Inventiones math. 3, 172—178 (1967)

Zur Spectralsequenz von Faserungen

A. DRESS (Berlin)

0.

Im folgenden soll eine Konstruktion der Serreschen Spectralsequenz von Faserungen angegeben werden, in der statt des filtrierten Komplexes singulärer Cuben ein geeigneter Doppelkomplex benutzt wird. Dadurch wird die Berechnung des E^2-Terms in gewisser Hinsicht einfacher und man kann z. B. auch ohne weiteres auf die Voraussetzung des bogenweisen Zusammenhanges von Basisraum und Faser verzichten.

1.

Genauer sei zu einer stetigen Abbildung $f: E \to B$ ein singuläres pq-Simplex von f ein Paar von Abbildungen:

$$\sigma_{p,q}\colon \Delta_p \times \Delta_q \longrightarrow E,$$

$$\tau_p\colon \Delta_p \longrightarrow B,$$

derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Delta_p \times \Delta_q \arrow[r, "\sigma_{pq}"] \arrow[d, "pr_1"] & E \arrow[d, "f"] \\ \Delta_p \arrow[r, "\tau_p"] & B \end{tikzcd}$$

kommutativ wird (Δ_n sei das Standardsimplex der Dim n).

$K_{pq}(f)$ sei die von allen singulären pq-Simplizes von f aufgespannte freie abelsche Gruppe.

Offenbar ist $K_{n\,0}(f) \cong K_n(E)$ ($K_\bullet(E)$ = singulärer Komplex von E).

Man hat wie üblich Randoperatoren:

$$d^1\colon C_{pq} \longrightarrow C_{pq-1},$$

$$d^2\colon C_{pq} \longrightarrow C_{p-1q}.$$

Ist $\varepsilon_{n-1}^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ die kanonische Abbildung von Δ_{n-1} auf die i-te Seite von Δ_n, so ist:

$$d^1(\sigma_{pq}, \tau_p) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{j+p} \left(\sigma_{pq}(\mathrm{id}_{\Delta_p} \times \varepsilon_{q-1}^j), \tau_p\right),$$

$$d^2(\sigma_{pq}, \tau_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \left(\sigma_{pq}(\varepsilon_{p-1}^i \times \mathrm{id}_{\Delta_q}), \tau_p\, \varepsilon_{p-1}^i\right).$$

Es gilt $d^1 d^1 = d^2 d^2 = d^1 d^2 + d^2 d^1 = 0$; $K_{\bullet\bullet}(f)$ ist also mit diesen Randbildungen ein Doppelkomplex.

Es gilt:

Satz 1. a) *Es ist*

$$H_q(H_p(K_{\bullet\bullet}(f))) = \begin{cases} H_p(E) & q=0 \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

b) *Ist f eine Serrefaserung, so ist $H_p(H_q(K_{\bullet\bullet}(f))) = H_p(B, H_q(F_b))$, wenn $H_q(F_b)$ $(b \in B)$ das zu f gehörige lokale Koeffizientensystem der Faserhomologie auf B bezeichnet*:

Der Komplex $K_{\bullet\bullet}(f)$ liefert also die Serresche Spectralsequenz.

2. Beweis von Satz 1.a

Der Beweis kann analog zum Eilenberg-Zilber-Theorem mit Hilfe azyklischer Modelle geführt werden.

Einfacher schließt man wohl folgendermaßen[1]:

Vorbereitung. Es seien $f': E' \to B'$, $f: E \to B$ zwei stetige Abbildungen. Wir definieren die simpliziale Menge $\underline{\mathrm{Hom}}(f', f)$ mittels ihrer n-ten Komponenten: $\underline{\mathrm{Hom}}(f', f)_n$ besteht aus den kommutativen Quadraten

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n \times E' & \xrightarrow{u} & E \\ {\scriptstyle \Delta_n \times f'} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} \\ \Delta_n \times B' & \xrightarrow{v} & B. \end{array}$$

