-1)q}(\pi, \mathbf{Z}) \quad = 0 \qquad (q > 0!) \tag{12.14}$$

$$H^{q+1}(W \otimes_\pi (\mathfrak{N}K)^{(p)})^* = H_{(p-1)q-1}(\pi, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_p\,. \tag{12.15}$$

Daraus und aus dem unter 12.2 bewiesenen Teil von 2.6 folgt

$$H^q((\mathfrak{N}K^p)^*/\pi) \quad = 0 \tag{12.16}$$

$$H^{q+1}((\mathfrak{N}K^p)^*/\pi) = \mathbf{Z}_p\,. \tag{12.17}$$

(oder 0; wir werden gleich sehen, dass dies nicht in Frage kommt). Also ist

$$\delta : \mathbf{Z} = (\mathfrak{N}K^p)^{*q}/\pi \longrightarrow (\mathfrak{N}K^p)^{*q+1}/\pi$$

nicht die Nullabbildung, und der Korand von $1 \in \mathbf{Z}$, $\delta(1)$, ist entweder nur durch ± 1 teilbar oder durch $\pm p$. Da N^* eine Kettenabbildung ist, haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} = (\mathfrak{N}K^p)^{*q}/\pi & \xrightarrow{\delta} & (\mathfrak{N}K^p)^{*q+1}/\pi \\ p\big\downarrow & & \cong\big\downarrow N^* \\ \mathbf{Z} = (\mathfrak{N}K^p)^{*q^\pi} & \xrightarrow[\delta^\pi]{} & (\mathfrak{N}K^p)^{*q+1^\pi} \end{array} \tag{12.18}$$

Daraus folgt, dass $\delta(1)$ wirklich durch p teilbar ist (also $H^{q+1}(\mathfrak{N}K^p)^*/\pi) \cong \mathbf{Z}_p$), während $\delta^\pi(1)$ nur durch ± 1 teilbar ist (Zur Unterscheidung schreiben wir δ^π für den Randoperator in $(\mathfrak{N}K^p)^{*\pi}$). Aus der Nicht-Teilbarkeit von $\delta^\pi(1)$ folgt

$$H^q((\mathfrak{N}K^p)^{*\pi} \otimes G) = 0 \qquad \text{für alle } G, \tag{12.19}$$

und $H^{q+1}((\mathfrak{N}K^p)^{*\pi})$ ist eine freie Gruppe. Da N^* in den Dimensionen $>q$ isomorph ist, induziert sie dort sicher Epimorphismen der Kohomologie für alle Koeffizienten. Wegen 12.19 ist damit die Behauptung bewiesen (vgl. 11.7). Nebenbei ergibt sich noch

(12.20) $$H^{q+1}((\mathfrak{R}K^p)^{*\pi}) = 0\ ,$$

denn diese Gruppe ist frei und homomorphes Bild von $\mathbf{Z}_p$ (s. 12.15).

12.21. *Der Satz* 6.7 *im Falle* $H_i(K) = 0$ *für* $i \neq q$, $H_q(K) \cong \mathbf{Z}_\Theta$, $q > 0$. Wie unter 12.2 können wir $(\mathfrak{R}K)_i = 0$ für $i \neq q, q+1$, $(\mathfrak{R}K)_q = (\mathfrak{R}K)_{q+1} = \mathbf{Z}$ annehmen. Wir haben dann eine exakte Folge von FD-Komplexen

(12.22) $$0 \to L \to K \to M \to 0$$

mit $\mathfrak{R}L = (\mathbf{Z}, q)$, $\mathfrak{R}M = (\mathbf{Z}, q+1)$.[1]

Da N^* in den Dimensionen $> q+1$ isomorph ist, induziert sie dort sicher Epimorphismen der Kohomologie. Wenn wir nun zeigen, dass

(12.23) $$\begin{aligned} H^q((\mathfrak{R}K^p)^{*\pi} \otimes G) &= 0\ , \\ H^{q+1}((\mathfrak{R}K)^{*\pi} \otimes G) &= 0 \end{aligned}$$

ist für alle endlich erzeugten G, dann folgt die Behauptung nach 11.7. Wegen der universellen Koeffizientenformel (s. [4], VI, 3.3) genügt es dazu wiederum,

