Beiträge zur Analysis situs.

I. Aufsatz.

Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Von

Walther Dyck in München.

[Mit drei lithogr Tafeln.]

Einleitung.

In den Untersuchungen, welche die folgenden Seiten — zunächst in einem ersten Aufsatze — enthalten, handelt es sich, unter gleichmässiger Berücksichtigung geometrischer wie analytischer Daten, um eine systematische Entwickelung derjenigen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten, welche denselben im Sinne der Analysis situs zukommen, also sich ausschliesslich auf die Anordnungsverhältnisse derselben beziehen.

Es sind hierbei absolute und relative Eigenschaften zu unterscheiden, soferne dieselben eine Mannigfaltigkeit an sich besitzt, oder nur in ihrer Verbindung mit anderen Mannigfaltigkeiten.*) Die absoluten Eigenschaften können auch als diejenigen bezeichnet werden, deren Uebereinstimmung für zwei Mannigfaltigkeiten nothwendig und hinreichend ist für die Herstellung umkehrbar eindeutiger stetiger Beziehung zwischen *allen* Elementen der beiden Mannigfaltigkeiten**).

---

*) Dieser Unterschied findet sich wohl zuerst betont in dem Aufsatze von Klein „Ueber den Zusammenhang der Flächen" (Zweite Abhandlung), diese Annalen Bd. XI, (1875) pag. 478.

**) Es sei hier hervorgehoben, dass es sich dabei um *stetige Beziehungen stetiger Mannigfaltigkeiten* handelt, d. h. um solche Beziehungen, bei welchen Nachbarelemente wieder in Nachbarelemente übergehen. Beziehungen also, wie die Cantor-Lüroth'schen Abbildungen von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander (man vergl. hier insbesondere den Aufsatz von Cantor „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" im 84. Bd. von Crelle's Journal (1877) und weiter dessen Notiz in den Göttinger Nachrichten v. J. 1879; sodann die Aufsätze von Lüroth in den Erlanger Berichten v. J. 1878 und in den Math.

Für zwei Dimensionen sind *die absoluten Eigenschaften in geometrischer Darstellung* wohlbekannt in der Theorie des Zusammenhangs von Flächen, wie sie von Riemann und Neumann*) aufgestellt

---

Annalen Bd. XXI, (1882) „Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe") sind von vorneherein als *unstetige* auszuschliessen.

Weiter ist wohl zu beachten, dass die Uebereinstimmung jener absoluten Eigenschaften für die beiden Mannigfaltigkeiten *nicht mehr* erforderlich ist, sobald wir nur *im Allgemeinen* eindeutig umkehrbare Beziehung verlangen, also Ausnahmeelemente zulassen. So vergleiche man Klein's noch weiter zu erwähnende Abhandlung „Ueber den Zusammenhang der Flächen" (Erste Abhandlung), Math. Annalen Bd. VII, (1874) pag. 554, wo für den Fall eindeutig umkehrbarer algebraischer Beziehung zweier Flächen aufeinander das Auftreten von Fundamentalpunkten und zugehörigen Fundamentalcurven berücksichtigt wird; man sehe hiezu auch die beiden weiteren Abhandlungen Klein's „Ueber eine neue Art Riemann'scher Flächen" im VII. u. X. Bde. dieser Annalen.

Der Satz, dass für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten (Flächen) die Uebereinstimmung der sogleich zu besprechenden „Zusammenhangszahl" und der Anzahl der eindimensionalen Begrenzungen (Randcurven) derselben als einzige absolute Eigenschaften von aus einem einzigen Stück bestehenden Mannigfaltigkeiten (Flächen) nothwendig und hinreichend ist, für die Möglichkeit umkehrbar eindeutiger Beziehung zwischen allen Elementen solcher Mannigfaltigkeiten, ist wohl zuerst von C. Jordan bewiesen worden. Man vergl. hierzu die Abhandlung „Sur la déformation des surfaces" in Liouville's Journal, Serie 2, Bd. XI. (1866). Für die genauere Formulirung sehe man auch im Nachfolgenden Theil II, § 5 p. 488.

*) Riemann. „Theorie der Abel'schen Functionen" (1857); Werke p. 84ff., sowie „Fragment aus der Analysis situs" pag. 448.

Neumann. Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen. 1. Aufl. 1865, pag. 291ff., 2. Aufl. 1884, pag. 146ff.

Was speciell gestaltliche Eigenschaften „Riemann'scher Flächen" betrifft, so seien hier auch noch die Untersuchungen von Lüroth und Clebsch in Bd. IV u. VI dieser Annalen erwähnt über die Herstellung gewisser canonischer Formen; ferner die zuerst von Klein gebrauchte Form der „frei im Raum gelegenen Riemann'schen Flächen", sowie dessen in den schon oben erwähnten Aufsätzen gegebene „neue Art von Riemann'schen Flächen."

Weiter sei hier erwähnt ein Aufsatz von Clifford „On the canonical Form and Dissection of a Riemann's surface". Proceedings of the London Math. Soc. vol. 8 (1877), sowie ein neuerdings erschienenes Werkchen von F. Hofmann „Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen" Halle a/S. Nebert's Verlag 1888, in welchem die Umformung solcher Flächen in canonische Formen besonders anschaulich besprochen wird. Es sei mir dabei gestattet, bezüglich eines Abschnittes der Hofmann'schen Darstellung (Nr. 8, p. 27ff.) die Richtigstellung eines Citats zu geben. Die dort besprochene Conception der doppelseitigen Flächen bezieht sich *nicht* auf die „neue Art Riemann'scher Flächen", wie sie Klein am soeben erwähnten Ort, Annalen VII u. X, gegeben hat, vielmehr auf die wesentlich davon verschiedene, an Schwarz und Schottky anknüpfende Auffassung doppelseitiger Riemann'scher Flächen als *symmetrischer* Flächen, sei es nun, dass man es mit einfachen oder mit sog. Doppelflächen zu thun habe. Man vergl. hierzu die Untersuchungen von Schwarz in Crelle's Journal Bd. 70 (1869) u. 75 (1872), u. den Berliner Monatsberichten v. J. 1865; weiter wurde; weiter durch die an Euler und L'Huilier*) anknüpfenden und auch auf mehr Dimensionen ausgedehnten Untersuchungen Listing's**) und die von Möbius***); endlich hat Betti†) für drei und mehr Dimensionen den Riemann'schen analoge Formulirungen gegeben, auf die in neuester Zeit Picard††) zurückgekommen ist.

Zu den *geometrischen Untersuchungen relativer Eigenschaften* gehören die Arbeiten über die Gestalten und Verschlingungen ebener und räumlicher Curven von Listing, Tait, F. Meyer, Simony†††) u. a.

Schottky in Crelle's J. Bd. 83, (1877) sowie die Ausführungen von Klein in „Riemann's Theorie der algebraischen Functionen" (Leipzig 1882) pag. 78ff.

Noch sei bezüglich der an Riemann anschliessenden Betrachtungsweisen der Aufsatz von Lippich „Untersuchungen über den Zusammenhang der Flächen" Annalen, Bd. VII, Schläfli's Aufsatz „Ueber die linearen Relationen zwischen den $2p$ Kreiswegen erster Art etc." in Crelle's Journal Bd. 76 (1873), sowie die bez. Abschnitte in Clebsch-Gordan's „Theorie der Abel'schen Functionen" (1866) erwähnt.

*) Der Euler'sche Polyedersatz ist, wie Baltzer (Monatsberichte der Berliner Akademie vom J. 1861) bemerkt hat, schon in einem Fragment von Descartes enthalten. Die Ausdehnung des Euler'schen Satzes auf sternförmige Polyeder (mehrfache Kugelbedeckung) hat Poinsot 1809 im 10. Heft (5. Bd.) des Journal de l'école polyt. gegeben, während die erste Darlegung der weiteren „Ausnahmefälle" des Euler'schen Satzes von L'Huilier (mémoires de l'Acad. de St. Petersbourg 1811, Gergonne's Annalen Bd. 3, 1812) herrührt.

**) Listing, Census räumlicher Complexe, Göttinger Abh. Bd. X, (1861), sowie Göttinger Nachr. 1867.

***) Möbius, Werke Bd. II und zwar: „Theorie der elementaren Verwandtschaft" (Sitzungsber. der Ges. d. W. zu Leipzig, Bd. 15, 1863); „Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders" (ebenda, Bd. 17, 1867); „Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft" (zum ersten Mal in den gesammelten Werken aus dem Nachlass veröffentlicht).

†) Betti. „Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni". Annali di Matematica, Serie II, Bd. 4. 1870.

††) Picard, „Sur les fonctions hyperabéliennes". Liouville, Journal de math. Se. IV, Bd. 1, p. 106. (1885).

†††) Man sehe: Listing, insbesondere in den „Vorstudien zur Topologie" (Göttinger Studien v. J. 1847).

Tait in der grossen Abhandlung „On knots", Transactions of the Royal Society of Edinburgh vom Jahre 1879, dann v. J. 84 u. 86 und in den Proceedings der gleichen Gesellschaft a. d. J. 1876—79.

Daran anschliessend eine Reihe von Abhandlungen von Kirkmann, gleichfalls in den vorgenannten Bänden der Transactions und Proceedings, sowie von Little in den Transactions of the Connecticut Academy v. J. 1885.

Franz Meyer in seiner Inaug.-Diss. „Anwendungen der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Curven" (1878) und „Ueber algebraische Knoten" in den Proceedings of the R. Soc. of Edinburgh v. J. 1885—86.

Simony, „Neue Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie", Math. Ann. Bd. XIX u. XXIV, sowie eine Reihe von Aufsätzen in den Sitzungsberichten der Wiener Akad. vom Jahre 1881, 82, 83, 87; und ebenda anschliessende Arbeiten von Koller u. Schuster.

Analytische Darstellungen von Raumcurven mit Knoten sind von Brill

Analytische Formulirungen gewisser Eigenschaften der Lage ebener und räumlicher Gebilde gehen in erster Linie auf Gauss zurück (die Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra von 1799 und 1849, Definition und Darstellung der Curvatura integra von Flächen, dann insbesondere die Potentialsätze in der „Theoria attractionis ..." (1813) und in den „Allgemeinen Lehrsätzen" ... (1839) (Werke Bd. V), endlich die analytische Darstellung der Umschlingung zweier Curven*) (1833), weiter auf Cauchy (das sog. Cauchy'sche Integral, seine Verwerthung zum Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra); andererseits, auf den Satz von Sturm über die Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zwischen gegebenen Grenzen und die daran sich schliessenden Untersuchungen von Sylvester, Hermite, Jacobi, Brioschi u. a.**).

(diese Annalen Bd. XVIII) (welcher die algebraischen Raumcurven niedrigster, 5ter Ordnung mit dieser Eigenschaft angiebt), dann von Hoppe, Durège, Schlegel (Grunerts Archiv Bd. 64 u. 65, Wiener Akademie-Berichte Bd. 82 (1880), Schlömilch's Zeitschrift Bd. 28) gegeben.

*) Wegen der Beziehung des von Gauss (Werke Bd. V, pag. 605) gegebenen Integrals für die Umschlingung zweier Curven zur Theorie der galvanischen Ströme sehe man noch die Bemerkungen von Schering am Schlusse des genannten Bandes, sowie die von Schering veranlasste Dissertation von Böddiker „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen". Weiter noch Maxwell's „Treatise on Electricity and Magnetism" Second Ed. (1881), § 417—422 und die Abhandlungen von Thomson „On vortex motion" und „On vortex statics" Transactions of the Royal Society of Edinburgh, vol. 25, (1869) bez. vol. 27, (1875).

Hier anschliessend sind auch noch die physicalischen Untersuchungen zu erwähnen, in welchen das Auftreten von Flächen und Körpern höheren Zusammenhangs für das Verhalten von Potentialfunctionen in Betracht gezogen wird; so sehe man ausser den eben genannten Abhandlungen von Thomson die Bemerkung bei Helmholtz in der Abhandlung „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen" Crelle, Bd. 55, pag. 27 (1858); weiter Riemann's Vorlesungen über „Schwere, Electricität und Magnetismus" (1876) § 83 u. ff.; in dem eben erwähnten Werke von Maxwell die Artikel 18—28, 100, 113; in dem Buche von Lamb „A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids" (1879) die Artikel 53—59, 66, 67, 120 und Note B.

**) Sturm, im Bulletin de Férussac vol. XI, pag. 419 (1829), ausführlicher in den Mémoires présentés par divers savants, vol. VI (1835).

Sylvester, insbesondere in „On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions" Philosophical Transactions. London. Part. III (1853).

Hermite, „Sur l'extension du théorème de M. Sturm" (Comptes rendus, Bd. 35, pag. 52 (1852), u. Bd. 36, pag. 294 (1853), sowie Jacobi, Crelle's Journal Bd. 30, pag. 127 ff. u. Bd. 53, pag. 265 ff. (Werke Bd. III). Hierzu die historischen Bemerkungen von Borchard, gleichfalls in Crelle's Journal Bd. 53.

Brioschi insbesondere in den beiden Aufsätzen in den Nouvelles Annales de mathématiques Bd. 13 (1854) und Bd. 15 (1856) „Sur les fonctions de Sturm" und „Sur les séries qui donnent le nombre de racines réelles etc.

Man vergleiche bezüglich der Litteratur noch die zusammenfassende Dar-

An diese Untersuchungen knüpfen die Arbeiten von Kronecker über die Sturm'schen Functionen und über Systeme von Functionen mehrer Variabeln*) an; er giebt in seiner Charakteristik eines Functionensystems einerseits die von Sylvester vermuthete allgemeinste Formulirung der Sturm'schen Untersuchungen für beliebig viele Variable und stellt andererseits in der Darstellung der Charakteristik durch ein bestimmtes Integral den Zusammenhang dieser Untersuchungen zu den anderen von Gauss und Cauchy fest. Gleichzeitig sind damit die Grundlagen für die analytische Behandlung aller Fragen der Analysis situs gegeben.

Der vorliegende Aufsatz**) verbindet die geometrische und analytische Behandlung für die *Frage nach den absoluten Charakteristiken ein- und zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten.* Der hiebei eingeschlagene Weg führt dann weiter zu gewissen *relativen Eigenschaften*, die sich auf Curvensysteme auf beliebigen Flächen, sowie auf Flächensysteme in unserem Raume beziehen.

I. *Die geometrische Herleitung einer charakteristischen Zahl* (je im I. Abschnitt behandelt) wird an eine rein gestaltliche Herstellung der Mannigfaltigkeiten geknüpft, deren Grundzüge als für alle Dimensionen gemeinsam gleich hier vorangestellt seien.

Wir gehen aus von bestimmten Elementargebilden und fixiren gewisse typische Processe zur Umformung derselben. Indem wir dann

a) je die *Elementargebilde* mit der charakteristischen Zahl 1 behaften und

b) die *Umformungsprocesse* zunächst zur Herstellung neuer Elementargebilde, beziehungsweise zur Vernichtung vorhandener benützen, lassen sich, positive und negative Operationen dabei unterscheidend, auch die einzelnen Processe mit den Zahlen $+1$ und -1, ihrem Einfluss auf die entstehenden Mannigfaltigkeiten entsprechend, bezeichnen. Diese Zählung der Umformungsprocesse behalten wir bei, auch wo sie *andere* Veränderungen einer Mannigfaltigkeit hervorrufen als die eben erwähnten und gelangen, indem wir

c) die Abzählung der successive auf ein Elementargebilde 1 an-

---

stellung von Hattendorf: „Die Sturm'schen Functionen" (Hannover 1874) und insbesondere die sogleich zu nennenden Abhandlungen Kronecker's.

*) Kronecker „Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln", Monatsberichte der Berliner Akad. 1869, p. 159 u. 688; dann „Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen", ebenda 1873, p. 117; weiter „Ueber Sturm'sche Functionen" und „Ueber die Charakteristik von Functionensystemen", ebenda 1878, p. 95, bez. p. 145.

**) Die weitere Ausführung zweier, der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Juli 1885 und Februar 1886) vorgelegten Mittheilungen, „Beiträge zur Analysis situs I und II".

gewandten Operationen ihrer Summe nach fixiren, zu einer *charakteristischen Zahl* für die entstandene Mannigfaltigkeit.

Die Zahl gewinnt dadurch ihre fundamentale Bedeutung, dass wir ihre *Unabhängigkeit von dem jeweils zu Grunde gelegten Entstehungsprocess* darthun und lässt gleichzeitig die Eigenschaft *unmittelbarer Addirbarkeit*, soferne es sich um ein Aggregat von Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension handelt, erkennen. *Dabei besteht*, was ich gleich hier hervorheben möchte, *für zwei Dimensionen kein Unterschied in der hier entwickelten Abzählung für die einfachen und für die sogenannten Doppelmannigfaltigkeiten* (bezüglich deren ausführlicher Discussion insbesondere auf die §§ 3 bis 5 des zweiten Theiles verwiesen sei) und dies entspricht dem Umstande, dass die Doppelmannigfaltigkeiten sich als solche aus der Charakteristik allein im Allgemeinen nicht erkennen lassen*).