Die Ecken von $\underline{\mathrm{Hom}}(f', f)$ sind also die Morphismen von f' in f; die Kanten sind die Homotopien zwischen zwei Morphismen von f' in f. Folgendes Resultat liegt auf der Hand: ist $f'': E'' \to B''$ eine dritte stetige Abbildung, dann ist $\underline{\mathrm{Hom}}(\alpha, f): \underline{\mathrm{Hom}}(f', f) \to \underline{\mathrm{Hom}}(f'', f)$ homotop zu $\underline{\mathrm{Hom}}(\beta, f)$, falls $\alpha: f'' \to f'$ und $\beta: f'' \to f'$ homotop sind.

Anwendung. Gilt $B' = \Delta_0$, so schreiben wir $\underline{\mathrm{Hom}}(E', f)$ anstatt $\underline{\mathrm{Hom}}(f', f)$. Der Doppelkomplex $K_{pq}(f)$ ist assoziiert zu folgendem simplizialen Objekt der Kategorie aller simplizialen Mengen

$$\cdots \overrightarrow{\overrightarrow{\rightarrow}} \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_2, f) \overrightarrow{\overrightarrow{\rightarrow}} \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_1, f) \underset{\mathrm{Hom}(\varepsilon^0, f)}{\overset{\mathrm{Hom}(\varepsilon^1, f)}{\rightrightarrows}} \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_0, f) = K_\bullet E.$$

Die Projektionen $\Delta_q \to \Delta_0$ induzieren einen Morphismus simplizialer Objekte

$$\begin{array}{ccccc} \cdots\ K_\bullet E & \overset{\mathrm{Id}}{\underset{\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightrightarrows\!\!\!\!\rightarrow}}} & K_\bullet E & \underset{\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightrightarrows}} & K_\bullet E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{Id}} \\ \cdots\ \mathrm{Hom}(\Delta_2, f) & \overrightarrow{\overrightarrow{\rightarrow}} & \mathrm{Hom}(\Delta_1, f) & \rightrightarrows & \mathrm{Hom}(\Delta_0, f). \end{array}$$

[1] Diesen Beweis verdanke ich dem Referenten.

Da alle senkrechten Pfeile Homotopieäquivalenzen sind, ist $H_p(K_{\bullet q}(f))$ kanonisch isomorph zu

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{Id}} \underset{q=3}{H_p(E)} \xrightarrow{0} \underset{q=2}{H_p(E)} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \underset{q=1}{H_p(E)} \xrightarrow{0} \underset{q=0}{H_p(E)}.$$

3. Lokale Koeffizienten

Wir wollen $H_p(H_q(K_{\bullet\bullet}(f)))$ auch für beliebiges stetiges f möglichst weitgehend berechnen und betrachten zu diesem Zweck zunächst den Begriff der lokalen Koeffizienten.

Sei X ein topologischer Raum, $\Delta_\bullet(X)$ die simpliziale Menge der singulären Simplizes von X. $\Delta_\bullet(X)$ kann mittels der durch die Komposition der Randoperatoren definierten simplizialen Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \Delta_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Delta_m \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

über X als Teilkategorie der Kategorie Top/X aller topologischer Räume über X aufgefaßt werden.

Zu jedem kontravarianten Funktor T von $\Delta_\bullet(X)$ in die Kategorie $\underline{\mathrm{Ab}}$ der Abelschen Gruppen (bzw. irgendeiner abelschen Kategorie mit direkten Summen) ist dann die Homologie $H_\bullet(X, T)$ von X bezgl. T definiert (Vgl. [*2*]), als die Homologie des simplizialen Komplexes

$$C_\bullet(X,T):\quad \bigoplus_{\sigma_0\in\Delta_0(X)} T(\sigma_0) \underset{\oplus T(\varepsilon^0)}{\overset{\oplus T(\varepsilon^1)}{\leftleftarrows}} \bigoplus_{\sigma_1\in\Delta_1(X)} T(\sigma_1) \leftleftarrows\!\!\leftarrow \cdots.$$

Geht z.B. $T_M:\Delta_\bullet(X)\to\underline{\mathrm{Ab}}$ konstant auf die abelsche Gruppe M, so ist offenbar $H_\bullet(X, T_M)=H_\bullet(X,M)$.