(12.24) $$H^i((\mathfrak{R}K^p)^{*\pi} \otimes k) = 0\ , \qquad i = q, q+1$$

für alle Primkörper k (Charakteristik 0 oder > 0) nachzuweisen. Nach [5], 5.11 hängt die Homologie von $(K^p/\pi) \otimes k = (K \otimes k)^p/\pi$ nur von $H(K \otimes k)$ ab; also ist auch die Kohomologie, d.i.

$$H(K^{p*\pi} \otimes k) = H((\mathfrak{R}K^p)^{*\pi} \otimes k)$$

durch $H(K \otimes k)$ bestimmt. Wenn die Charakteristik von k kein Teiler von Θ ist, dann ist $H(K \otimes k) = 0$, also $H((\mathfrak{R}K^p)^{*\pi} \otimes k) = 0$. Wenn dagegen $p' =$ Charakteristik(k) die Zahl Θ teilt, dann ist

$$H(K \otimes k) \cong H(L \otimes k \oplus M \otimes k)\ .$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, dass

(12.25) $$H^i((L \oplus M)^{p*\pi} \otimes \mathbf{Z}_{p'}) = 0\ , \qquad i = q, q+1$$

ist für alle Primzahlen p'.

Nun ist

(12.26) $$(L \oplus M)^p = L^p \oplus M^p \oplus F\ ,$$

wobei F ein π-freier Komplex ist; genauer ist F eine direkte Summe von Komplexen der Form $\mathbf{Z}\pi \otimes L^r \times M^s$ mit $r + s = p$, $0 < r, s < p$. Aus 12.26 folgt

(12.27) $$(L \oplus M)^{p*\pi} = L^{p*\pi} \oplus M^{p*\pi} \oplus F^{*\pi}\ ,$$

und $F^{*\pi}$ ist eine direkte Summe von Komplexen $(L^r \times M^s)^*$ mit den gleichen r, s wie oben. Nach der Künnethformel ist die Homologie und Kohomologie von $L^r \times M^s$ null unterhalb der Dimension $rq + s(q+1) > q+1$. Also folgt

$$H^i((L \oplus M)^{p*^\pi} \otimes k) \cong H^i(L^{p*^\pi} \otimes k) \oplus H^i(M^{p*^\pi} \otimes k), \quad i = q,\ q+1, \tag{12.28}$$

und wir brauchen nur zu zeigen, dass die rechte Seite null ist. Dies folgt für $i = q$ aus 12.19. Ebenfalls nach 12.19 ist

$$H^{q+1}(L \oplus M)^{p*^\pi} \otimes k = H^{q+1}(L^{p*^\pi} \otimes k) = \operatorname{Tor}(k, H^{q+2}(L^{p*^\pi})) \,, \tag{12.29}$$

letzteres wegen der universellen Koeffizientenformel und 12.20. Die Gruppe $H^{q+2}(L^{p*^\pi})$ ist nach Abschnitt 12.11 homomorphes Bild von $H_{(p-1)q-2}(\pi, \mathbf{Z})$, und diese Gruppe ist null für $(p-1)q - 2 \neq 0$. Es bleiben also schliesslich nur noch die Fälle $(p, q) = (2, 2)$ und $(p, q) = (3, 1)$ übrig. In diesen Fällen ist $H^{q+2}(L^{p*^\pi}) \cong \mathbf{Z}$ ("symmetrisches Quadrat der 2-Sphäre" bezw. "3^te zyklische Potenz der 1-Sphäre". Für den Fall (2, 2) s. auch [8], 12.22, also auf jeden Fall $\operatorname{Tor}(k, H^{q+2}(L^{p*^\pi})) = 0$, q.e.d.

12.30 Bemerkung. Mit Hilfe der "verallgemeinerten Bar-Konstruktion" in [8] ergibt sich ziemlich leicht $H_i(K^p/\pi) = 0$ für $i = q$, $q+1$ und damit ein anderer Beweis für die entscheidende Gleichnung 12.23 (oder auch 12.19).