Die erhaltene charakteristische Zahl ist für zwei Dimensionen von der bekannten Riemann'schen Zusammenhangszahl und ihren Modificationen im Wesen nicht verschieden und weicht nur so zu sagen in der Zählrichtung von derselben ab. Ich habe die gegenseitigen Beziehungen ausführlich in § 4 (Theil II) besprochen und dort auch die Gründe erörtert, welche mir, aus der hier gegebenen systematischen Entwicklung der Zahl und der sogleich zu besprechenden analytischen Darstellung derselben folgend, es als nicht unberechtigt erscheinen lassen, die hier getroffene Zählweise an Stelle der Riemann-Neumann'schen zu setzen.

II. *Zur analytischen Formulirung der Charakteristik* (die wir je im II. Abschnitte behandeln) handelt es sich nun darum, für die durch Gleichungen und Ungleichungen gegebenen Mannigfaltigkeiten auch analytisch formulirte, continuirliche Entstehungsprocesse zur Abzählung zu Grunde zu legen. Zu dem Ende betrachten wir die allmähligen Umformungen einer Mannigfaltigkeit in einem einfach unendlichen, continuirlichen Systeme solcher Mannigfaltigkeiten; es bleibt dabei die Charakteristik im Allgemeinen ungeändert, im Besondern aber ergeben sich auch sofort diejenigen Sprungstellen, bei welchen eine Aenderung —

---

*) Doppelflächen sind zuerst wohl von Möbius in der „Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft" aufgestellt worden. Man vergl. Werke Bd. II, pag 484. Die Ausdehnung der Abzählung des Zusammenhangs auf Doppelflächen ist nach einer Bemerkung Schläfli's zuerst von Klein ausgeführt worden, Annalen Bd. VII, pag. 550ff. Man vergleiche hiezu auch die schon erwähnte Schrift von Klein, „Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" § 23, sowie die Note „Ueber die conforme Abbildung von Flächen", Annalen XIX, pag. 159; und endlich die Dissertation des Herrn Weichold „Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung", Dresden 1883 (in Schlömilch's Zeitschrift Bd. 28 abgedruckt).

im Sinne jener vorhin erwähnten Operationen — im positiven bez. im negativen Sinne statthat. So ergiebt sich die Abzählung direct durch eine Summation über gewisse singuläre Stellen, die durch Gleichungen und Ungleichungen definirt, ihrem „Punktcharakter" nach im Sinne jener Operationen zu bezeichnen sind, d. h. als eine Summation im Kronecker'schen Sinne über die Punktcharaktere gewisser durch ein Functionensystem definirter Stellen. *Es erweisen sich unsere geometrisch abgeleiteten Zahlen direct als Kronecker'sche Charakteristiken*, in der in den oben erwähnten Abhandlungen entwickelten Bedeutung, und es bilden diese in den vorliegenden Untersuchungen für die Zusammenhangszahlen von Curven und Flächen des dreidimensionalen Raumes getroffenen Abzählungen ein, wie ich glaube, besonders anschauliches Beispiel jener allgemeinen Charakteristikentheorie.

Weiter aber führt die Betrachtung der Systeme von Mannigfaltigkeiten, an deren singulären Stellen als den Sprungstellen der Charakteristik die Abzählungen getroffen werden, zu bemerkenswerthen *Relationen zwischen solchen singulären Stellen*, insoferne sich die Abzählung als unabhängig erweist von dem speciellen zu Grunde gelegten Systeme. Diese Relationen, — hier für beliebige Curvensysteme in der Ebene und auf beliebiger Fläche, sowie für beliebige Flächensysteme unseres Raumes ausgesprochen — sind in speciellen Formulirungen bekannt und führen in erster Linie wohl auf die obenerwähnten Arbeiten von Möbius zurück, der seine Abzählungen für Flächen geradezu auf gewisse auf denselben gezeichnete Curvensysteme stützt*). In der That haben mich auch, wie von der analytischen Seite die Kronecker'schen, von der geometrischen die Entwickelungen von Möbius zu den nachfolgenden Untersuchungen geführt.

---

*) Man sehe die oben angeführten Abhandlungen von Möbius, insbesondere die „Theorie der elementaren Verwandtschaft" (Werke, Bd. II, pag. 540ff. und 462, 465ff.). Weiter vergleiche man hiezu Bemerkungen bei Gauss: „Theorie des Erdmagnetismus" art. 12 (Werke, Bd. V, pag. 134ff.), ferner eine Abhandlung von Reech „Démonstration d'une propriété générale des surfaces fermées" im 21. Bd. (37. Heft) des Journal de l'école polytechnique (1858), sowie die Abhandlungen von Poincaré, „Sur les courbes définies par une équation differentielle" im Journal de l'école Normale, Serie 3, Bd. VII (1881), VIII (1882), Serie 4, Bd. I (1885) u. II (1886), wo besonders auch die in gegenwärtiger Abhandlung in § 11 geschilderten Relationen behandelt werden; endlich eine Bemerkung von Klein in „Riemann's Theorie" pag. 39. Relationen für die Art und Anzahl der singulären Stellen von Potentialfunctionen (auf Flächen und im Raume) sind auch in den schon oben angeführten physicalischen Untersuchungen behandelt; es seien hiezu noch die Betrachtungen von Betti erwähnt über die Anzahl der singulären Stellen der Potentialfunction auf der einfach zusammenhängenden Oberfläche eines magnetischen Körpers (Betti, Lehrbuch der Potentialtheorie, deutsche Ausgabe von Franz Meyer, Stuttgart 1885, pag. 334ff.).

Inhalts-Uebersicht.

I. Theil.

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten.

I. Abschnitt.

Geometrische Definition und Charakteristik eindimensionaler Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten.

Das Elementargebilde E^I für die eindimensionalen Mannigfaltigkeiten ist geometrisch gegeben durch ein begrenztes Stück einer Curve.

Die allgemeinste eindimensionale Mannigfaltigkeit M^I, die wir hier betrachten, entsteht, wenn wir in einer endlichen oder auch unendlichen Zahl von Elementargebilden einzelne (oder auch alle) Endpunkte paarweise vereinigen. Die M^I enthält dann neben Elementargebilden E^I noch eine gewisse Anzahl geschlossener Curvenzüge, dadurch entstanden, dass die beiden Endpunkte eines E^I vereinigt, oder auch eine Anzahl solcher im Cyklus zusammengefügt wurden. Mannigfaltigkeiten M^I, bei denen in einem Punkte mehr als zwei Curvenzüge sich vereinigen, lassen wir in den gegenwärtigen Abzählungen ausser Betracht.

§ 2.

Herleitung der Charakteristik.

Dem Elementargebilde ertheilen wir die Charakteristik $+1$.

Denken wir uns nun irgend einen Entstehungsprocess für eine eindimensionale Mannigfaltigkeit gegeben, so haben wir zur Herstellung einer Charakteristik für dieselbe das Entstehen eines E^I mit $+1$, das Verschwinden mit -1 zu zählen.

Die Trennung eines E^I in zwei Stücke kommt dem Entstehen eines weiteren E^I gleich und zählt somit für die Charakteristik von M^I als $+1$, während umgekehrt die Vereinigung zweier E^I als -1 zu zählen ist.

Nun kann die Vereinigung zweier Endpunkte auch an einem Elementargebilde vor sich gehen, wo dann ein geschlossener Curvenzug entsteht; indem wir auch hier diese Vereinigung mit -1 in Rechnung bringen ergiebt sich für jeden geschlossenen Curvenzug der M^I ein Beitrag $+1-1=0$.

*Die so definirte Charakteristik K^I einer M^I ist also gleich der Anzahl der in derselben enthaltenen nicht geschlossenen Curvenzüge (Elementargebilde); die geschlossenen Curvenzüge liefern keinen Beitrag zu dieser Zahl**).

Sofort ergiebt sich hieraus die *Unabhängigkeit* der charakteristischen Zahl K^I von einem bei der Abzählung zu Grunde gelegten Entstehungsprocess der Mannigfaltigkeit und weiter erkennen wir auch unmittelbar die Charakteristik einer Reihe von Mannigfaltigkeiten M^I als die *Summe der Einzelcharakteristiken.*

II. Abschnitt.

Bestimmung der Charakteristik für gewisse, analytisch gegebene, eindimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 3.

Allgemeine Formulirung für ebene Curven.

Wir denken uns in der Ebene eine eindimensionale Mannigfaltigkeit folgendermassen fixirt:

Gegeben seien zwei Curven durch ihre Gleichungen:

$$\varphi(x, y) = 0; \quad \psi(x, y) = 0; \tag{1}$$

wir nehmen dieselben im Endlichen liegend, übrigens aus einer beliebigen Zahl von Theilen bestehend und ohne Doppelpunkte an. Als das „*Innere*" einer Curve seien diejenigen Theile der Ebene bezeichnet, für welche die betr. Function [hier $\varphi(x, y)$, bez. $\psi(x, y)$] kleiner als Null ist, und dabei sei wieder das Vorzeichen der Function so gewählt, dass dieselbe im Unendlichen positiv ist, d. h. dass der unendlich ferne Punkt der Ebene — wir fassen in der Folge stets die Ebene als *Kugel* mit unendlich grossem Radius auf — im „Aussenraum" der Curve liegt.

Wir fragen nach der Charakteristik derjenigen Theile von $\varphi(x, y) = 0$, welche im Innern von $\psi(x, y) = 0$ liegen.

Diese Mannigfaltigkeit M^I wird im Allgemeinen aus einer Anzahl geschlossener Curvenzüge und einer Anzahl getrennter Stücke bestehen.

*) Man erkennt vielmehr gerade an dieser Stelle, dass die Bestimmung einer charakteristischen Zahl, welche auch *die Anzahl der geschlossenen Curvenzüge* ergiebt, ein weitergehendes Problem ist, insofern es dann nicht mehr genügt, wie bei dem oben behandelten, gewisse Punkte (Vereinigungs- und Trennungsstellen) ihrem „Punktcharakter" gemäss (vergl. pag. 463) zu unterscheiden, sondern der Gesammtverlauf der Curve von einer solchen Stelle ab zu verfolgen ist. Die für die Lösung des letzteren Problems nothwendigen Schritte habe ich in einer Note zur Analysis situs (Dritter Beitrag z. A. s.) in den Berichten der sächs. Ges. d. W. zu Leipzig, 1887 angegeben.

Die letztere Zahl, gleich der gesuchten Charakteristik, ergiebt sich unmittelbar als die halbe Anzahl der reellen Schnittpunkte beider Curven.

Um diese Zahl analytisch darzustellen, legen wir den folgenden Entstehungsprocess für die Mannigfaltigkeit M^I zu Grunde. Wir betrachten die Curve $\varphi(x, y) = 0$ als enthalten in einem einfach unendlichen, sonst beliebigen Curvensystem

$$\Phi(x, y, \lambda) = 0 \tag{2}$$

mit λ als Parameter; und beachten, wie beim Durchlaufen dieser Gesammtheit die Charakteristik der jedesmal im Innern von $\psi(x, y) = 0$ liegenden Theile der mit λ sich continuirlich deformirenden Curve $\Phi(x, y, \lambda) = 0$ sich ändert. Diese Aenderung erfolgt *sprungweise* an gewissen besonderen Stellen des Curvensystems Φ. Wir formuliren dieselbe im Folgenden im Kronecker'schen Sinne durch Angabe des *„Punktcharakters" jener Stellen*, dessen geometrische Bedeutung sich hier auf's Einfachste ergiebt. Kennen wir dann für irgend eine specielle, dem Parameter $\lambda = \lambda_\alpha$ entsprechende, Curve des Systems die zugehörige Charakteristik K_α (ihrer innerhalb $\psi = 0$ gelegenen Theile), so können wir von da ab, indem wir λ von λ_α bis λ_φ — dem der Curve $\varphi = 0$ zugehörigen Parameter — abändern, die Aenderung der Charakteristik von K_α bis K_φ — der für die Curve $\varphi = 0$ zu berechnenden Charakteristik — verfolgen. Nehmen wir insbesondere an, einer Ausgangscurve $\lambda = \lambda_\alpha$ entspreche eine Charakteristik $K_\alpha = 0$, so erhalten wir durch eine von hier aus begonnene Zählung direct die Charakteristik K_φ selbst, durch die Summation der Aenderungen im Intervalle λ_α bis λ_φ.

§ 4.

Punktcharakter der Sprungstellen der Charakteristik.

Die Charakteristik K^I der Theile einer Curve des Systems $\Phi(x, y, \lambda) = 0$, welche im Innenraume von $\psi(x, y) = 0$ liegen, ändert sich, wenn wir von einer Curve λ zu einer folgenden $\lambda + d\lambda$ übergehen, im Allgemeinen nicht, solange nicht

α) neue Stücke der sich deformirenden Curve in das Innere von $\psi = 0$ eintreten; bez.

β) vorhandene Stücke austreten, oder

γ) bisher vereinigte Curvenzüge sich trennen, bez.

δ) getrennte sich vereinigen.

Dabei ändern die Fälle (α) und (γ) die Charakteristik um $+ 1$, die Fälle (β) und (δ) um $- 1$. Wir können sie geometrisch dadurch unterscheiden, dass beim Durchlaufen des Systems Φ in der durch den wachsenden Parameter gegebenen Richtung die Zahl der Schnittpunkte von $\Phi = 0$ mit $\psi = 0$ in den Fällen (α) und (γ) um zwei vermehrt, in den Fällen (β) und (δ) um zwei vermindert wird. Die Vorkommnisse finden nämlich statt *an den Berührungsstellen der Curven des Systems* $\Phi = 0$ *mit* $\psi = 0$, also an den Stellen für welche:

$$\Phi = 0, \quad \psi = 0, \quad \Delta = 0 \tag{3}$$

ist, wenn wir mit Δ die Functionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \psi_1 \\ \Phi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$

der Functionen Φ und ψ bezeichnen. Beachten wir nun, um die eben getroffene Eintheilung analytisch zu fixiren, wie der „Innenraum" der betreffenden Curve $\Phi = 0$ und der „Innenraum" der Curve $\psi = 0$ in der Umgebung des Berührungspunktes gegen einander liegen, so können wir zunächst vier Fälle der Berührung (vergl. die Figuren $1^{a,b,c,d}$) unterscheiden, die wir folgendermassen zusammenstellen:

	(a) (Fig. 1^a *))	(b) (Fig. 1^b)	(c) (Fig. 1^c)	(d) (Fig. 1^d)	
Die Curve Φ verläuft im	Aussen-Raum	Aussen-Raum	Innen-Raum	Innen-Raum	der Curve ψ
Die Curve ψ verläuft im	Aussen-Raum	Innen-Raum	Aussen-Raum	Innen-Raum	der Curve Φ

Je nachdem nun mit *wachsendem* Parameter λ der Innenraum der Curve $\Phi = 0$ an der betr. Stelle *wächst*, bez. *abnimmt*, entspricht

Fall (a) der oben bezeichneten Aenderung (α) bez. (β),
Fall (b) „ „ „ „ (β) bez. (α),
Fall (c) „ „ „ „ (γ) bez. (δ),
Fall (d) „ „ „ „ (δ) bez. (γ),

wie sich aus der Betrachtung der betr. Figuren und der dabei eingetragenen Pfeilrichtungen, welche das Fortschreiten der Curven des Systems mit wachsendem Parameter und dabei wachsendem Innenraum andeuten, leicht ergiebt. Nun wird andererseits das Zu- bez. Abnehmen des „Innenraumes" $\Phi < 0$ an einer Stelle mit wachsendem Parameter durch das positive bez. negative Vorzeichen von $-\Phi_4$, der nach λ genommenen Ableitung von Φ, bestimmt.

---

*) In den Figuren sind die Curven $\Phi = 0$, bez. $\psi = 0$ mit (1) und (2) bezeichnet, der Innenraum je der beiden ist durch Schraffirung angedeutet.

Indem wir jetzt die von Kronecker in den erwähnten Abhandlungen eingeführte Bezeichnung*)

$$[A]$$

benützen, um die Zahl $+1$, 0, -1 zu bezeichnen, je nachdem der Ausdruck A in der eckigen Klammer positiv, Null oder negativ ist, können wir sagen: Die Fälle (a) und (c) sind ihrem Punktcharakter nach durch

$$(4^a) \qquad [-\Phi_4],$$

die Fälle (b) und (d) durch

$$(4^b) \qquad [+\Phi_4]$$

für die Abzählung der Charakteristik unserer eindimensionalen Mannigfaltigkeit bestimmt.