Ferner ist bekannt, daß jedes lokale Koeffizientensystem

$$\mathfrak{M}=\{M_{\sigma_0}, \varphi_{\sigma_1} \mid \sigma_0\in\Delta_0(X), \sigma_1\in\Delta_1(X)\}$$

eindeutig einen Funktor $T_{\mathfrak{M}}:\Delta_0(X)\to\underline{\mathrm{Ab}}$ definiert, so daß $H_\bullet(X,\mathfrak{M})=H_\bullet(X, T_{\mathfrak{M}})$ ist.

Nennt man einen Funktor T stabil, falls für jeden Morphismus ε aus $\Delta_0(X)$ $T(\varepsilon)$ ein Isomorphismus ist, so folgt: Ist $\mathfrak{M}$ ein lokales Koeffizientensystem, so ist $T_{\mathfrak{M}}$ stabil.

Umgekehrt definiert jeder stabile Funktor T ein lokales Koeffizientensystem

$$\mathfrak{M}_T=\{M^T_{\sigma_0}, \varphi^T_{\sigma_1} \mid \sigma_0\in\Delta_0(X), \sigma_1\in\Delta_1(X)\},$$

indem man für $\sigma_0 \in \Delta_0(X)$ $M^T_{\sigma_0} = T(\sigma_0)$ setzt und für jeden Weg $\sigma_1 \in \Delta_1(X)$ von $\sigma_1 \varepsilon^0$ nach $\sigma_1 \varepsilon^1$ setzt:

$$\varphi_{\sigma_1}\colon\ M^T_{\sigma_1 \varepsilon^0} = T(\sigma_1 \varepsilon^0) \xrightarrow{T(\varepsilon^0)^{-1}} T(\sigma_1) \xrightarrow{T(\varepsilon^1)} T(\sigma_1 \varepsilon^1) = M^T_{\sigma_1 \varepsilon^1}.$$

Es ist

$$T_{\mathfrak{M}_T} = T, \qquad \mathfrak{M}_{T_{\mathfrak{M}}} = \mathfrak{M}.$$

4. Beweis von Satz 1.b

Wir konstruieren nun zu $f\colon E \to B$ und jedem $q \geqq 0$ einen kontravarianten Funktor $T^f_q\colon \mathrm{Top}/B \to \underline{\mathrm{Ab}}$, so daß für die Einschränkung von T^f_q auf $\Delta_0(B)$ gilt:

a) Ist $\sigma_0\colon \Delta_0 \to b \in B$ Element von $\Delta_0(B)$ und $F_b = f^{-1}(b)$, so ist $T^f_q(\sigma_0) = H_q(F_b)$.

b) Es ist

$$H_p(H_q(K_{\bullet\bullet}(f))) = H_p(B, T^f_q).$$

und zeigen dann, daß für Serrefaserungen $f\colon E \to B$ T^f_q stabil ist. (Daß T^f_q dann auch das gesuchte lokale Koeffizientensystem liefert, liegt auf der Hand.)

Konstruktion von T^f_q: Sei $g\colon Y \to B$ ein Objekt aus Top/B. Die kommutativen Quadrate

$$\begin{tikzcd} Y \times \Delta_q \arrow[r] \arrow[d, "pr_Y"] & E \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

bilden auf kanonische Weise eine simpliziale Menge $R^f(g)$. $R^f_\bullet(g)$ sei der zugehörige Komplex freier abelscher Gruppen.

Jeder Morphismus

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "g'"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

induziert eine Abbildung $R^f_\bullet(h)\colon R^f_\bullet(g) \to R^f_\bullet(g')$. Setze $T^f_q = H_q R^f_\bullet$.