12.31. *Die Sätze* 2.6 *und* 6.7; *allgemeiner Fall.* Wir nehmen nun einen beliebigen freien endlich erzeugten (in jeder Dimension) FD-Komplex K. Dann können wir annehmen, dass

$$K = \textstyle\sum_\lambda K^\lambda \tag{12.32}$$

ist, wobei jeder FD-Komplex K^λ von der unter 12.2 betrachteten Art ist (vgl. § 11). Die Sätze 2.6 und 6.7 sind also bewiesen, wenn wir zeigen, *für dass sie für eine direkte Summe von* FD-*Komplexe gelten, falls sie für jeden Summanden gelten.* Wir führen dies durch für eine Summe von zwei FD-Komplexen, $K = L \oplus M$; der allgemeine Beweis verläuft genau so (übrigens ist die Summe 12.32 ja endlich in jeder Dimension). Wir erhalten

$$K^{(p)} = L^{(p)} \oplus M^{(p)} \oplus F \,, \tag{12.33}$$

$$K^p \;= L^p \;\oplus M^p \;\oplus F' \,, \tag{12.34}$$

wobei F, F' freie π-Komplexe sind, die sich aus Summanden der Form $\mathbf{Z}\pi \otimes L^{(r)} \otimes M^{(s)}$ bezw. $\mathbf{Z}\pi \otimes L^r \times M^s$ zusammensetzen. Entsprechend spalten die Abbildungen Φ/π und N^* auf:

$$W \otimes_\pi L^{(p)*} \oplus W \otimes_\pi M^{(p)*} \oplus W \otimes_\pi F^* \xrightarrow{\alpha \oplus \beta \oplus \gamma}$$

$$L^{p*}/\pi \oplus M^{p*}/\pi \oplus F'^*/\pi \xrightarrow{\alpha' \oplus \beta' \oplus \gamma'} L^{p*\pi} \oplus M^{p*\pi} \oplus F'^{*\pi} .$$

Nach Voraussetzung besitzen α, β, α', β' Rechts-Homotopieinverse: zu beweisen ist dasselbe für γ und γ'. Weil F'^* frei ist, ist $\gamma' = N^*$: $F'^*/\pi \to F'^{*\pi}$ ein Isomorphismus. Die Abbildung γ setzt sich aus Summanden

(12.35) $$W \otimes_\pi \mathbf{Z}\pi \otimes (L^{(r)} \otimes M^{(s)})^* \to (\mathbf{Z}\pi \otimes (L^r \times M^s)^*)/\pi$$

zusammen. Die linke Seite ist nichts anderes als $W \otimes (L^{(r)} \otimes M^{(s)})^*$, also homotopieäquivalent zu $(L^{(r)} \otimes M^{(s)})^*$, die rechte ist $(L^r \times M^s)^*$; die Abbildung 12.35 ist homotopieäquivalent zu einer Eilenberg-Zilber-Abbildung und daher selbst eine Homotopieäquivalenz. q.e.d.

13. Der Fall $\mathcal{S}(p^i, p)$, $i > 0$

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach i. Wir benutzen Bezeichnungen und Ergebnisse aus [23], 14.

Sei $r = p^{i-1}$, also $n = rp$. π sei eine zyklische Gruppe der Ordnung p, deren erzeugendes Element x auf den Zahlen $(0, 1, \cdots, n-1)$ vermöge $x(k) \equiv k + r \bmod n$ operiert. Ferner sei $\zeta = \mathcal{S}(p^{i-1}, p)$, und ζ^p operiere "intervallweise" in $(0, 1, \cdots, n-1)$; d.h. wir zerlegen $(0, 1, \cdots, n-1)$ in p Intervalle mit je r Elementen, und der j^{te} Faktor von ζ^p operiert im j^{ten} Intervall (s. [23], 14). Damit ist $\pi \subset \mathcal{S}(n)$, $\zeta^p \subset \mathcal{S}(n)$, und die von π und ζ^p erzeugte Untergruppe von $\mathcal{S}(n)$ ist eine p-Sylowuntergruppe $\mathcal{S}(p^i, p) = \sigma$.