Nun handelt es sich noch darum die Fälle (a) und (c) von den anderen (b) und (d) zu trennen. Man berechnet leicht, dass die Unterscheidung der sämmtlichen Fälle (a), (b), (c), (d) von einander durch die Vorzeichen zweier Determinanten sich darstellen lässt, nämlich der beiden:

$$(5) \qquad \Theta_\Phi = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \psi_1 \\ \Delta_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Theta_\psi = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Delta_1 \\ \Phi_2 & \Delta_2 \end{vmatrix}$$

(in denen Δ_1 und Δ_2 die Ableitungen der vorhin definirten Functionaldeterminante Δ bedeuten); und zwar ist

$$\Theta_\Phi \begin{array}{l} \text{positiv in den Fällen } (a) \text{ und } (c), \\ \text{negativ in den Fällen } (b) \text{ und } (d), \end{array}$$

$$\Theta_\psi \begin{array}{l} \text{positiv in den Fällen } (a) \text{ und } (b), \\ \text{negativ in den Fällen } (c) \text{ und } (d). \end{array}$$

Hier kommt also lediglich die erstere Determinante Θ_Φ in Betracht und es wird *mit Berücksichtigung der oben gegebenen Formeln* (4^a) *und* (4^b) *der Punktcharakter aller Berührungspunkte gegeben durch das Vorzeichen des Productes von* $-\Phi_4$ *und* Θ_Φ *d. h. durch*

$$(6) \qquad [-\Phi_4 \cdot \Theta_\Phi].$$

Insoferne nun, ihrer geometrischen Bedeutung zufolge, die Aenderung der Charakteristik beim Uebergang von der Curve (λ_α) zur Curve (λ_φ) stets dieselbe bleibt, welches specielle Curvensystem wir auch zwischen die Anfangs- und Endcurve einschalten mögen, *ergiebt sich eine Relation zwischen den nach Formel* (6) *abgezählten Berührungspunkten der Curven irgend welcher einfach unendlicher zwischen jene beiden Curven continuirlich eingeschalteter Systeme und der Curve* $\psi = 0$. Wir führen im folgenden Paragraphen noch an einem speciellen Beispiele

*) Vergl. Berl. Monatsberichte 1878 pg. 145.

einen besonderen Fall dieser Beziehung aus, wo wir die Summation zwischen zwei Curven von der Charakteristik Null ausführen, für welche also auch die zu berechnende Aenderung gleich Null ist.

Es sei anschliessend noch bemerkt, dass wir eine analoge Abzählung auch an die Erzeugung des Innenraumes von $\psi(x, y) = 0$ knüpfen können, indem wir bei fest gedachter Curve $\varphi(x, y) = 0$ die andere $\psi(x, y) = 0$ in einer unendlichen Schaar $\Psi(x, y, \mu) = 0$ enthalten zu Grunde legen. Insoferne indess bei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten die abzuzählende Charakteristik der Theile von φ im Innenraume von ψ ganz ebenso auch die Charakteristik der Theile von ψ im Innenraume von φ ist und endlich auch dieselbe Bedeutung für die Aussenräume besitzt*) (als gleich der halben Zahl der reellen Schnittpunkte beider Curven), führt diese zweite Abzählung zu keiner wesentlich anderen Formulirung**). Noch eine dritte Form der Abzählung — die wir ebenso wie die vorige für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten ausführen — sei bezeichnet: Es entstehe die Mannigfaltigkeit $\varphi = 0, \psi < 0$ dadurch in einem continuirlichen Processe, dass ein System von beliebigen Curven $\mathrm{X}(x, y, \nu) = 0$ (mit ν als Parameter) über die abzuzählende Mannigfaltigkeit hinweggleitet; dann lassen sich wieder die Aenderungen der Charakteristik für die innerhalb $\mathrm{X} = 0$ gelegenen Theile von $\varphi = 0, \psi = 0$, beim Durchlaufen des Systems X auf die einfachste Weise verfolgen. Es sind dabei einmal die Schnittpunkte $\varphi = 0, \psi = 0$ mit Curven des Systems, dann die Berührungsstellen von $\varphi = 0$ mit eben diesen Curven $\mathrm{X} = 0$ zu betrachten.

§ 5.

Beispiel für die Summation der Punktcharaktere.

Wir legen für die Abzählung der Charakteristik K^I der im Innern der Curve $\psi(x, y) = 0$ gelegenen Theile von $\varphi(x, y) = 0$ das System

$$\Phi \equiv \varphi(x, y) - \lambda = 0$$

zu Grunde; es ist dies ein die Ebene einfach und lückenlos bedeckendes System, welches im Innern von $\varphi = 0$ nothwendig in gewisse singuläre Punkte (isolirte Doppelpunkte) sich zusammenziehen muss (wenn wir absehen von dem an specielle Bedingungen geknüpften Auftreten

*) Dies spricht sich bei allen unseren Entstehungsprocessen einer M^I darin aus, dass an allen Sprungstellen der Charakteristik diese, wie man sich leicht überzeugt, in *gleicher* Weise sich ändert, ob wir die Abzählung für den *Innenraum* oder für den *Aussenraum* treffen, ein Verhalten, welches für höhere Mannigfaltigkeiten durchaus *nicht* mehr statt hat.

**) Man vergl. hierzu das im folgenden Paragraphen gegebene Beispiel.

doppelt zählender Curven). *Für einen gewissen untersten Werth von* λ *ist also die Charakteristik der innerhalb* $\psi = 0$ *liegenden Theile von* Φ *sicher gleich Null.* Mit wachsendem Parameter λ *wächst* dann der Innenraum von Φ continuirlich. *Die Formel* (6), *ausgedehnt über alle im Bereiche* $\lambda < 0$ *liegenden Berührungspunkte, d. h. über alle Punkte*

$$\varphi < 0 \quad \psi = 0 \quad \Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = 0$$

ergiebt also die Charakteristik K^I *als*

$$K^I = \sum \left[\begin{vmatrix} \Delta_1 & \psi_1 \\ \Delta_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \right];$$

Ein Vergleich mit den von Kronecker gegebenen Formeln) ergiebt also* K^I *direct als Charakteristik des Functionensystems*

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \Delta = 0$$

in der Kronecker'schen Terminologie. Dabei ergeben sich aus den l. c. gegebenen Entwickelungen sofort zwei weitere Darstellungen dieser Charakteristik in der Form:

$$K^I = \sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_1 & \Delta_1 \\ \varphi_2 & \Delta_2 \end{vmatrix} \right],$$

die Summation verstanden über alle Punkte, für welche

$$\psi < 0, \quad \Delta = 0, \quad \varphi = 0$$

ist, und endlich auch:

$$K^I = -\sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \right],$$

diese Summe genommen über die Punkte

$$\Delta < 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0.$$

Geometrisch entspringen die letzteren beiden Formeln für die Charakteristik der Betrachtung der Aenderung der Charakteristik bei Zugrundelegung des Curvensystems

$$\psi(x, y) - \mu = 0,$$

beziehungsweise

$$\Delta(x, y) - \nu = 0,$$

(vergl. die Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen). In der letzten Formel wird dabei direct die K^I als die Hälfte der Schnittpunkte von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ ausgedrückt.

Die Ausdehnung der ersten Summation auf alle Punkte $\psi = 0$, $\Delta = 0$ giebt weiter in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Kronecker'schen Theorie (Formel I a. a. O.) als Summe Null. Denn wir können

---

*) Man vergl. etwa die in den Berl. Monatsberichten 1878 pag. 145 gegebenen Formeln.

dann die Summation betrachten als ausgeführt von einer Anfangscurve, für welche $K = 0$ ist bis zu einer Endcurve, welche $\psi = 0$ ganz umgiebt, für welche also wieder $K = 0$ ist. Geometrisch ausgesprochen lautet der Satz, als Specialisirung der vorhin auf pag. 469 allgemein ausgesprochenen Relation:

Die Anzahl der Punkte, in welchen die Curve $\psi = 0$ eine Curve des Systems $\varphi - \lambda = 0$ von Innen (d. h. im Raume $(\varphi - \lambda) < 0$) berührt, ist gleich der Zahl der Punkte, in denen eine solche Berührung von Aussen (d. h. im Raume $(\varphi - \lambda) > 0$) statthat.

Eine gleiche Relation gilt für die übrigen Summen und *lässt sich sofort für zwei beliebige die Ebene einfach überdeckende Curvensysteme aussprechen.* Man vergleiche Fig. 2, wo dieses Verhalten den einzelnen Punktcharakteren gemäss an zwei (stark gezeichneten) Curven zweier solcher Systeme bezeichnet ist, und andererseits auch die Abzählung der Charakteristik für die innerhalb einer der stark gezeichneten Curven gelegenen Theile der zweiten Curve verfolgt werden kann, sei es durch Abzählung an einem Systeme $\Phi = 0$ oder $\Psi = 0$.

Die Ausdehnung der Formulirungen auf *nichtebene* Curven und Curvensysteme bietet keinerlei Schwierigkeit. Insofern sich überdies die gewonnenen Sätze mit nicht wesentlichen Aenderungen direct übertragen, sehen wir von ihrer Entwicklung ab.

II. Theil.

Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

I. Abschnitt.

Geometrische Definition und Charakteristik zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten.

Das Elementargebilde E^{II}, aus welchem wir unsere allgemeinen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten M^{II} herleiten, ist geometrisch gegeben als ein, von einem sich nicht selbst durchsetzenden Curvenzug begrenztes, in eine Ebene ausbreitbares Flächenstück, also etwa als das Innere eines Kreises in der Ebene.

Die allgemeinste zweidimensionale Mannigfaltigkeit M^{II} betrachten wir als aus solchen Elementargebilden zusammensetzbar, indem wir voraussetzen, dass dieselbe in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte mit einem Elementargebilde identificirt werden darf. Dabei bleibt ganz ausser Betracht, ob wir diese Zusammensetzung aus einer *endlichen* Anzahl solcher E^{II} bewerkstelligen können, oder etwa einer unendlichen Zahl bedürfen. Die Zusammensetzung erfolgt dadurch, dass wir jene E^{II} einmal längs gewisser Randstücke, dann aber auch längs ganzer geschlossener Randcurven vereinigen. Es kann hierbei zweckmässig sein, eine solche Vereinigung von Randcurven nicht wirklich (geometrisch) auszuführen, sondern nur durch „*Zuordnung*" der betr. Randstücke — etwa mit Hülfe einer Tabelle — zu fixiren*).

Betrachten wir unter allen so entstehenden M^{II} diejenigen, welche eine einzige zusammenhängende Fläche bilden, so trennen sich diese in die seit Möbius bekannten zwei, wesentlich verschiedenen Categorien, die wir gleich hier bezeichnen, wenn sich auch dieselben — wie schon in der Einleitung erwähnt — in der abzuleitenden Charakteristik für die M^{II} im Allgemeinen nicht unterscheiden:

Wir können der Elementarmannigfaltigkeit E^{II} *einen bestimmten Sinn* dadurch beilegen, dass wir auf ihr eine kleine kreisförmige Curve eingetragen denken und auf derselben einen Richtungssinn — etwa den des Uhrzeigers — fixiren; die so auch ihrer Richtung nach festgelegte Curve sei zur Kürze als „Indicatrix" bezeichnet**). Denken wir uns nun eine aus einem Stück bestehende M^{II} durch successive Aneinanderfügung von Gebieten E^{II} entstehend, so können wir, von einer ersten bestimmten Indicatrix aus, auf alle neu hinzukommenden Theile der entstehenden Mannigfaltigkeit den Richtungssinn übertragen. Dann aber sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Wenn ein Gebiet mit *mehreren* Stücken seines Randes an die schon vorhandene Mannigfaltigkeit angeschlossen wird, kann die Indicatrix, welche wir, den einen Rand überschreitend, in das neue Flächenstück eintragen, *dieselbe* sein, wie diejenige, welche wir, den anderen Rand überschreitend, dem Flächenstücke beizulegen haben, oder aber *die entgegengesetzte*. Findet das letztere statt, so giebt es — wie auch sonst die Fläche beschaffen sein mag — Wege auf derselben, für welche sich die Indicatrix umkehrt. So gelangen wir zur Definition der beiden Flächencategorien, die wir als „*Flächen mit nicht umkehr-*

---

*) Man vergleiche beispielsweise den ausgedehnten Gebrauch, der gerade von dieser Vorstellung der „Zuordnung der Randcurven eines Fundamentalpolygons" in neueren functionentheoretischen Untersuchungen (Schwarz, Klein, Poincaré) gemacht wird. Für die Betrachtung dreidimensionaler Gebilde wird diese Vorstellung, sofern es sich um anschauliche Discussion handelt, nothwendig.

**) An ihre Stelle kann bekanntlich ein bestimmt, auch dem Sinne nach bezeichnetes Axenkreuz (x, y) treten.

barer Indicatrix" und „*Flächen mit umkehrbarer Indicatrix*" bezeichnen wollen*).

§ 2.

Herleitung der Charakteristik.

Dem Elementargebilde E^{II} ertheilen wir (analog wie bei den eindimensionalen Mannigfaltigkeiten) die Charakteristik $+ 1$.

Dann haben wir, indem wir irgend einen Entstehungsprocess für eine Mannigfaltigkeit M^{II} zu Grunde legen, zur Herstellung einer Charakteristik für dieselbe das Entstehen eines Elementargebildes mit $+ 1$, das Verschwinden mit $- 1$ zu zählen.

Trennen wir ein Elementargebilde durch einen von Rand zu Rand geführten Schnitt, durch eine „*Querlinie*", so kommt dies dem Entstehen eines weiteren Elementargebildes gleich und wir haben somit diese Operation mit $+ 1$ zu zählen. Die entgegengesetzte, die Vereinigung zweier Elementargebilde längs eines Stückes ihrer beiden Randcurven kommt umgekehrt dem Verschwinden eines E^{II} gleich und zählt dementsprechend mit $- 1$ für die Charakteristik. Diese Vereinigung zweier Randstücke kann nun auch an *einem* Elementargebilde E^{II} durch Zusammenbiegen statthaben, wobei dann ein ringförmiges Flächenstück entsteht. Auch hier werden wir, gemäss unseren in der Einleitung ausgesprochenen Principien (vergl. pag. 461) für die Abzählung, diese Vereinigung mit $- 1$ für die Gesammtcharakteristik in Rechnung ziehen. Ebenso werden wir die umgekehrte Operation einer Trennung in *jedem* Falle, auch wenn dabei kein Zerfallen der Mannigfaltigkeit eintritt, mit $+ 1$ zählen. Dabei ist noch zu bemerken, dass die Vereinigung auf die beiden vorhin bezeichneten Weisen entweder zu einem von zwei, oder von einer Randcurve begrenzten ringförmigen Flächenstück (vergl. Fig. 6, Tafel II) geschehen kann; es wird im einen Falle eine Fläche mit nicht umkehrbarer, im anderen eine solche mit umkehrbarer Indicatrix erhalten. *In unserer Abzählung der Charakteristik sind beide Fälle nicht zu trennen.*

*) Ich gebe absichtlich diese schon von Klein (Math. Annalen IX, p. 479) ausgesprochene Definition, welche die gemeinte Eigenschaft der Flächen als eine *innere*, d. h. denselben unabhängig von der Umgebung zukommende, charakterisirt und ich vermeide dabei die wohl auch übliche Bezeichnung „zweiseitige" bez. „einseitige" (auch Doppel-) Fläche, welche aus der Bemerkung hervorgeht, dass es bei Flächen mit umkehrbarer Indicatrix möglich ist, von der einen „Seite" der Fläche auf die andere zu gelangen, während dies bei den Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix nicht möglich ist. *Diese letztere Eigenschaft ist indessen* — wie ich bei anderer Gelegenheit ausführen will — *nur eine Lageneigenschaft der Flächen in unserem dreidimensionalen Raum und sie kann verloren gehen, sofern wir von dieser Lage absehen.* Man vergl. noch die Bemerkungen auf pag. 489.