Offenbar ist a) erfüllt und es gilt:

$$K_{p\bullet}(f) = \bigoplus_{\tau_p\colon \Delta_p \to B} R^f_\bullet(\tau_p),$$

also

$$H_q(K_{p\bullet}(f)) = \bigoplus_{\tau_p\colon \Delta_p \to B} T^f_q(\tau_p),$$

also

$$H_q(K_{\bullet\bullet}(f)) = C_\bullet(B, T^f_q) \qquad \text{(vgl. 3.)},$$

also

$$\boxed{H_p(H_q(K_{\bullet\bullet}(f)))=H_p(B,T_q^f).}$$

Zu zeigen bleibt die Stabilität von T_q^f für Serrefaserungen. Sei also $f:E\to B$ eine Serrefaserung. Wir zeigen etwas allgemeiner:

Satz 2. *Ist A ein CW-Komplex und $g:A\times I\to B$ stetig, $i_0:A\to A\times I$ die Inklusion: $i_0(a)=a\times 0$, so ist die Abbildung $R_\bullet^f(i_0):R_\bullet^f(g)\to R_\bullet^f(g i_0)$ eine Homotopieäquivalenz.*

Dieser Satz ist natürlich im wesentlichen bekannt, der Beweis kann etwa analog zu den Konstruktionen von SERRE in [*1*], Chap. II, Lemma 4 und 5 geführt werden, wobei eine leichte Vereinfachung dadurch erreicht wird, daß auf Degenerationen keinerlei Rücksicht genommen werden muß.

Satz 2 kann als Nachweis des Homotopieaxioms für die durch $R_\bullet^f$ auf der Teilkategorie von Top/B der CW-Komplexe über B definierte Homologietheorie angesehen werden.

Von hier aus läßt sich dann auch wieder die Eilenbergsche Konstruktion der Spectralsequenz für Faserungen und ihr Zusammenhang mit der Serreschen Konstruktion verstehen (vgl. [*3*], [*4*], [*5*]).

Zum Beweis von Satz 2 genügt es, aufgrund der allgemein bekannten Methoden zur Konstruktion von Umkehrabbildungen und Homotopieoperatoren zu zeigen:

a) Zu jedem $\sigma:\Delta_q\times A\to E$ mit $f\sigma=g i_0 pr_A$ existiert eine Erweiterung

$$\Sigma:\ \Delta_q\times A\times I\to E \quad \text{mit} \quad f\Sigma=g\,pr_{A\times I} \quad \text{und} \quad \Sigma|_{\Delta_q\times A\times 0}=\sigma.$$

Dabei kann Σ auf $\dot{\Delta}_q\times A\times I$ beliebig vorgeschrieben werden. Dies folgt aus der Tatsache, daß in komm. Diagrammen

$$\begin{tikzcd} \Delta_q\times A\times 0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & E \arrow[d, "f"] \\ \Delta_q\times A\times I \arrow[r, "g\,pr_{A\times I}"] & B, \end{tikzcd}$$

bzw.

$$\begin{tikzcd} \Delta_q\times A\times 0\cup\dot{\Delta}_q\times A\times I \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "f"] \\ \Delta_q\times A\times I \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

stets kommutative Ergänzungen $\Delta_q\times A\times I\to E$ existieren.