Ist U ein π-freier, V ein ζ-freier azyklischer Komplex, dann ist $W = U \otimes V^{(p)}$ ein σ-freier azyklischer Komplex. Dabei operiert π auf $V^{(p)}$ durch Vertauschung der Faktoren; ζ^p operiert faktorenweise in $V^{(p)}$ und trivial in U (s. [23], 14).

Es seien nun $K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}$ freie, endlich erzeugte (in jeder Dimension) FD-Komplexe. Wir betrachten die Abbildungen

$$W \otimes (\textstyle\bigotimes_{j=0}^{n-1} K_j)^* \cong U \otimes V^{(p)} \otimes (\bigotimes_{j=0}^{n-1} K_j^*)$$

(13.1) $$\cong U \otimes \textstyle\bigotimes_{k=0}^{p-1}(V \otimes \bigotimes_{j=0}^{r-1} K_{kr+j}^*) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \bigotimes_{k=0}^{p-1}({}^{\zeta}F^*)}$$

$$U \otimes \textstyle\bigotimes_{k=0}^{p-1}(\prod_{j=0}^{r-1} K_{kr+j})^* \xrightarrow{{}^{\pi}F^*} (\prod_{j=0}^{n-1} K_j)^* .$$

Die nicht bezeichneten Abbildungen sind Vertauschungsisomorphismen. Die Abbildungen F^* sind dual (im Sinne von 2.4) zu den entsprechenden Abbildungen F von 1.12; der Index π oder ζ bezeichnet die Gruppe, um die es dabei geht.

Die zusammengesetzte Abbildung 13.1 ist dual (im Sinne von 2.4) zu einer Abbildung

$$(13.2)\qquad {}^{\sigma}F: W \otimes (\textstyle\prod_{j=0}^{n-1} K_j) \to \bigotimes_{j=0}^{n-1} K_j$$

wie in Satz 1.12 (Eigentlich entstehen beim Dualisieren von 13.1 Terme mit zwei Sternen. Da aber alles endlich erzeugt ist, kommt man beim doppelten Dualisieren zurück. 13.2 ist zunächst nur für endlich erzeugte freie K_j definiert, überträgt sich aber wegen der Natürlichkeit auf beliebige K_j.) Wir können die zusammengesetzte Abbildung 13.1 also für unsere Definition der reduzierten Potenzen benutzen, d.h. wir erhalten, wenn wir alle $K_j = K$ setzen, die "richtige" σ-Abbildung 2.2, nämlich

$$(13.3)\qquad \begin{aligned} {}^{\sigma}\Phi\colon W \otimes K^{(n)*} &\cong U \otimes V^{(p)} \otimes K^{(n)*} \cong U \otimes (V \otimes K^{(r)*})^{(p)} \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes ({}^{\zeta}\Phi)^{(p)}} U \otimes (K^{r*})^{(p)} \xrightarrow{{}^{\pi}\Phi} K^{rp*} = K^{n*}\,, \end{aligned}$$

und durch Übergang zum Quotienten

$$(13.4)\qquad \begin{aligned} \Phi/\sigma\colon W \otimes_{\sigma} K^{(n)*} &\cong U \otimes_{\pi} (V \otimes_{\zeta} K^{(r)*})^{(p)} \\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes_{\pi} (\Phi/\zeta)^{(p)}} U \otimes_{\pi} (K^{r*}/\zeta)^{(p)} \xrightarrow{\Phi/\pi} K^{rp*}/\sigma\,. \end{aligned}$$

Die Abbildung Φ/π (sie wird hier angewendet für den FD-Komplex $K^{r\zeta}$; vgl. 6.1) besitzt nach § 12 ein Rechts-Homotopieinverses, ebenso Φ/ζ (nach Induktionsvoraussetzung) und damit auch $\mathrm{id} \otimes_{\pi} (\Phi/\zeta)^{(p)}$ (zum letzten Schluss vgl. [23], 5). Also besitzt auch Φ/σ ein Rechts-Homotopieinverses, wie in 2.6 behauptet.