Fassen wir die bisherigen Umformungsprocesse noch in etwas anderer Weise zusammen, so können wir zunächst das soeben durch Vereinigung zweier Randstücke einer E^{II} hergestellte zweifach berandete ringförmige Flächenstück uns auch durch Anbringung einer Oeffnung, „*Punktirung*" im Innern der E^{II} hergestellt denken. Dann müssen wir, der oben getroffenen Abzählung entsprechend, die Anbringung einer Oeffnung im Innern einer M^{II} mit -1 und umgekehrt das Schliessen einer solchen mit $+1$ für die Gesammtcharakteristik in Rechnung bringen. Führen wir (um die Gleichmässigkeit mit den folgenden Sätzen noch schärfer hervorzuheben) den Begriff von *Mannigfaltigkeiten nullter Dimension*, M^0, ein, darunter ein *Aggregat von Punkten* verstanden und bezeichnen als Charakteristik K^0 einer solchen Punktmannigfaltigkeit die Anzahl der Elemente, so können wir die Anbringung von „Punktirungen" in einer M^{II} auch als Ausscheiden einer Punktmannigfaltigkeit M^0 und ebenso das Schliessen von Oeffnungen als Einschaltung einer M^0 bezeichnen. Dann ergiebt sich:

1) *Ein „System von Punktirungen" in einer M^{II} zählt für die Charakteristik K^{II} dieser Mannigfaltigkeit im entgegengesetzten Sinne seiner Punktcharakteristik K^0; und umgekehrt zählt das Einfügen einer solchen M^0 im Sinne der zugehörigen Charakteristik.*

Ebenso können wir das Anbringen und Aufheben von „Querlinien" (also Trennung und Vereinigung von Flächenstücken längs gewisser Strecken) in einer M^{II} auffassen als Ausscheiden bez. Einfügen einer M^I. Auch die Ausführung eines geschlossenen Schnittes „*Rückkehrschnittes*", in der M^{II} kann aufgefasst werden als Ausscheidung einer M^I. Insofern dabei der letztere Schnitt auch als Combination einer Punktirung (-1) und Ziehen eines Querschnittes $(+1)$ von Rand zu Rand jener Punktirung zu zählen ist, erkennen wir, dass wir den Einfluss eines Rückkehrschnittes als $-1+1=0$ für die Charakteristik der M^{II} zu zählen haben. Gehen wir nun auf die früher getroffene Definition der Charakteristik K^I einer M^I zurück, so folgt:

2. *Die Ausscheidung einer M^I von der Charakteristik K^I aus einer M^{II} zählt für deren Charakteristik K^{II} im Sinne von K^I; und umgekehrt die Einfügung einer solchen M^I im entgegengesetzten Sinne.*

Dabei ist noch zu beachten, dass das Anbringen eines Rückkehrschnittes in einer M^{II} entweder zwei (punktweise aufeinander bezogene) Randcurven entstehen lässt, oder nur eine einzige, jenachdem längs jenes Rückkehrschnittes die Indicatrix der Fläche sich nicht umkehrt bez. umkehrt. [Man vergl. hierzu Fig. 6 auf Tafel II, sowie die Ausführungen auf pag. 473 u. 479]. *In der Abzählung der Charakteristik tritt auch hier keinerlei Unterscheidung der verschiedenen Fälle auf.*

Betrachten wir endlich den Einfluss des Entfernens einer zweidimensionalen ebenen Mannigfaltigkeit M_α^{II} aus unserer M^{II}. Zunächst können wir die oben erwähnte „Punktirung" auch auffassen als Ausschneiden einer E^{II} aus der M^{II} längs eines Rückkehrschnittes. Dann zählt diese Operation mit -1, nämlich: Anbringung des Rückkehrschnittes: 0, Weglassen der ausgeschnittenen E^{II}: -1. Schneiden wir dagegen eine E^{II} von der M^{II} weg, indem wir sie zunächst durch einen Querschnitt abtrennen und dann weglassen, so ist hier $+1-1=0$ für die Aenderung der Charakteristik zu zählen und in der That ist auch die M^{II} dabei im Sinne der Analysis situs ungeändert geblieben. Die Abzählung lässt sich sofort auch auf das Ausschneiden beliebiger zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten ausdehnen und ergiebt dann den Satz:

3. *Die Charakteristik K^{II} einer M^{II} wird durch Weglassen eines Theiles M_α^{II} der Mannigfaltigkeit um deren Charakteristik K_α^{II} vermindert (zählt also im entgegengesetzten Sinne von K_α^{II}), falls jene Abtrennung von M_α^{II} ohne Ziehen von Querschnitten (nur mit Hülfe von Rückkehrschnitten) erfolgen kann; andernfalls sind die nothwendigen Querschnitte im Sinne von Satz* (2) *zu zählen. Die umgekehrte Abzählung tritt für die Zufügung einer M_α^{II} ein.*

Der Satz enthält unmittelbar die wichtige Eigenschaft der *Addirbarkeit der Charakteristik:* Besteht eine Mannigfaltigkeit M^{II} aus irgendwelchen Theilen $M_1^{II}, M_2^{II}, \ldots M_\nu^{II}$, bez. von den Charakteristiken $K_1^{II}, K_2^{II}, \ldots K_\nu^{II}$, so folgt sofort:

Die Charakteristik K^{II} von M^{II} ist gleich der Summe der Charakteristiken der einzelnen Theile:

$$K^{II} = \sum_{i=1}^{i=\nu} K_i^{II}. \tag{1}$$

§ 3.

Unveränderlichkeit der Charakteristik für verschiedene Erzeugungsweisen einer Mannigfaltigkeit. Normalformen für die Mannigfaltigkeiten mit nicht umkehrbarer und mit umkehrbarer Indicatrix.

Der Beweis, dass wir durch die vorstehend gegebene Abzählungsmethode für eine Mannigfaltigkeit M^{II} stets zu *derselben* charakteristischen Zahl geführt werden, welchen Entstehungsprocess für die Mannigfaltigkeit wir auch zu Grunde legen, ist erbracht, sobald wir für die Charakteristik zu einer Definition auch an der fertigen Mannigfaltigkeit geführt werden. Dabei können wir uns nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen über die Addirbarkeit der Einzelcharakteristiken auf ein *einziges Flächenstück* beschränken. Für ein solches lassen sich nun bestimmte *Normalformen* aufstellen, an welchen wir unmittelbar die charakteristische Zahl ablesen.

Zunächst entstehen alle in die Ebene [oder auf eine Kugelfläche] ohne mehrfache Ueberdeckung ausbreitbaren Flächen durch Ausschneiden von n Oeffnungen aus einer Elementarfläche E^{II}. *Für diese ist also die Charakteristik K^{II} gleich $1-n$ oder gleich $2-r$, wo r die Zahl der Randcurven bedeutet.*

Wir wollen diese Flächen mit Möbius) als die Grundformen bezeichnen.*

Ihre für das folgende wesentlichste Eigenschaft ist die:

Eine Grundform wird durch jeden Rückkehrschnitt in Stücke zerschnitten,

und umgekehrt:

Jede Fläche, auf welcher keine nicht zerstückenden Rückkehrschnitte gezogen werden können, ist eine Grundform.

Aus den Grundformen ergeben sich für alle zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten die Normalformen.

I. Zunächst lassen sich nämlich *Normalformen für die sämmtlichen Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix* in bekannter Weise**) aus diesen Grundformen dadurch ableiten, das wir einige dieser Randcurven paarweise aufeinander beziehen, und zwar *„gleichsinnig"*. Dann entsteht aus der Grundfläche mit zwei Randcurven durch deren Zuordnung die gewöhnliche Ringfläche, aus der Grundfläche mit drei Randcurven, durch Zuordnung zweier derselben ein Ring mit einer Oeffnung u. s. w.

Die aufeinander bezogenen Randcurven erscheinen dabei als Rückkehrschnitte für die neue Fläche und diese besitzt daher die gleiche Charakteristik mit der Grundfläche.

So erhält also der Ring die Charakteristik 0, der Ring mit einer Oeffnung die Charakteristik -1, der Doppelring die Charakteristik -2 u. s. w.

Nur für die Herleitung der geschlossenen *Kugelfläche* bedürfen wir *zweier* Elementarflächen; sie entsteht durch Zuordnung der Randcurven derselben und wir haben ihr dementsprechend die Zahl 2 zuzuweisen.

Somit ergiebt sich für die Charakteristik K^{II} einer aus einem Stück bestehenden Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix die (von der Erzeugung der Fläche unabhängige) Definitionsgleichung:

---

*) Möbius, Theorie der elementaren Verwandtschaft (1863). Werke, Band 2, pag. 450. Möbius nennt die obigen Flächen *Grundformen der r^{ten} Classe.*

**) Man vergleiche etwa Klein „Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" Abschnitt II, sowie die schon Eingangs erwähnte Dissertation von Weichold „Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen"; diese insbesondere auch was gewisse Normalformen für die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix anlangt.

$$K^{II} = 2 - r - 2s, \tag{2}$$

wo r die Anzahl der Randcurven, s die Anzahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte ist, welche die Fläche in eine Grundform verwandeln. Nach dem oben für die Grundformen ausgesprochenen Satze ist dies gleichzeitig auch die Maximalzahl der auf der Fläche möglichen nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden, Rückkehrschnitte. Ein System von Rückkehrschnitten, durch welches eine Fläche in eine Grundform übergeführt wird, sei in der Folge ein „*vollständiges System*" genannt.

Formel (2) zeigt, dass die Zahl $K^{II} - 3$ für ein einziges Flächenstück stets negativ ist.

Indem wir nun für *gerades* K^{II} die Zahl s der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte successive gleich $0, 1, 2 \cdots - \frac{K^{II}}{2}$, für *ungerade* K^{II} gleich $0, 1, 2 \cdots - \frac{K^{II}-1}{2}$ setzen, ergiebt sich:

Eine Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix von der Charakteristik K^{II} kann

$$(2 - K^{II}), \quad (2 - K^{II} - 2), \quad (2 - K^{II} - 4) \cdots 2, 0$$

also stets eine gerade Anzahl von Randcurven besitzen, sofern K^{II} gerade ist und

$$(2 - K^{II}), \quad (2 - K^{II} - 2) \cdots 3, 1$$

also stets eine ungerade Zahl von Randcurven, sofern K^{II} ungerade ist.

Wir heben hieraus speciell den Satz hervor:

Geschlossene Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix haben eine gerade Charakteristik.

Betreffs derjenigen Systeme von Schnitten, welche eine Fläche in eine *Elementarfläche* verwandeln, formuliren wir noch mit Rücksicht auf die nachfolgenden, auf Flächen mit umkehrbarer Indicatrix bezüglichen Verhältnisse (vergl. pag. 481) den folgenden bekannten Satz:

Hat man die ursprüngliche Fläche F durch die eben erwähnten s Rückkehrschnitte in eine *Grundform* verwandelt mit $2s + r$ Randcurven, so bedarf es $2s + r - 1$ Querschnitte (von Rand zu Rand), um dieselbe in eine *Elementarfläche* überzuführen. Dieselben können — indem man bei $2s$ einander paarweise zugeordneten Randcurven die Querschnitte zwischen je zwei entsprechenden Punkten zieht — so gewählt werden, dass s derselben als in sich zurücklaufende Schnitte in der ursprünglichen Fläche erscheinen. Auf dieser sind dann

$$2s = 2 - r - K^{II}$$

einander paarweise schneidende Rückkehrschnitte und $r - 1$ Querschnitte nach den Rändern gezogen. Jede andere Zerschneidung der Fläche in eine Elementarfläche lässt sich durch blosse Verschiebung und Combination der Curven in diese *„canonische Zerschneidung“* überführen. Somit folgt:

Die Zahl der für eine „canonische Zerschneidung“ von F nothwendigen Rückkehrschnitte ist constant und gleich der d o p p e l t e n *Zahl der auf der Fläche möglichen, nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte.*

II. Für die Herleitung von *Normalformen der Flächen mit umkehrbarer Indicatrix aus unseren Grundflächen* legen wir den Satz zu Grunde:

Wenn wir eine Oeffnung der Grundfläche, die wir der einfacheren Ausdrucksweise halber uns kreisförmig denken wollen, dadurch schliessen, dass wir die jedesmal diametral gegenüberliegenden Punkte aufeinander beziehen) so ist die so aus der ursprünglichen entstandene Fläche eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix, auf welcher jene auf sich selbst bezogene Kreislinie als Rückkehrschnitt erscheint und zwar dergestalt, dass die Indicatrix längs eben dieser Linie sich umkehrt.*

Die Zahl der Randcurven ist also bei diesem Process um e i n s *verringert worden, während dagegen nach unserem pag.* 475 *formulirten Princip der Zählung die Charakteristik sich* n i c h t *geändert hat.*

Man überzeugt sich von diesem Satze leicht durch die bekannte Zerschneidung des Möbius'schen Bandes längs einer Mittellinie (vergl. Fig 6, Tafel II). Dasselbe geht dann in ein zweifach berandetes Flächenstück mit nicht umkehrbarer Indicatrix über, dessen *einer* Rand „diametral“ auf sich selbst bezogen ist**).

Indem wir diesen Process bei mehreren Randcurven einer Grundfläche ausführen, entstehen *die Normalformen für die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix und es ergiebt sich für die Charakteristik derselben die Definitionsgleichung:*

$$K^{II} = 2 - r - s', \tag{3}$$

wo r die Anzahl der Randcurven, s' die Zahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte ist, längs deren die Indicatrix sich umkehrt.

---

*) In der Tafel II, wo Normalformen für die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix dargestellt sind, ist in den jedesmal links gezeichneten zugehörigen Grundformen die „diametrale Zuordnung“ der Punkte eines Randes durch gekreuzte Pfeile angedeutet.

**) Dabei ist zu bemerken, dass das entstandene Band zunächst zwei Torsionen besitzt (man vergl. hierzu die schon erwähnte Abhandlung von T a i t im 28. Bd. der Transact. of the R. Soc. Edinburgh pag. 169 ff., etwa auch S i m o n y in der Broschüre „Gemeinfassliche Lösung der Aufgabe, in ein ringförmiges Band einen Knoten zu machen“, Wien 1881), also nicht eine *Grundform* darstellt in unserem oben gegebenen Sinne, als eine in die Ebene ohne mehrfache Ueberdeckung ausbreitbare Fläche. Die Festsetzungen auf pag. 474 eliminiren aber diesen Unterschied, den wir desshalb auch in den folgenden Betrachtungen ausser Berücksichtigung lassen.

Indem wir nun (wie oben in I) die Zahl s' jener Rückkehrschnitte successive gleich $1, 2 \cdots 2 - K^{II}$, setzen, ergiebt sich:

Eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix von der Charakteristik K^{II} kann

$$(2 - K^{II} - 1), \ (2 - K^{II} - 2) \cdots 2, 1, 0$$

Randcurven besitzen.

Speciell kommt also:

Geschlossene Flächen mit umkehrbarer Indicatrix können sowohl eine gerade wie auch eine ungerade Charakteristik besitzen.

Die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix lassen sich aus unseren Grundflächen auch dadurch herstellen, dass man einige, 2σ der Ränder paarweise auf einander bezieht (wie in I geschehen) und andere in der Weise von II „diametral" auf sich selbst. *Dabei entstehen indess keine neuen Flächen;* vielmehr gilt der Satz, dass in jeder so entstandenen Fläche ein System von $s' = 2\sigma + \sigma'$ in sich zurücklaufenden, einander nicht schneidenden Curven gezogen werden kann, welches geeignet ist, das vorige System der Rückkehrschnitte zu ersetzen und wobei jetzt *sämmtliche* Curven diametral auf sich selbst bezogen sind. Fig. 3 zeigt eine Fläche, in welcher die Curve A diametral auf sich selbst bezogen ist [wie es die Zuordnung der Punkte $1, 1'$; $2, 2'$; $3, 3'$ angiebt], während die Curven B und C auf einander bezogen sind, so dass a, a'; b, b'; c, c' einander entsprechende Punkte sind. Die Curven A, B, Γ, welche bezüglich durch die Punkte $1, (1')$; $a, (a')$ dann $2, (2')$; $b, (b')$ und endlich $3, (3')$ hindurchgehen, sind neue Curven, längs deren sich die Indicatrix umkehrt. Sie bilden zusammen ein System von die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitten, welche das erstere zu ersetzen vermag [wie man sich leicht durch Neuanordnung der Fläche überzeugt] und für welches jetzt jede einzelne Curve diametral auf sich selbst bezogen ist.

Fig. 4 zeigt endlich noch die dritte Möglichkeit für die Herstellung von Flächen mit umkehrbarer Indicatrix. Die beiden Randcurven A und B einer Fläche sind *paarweise* aufeinander bezogen, aber nicht wie vorhin „gleichsinnig", sondern „*ungleichsinnig*", wie durch die aufeinander bezogenen Punkte a, a'; b, b'; c, c' fixirt ist. Dann entsteht gleichfalls eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix. Analog wie vorhin sind aber wieder die eingezeichneten Curven A, B geeignet, die beiden auf einander bezogenen Curven A, B zu ersetzen, und stellen ein System von auf sich selbst bezogenen einander nicht schneidenden Rückkehrschnitten dar (also solcher, längs deren die Indicatrix sich umkehrt), — wie sich ebenso wie vorhin durch Umordnung der Fläche ersichtlich machen lässt.

Die Methode II reicht also zur Ableitung der Normalflächen mit umkehrbarer Indicatrix aus.

Wir ersehen weiter:

Bei einer Fläche mit umkehrbarer Indicatrix von der Charakteristik K^{II} mit r Randcurven kann man ein „vollständiges System von Rückkehrschnitten" — durch welches also die Fläche in eine Grundfläche verwandelt wird — zusammensetzen aus σ' Rückkehrschnitten, längs deren die Indicatrix sich umkehrt und aus $\sigma + \sigma''$ Rückkehrschnitten, längs deren sich die Indicatrix nicht umkehrt; dabei sind die (getrennten) Ränder der letzteren Schnitte bei σ Curven „gleichsinnig" bei σ'' „ungleichsinnig" auf einander bezogen, und es ist

(4) $$K^{II} = 2 - r - \sigma' - 2(\sigma + \sigma'').$$

Der kleinste Werth, den σ' annehmen kann, ist Null*) bez. Eins (je nachdem $(r + K^{II})$ gerade oder ungerade ist), und dann erreicht die Gesammtzahl der nichtzerstückenden Rückkehrschnitte ihren *Minimalwerth*

$$\frac{2-r-K^{II}}{2} \quad \text{bez.} \quad \frac{3-r-K^{II}}{2};$$

andererseits erreicht diese Gesammtzahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte ihren *Maximalwerth:*

$$2 - r - K^{II}$$

wenn $\sigma = 0$ und $\sigma'' = 0$, also das volle System der Rückkehrschnitte aus lauter Schnitten, längs denen sich die Indicatrix umkehrt, besteht.