b) Je zwei Erweiterungen

$$\Sigma,\Sigma':\ \Delta_q\times A\times I\to E$$

von σ sind homotop rel. $\Delta_q \times A \times 0$, und zwar mit einer Homotopie $H: I \times \Delta_q \times A \times I \to E$, für die

$$f H = g\, p\, r_{A \times I}\colon\ (I \times \Delta_q) \times (A \times I) \longrightarrow A \times I \xrightarrow{g} B$$

gilt. Dabei kann die Homotopie H unter Beibehaltung dieser zwei Nebenbedingungen auf

$$I \times \dot{\Delta}_q \times A \times I$$

beliebig vorgeschrieben werden. Dies folgt wieder aus der komm. Ergänzbarkeit der Diagramme

$$\begin{array}{ccc} (0 \times \Delta_q \times A \cup 1 \times \Delta_q \times A) \times I \cup I \times \Delta_q \times A \times 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ I \times \Delta_q \times A \times I & \xrightarrow{g\, p\, r_{A \times I}} & B \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{ccc} (0 \times \Delta_q \times A \cup 1 \times \Delta_q \times A \cup I \times \dot{\Delta}_q \times A) \times I \cup I \times \Delta_q \times A \times 0 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times \Delta_q \times A \times I & \longrightarrow & B \end{array}$$

durch Abbildungen

$$I \times \Delta_q \times A \times I \longrightarrow E.$$

In jedem Falle benötigt man nur die relative HHE für CW-Paare.

5. Bemerkungen

5.1. Zum Nachweis von Satz 1, b) genügt es offenbar, Satz 2 nur für lokalkompakte CW-Komplexe A zu beweisen. In diesem Fall folgt aber Satz 2 aus der (elementar beweisbaren) Spezialisierung des Satzes von Whitehead: „Ist $r: X \to Y$ stetig und induziert r für alle n Bijektionen der Homotopieklassen $r_n: \pi[S^n, X] \to \pi[S^n, Y]$, so induziert r Isomorphismen in der Homologie“, indem man für $g: Y \to B$ in dem mit der kompakt-offenen Topologie versehenen Raum $[Y, E]$ den Teilraum $P^f(g) = \{s: Y \to E \mid fs = g\}$ betrachtet. Ist Y lokalkompakt, so ist die simpliziale Menge $R^f(g)$ einfach die Menge der singulären Simplizes von $P^f(g)$. Es reicht also, für einen lokalkompakten CW-Komplex A und eine Abbildung $g: A \times I \to B$ zu zeigen, daß die kanonische Abbildung $r: P^f(g) \to P^f(g i_0)$ Bijektionen in den Homotopieklassen

$$\pi[S^n, P^f(g)] \to \pi[S^n, P^f(g i_0)]$$

induziert.

Dies folgt aber unmittelbar aus der relativen HHE für CW-Paare und schwache Serrefaserungen (gewöhnliche Serrefaserungen induzieren sogar Epimorphismen $[S^n, P^f(g)] \to [S^n, P^f(g i_0)]$).

5.2. Besitzt $f: E \to B$ die HHE nur für CW-Paare der Dim $\leqq n$, so hat man jedenfalls die üblichen E^2-Terme für $p+q<n$.

5.3. Es ist vielleicht auch interessant, den E^2-Term für Abbildungen $f: E \to B$ mit wohlbestimmten Singularitäten zu untersuchen, d.h. Abbildungen, die z.B. mit Ausnahme endlich vieler Punkte lokaltrivial sind, etc.

5.4. Es liegt auf der Hand, daß man mit denselben Methoden auch die allgemeineren Spectralsequenzen der Homologie und Cohomologie für Raumpaare, beliebige Koeffizientengruppen und zusätzlicher Struktur in der Cohomologie erhält.

Literatur

[1] SERRE, J. P.: Homologie singuliere des espaces fibrés. Ann. of Math. **54**, 425—505 (1951).

[2] GODEMENT, R.: Théorie des faisceaux, p. 42ff, Hermann & Cie, Paris: 1958.

[3] EILENBERG, S., in: H. Cartan, Sem. de Top. Alg. ENS, III, 1950—1951, exp. IX.

[4] PUPPE, D.: Faserräume. Vorlesungsausarbeitung, Saarbrücken 1964.

[5] KAMPS, K. H.: Homologie von Faserungen über CW-Komplexen. Diplomarbeit, Saarbrücken 1965.

(Eingegangen am 20. Januar/30. März 1967)