Nun zum Beweis von 6.7. Die Abbildung $\sigma N_*\colon K^n/\sigma \to K^{n\sigma}$ lässt sich wie folgt aufspalten

$$(13.5)\qquad K^n/\sigma \cong (K^r/\zeta)^p/\pi \xrightarrow{({}^{\zeta}N_*)^p/\pi} (K^{r\zeta})^p/\pi \xrightarrow{{}^{\pi}N_*} (K^{r\zeta})^{p\pi} \cong K^{n\sigma}\,.$$

Die Abbildung ${}^{\pi}N_*$ (hier für den FD-Komplex $K^{r\zeta}$) besitzt nach § 12 ein Links-Homotopieinverses, ebenso ${}^{\zeta}N_*$ (nach Induktionsvoraussetzung) und damit auch $({}^{\zeta}N_*)^p/\pi$ (denn der Funktor $K \to K^p/\pi$ erhält Homotopien; s. [5], 5.11). Also besitzt auch ${}^{\sigma}N_*$ ein Links-Homotopieinverses, wie in 6.7 behauptet.

14. $\pi = \mathcal{S}(n, p)$

Für $n < p$ ist $\pi = \mathcal{S}(n, p) = 1$, und die zu beweisenden Sätze werden trivial: $\Phi/1$ ist eine Homotopieäquivalenz und $N_* = N$ ist ein Isomorphismus.

Für $n \geqq p$ ist $\mathcal{S}(n, p)$ nach [23], 13.2 ein direktes Produkt von speziellen Sylow-Gruppen $\mathcal{S}(p^i, p)$, für die 2.6 und 6.7 in § 13 bereits bewiesen wurden. Es genügt daher, den folgenden Hilfssatz zu beweisen (für die genaue Erklärung der Bezeichnung vgl. [23], S. 212)

14.1 HILFSSATZ. *Ist die Behauptung von* 2.6 bezw. 6.7 *für die Permutationsgruppen* $\zeta \subset \mathcal{S}(r)$ *und* $\sigma \subset \mathcal{S}(s)$ *richtig, dann auch für das direkte Produkt* $\tau = \zeta \times \sigma \subset \mathcal{S}(r+s)$.

BEWEIS für 2.6. Ist U ein ζ-freier und V ein σ-freier azyklischer Komplex, dann ist $W = U \otimes V$ ein τ-freier azyklischer Komplex (wobei $\zeta \times \sigma$ faktorweise operiert; s. [23], S.212). Wie in § 13 (s 13.1–13.3) zeigt sich nun, dass man die (besser: eine) Abbildung ${}^{\tau}\Phi$ als Zusammensetzung (mit $n = r + s$)

$$(14.1)\quad {}^{\tau}\Phi\colon\ W \otimes K^{(n)*} \cong (U \otimes K^{(r)*}) \otimes (V \otimes K^{(s)*}) \xrightarrow{{}^{\zeta}\Phi \otimes {}^{\sigma}\Phi} K^{r*} \otimes K^{s*} \cong (K^r \otimes K^s)^* \xrightarrow{f^*} (K^r \times K^s)^* \cong K^{n*}$$

erhält. Die nicht bezeichneten Abbildungen sind wieder natürliche Isomorphismen und $f\colon L_1 \times L_2 \to L_1 \otimes L_2$ ist eine Eilenberg-Zilber-Abbildung vom kartesischen ins Tensorprodukt von FD-Komplexen. Durch Übergang zum Quotienten entsteht aus 14.1

$$(14.2)\quad \Phi/\tau : W \otimes_{\tau} K^{(n)*} \cong (U \otimes_{\zeta} K^{(r)*}) \otimes (V \otimes_{\sigma} K^{(s)*}) \xrightarrow{(\Phi/\zeta) \otimes (\Phi/\sigma)} (K^{r*}/\zeta) \otimes (K^{s*}/\sigma) \cong (K^{r\zeta} \otimes K^{s\sigma})^* \xrightarrow{f^*} K^{n\tau *} \cong K^{n*}/\tau .$$

Da Φ/ζ und Φ/σ Rechts-Homotopieinverse besitzen, gilt dasselbe für $(\Phi/\zeta) \otimes (\Phi/\sigma)$ und damit für Φ/τ (denn f^* ist eine Homotopieäquivalenz).