Während also bei Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix die Anzahl der nichtzerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrcurven, welche ein „vollständiges System" bilden, stets dieselbe, nämlich gleich $\frac{2-r-K^{II}}{2}$ *ist, variirt diese Zahl (je nach der Wahl der Schnitte) für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix innerhalb der beiden angegebenen Grenzen.* In der Tabelle auf pag. 487 ist bei den Flächen mit umkehrbarer Indicatrix jener Minimal- und Maximalwerth eingetragen.

Bezüglich derjenigen Systeme von Schnitten, welche eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix in eine *Elementarfläche* verwandeln, gilt nun (man vergl. hier den analogen Satz auf pag. 479) das Folgende:

Es sei die Zerschneidung einer Fläche F in eine *Grundfläche* F' durch irgend eines der eben besprochenen vollständigen Systeme von Rückkehrschnitten getroffen. F' besitzt dann

$$r + s = r + \sigma' + 2\sigma + 2\sigma''$$

Ränder der oben angeführten Arten. Die $r + s - 1$ noch nothwendigen Querschnitte, welche F' in eine Elementarfläche verwandeln, lassen sich dann stets so wählen (durch Verbinden je entsprechender

*) In diesem Falle sind dann nothwendig die Ränder mindestens *eines* der übrigen Rückkehrschnitte *ungleichsinnig* aufeinander bezogen.

Randpunkte), dass $\sigma + \sigma''$ derselben als Rückkehrschnitte auf der ursprünglichen Fläche F erscheinen. Auf dieser sind dann im Ganzen

$$\sigma' + 2\sigma + 2\sigma'' = 2 - r - K^{II}$$

Rückkehrschnitte verzeichnet, von denen σ' (diejenigen, längs deren die Indicatrix sich umkehrt) isolirt laufen, die anderen $2\sigma + 2\sigma''$ je paarweise sich schneiden. Weiter verbinden $\sigma' + r - 1$ Querschnitte jene ersten Rückkehrschnitte und die r Ränder von F. Analog also wie oben für die Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix erschliessen wir hier:

Die Anzahl der auf F nothwendigen Rückkehrschnitte für die canonische Zerschneidung in eine Elementarfläche ist constant und gleich dem oben erhaltenen Maximalwerth der auf der Fläche möglichen nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte.

Wenn es sich um eine geometrische Darstellung der Flächen mit umkehrbarer Indicatrix handelt, so ist zunächst für die eine Fläche von der Charakteristik 1, welche durch diametrale Zuordnung des Randes einer Elementarfläche entsteht, zu beachten, dass sie in unserem Raume im Endlichen nicht ohne Doppelcurve dargestellt werden kann. Wir wählen als einfachstes Bild die in Figur 5 (Tafel II) dargestellte Fläche, in welcher die äussere Contour als Umriss der zweiblättrig über der Zeichnungsebene ausgebreiteten Fläche zu denken ist, während die Linie AB eine Doppelcurve, bei A und B in Cuspidalpunkten (Pinch-points) endigend, ist*). Die eingetragene Linie S stellt einen Rückkehrschnitt dar, welcher die Fläche in eine Elementarfläche [mit jenem Schnitt als diametral auf sich bezogenem Rande] verwandelt und längs welchem die Indicatrix der Fläche sich umkehrt.

An Stelle dieser Fläche kann, wenn wir von der Endlichkeit absehen, die *Ebene* als Repräsentant treten, sofern wir das Unendlichweite derselben im *projectivischen Sinne* deuten. Dann stellt nämlich die Ebene, weil die von einem Punkt diametral aus einander laufenden Richtungen in einander übergehen, eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix dar.**) In gleicher Weise wie in § 5 sind nun die in den Figuren 7a, b, 10a, b, c gegebenen verschiedenen Formen für die geschlossenen Flächen mit umkehrbarer Indicatrix von der Charakteristik 0 und der Charakteristik -1 aufzufassen. Die Flächen mit Randcurven können aus diesen durch Eintragung je einer, zwei ... Oeffnungen gewonnen werden, wobei sich jedesmal die Charakteristik um eins vermindert. Statt dessen sind in den Figuren 6, 8 u. 9 andere Formen dieser *berandeten* Flächen mit umkehrbarer Indicatrix gesetzt

*) In § 4 ist eine derartige Fläche in analytischer Definition näher behandelt.

**) Man vergleiche den Aufsatz von Klein in den Math. Annalen Bd. VII. pag. 550 „Ueber den Zusammenhang der Flächen." Bezüglich der dort getroffenen Abzählung des „Zusammenhangs" vergleiche den folgenden § 4.

worden*), welche zeigen, dass nur *die geschlossenen Flächen von umkehrbarer Indicatrix in unserem Raume nothwendig Doppelcurven besitzen müssen***), *die berandeten aber nicht*. In diesen letzteren Figuren sind dabei die Contouren als die Ränder der Flächen und diese selbst nur *ein*blättrig über der Zeichenebene ausgebreitet zu denken.

§ 4.

Beziehung der Charakteristik zu der Zusammenhangszahl nach Riemann, und zu den weiteren, anschliessenden Abzählungen.

I. Die von Riemann eingeführte Zahl Z für den *Zusammenhang einer Fläche****) *ist definirt als die um eins vermehrte Anzahl von Querschnitten, welche nothwendig sind, um die Fläche in eine Elementarfläche zu verwandeln*. Diese letztere erscheint dabei als vom Zusammenhange 1; die (im vorigen Paragraphen gebrauchten) „Grundflächen" mit r Randcurven (denen wir dort die Charakteristik $K^{II} = 2 - r$ zugewiesen haben) erhalten die Zusammenhangszahl $Z = r$. Um die Regel der Bestimmung des Zusammenhangs auch auf *geschlossene* Flächen ausdehnen zu können, sind diese nach Riemann mit einer kleinen Oeffnung versehen zu denken; die Kugel z. B. wird damit als von gleichem Zusammenhange, 1, mit der Elementarfläche bezeichnet; der Ring erhält die Zusammenhangszahl 3 u. s. w. Schläfli†) hat darauf hingewiesen, dass es consequenter ist, statt dessen die Zahl für den Zusammenhang der geschlossenen Flächen um eins zu vermindern; wir bezeichnen diese neue Zahl mit Klein als den *„ungewöhnlichen Zusammenhang"*; derselbe beträgt also für die Kugel Null, für den Ring 2, u. s. w.

Unter Z den Riemann'schen, unter $\overline{Z}$ den ungewöhnlichen Zusammenhang verstanden, ergiebt der Vergleich dieser Abzählung mit der in § 2 getroffenen sofort die Beziehung zur Charakteristik, zunächst für eine aus einem einzigen Stücke bestehende Fläche in den Formeln:

---

*) Man vergleiche hier auch die schon erwähnte Dissertation von Weichold. Die hier gewählten Formen sind von dem Princip aus entworfen, die Randcurven der Flächen zugleich als den *vollständigen Umriss* zu benutzen.

**) Vergl. hierzu auch pag. 489. Man erkennt gleichzeitig an den Formen a, b der Fig. 7 und a, b, c der Fig. 10, *dass bei den geschlossenen Flächen für jede beliebige Charakteristik nur das Vorhandensein einer einzigen Strecke auf der Fläche als Doppelcurve nothwendig ist und dass sie von da beliebig bis zu* $(-K^{II}+2)$ *Strecken als Doppelcurven variiren kann;* selbstverständlich sind hierbei geschlossene Curvenzüge, die als Doppelcurven der Fläche in beliebiger Zahl auftreten können, irrelevant.

***) Es handelt sich zunächst nur um Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix.

†) Man sehe den Eingangs erwähnten Aufsatz von Schläfli, Crelle's J. Bd. 76, pag. 152, Anm., sowie den Aufsatz von Klein, Math. Annalen Bd. VII, pag. 550, Anm.

$$K^{II} = \left\{\begin{matrix} 3 - Z = \\ \text{(für geschlossene Flächen)} \\ 2 - Z = \\ \text{(für berandete Flächen)} \end{matrix}\right\} = 2 - \overline{Z}. \tag{4}$$

II. Neumann hat zuerst die Riemann'sche Abzählung auf ein System von Flächen ausgedehnt und die *Definition der „Grundzahl" G für ein Flächensystem gegeben durch die Formel:*

$$G = {}_i\sum_1^n Z_i + 2 - 2n; \tag{5}$$

dabei bedeuten $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ die Riemann'schen Zusammenhangszahlen (Grundzahlen) der einzelnen Flächenstücke, n ist die Anzahl der Theile.*) Man kann, ohne das Princip, nach welchem die Grundzahl des Systems aufgestellt ist, zu ändern, die Formel (5) *unverändert* auch anwenden zur Definition einer *„ungewöhnlichen Grundzahl"* $\overline{G}$ für das System, wenn man nur auch in der Summe die ungewöhnlichen Zusammenhangszahlen $\overline{Z}_i$ einsetzt. Zwischen den Grundzahlen G und $\overline{G}$ besteht dann eine Relation, welche noch von der Anzahl g der im System enthaltenen *geschlossenen* Flächen abhängt:

$$\overline{G} = G + g.$$

Aber die neue Formel steht in directem Zusammenhang mit unserer in § 2 gegebenen Formel. Bezeichnen wir nämlich mit $\overline{Z}_i$ die Zahlen für den *ungewöhnlichen* Zusammenhang der einzelnen Theile und bez. je die Charakteristiken derselben mit K_i^{II}, so geht die Formel (5) unter Berücksichtigung von (4) direct in die § 2 abgeleitete Formel für die Charakteristik eines Flächensystems

$$K^{II} = \sum K_i^{II} \tag{1}$$

über, welche gegenüber Formel (5) den Vortheil besitzt, dass sie, als directe Summe der Einzelcharakteristiken, *die Zahl der Theile nicht enthält.* Dabei ist wieder die Gesammtcharakteristik K^{II} des Systems mit der Grundzahl $\overline{G}$ desselben, der Formel (4) analog, verbunden durch die Relation

$$K^{II} = 2 - \overline{G}. \tag{6}$$

III. Fasst man, wie dies Schläfli vorgeschlagen hat, die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix als doppelt bedeckt auf, wobei die beiden Blätter jedesmal längs der Curven in einander übergehen, welche die

*) Vergl. Neumann: „Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale" (1865), pag. 304 ff., sowie noch ausführlicher in der 2. Aufl. (1884) pag. 152 ff.

Umkehrung der Indicatrix herbeiführen, so kann man auch auf sie die Abzählung der Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix übertragen.*) *Die so für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix fixirte Zusammenhangszahl* $\overline{Z}$ *steht aber jetzt zu der Charakteristik, bei welcher wir die Fläche* n i c h t *als eine doppelt überdeckte auffassen, in der Beziehung*

$$K^{II} = 2 - \frac{\overline{Z}}{2}. \tag{7}$$

Für die Betrachtung von Flächensystemen bildet diese Zusammenhangszahl $\overline{Z}$ gegenüber der Charakteristik K^{II} den Nachtheil, dass sie nicht mit den Zusammenhangszahlen der Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix zusammengefasst werden kann, wenn man nicht consequenter Weise auch diese letzteren als Systeme von doppelt überdeckten Flächen abzählen wollte**).

IV. Für aus einem einzigen Stücke bestehende *geschlossene* Flächen formulirt man, sofern sie als frei im Raume gelegene Riemann'sche Flächen zur Darstellung des Werthevorrathes und Verlaufes der Functionen eines complexen Argumentes dienen, (wobei stets *nur die eine Seite der Fläche* mit Functionswerthen belegt zu denken ist) den Begriff des *Geschlechtes* p (Ranges) — zunächst *bei Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix* als

$$p = \frac{2 - K^{II}}{2}, \tag{8}$$

weist also der Kugel das Geschlecht 0, dem Ringe das Geschlecht 1 u. s. w. zu.

Weiter ist die Auffassung auch *berandeter Flächen* als geschlossener Flächen, die, *doppelseitig* mit Functionswerthen belegt, längs der Randcurven zusammenhängen, im Anschluss an Bemerkungen von Schwarz und Schottky zur Darstellung symmetrischer Riemann'scher Flächen von Klein ausführlicher verwendet worden***). Die hierbei getroffene Unterscheidung von *orthosymmetrischen* und *diasymmetrischen* Flächen entspricht dem Umstand, dass die zur Ausbreitung der Functionswerthe verwendeten berandeten Flächen solche mit nicht umkehrbarer bez. mit umkehrbarer Indicatrix sind. *So kommt es, dass auch diesen berandeten*

*) Man vergl. hierzu die schon erwähnten Abhandlungen von Klein, Math. Annalen Bd. VII, pag. 551, ferner Bd. XIX, pag. 159 und in „Riemann's Theorie" § 23, sowie die Weichold'sche Dissertation. In den beiden letztgenannten Arbeiten ist die Abzählung für die sogleich zu besprechende Geschlechtszahl p getroffen.

**) Klein, Math. Annalen Bd. VII, pag. 551.

***) Man vergleiche für die Citate die Anmerkungen in der Einleitung p. 458 sowie pag. 462.

Flächen eine bestimmte Zahl p entsprechend gesetzt werden kann. Diese ist, wenn wir die Charakteristik K^{II} auf die *nicht doppelseitig* aufgefasste Fläche beziehen:

$$p = 1 - K^{II}. \tag{9}$$

§ 5.

Zusammenstellung der Abzählungen für aus einem Stück bestehende Flächen. Stetige Abbildung zweier Flächen aufeinander.

Es erscheint nicht unzweckmässig, die für Flächen mit nicht umkehrbarer und mit umkehrbarer Indicatrix in § 3 gewonnenen Resultate tabellarisch zusammenzustellen, um daraus noch einige Schlüsse über diejenigen Abzählungen zu machen, welche nothwendig sind, um für zwei Flächen die Möglichkeit umkehrbar, eindeutiger stetiger Beziehung aller ihrer Elemente zu constatiren. Wir beziehen die folgende Tabelle auf Flächen, welche aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke bestehen, und fügen der Angabe der charakteristischen Zahl, der Randcurven und Rückkehrschnitte noch die Grundzahl nach der Neumann'schen Abzählung (bez. nach der Klein'schen, für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix) bei.

Die Tabelle ergiebt sofort die folgenden Sätze für aus einem Stück bestehende Flächen:

I. *Geschlossene Flächen von ungerader Charakteristik sind stets Flächen mit umkehrbarer Indicatrix.*

Für geschlossene Flächen von gerader Charakteristik reicht die Charakteristik allein nicht aus, um dieselben als Flächen mit umkehrbarer bez. nicht umkehrbarer Charakteristik zu erkennen.

Der Satz ist ein specieller Fall des folgenden:

Weiss man bei berandeten Flächen, ob die Anzahl der Randcurven gerade oder ungerade ist, so gilt:

II. *Flächen von gerader Charakteristik und ungerader Anzahl von Randcurven, sowie Flächen von ungerader Charakteristik und gerader Anzahl von Randcurven sind stets Flächen mit umkehrbarer Indicatrix.*

Für die übrigen Categorien reichen die obigen Kriterien zur Unterscheidung nicht aus. Bezüglich der durch die Charakteristik allein gegebenen Unterscheidung gilt sonach der Satz:

III. *Nur die geschlossenen Flächen von ungerader Charakteristik werden durch diese allein als Flächen von umkehrbarer Indicatrix erkannt.*

Tabelle.

Charakteristik K.	Anzahl r der Randcurven.	Anzahl der Rückkehrschnitte eines „vollständigen Systems" für Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix	umkehrbarer Indicatrix: Minimalzahl	umkehrbarer Indicatrix: Maximalzahl:	Zugehörige Zusammenhangszahl $\overline{Z}$ (ungewöhnlicher Zusammenhang) für die Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix	umkehrbarer Indicatrix	
2	0	0	—	—	0	—	Grundform. (Kugel)
1	1	0	—	—	1	—	Grundform. (Elementarfläche)
	0	—	1	1*)	—	2	
0	2	0	—	—	2	—	Grundform.
	1	—	1	1*)	—	4	
	0	1	1	2*)	2	4	
—1	3	0	—	—	3	—	Grundform.
	2	—	1	1*)	—	6	
	1	1	1	2*)	3	6	
	0	—	2	3*)	—	6	
—2	4	0	—	—	4	—	Grundform.
	3	—	1	1	—	8	
	2	1	1	2	4	8	
	1	—	2	3	—	8	
	0	2	2	4	4	8	
—3	5	0	—	—	5	—	Grundform.
:	:	:	:	:	:	:	:

*) Vergl. beziehungsweise die Figuren 5—10 der Tafel II.

Indem man von der Erzeugung aller Flächen aus den Grundformen ausgeht, ergeben sich *für die Möglichkeit umkehrbar eindeutiger stetiger Abbildung aller Punkte zweier (je aus einem Stücke bestehender) Flächen aufeinander die folgenden Bedingungen*) als nothwendig und hinreichend:*

1. *Die Flächen müssen zur gleichen Classe, Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix bez. Flächen mit umkehrbarer Indicatrix, gehören.*
2. *Ihre Charakteristiken müssen übereinstimmen.*
3. *Die Anzahl der Randcurven muss bei beiden dieselbe sein.*

Die Art der Zuordnung der *Randcurven* kann dann noch beliebig getroffen werden. Betreffs der gegenseitigen noch auf verschiedene Weisen möglichen Zuordnung der einzelnen Curven eines vollständigen Systems nicht zerstückender *Rückkehrschnitte* in beiden Flächen ist für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix noch auf den Unterschied von *„Rückkehrcurven mit umkehrbarer Indicatrix"* und solchen *„mit nicht umkehrbarer Indicatrix"* — bei den letzteren noch darauf, ob die beiden Ränder der Curve gleichsinnig oder ungleichsinnig auf einander bezogen sind**) — zu achten.

Die Bedingung (2) kann auch ersetzt werden durch die folgende:

2a. *Die Maximalzahl der nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte (welche also „ein vollständiges System" bilden) muss in beiden Flächen dieselbe sein.*

Dabei giebt (pag. 481) für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix das aus lauter Rückkehrschnitten mit umkehrbarer Indicatrix bestehende System diese Maximalzahl; die Anzahlen für andere vollständige Systeme können für die Bestimmung nicht ohne gleichzeitige Unterscheidung der verschiedenen Arten von Rückkehrschnitten verwendet werden.

Die vorstehenden Sätze ergeben gleichzeitig die zu einer vollständigen Beschreibung einer Fläche im Sinne der Analysis situs bezüglich ihrer absoluten Eigenschaften nothwendigen Daten.

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich nun mit denjenigen Operationen, die für eine analytisch gegebene zweidimensionale Mannigfaltigkeit auszuführen sind zur *Bestimmung der Charakteristik.* Bezüglich derjenigen Untersuchungen, welche für eine weitere Discussion der gestaltlichen Verhältnisse einer Fläche im Sinne der Analysis situs (also speciell z. B. für die Entscheidung der in den vorstehenden

---

*) Danach sind die schon Eingangs citirten Untersuchungen von C. Jordan in dem Aufsatze „Sur la déformation des surfaces" (Liouville's J. Serie 2, Bd. XI, pag. 105), sowie die Formulirung in § 5 der Weichold'schen Dissertation zu präcisiren.

**) Vergl. pag. 480.

Sätzen discutirten Fragen) anzustellen sind, sei auf meine „Beiträge zur Analysis situs III" (in den Berichten der k. sächs. Ges. d. W. zu Leipzig. v. J. 1887) verwiesen.

II. Abschnitt.

Bestimmung der Charakteristik für gewisse, analytisch gegebene, zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 6.

Allgemeine Formulirung für Flächen ohne Singularitäten.

Im dreidimensionalen Raume sei eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit folgendermassen fixirt:

Gegeben seien zwei Flächen durch ihre Gleichungen

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0;$$

wir nehmen dieselben im Endlichen liegend, übrigens aus einer beliebigen Zahl von Theilen bestehend an. Als das „Innere" einer Fläche seien diejenigen Theile des Raumes bezeichnet, für welche die betr. Function φ (bez. ψ) kleiner als Null ist, und dabei sei wieder das Vorzeichen von φ (ψ) so gewählt, dass φ (ψ) im Unendlichen positiv wird, also der „unendlich ferne Punkt" im Aussenraume jeder der Flächen liegt.

Wir fragen nach der Charakteristik derjenigen Theile von $\varphi = 0$, welche im Innern von $\psi = 0$ liegen.

Diese Theile bilden eine im Allgemeinen aus mehreren Stücken bestehende Fläche, die von der Randcurve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ begrenzt ist. Wir treffen zunächst noch die Einschränkung, dass dieses Gebiet keine singulären Punkte — weder Knotenpunkte noch Doppelcurven besitze, d. h. dass die Function $\varphi(x, y, z)$ nicht zusammen mit ihren ersten Ableitungen für eine endliche oder unendliche Anzahl von Punkten verschwinde. *Damit schliessen wir das Vorkommen von Flächen mit umkehrbarer Indicatrix aus.* Aus der Möglichkeit, für die in unserem Raume gelegenen Flächen mit umkehrbarer Indicatrix die Normalenrichtung in einem Punkte der Fläche beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges umzukehren, folgt nämlich sofort, sofern es sich um *geschlossene* Flächen handelt, dass auf einem solchen Wege eine ungerade Anzahl mal Knotenpunkte bez. Doppelcurven durchsetzt werden müssen.*) Wir behandeln diese Vorkommnisse besonders im § 13, schliessen aber hier zur übersichtlichen Darstellung das Auftreten von *Doppelcurven* für *alle* zu betrachtenden Flächen aus, während

*) Vergl. etwa Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, p. 360.

Knotenpunkte für *specielle* Flächen der weiterhin zu discutirenden Flächensysteme auftreten werden, und gerade solche Punkte sich als *Uebergangsstellen* für die bei Flächen ohne Knotenpunkt abzuzählende Charakteristik ergeben werden.

Analog wie in § 3 des I. Theiles für lineare Mannigfaltigkeiten legen wir auch hier gewisse Entstehungsprocesse für die jetzt abzuzählenden M^{II} zu Grunde, welche wir in den verschiedenen Stadien rechnerisch verfolgen können. Dazu bieten sich sofort drei (den im ersten Theile angeführten analoge) Wege:

I. Wir lassen die Fläche $\varphi = 0$ entstehen, indem wir dieselbe als in irgend einer einfach unendlichen Schaar

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = 0 \tag{2}$$

von Flächen enthalten denken. Kennen wir dann für irgend ein Individuum der Schaar die Charakteristik seiner innerhalb $\psi = 0$ liegenden Theile, so können wir von hier aus die Aenderungen der Charakteristik verfolgen, die sich ergeben, wenn wir die Schaar bis zu $\varphi = 0$ hin durchlaufen.

II. Wir lassen die Mannigfaltigkeit $\psi = 0$ aus einer einfach unendlichen Schaar

$$\Psi(x, y, z, \mu) = 0 \tag{3}$$

entstehen und verfolgen, wie die Theile der festen Fläche $\varphi = 0$ successive in den sich ändernden Innenraum von Ψ eintreten.

III. Wir nehmen eine von φ und ψ ganz unabhängige, einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Flächen:

$$\mathrm{X}(x, y, z, v) = 0 \tag{4}$$

zu Hülfe und achten darauf, wie sich die Charakteristik der im Innern einer solchen Fläche liegenden Theile der Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$, $\psi < 0$ ändert mit ändernder Fläche X.

Alle diese Aenderungen finden wieder sprungsweise statt an gewissen besonderen Stellen der zu Grunde gelegten Flächensysteme. Im folgenden Paragraphen fixiren wir dieselben durch Angabe der (auch geometrisch leicht zu erkennenden) Punktcharaktere jener Sprungstellen. *Indem wir dann die Summe dieser Punktcharaktere zwischen zwei bestimmten Flächen des Flächensystems als unabhängig von dem speciellen dazwischengeschalteten Systeme erkennen, ergeben sich wieder bemerkenswerthe Relationen zwischen den singulären Stellen solcher Systeme*, die wir anschliessend allgemein formuliren, um sie in § 12 an zwei einfachsten Beispielen noch näher durchzuführen.

§ 7.

Punktcharakter für die Sprungstellen der Charakteristik. Erste Abzählung.

Die Charakteristik der Theile einer Fläche des Systems

(2) $$\Phi(x, y, z, \lambda) = 0,$$

welche im Innenraume von $\psi(x, y, z) = 0$ liegen, ändert sich, wenn wir von einer Fläche λ zu einer folgenden $\lambda + d\lambda$ übergehen, im Allgemeinen nicht, solange nicht

A. Berührungen mit der Fläche $\psi = 0$ eintreten, und

B. Singuläre Punkte bei den Flächen des Systems $\Phi = 0$ auftreten.

A. Die Berührungspunkte von Flächen $\Phi = 0$ mit $\psi = 0$ trennen sich zunächst in solche, für welche die zugehörige Schnittcurve beider Flächen einen isolirten bez. einen nicht isolirten Doppelpunkt erhält. Betrachten wir nun drei aufeinander folgende Flächen $\Phi = 0$, den Parametern $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$, $\lambda_\varkappa$, $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$ entsprechend (worin $d\lambda$ eine positive Aenderung bezeichnen soll), und nehmen an

α) die Fläche $(\lambda_\varkappa)$ berühre in einem *isolirten* Punkte die Fläche $\psi = 0$. Dann kann beim Durchgang von $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$ zu $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$

a) ein Elementargebilde E^{II} im Innenraume von $\psi = 0$ entstehen,

b) ein solches verschwinden,

c) eine Oeffnung in dem innerhalb $\psi = 0$ gelegenen Theile der sich ändernden Fläche entstehen,

d) eine solche verschwinden.

Die Fälle (a) und (d) sind mit $+1$ ihrem „Punktcharakter" nach für die Aenderung der Charakteristik der Fläche $\Phi = 0$ in Rechnung zu ziehen, die Fälle (b) und (c) mit -1.

Nehmen wir andererseits an

β) die Fläche $(\lambda_\varkappa)$ berühre die Fläche $\psi = 0$ in einem *nicht-isolirten* Doppelpunkt, so werden hier beim Uebergang von der Fläche $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$ nach $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$ entweder

e) zwei im Innern von $\psi = 0$ gelegene, getrennte Theile der sich ändernden Fläche sich vereinigen, oder

f) ein Flächenstück in zwei sich trennen.

Fall (e) ist mit -1, Fall (f) mit $+1$ seinem Punktcharakter nach zu bezeichnen.

Nun hat man zunächst für die Bestimmung der Berührungspunkte von Flächen des Systems $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$ mit $\psi = 0$ die Bedingungsgleichungen:

(5) $$\Phi = 0, \quad \psi = 0, \quad \Phi_1 - \varkappa\psi_1 = 0, \quad \Phi_2 - \varkappa\psi_2 = 0, \quad \Phi_3 - \varkappa\psi_3 = 0$$

und dabei tritt die Berührung in einem isolirten bez. nicht isolirten

Doppelpunkt der Schnittcurve von Φ und ψ ein, je nachdem die Determinante

$$(6)\qquad \mathsf{H}_\Phi = \begin{vmatrix} \Phi_{11} - \varkappa\psi_{11} & \Phi_{12} - \varkappa\psi_{12} & \Phi_{13} - \varkappa\psi_{13} & \Phi_1 \\ \Phi_{21} - \varkappa\psi_{21} & \Phi_{22} - \varkappa\psi_{22} & \Phi_{23} - \varkappa\psi_{23} & \Phi_2 \\ \Phi_{31} - \varkappa\psi_{31} & \Phi_{32} - \varkappa\psi_{32} & \Phi_{33} - \varkappa\psi_{33} & \Phi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 \end{vmatrix}$$

positiv oder negativ ist.

Die vorhin bezeichneten Fälle (a), (d) und (e) können weiter von den andern (b), (c) und (f) durch das Verhalten der in das „Innere" der Fläche $\psi = 0$ im Berührungspunkte errichteten Normalen unterschieden werden: In den drei erstgenannten Fällen treffen wir mit dieser Normale auf die Fläche $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$ d. h. auf die der Fläche $(\lambda_\varkappa)$ *folgende* Fläche; in den drei letztgenannten Fällen trifft die in den Innenraum von $\psi = 0$ gerichtete Normale die Fläche $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$, d. h. die der Fläche $(\lambda_\varkappa)$ *vorangehende* Fläche. Dieser Unterschied ergiebt sich aber nach kurzer Rechnung als gegeben durch das positive bez. negative Vorzeichen des Productes

$$(7)\qquad \varkappa \cdot \Phi_4 ,$$

wo $\varkappa$ wieder die aus den Gleichungen (5) für den jeweiligen Berührungspunkt berechnete Constante, Φ_4 die an eben der Stelle berechnete Ableitung von Φ nach dem Parameter λ bezeichnet.

So ergiebt sich schliesslich der Punktcharakter $+1$ *bez.* -1 *für die Berührungspunkte der Flächen des Systems* $\Phi = 0$ *mit* $\psi = 0$ *für die gewollte Abzählung als gegeben durch das positive bez. negative Vorzeichen des Productes der beiden Ausdrücke* (6), (7) *also* (*indem wir wieder von der schon im ersten Theil* (*vgl. pag.* 469) *angewandten Kronecker'schen Bezeichnungsweise Gebrauch machen*) *aus der Formel:*

$$(8)\qquad [\varkappa \cdot \Phi_4 \cdot \mathsf{H}_\Phi].$$

B. Nun haben wir noch zu untersuchen wie sich die Charakteristik ändert beim Durchgang durch einen singulären Punkt des Systems. Es sind dies die im Innern von $\psi = 0$ gelegenen Stellen, für welche

$$(9)\qquad \Phi = 0,\quad \Phi_1 = 0,\quad \Phi_2 = 0,\quad \Phi_3 = 0$$

wird, die *Knotenpunkte* des Systems, sofern wir hier von der Behandlung weiterer Singularitäten absehen. Sie trennen sich in

α) Knotenpunkte mit imaginärem Tangentialkegel (isolirte Knotenpunkte) und

β) Knotenpunkte mit reellem Tangentialkegel (nichtisolirte Knotenpunkte).

(a) Entsteht ein *isolirter Knotenpunkt* dadurch, dass beim Uebergang von der „vorausgehenden" Fläche $\lambda_h - d\lambda$, durch λ_h, zu $\lambda_h + d\lambda$ (der auf den Knotenpunkt folgenden Fläche) ein neuer, den Knotenpunkt ellipsoidisch umgebender Flächentheil auftritt, so ändert sich dabei die Charakteristik der sich deformirenden Fläche Φ um $+2$;

(b) Sie ändert sich umgekehrt um -2, wenn im isolirten Knotenpunkte ein solcher elliptischer Flächentheil verschwindet;

(c) Wenn beim Durchgang durch einen *nichtisolirten Knotenpunkt* ein Flächentheil (der in der Annäherung an den Knotenpunkt hyperbolische Krümmung aufweist) abgeschnürt wird in zwei (nach dem Durchgang durch den Knotenpunkt elliptisch gekrümmte) Theile, so wird dadurch die Charakteristik um $+2$ geändert, während sie sich umgekehrt

(d) um -2 ändert, wenn dieser Uebergang in der entgegengesetzten Richtung erfolgt.

Die hiermit bezeichneten Unterschiede lassen sich analytisch wieder auf die einfachste Weise fixiren und man erhält den Satz:

Der Punktcharakter der durch die Gleichungen (9) *definirten singulären Punkte* (*Knotenpunkte*) *des Flächensystems* $\Phi = 0$ *im Innern von* $\psi = 0$ *ist gegeben durch den Ausdruck:*

$$(10) \qquad 2 \cdot [-\Phi_4 \cdot \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{vmatrix}],$$

(*in welchem* Φ_4 *wieder die Ableitung nach* λ *bezeichnet*). *Der Factor* 2 *entspricht dem Umstande, dass für unsere Charakteristik nach dem Obigen das Gewicht der singulären Punkte gleich* ± 2 *ist.*

Die Gesammtänderung, welche die Charakteristik der im Innern von $\psi = 0$ gelegenen Theile einer Fläche $\Phi = 0$ erleidet, wenn wir von der Fläche λ_α zu einer anderen λ_β übergehen, d. i. die Differenz der Charakteristiken beider Flächen ist *unabhängig von dem Wege, auf welchem wir von der Ausgangsfläche* $\Phi(x, y, z, \lambda_\alpha) = 0$ *zur Endfläche* $\Phi(x, y, z, \lambda_\beta) = 0$ *übergehen.* Sie wird ausgedrückt als Summe über die Punktcharaktere einmal der Berührungspunkte der Flächen $\Phi = 0$ mit $\psi = 0$, also der Doppelpunkte des auf $\psi = 0$ durch die Flächen des Systems $\Phi = 0$ ausgeschnittenen Curvensystems, dann über die Punktcharaktere der Knotenpunkte des Flächensystems; *somit ergiebt sich eine Relation für die Anzahl dieser den Regeln* (A) *und* (B) *gemäss abzuzählenden singulären Stellen für irgend welche continuirlichen Flächensysteme, welche wir zwischen diese beiden Flächen als Grenzen einschalten mögen; diese Anzahl ist nämlich stets gleich dem Unterschied der Charakteristiken jener beiden Grenzflächen.*

§ 8.