BEWEIS für 6.7. Er ergibt sich unmittelbar aus der folgenden Aufspaltung der Abbildung ${}^{\tau}N_*\colon K^n/\tau \to K^{n\tau}$.

$$(14.3)\qquad K^n/\tau \cong (K^r/\zeta) \times (K^s/\sigma) \xrightarrow{{}^{\zeta}N_* \times {}^{\sigma}N_*} K^{r\zeta} \times K^{s\sigma} \cong K^{n\tau} .$$

15. $\pi = \mathcal{S}(n)$

Analog zu [23] führen wir diesen Fall auf den der Sylow-Untergruppen zurück mit Hilfe des Transferhomomorphismus

$$(15.1)\qquad T\colon K^{n*}/\tau \to K^{n*}/\sigma$$

bezw.

$$(15.2)\qquad t\colon K^{n*\sigma} \to K^{n*\tau} .$$

Hierbei sind $\sigma \subset \tau$ beliebige Untergruppen von $\mathcal{S}(n)$. Zur Definition von T bezw. t wähle man in τ ein beliebiges Repräsentantensystem $\{x\}$ für die Rechts- bezw. Linksrestklassen von σ in τ und definiere

$$(15.3)\qquad K^{n*} \to K^{n*}, \qquad u \to \textstyle\sum_x x(u) , \qquad u \in K^{n*}.$$

Die Abbildung 15.1 bezw. 15.2 entsteht aus 15.3 durch Übergang zum

Quotienten bezw. Beschränkung auf die invarianten Elemente (vgl. [23], 11).

Aus der Definition folgt leicht (s. [23], 11), dass die Zusammensetzung

(15.4) $$K^{n*}/\tau \xrightarrow{T} K^{n*}/\sigma \xrightarrow{p} K^{n*}/\tau$$

bezw.

(15.5) $$K^{n*\tau} \xrightarrow{i} K^{n*\sigma} \xrightarrow{t} K^{n*\tau}$$

(p bezw. i die natürliche Projektion bezw. Injektion) jedes Element mit $m=[\tau:\sigma]=$Index von σ in τ multipliziert. Dasselbe gilt auch noch, wenn wir diese Abbildungen mit einer beliebigen Koeffizientengruppe G tensorieren. Es folgt (s. [23], 11.4)

(15.6) $$m\cdot H((K^{n*}/\tau)\otimes G)\subset p(H((K^{n*}/\sigma)\otimes G))$$

(15.7) $$m\cdot H(K^{n*\tau}\otimes G)\subset t(H(K^{n*\sigma}\otimes G)) .$$

Wir betrachten nun das folgende Diagramm

(15.8) $$\begin{array}{ccccc} W\otimes_\sigma K^{(n)*} & \xrightarrow{\Phi/\sigma} & K^{n*}/\sigma & \xrightarrow{{}^{\sigma}N^*} & K^{n*\sigma} \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ W\otimes_\tau K^{(n)*} & \xrightarrow[\Phi/\tau]{} & K^{n*}/\tau & \xrightarrow[{}^{\tau}N^*]{} & K^{n*\tau} \end{array}$$

(W ein azyklischer freier τ-Komplex, also auch σ-Komplex; p' die natürliche Projektion). Man sieht, dass 15.8 kommutativ ist.

Setzen wir nun $\tau=\mathcal{S}(n)$, $\sigma=\mathcal{S}(n,p)$, dann induzieren Φ/σ und ${}^{\sigma}N^*$ Epimorphismen der Homologie (beliebige Koeffizienten). Aus 15.6, 15.7 und der Kommutativität von 15.8 folgt dann, dass das $[\mathcal{S}(n):\mathcal{S}(n,p)]$-fache jedes Elementes von $H((K^{n*}/\mathcal{S}(n))\otimes G)$ bezw. $H(K^{n*\mathcal{S}(n)}\otimes G)$ im Bild bei $\Phi/\mathcal{S}(n)$ bezw. ${}^{\mathcal{S}(n)}N^*$ vorkommt. Weil der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen $[\mathcal{S}(n)$: $\mathcal{S}(n,p)]$ gleich 1 ist, wenn p alle Primzahlen durchläuft, folgt, dass schon jedes Element von $H((K^{n*}/\mathcal{S}(n))\otimes G)$ bezw. $H(K^{n*\mathcal{S}(n)}\otimes G)$ selbst im Bild bei $\Phi/\mathcal{S}(n)$ bezw. ${}^{\mathcal{S}(n)}N^*$ vorkommt, d.h. $\Phi/\mathcal{S}(n)$ und ${}^{\mathcal{S}(n)}N^*$ induzieren Epimorphismen der Homologie für alle möglichen Koeffizienten. Nach 11.7 besitzt N_*: $K^n/\mathcal{S}(n)\rightarrow K^{n\mathcal{S}(n)}$ dann ein Links-Homotopieinverses, wie in 6.7 behauptet.