Punktcharakter für die Sprungstellen der Charakteristik. Zweite Abzählung.

Fragen wir nach den Aenderungen, welche die Charakteristik der im Innern von $\psi = 0$ gelegenen Theile von $\varphi = 0$ erleiden, wenn wir diesen Innenraum abändern, so kommen hier nur die Berührungsstellen der (jetzt festen) Fläche $\varphi = 0$ mit der sich ändernden Fläche

$$(3) \qquad \Psi(x, y, z, \mu) = 0$$

in Betracht. Diese Stellen sind definirt durch die Gleichungen

$$(11) \quad \varphi = 0, \ \Psi = 0, \ \Psi_1 - \varkappa\varphi_1 = 0, \ \Psi_2 - \varkappa\varphi_2 = 0, \ \Psi_3 - \varkappa\varphi_3 = 0.$$

Nehmen wir nun zunächst an, der Innenraum von Ψ wächst mit wachsendem Parameter μ (also Ψ_4 ist an der betr. Stelle negativ), so erkennt man, aus analogen geometrischen Ueberlegungen wie bei I, leicht, dass dann eine Berührung von φ mit einer Fläche Ψ mit $+1$, bez. -1 für die Aenderung der Charakteristik zählt, je nachdem dieselbe in einem isolirten oder nicht isolirten Punkte erfolgt; und dass sich diese Aenderung umkehrt, wenn an der Berührungsstelle der Innenraum Ψ mit wachsendem μ abnimmt (d. h. wenn Ψ_4 positiv ist). Nun wird aber der Unterschied der Berührung in einem isolirten bez. nichtisolirten Punkte gegeben durch das positive bez. negative Vorzeichen der Determinante

$$(12) \qquad \mathsf{H}_\Psi = \begin{vmatrix} \Psi_{11} - \varkappa\varphi_{11} & \Psi_{12} - \varkappa\varphi_{12} & \Psi_{13} - \varkappa\varphi_{13} & \Psi_1 \\ \Psi_{21} - \varkappa\varphi_{21} & \Psi_{22} - \varkappa\varphi_{22} & \Psi_{23} - \varkappa\varphi_{23} & \Psi_2 \\ \Psi_{31} - \varkappa\varphi_{31} & \Psi_{32} - \varkappa\varphi_{32} & \Psi_{33} - \varkappa\varphi_{33} & \Psi_3 \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & 0 \end{vmatrix}$$

und also ergiebt sich schliesslich für diese Abzählung *der Punktcharakter der durch die Gleichungen* (11) *definirten Stellen durch die Formel*

$$(13) \qquad [-\Psi_4 \cdot \mathsf{H}_\Psi].$$

Betrachten wir jetzt in einem Intervalle zwischen zwei Flächen $\Psi(x, y, z, \mu_\alpha) = 0$ und $\Psi(x, y, z, \mu_\beta) = 0$ die Aenderung der Charakteristik der Fläche $\varphi = 0$, so bleibt diese Zahl, analog wie bei der ersten Abzählung wieder ungeändert, auf welche Weise wir auch von der einen Fläche zur andern durch ein continuirliches Flächensystem übergehen; *es ergiebt sich also eine zweite Relation für die Berührungspunkte der Fläche* $\varphi = 0$ *mit irgend welchen zwischen den beiden Flächen* $\Psi(\mu_\alpha) = 0$ *und* $\Psi(\mu_\beta) = 0$ *eingeschalteten Flächensystemen. Dieselbe besagt, dass die nach Formel* (13) *abgezählte Zahl der Berührungspunkte eines solchen Systems mit der Fläche* $\varphi = 0$ (*die*

Doppelpunkte eines auf $\varphi = 0$ *durch die Flächen des Systems aus geschnittenen Curvensystems) stets gleich der Differenz der Charakteristiken der innerhalb* $\Psi(\mu_\alpha) = 0$ *und* $\Psi(\mu_\beta) = 0$ *gelegenen Theile von* $\varphi = 0$ *ist*).*

Wir heben hier gleich noch den speciellen besonders anschaulichen Fall hervor, in welchem das auf der Fläche $\varphi = 0$ durch ein System $\Psi = 0$ entstehende Curvensystem in dem betrachteten Intervall μ_α bis μ_β die Fläche $\varphi = 0$ nur *einfach* bedeckt. Die nähere Discussion fügen wir den Entwickelungen des folgenden Paragraphen an.

§ 9.

Punktcharakter für die Sprungstellen der Charakteristik. Dritte Abzählung.

Betrachten wir drittens die Aenderungen, welche die Charakteristik der Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$, $\psi < 0$ erleidet, wenn wir ein Flächensystem

$$X(x, y, z, \nu) = 0 \tag{4}$$

durchlaufen und dabei immer die in das Innere einer Fläche $X = 0$ eintretenden Theile jener Mannigfaltigkeit abzählen. Für diese Aenderungen kommen in Betracht:

A. Die Berührungsstellen der Fläche $\varphi = 0$ mit den Flächen des Systems $X = 0$, soweit sie im Innern von $\psi = 0$ liegen, also die Stellen für welche

$$\begin{gathered} \varphi = 0,\ X = 0,\ \psi < 0, \\ X_1 - \varkappa\varphi_1 = 0,\ X_2 - \varkappa\varphi_2 = 0,\ X_3 - \varkappa\varphi_3 = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

ist. Sie zählen genau wie die entsprechenden Berührungspunkte von $\varphi = 0$ mit $\Psi = 0$ der vorigen Abzählung II (Formel (12) u. (13)), *sind also ihrem Punktcharakter nach gegeben durch die Formel:*

$$[-X_4 \cdot \mathrm{H}x]. \tag{15}$$

B. Die Berührungsstellen der Flächen $X = 0$ mit der Randcurve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ unserer abzuzählenden Mannigfaltigkeit, also die Stellen, für welche die Gleichungen

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ X = 0,\ \acute{\Delta} = 0, \tag{16}$$

---

*) Dabei bezieht sich diese Relation, was zum Vergleich mit der im vorigen Paragraphen gegebenen hervorgehoben sein mag, jetzt *lediglich auf die Doppelpunkte des Curvensystems*, während die in § 7 gegebene die Doppelpunkte eines Curvensystems (dort auf $\psi = 0$ entstanden) mit den Knotenpunkten des zugehörigen Flächensystems (dort $\Phi(\lambda) = 0$) in Beziehung setzt.

erfüllt sind, wo Δ die Functionaldeterminante der drei Functionen φ, ψ, X bedeutet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & X_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & X_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & X_3 \end{vmatrix}$$

Hier trennen wir zunächst vier Arten der Berührung, indem wir für die beiden sich berührenden Raumcurven, in welchen die Fläche $\varphi = 0$ von den anderen $\psi = 0$ und $X = 0$ geschnitten wird, die „innere" und „äussere" Berührung (auf der Fläche $\varphi = 0$ betrachtet) in derselben Weise unterscheiden, wie wir dies in § 4 des ersten Theiles für zwei sich berührende ebene Curven gethan haben. Dann haben wir, wie dort:

	(*a*) (Fig. 11[a])	(*b*) (Fig. 11[b])	(*c*) (Fig. 11[c])	(*d*) (Fig. 11[d])	
Die Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ verläuft im	Aussenraum	Aussenraum	Innenraum	Innenraum	der Curve $\varphi = 0$, $X = 0$.
Die Curve $\varphi = 0$, $X = 0$ verläuft im	Aussenraum	Innenraum	Aussenraum	Innenraum	der Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Nehmen wir nun an, das Innengebiet von $X = 0$ wächst mit wachsendem Parameter ν, so entsteht (vergl. die Figuren 11*)) in Fall (*a*) eine Elementarfläche im Innern von X, während in Fall (*d*) die Vereinigung zweier Gebiete statt hat; in den Fällen (*b*) und (*c*) tritt dagegen keine die Charakteristik ändernde Umformung ein.

Nehmen wir aber an, das Innengebiet von $X = 0$ nimmt ab mit wachsendem Parameter ν, so verschwindet jetzt umgekehrt in Fall (*a*) eine Elementarfläche aus dem Innenraum $X = 0$, in Fall (*d*) tritt eine Trennung eines Flächenstückes ein, während wieder die Fälle (*b*) und (*c*) die Charakteristik nicht ändern.

Je nachdem also mit wachsendem ν der Innenraum von $X = 0$ wächst oder abnimmt, d. h. also je nachdem an der betr. Stelle X_4 negativ beziehungsweise positiv ist, zählt

Fall (*a*) mit $+1$ bez. -1,
Fall (*d*) mit -1 bez. $+1$,
Fälle (*b*) und (*c*) mit 0

*) In den Figuren sind die Innenräume je der beiden Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (Curve 1) und $\varphi = 0$, $X = 0$ (Curve 2_2) durch Schraffirung bezeichnet und ausserdem der beim Uebergang von der berührenden Curve (2_2) zu ihrer *folgenden* (2_3) in den Innenraum von (1) tretende Theil des Innern von (2_3) besonders hervorgehoben.

für die Aenderung der Charakteristik beim Durchgang durch die Sprungstelle.

Die vier Fälle sind nun analytisch [genau den in Theil I (§ 4) für ebene Curven abgeleiteten Formeln entsprechend] nach den Vorzeichen zweier Determinanten zu unterscheiden, welche hier die Form annehmen:

$$(17) \qquad \Theta_X = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \Delta_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \Delta_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \Delta_3 \end{vmatrix},$$

beziehungsweise

$$(18) \qquad \Theta_\psi = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \Delta_1 & X_1 \\ \varphi_2 & \Delta_2 & X_2 \\ \varphi_3 & \Delta_3 & X_3 \end{vmatrix},$$

in welcher $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ die partiellen Ableitungen nach x, y, z der obigen Functionaldeterminante Δ bedeuten. Und zwar ist, analog wie dort:

$$(19) \qquad \begin{gathered} \Theta_X \begin{array}{l} \text{positiv in Fall } (a) \text{ und } (b), \\ \text{negativ in Fall } (c) \text{ und } (d); \end{array} \\ \Theta_\psi \begin{array}{l} \text{positiv in Fall } (a) \text{ und } (c), \\ \text{negativ in Fall } (b) \text{ und } (d). \end{array} \end{gathered}$$

Es lässt sich sonach der Punktcharakter unserer durch die Gleichungen (16) *gegebenen Berührungsstellen durch die Formel darstellen:*

$$(20) \qquad \Big[- X_4 \cdot ([\Theta_X] + [\Theta_\psi])\Big],$$

in welcher alle eckigen Klammern die eingeführte Bedeutung besitzen. Für negative X_4 zählt nämlich danach Fall (a) mit $+1$, Fall (d) mit -1, den gleichen Vorzeichen von Θ_X und Θ_ψ entsprechend, wie es sein soll; während die Fälle (b) und (c) dadurch als Null zählen, dass hiefür der zweite Factor, den entgegengesetzten Vorzeichen von Θ_X und Θ_ψ gemäss, Null ergiebt; für positives X_4 tritt die entgegengesetzte Zählung ein.

Man kann diese Darstellung (20) für die Charaktere der Berührungspunkte, sofern man die Fälle (b) und (c), die als Null zu zählen sind, durch die Ungleichung

$$\Theta_X \cdot \Theta_\psi > 0$$

(vergl. die Beziehungen (19)) ausschliesst, auch ersetzen durch die anderen:

$$(20\text{a}) \qquad [- X_4 \cdot \Theta_X] \quad \text{oder} \quad [- X_4 \cdot \Theta_\psi].$$

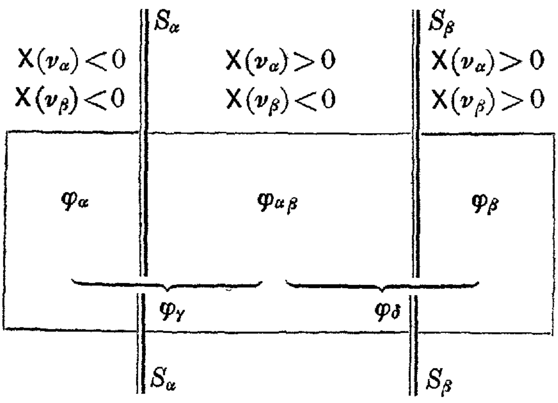
Summiren wir wieder die Punktcharaktere von einer Anfangsfläche v_α bis zu einer Endfläche v_β, so erhalten wir damit die Aenderung der Charakteristik von $\varphi = 0$ in jenem Intervall; diese Zahl, als die

Differenz der Charakteristiken der im Innern von $\mathrm{X}(\nu_\alpha)=0$ bez. von $\mathrm{X}(\nu_\beta)=0$ gelegenen Theile von $\varphi=0$, ist wieder unabhängig von dem speciellen, zwischen jene beiden Endflächen eingeschalteten Flächensystem, und somit ergiebt sich wieder *eine Relation zwischen den eben fixirten singulären Punkten, nämlich den Doppelpunkten irgend welcher auf* $\varphi=0$ *im Innern von* $\psi=0$ *zwischen jenen Grenzcurven* $\mathrm{X}(\nu_\alpha)=0$ *und* $\mathrm{X}(\nu_\beta)=0$ *eingeschalteten Curvensysteme und den Berührungspunkten derselben mit der Curve* $\varphi=0$, $\psi=0$.

§ 10.

Specialisirung der letzten Abzählung.

Die Abzählung gewinnt eine besonders anschauliche und übersichtliche Form, wenn wir zunächst das auf $\varphi=0$ entstehende Curvensystem als *die Fläche einfach überdeckend* voraussetzen. Es liegen dann auch die Schnittlinien S_α und S_β, einmal der Flächen $\mathrm{X}(\nu_\alpha)=0$ (kurz mit X_α bezeichnet) mit dem Gebiet $\varphi=0$, $\psi<0$, dann der Fläche $\mathrm{X}(\nu_\beta)=0$ (X_β) mit $\varphi=0$, $\psi<0$ völlig getrennt von einander. Sie theilen das Gebiet $\varphi=0$, $\psi<0$ in drei Theile, für welche wir die in der nebenstehenden schematischen Fig. fixirten Bezeichnungen einführen: Das Gebiet φ_α im *Innern* der Fläche X_α gelegen besitze die Charakteristik K_α; ebenso besitzen die weiteren aus der Figur abzulesenden Theile $\varphi_{\alpha\beta}$, φ_β, φ_γ, φ_δ des Gebietes $\varphi=0$, $\psi<0$ bez. die Charakteristiken $K_{\alpha\beta}$, K_β, K_γ, K_δ.



Nehmen wir dann an, die Curve S_α, in welcher sich das Gebiet $\varphi_{\alpha\beta}$ an φ_α anschliesst, bestehe aus s_α einzelnen Curvenstücken und weiter noch einer beliebigen Zahl geschlossener Curvenzüge (besitze also nach Theil I die Charakteristik $K^I=s_\alpha$), so folgt aus dem Satze 3 § 2 (pag. 476) sofort die Relation

$$K_{\alpha\beta}=K_\gamma-K_\alpha+s_\alpha \tag{21}$$

und ebenso, wenn die Fläche $\varphi_{\alpha\beta}$ sich an φ_β längs s_β einzelnen Curvenstücken und weiter längs einer gewissen Zahl geschlossener

Curvenzüge anschliesst (also die Curve S_β von der Charakteristik $K^I = s_\beta$ ist), ergiebt sich

$$K_{\alpha\beta} = K_\delta - K_\beta + s_\beta. \tag{22}$$

Die Charakteristik $K_{\alpha\beta}$ des Flächenstückes $\varphi_{\alpha\beta}$ steht also in einfachster Beziehung zu der Differenz $K_\gamma - K_\alpha$, die wir nach den Regeln des vorigen Paragraphen abzählen, wenn wir das Curvensystem $\mathsf{X}(v) = 0$ in der Richtung von X_α nach X_β durchlaufen. Wegen des vorausgesetzten *einfach* überdeckenden Curvensystems X wechselt nun die Ableitung von X nach dem Parameter v, X_4, innerhalb des Intervalls ihr Zeichen nicht, ist vielmehr (wir haben S_α *innerhalb* S_β angenommen) beständig negativ. Sonach ist nach Formel (15) und (20) direct

$$K_\gamma - K_\alpha = \sum [\mathsf{H}\mathfrak{x}] + \sum \big[[\Theta\mathfrak{x}] + [\Theta_\psi]\big]$$

oder in anderer Form mit Weglassen der einen eckigen Klammer geschrieben:

$$K_\gamma - K_\alpha = \sum [\mathsf{H}\mathfrak{x}] + \tfrac{1}{2}\Big\{\sum [\Theta\mathfrak{x}] + \sum [\Theta_\psi]\Big\}, \tag{23}$$

wobei sich die erste Summe auf alle Doppelpunkte des Curvensystems innerhalb des Gebietes $\varphi_{\alpha\beta}$, die zweite auf alle Berührungspunkte dieses Curvensystems mit dem Rande $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bezieht. Diese letzteren sind dabei in die Berührungen (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) geschieden (vergl. Fig. 11) wobei die Formel die Punkte (*a*) und (*d*) bez. mit $+1$ und -1, die Punkte (*b*) und (*c*) mit Null in Rechnung zieht.