Aber auch für 2.6 können wir 11.7 heranziehen. Die Abbildung Φ/τ ist nämlich dual zu

(15.9) $$(K^{n*}/\tau)^* \xrightarrow{(\Phi/\tau)^*} (W\otimes_\tau K^{(n)*})^*$$

(alle vorkommenden Gruppen sind frei und endlich erzeugt; doppelte Dualisierung führt also zurück). Also besitzt 15.9 nach 11.7 ein Links-

Homotopieinverses, also Φ/τ dual dazu ein Rechts-Homotopieinverses, q.e.d.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG

LITERATUR

1. J. ADEM, *The relations on Steenrod powers of cohomology classes*, Algebraic Geometry and Topology (A symposium in honor of S. Lefschetz), Princeton University Press, 1957.
2. N. BOURBAKI, Exposé de A. Grothendieck, Paris, Mai 1957.
3. ———, Exposé de A. Dold, Paris, Dezember 1958.
4. H. CARTAN and S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.
5. A. DOLD, *Homology of symmetric products and other functors of complexes*, Ann. of Math., 68 (1958), 54-80.
6. ———, *Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe*, Math. Ann., 140 (1960), 278-298.
7. ——— UND R. THOM, *Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte*, Ann. of Math. 67 (1958), 239-281.
8. ——— UND D. PUPPE, *Homologie nicht-additiver Funktoren*, erscheint in Ann. de l'Inst. Fourier.
9. S. EILENBERG and S. MACLANE, *On the groups* $H(\pi, n)$ I, Ann., of Math. 56 (1953), 55-106.
10. ———, *On the groups* $H(\pi, n)$ II, Ann. of Math., 60 (1954) 49-139.
11. ———, *On the groups* $H(\pi, n)$ III, Ann. of Math., 60 (1954), 513-557.
12. ——— and J. A. ZILBER, *On products of complexes*, Amer. J. Math., 75 (1953), 200-204.
13. R. GODEMENT, Théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.
14. D. M. KAN, *Functors involving* css-*complexes*, Trans. Amer. Math. Soc., 87 (1958), 330-346.
15. S. MACLANE, Simplicial Topology I, Lecture notes by J. Yao, University of Chicago, 1959.
16. J. MILNOR, The construction FK, Mimeographed, Princeton University, 1957.
17. T. NAKAMURA, *Equivalence between two definitions of the cohomology operations*, Sci. Papers College of Gen. Education, Univ. of Tokyo, 9 (1959), 1-16.
18. M. NAKAOKA, *Decomposition theorems for homology groups of symmetric groups*, Ann. of Math., 71 (1960), 16-42.
19. D. PUPPE, *Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen und Monoidkomplexen* I, Math. Zeit., 68 (1958), 367-406.
20. J. P. SERRE, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane*, Comment. Math., Helv., 27 (1953), 198-231.
21. E. SPANIER, *Infinite symmetric products, function spaces, and duality*, Ann. of Math., 69 (1959), 142-198.
22. N. E. STEENROD, *Homology groups of symmetric groups and reduced power operations. Cyclic reduced powers of cohomology classes.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 39 (1953) 213-223.
23. ———, *Cohomology operations derived from the symmetric group*, Comment. Math. Helv., 31 (1957), 195-218.
24. ———, *Cohomology operations*, Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Univer. de Mexico, 1958.
25. ———, Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions, Colloquium Lectures (mimeographed), Princeton, 1957.
26. ——— and E. THOMAS, *Cohomology operations derived from cyclic groups*, Comment. Math. Helv., 32 (1957), 129-152.