Gehen wir nun, das Curvensystem in umgekehrter Richtung von X_β nach X_α durchlaufend von dem Gebiet φ_β aus, so erhalten wir durch eine analoge Abzählung die Differenz $K_\delta - K_\beta$. Sie setzt sich wieder aus der Summe über die Doppelpunkte des Gebietes $\varphi_{\alpha\beta}$ und der Summe über die obigen Berührungspunkte zusammen; nur sind die letzteren jetzt, wegen des umgekehrten Sinnes, in welchem wir das Curvensystem durchlaufen, derart in Rechnung zu ziehen, dass die eben unterschiedenen Punkte (*a*) und (*d*) mit Null, die Punkte (*b*) und (*c*) aber mit $+1$ bez. -1 zählen. So kommt mit Berücksichtigung der oben gegebenen Unterscheidung die zweite Formel:

$$K_\delta - K_\beta = \sum [\mathsf{H}\mathfrak{x}] - \tfrac{1}{2}\Big\{\sum [\Theta\mathfrak{x}] - \sum [\Theta_\psi]\Big\}, \tag{24}$$

die Summen auf dieselben Punkte ausgedehnt wie vorhin. Durch Addition der beiden Formeln (23) und (24) und Verbindung mit (21) und (22) ergiebt sich dann für *die Charakteristik der Fläche $\varphi_{\alpha\beta}$ die Formel:*

$$2K_{\alpha\beta} = 2\sum [\mathsf{H}\mathfrak{x}] + \sum [\Theta_\psi] + s_\alpha + s_\beta, \tag{25}$$

wo die erste Summe sich auf alle Doppelpunkte des Curvensystems $X = 0$ im Innern von $\varphi_{\alpha\beta}$, die zweite sich auf alle Berührungsstellen von $X = 0$ mit dem von der Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ gebildeten Rand der Fläche erstreckt.

Die Doppelpunkte sind dabei unterschieden als isolirte ($+1$) bez. nicht isolirte (-1) Doppelpunkte, die Berührungspunkte des Curvensystems mit dem Rande aber in dieser Formel lediglich danach, ob die Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ von der betreffenden Curve des Systems im Aussenraume ($+1$; Fälle (a) und (c)), bez. im Innenraume (-1; Fälle (b) und (d)) von $\psi = 0$ berührt wird. $s_\alpha + s_\beta$ ist die Charakteristik K^I der beiden Curven S_α und S_β, welche, dem Curvensystem $X = 0$ angehörig, neben der Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ als Begrenzung des Gebietes $\varphi_{\alpha\beta}$ auftreten. Diese Curven kommen also nur mit ihren getrennten Begrenzungsstücken für die Charakteristik $K_{\alpha\beta}$ in Rechnung, während noch vorhandene geschlossene Züge derselben ohne Einfluss bleiben.

Die Formel giebt gleichzeitig auch eine geometrische Deutung für die im vorigen Paragraphen gegebene allgemeine Darstellung, die sich auf ein beliebig vielfach von Curven $X = 0$ bedecktes Gebiet der Fläche $\varphi = 0$ bezieht, wenn wir beachten, dass wir ein solches sofort in eine Summe einzelner einfach überdeckter Gebiete durch den Schnitt von $\varphi = 0$ mit $X_4 = 0$ zerlegen können (welcher die Umhüllungscurve des Curvensystems $X = 0$, $\varphi = 0$ bezeichnet). Es handelt sich dann um die Summe der Charakteristiken dieser einzelnen Theile, die sich längs jener Umhüllungscurve aneinanderschliessen und dem Vorzeichen von X_4 entsprechend als *positive* bez. *negative* Ueberdeckungen der Fläche $\varphi = 0$ zu zählen sind.*)

§ 11.

Verallgemeinerung der vorigen Abzählung.

Die in der Formel (25) getroffene Abzählung der singulären Punkte erweist sich als *unabhängig von der Richtung, in welcher wir das Curvensystem* $X = 0$ *durchlaufen*, und dieser Umstand giebt Anlass zu einer Erweiterung der Abzählung auf Curvensysteme, die in irgend welcher Weise ein Gebiet $\varphi_{\alpha\beta}$ überdecken, ohne Rücksicht darauf, ob es möglich ist, ein solches System in einem bestimmten Sinne zu durchlaufen oder nicht. Es sei diese allgemeine Formel, in welche wir gleichzeitig singuläre Punkte irgend welcher Art mit einbegreifen

*) Beiläufig bemerkt ergiebt sich andererseits die Charakteristik der Ueberdeckung der Fläche $\varphi = 0$ mit dem Systeme $X = 0$, diese als eine mehrblättrig über $\varphi = 0$ ausgebreitete Fläche aufgefasst, wenn wir alle Ueberdeckungen in *demselben* Sinne addiren, also die in Formel (15) und (20) gegebenen Punktcharaktere mit Weglassung je des Factors $(-X_4)$ summiren.

wollen, wieder für ein die betreffende Fläche *einfach* überdeckendes System, noch entwickelt; wir sehen dabei von einer analytischen Darstellung ab.

Bezeichne F irgend eine, aus einer beliebigen Anzahl von Theilen bestehende Fläche. Wir tragen auf ihr ein Curvensystem ein, so beschaffen, dass durch jeden Punkt der Fläche im Allgemeinen nur eine einzige Curve des Systems hindurchgeht. Nur von singulären Punkten mögen mehrere Zweige auslaufen, so zwar, dass von einem Punkte $\overset{i}{P}_n$, den wir als im Innern der Fläche gelegen annehmen, n Zweige auslaufen; von einem Punkte $\overset{r}{P}_n$ auf dem Rande ebenso n Zweige sich in das Innere der Fläche erstrecken. n sei dabei eine beliebige der Zahlen $0, 1, 2 \ldots \infty$. Nun seien die Punkte $\overset{i}{P}_n$, $\overset{r}{P}_n$ je in der Zahl $\overset{i}{p}_n$, $\overset{r}{p}_n$ auf F vorhanden, wobei $\overset{i}{p}_2$ und (falls F nicht geschlossen, oder nur von Curven des Systems begrenzt ist) auch $\overset{r}{p}_1$ gleich unendlich ist, während wir alle übrigen Punkte, die *singulären* Punkte des Systems, als in endlicher Zahl und discret auf F vertheilt annehmen. Endlich mögen Curven des Systems auch als theilweise Begrenzungen der Fläche F auftreten und zwar sei K^I die Charakteristik der genannten als Begrenzung auftretenden Curven des Systems (die dann aus K^I Curvenstücken und einer beliebigen Zahl geschlossener Curven bestehen).

Dann besteht zwischen jenen singulären Punkten und der Charakteristik K der Fläche F die einfache Beziehung:

$$(26) \qquad K = -\tfrac{1}{2}\sum(n-2)\overset{i}{p}_n - \tfrac{1}{2}\sum(n-1)\overset{r}{p}_n + \overset{i}{p}_\infty + \tfrac{1}{2}K^I.$$

wobei sich die Summen nur auf die *endlichen* Indices n beziehen**). Insofern wir davon absehen, ob ein solches Curvensystem in einer bestimmten Richtung durchlaufen werden kann oder nicht, ist ein von den früheren Entwickelungen, die stets auf einen Entstehungsprocess der Mannigfaltigkeit recurrirten, unabhängiger, gesonderter Beweis für die Formel zu erbringen. Wir verwandeln zu dem Ende die Fläche F dadurch in eine neue F', dass wir zunächst alle im Innern befindlichen singulären Punkte durch Anbringung kreisförmiger Schnitte herausschneiden — wodurch die Charakteristik K um die Anzahl aller

---

*) Die Punkte $\overset{r}{P}_0$ können dabei, indem wir uns das Curvensystem auch über den Rand der Fläche hinaus fortgesetzt denken, als den „Berührungen von Aussen" entsprechend betrachtet werden, die Punkte $\overset{r}{P}_2$ als den „Berührungen von Innen" entsprechend.

**) Man erkennt, dass in der Formel die nicht singulären Punkte $\overset{i}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_1$ von vornherein wegfallen.

dieser Punkte vermindert wird — und dann auch alle singulären Punkte auf dem Rande mit Ausnahme derjenigen, von welchen zwei Zweige in das Innere laufen und der isolirten Punkte auf dem Rande (also der Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$). Es zeigt sich dann (vgl. die Figuren 12, a—f für die Punkte $\overset{i}{P}_0$, $\overset{i}{P}_1$, $\overset{i}{P}_3$, $\overset{i}{P}_\infty$; $\overset{r}{P}_3$, $\overset{r}{P}_\infty$), dass alle diese Punkte äquivalent sind einer gewissen Zahl von Punkten $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$, so zwar dass die *Differenz der Anzahl* dieser auf dem Rande neu entstandenen Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ jedesmal ein Charakteristicum des besonderen singulären Punktes ist. Bezeichnen wir diese Differenz mit d, so ist wie aus den Figuren ersichtlich diese Differenz:

$$(27)\quad \begin{cases} \text{für einen Punkt } \overset{i}{P}_n\text{:} \\ \qquad\qquad \overset{i}{d}_n = n, \\ \text{für einen Punkt } \overset{i}{P}_\infty \text{ ist} \\ \qquad\qquad \overset{i}{d}_\infty = 0, \\ \text{für einen Punkt des Randes } \overset{r}{P}_n \text{ ist:} \\ \qquad\qquad \overset{r}{d}_n = (n-1); \end{cases}$$

für Punkte $\overset{r}{P}_\infty$ des Randes ist zu beachten, in welcher Weise sich die Randcurve gegen die Curven des Systems verhält. Die Figuren 12 kennzeichnen die verschiedenen Möglichkeiten, wonach ein solcher Punkt bez. mit den Zahlen 0, 1, 2 äquivalent wird. In der Abzählung sei nur die erste Form des Punktes $\overset{r}{P}_\infty$ berücksichtigt, indem wir die andern jederzeit als die Combination eines Punktes $\overset{r}{P}_\infty$ mit einem, bez. zwei Punkten $\overset{r}{P}_0$ in Rechnung ziehen können. Die neue Fläche F', von der Charakteristik „K minus Anzahl aller Punkte $\overset{i}{P}$", besitzt jetzt im Innern keinerlei singuläre Punkte, auf dem Rande nur Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ („innere" und „äussere Berührungspunkte" der Systemcurven mit dem Rande); ausserdem besteht der Rand noch aus Curvenzügen von der Gesammtcharakteristik K^I, welche dem Curvensystem angehören.

Für diese Fläche gilt nun aber der Satz, dass ihre Charakteristik gleich ist der Differenz der Anzahl der Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ vermehrt um die Zahl K^I. Wie nämlich auch das Curvensystem auf F' beschaffen sein mag, wir können F' stets durch geeignete Querschnitte in solche einzelne Gebiete zerlegen, für welche das in einem Gebiet enthaltene Curvensystem in bestimmter Richtung zu durchlaufen ist; dann lässt sich jedenfalls für diese Theile einzeln der früher entwickelte Satz anwenden. Die Summation ergiebt aber dann, insofern die durch die Zerschneidung neu entstandenen Querschnitte sich bei der Zusammensetzung wieder compensiren, direct die Erweiterung des Satzes für ein beliebiges Gebiet F'. Gehen wir endlich von hier auf die Fläche F zurück, jeden singulären Punkt seiner ihm äquivalenten Zahl gemäss (nach Formel (27)) in Rechnung ziehend, so folgt sofort die obige allgemeine Formel (26). Auch hier lässt sich dann, wenn wir nur mehrfache Ueberdeckungen durch ganz willkürliche Curvensysteme von einander zu trennen vermögen, die Ausdehnung auf ganz beliebige einfach unendliche Curvensysteme fixiren.

Zur Veranschaulichung der Abzählung mögen die in Fig. 2 (Tafel I) gezeichneten Curvensysteme dienen, aus deren nach den gegenwärtigen Regeln abgezählten singulären Punkten sich sofort die Charakteristiken etwa der Stücke der Ebene ergeben, in welche dieselbe durch die stark ausgezeichneten beiden Curven zerfällt.

§ 12.

Analytische Beispiele für die Summation der Punktcharaktere. Curvatura integra einer geschlossenen Fläche.

Wir wählen zwei Beispiele einfachster Art für die Abzählung der Charakteristik einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit:

1. Beispiel. *Gegeben sei die Gleichung einer ebenen Curve* $\varphi(x, y) = 0$; *welches ist die Charakteristik des Innenraumes* $\varphi < 0$?

I. Zunächst lassen wir die Curve $\varphi = 0$ entstehen aus dem Curvensystem

$$\Phi \equiv \varphi - \lambda = 0,$$

welches wir schon in § 5 des ersten Theiles betrachtet haben. Dasselbe besitzt für $\lambda < 0$ eine gewisse Zahl singulärer Punkte, für welche

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

ist. Da der Innenraum der Curven $\varphi - \lambda = 0$ beständig wächst, mit wachsendem Parameter λ, ist jeder isolirte Doppelpunkt mit $+1$, jeder nicht isolirte mit -1 für die Charakteristik des Innenraumes zu zählen und daher giebt die

$$\sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} \right]$$

ausgedehnt über alle Punkte

$$\varphi < 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

die fragliche Charakteristik und kennzeichnet sich damit als *Charakteristik des Functionensystems*

$$(28) \qquad \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

*im Sinne von Kronecker.**)

II. Lassen wir den Innenraum $\varphi < 0$ andererseits (in Analogie mit der in § 9 getroffenen Abzählung) dadurch entstehen, dass wir eine horizontale Gerade

$$y - v = 0$$

mit wachsender Constanten v über die Curve gleiten lassen und jedesmal die unterhalb der Geraden liegenden Theile des Innenraumes betrachten, so ist deren Charakteristik durch eine Summe über die Berührungspunkte horizontaler Tangenten an die Curve gegeben, in welcher

Minima mit äusserer Berührung mit $+1$,
Maxima mit innerer Berührung mit -1

zu zählen sind, während bei Minimis mit innerer, bei Maximis mit äusserer Berührung die Charakteristik nicht geändert wird. Die entsprechende Formel:

$$K = -\sum [\varphi_2 \cdot \varphi_{11}],$$

die Summe, ausgedehnt über alle Punkte

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 < 0,$$

zeigt sich wieder als die Kronecker'sche Charakteristik des Functionensystems (28) in einer zweiten Form.

III. Die Beziehung zwischen den sämmtlichen Berührungspunkten, welche sich in der Formel:

$$\sum [\varphi_2 \cdot \varphi_{11}] = 0$$

für

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

ausdrückt, ergiebt die Abzählung auch in der Form

$$K = \frac{1}{2} \sum [\varphi_{11}],$$

die Summe über *alle* Punkte

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

ausgedehnt, und stellt so direct einen speciellen Fall der Formel (26) pag. 501 analytisch dar.

2. Beispiel. *Gegeben sei die Gleichung einer Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$. Welches ist ihre Charakteristik?*

---

*) Man vergl. hier wieder die Eingangs citirten Aufsätze von Kronecker.

I. Wir lassen die Fläche $\varphi = 0$ entstehen aus einem Flächensystem

$$\Phi \equiv \varphi(x, y, z) - \lambda = 0,$$

welches für $\lambda < 0$ das Innere der (im Endlichen angenommenen) Fläche $\varphi = 0$ einfach und lückenlos ausfüllt, dabei schliesslich in einzelne isolirte Knotenpunkte sich zusammenziehend. Es existirt also eine bestimmte untere Grenze λ, für welche die Charakteristik der Fläche 0 ist. Von ihr beginnend berechnen wir die Charakteristik der Fläche $\varphi = 0$ selbst durch eine Summation über alle Knotenpunkte des Flächensystems, diese dabei im Sinne der in § 7 getroffenen Abzählung unterscheidend. So ergiebt sich die Charakteristik

$$K^{II} = 2 \cdot \sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} \right]$$

die Summe über alle Punkte

$$\varphi < 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0$$

erstreckt. *Sie stellt sich also bis auf den Factor 2 dar als Kronecker'sche Charakteristik des Functionensystems*

$$(29) \qquad \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0.$$

II. Gehen wir andererseits (in Analogie mit der Abzählung des § 9) von einem auf der Fläche $\varphi = 0$ verzeichneten Curvensystem aus, indem wir die Fläche mit Ebenen, parallel etwa zur (xy) Ebene

$$z - v = 0,$$

schneiden, so ergiebt sich die Charakteristik K^{II} als Ueberschuss der isolirten über die nichtisolirten Doppelpunkte dieses Curvensystems; diese aber, als Berührungspunkte horizontaler Tangentialebenen in Punkten elliptischer bez. hyperbolischer Krümmung, ergeben sofort:

$$K^{II} = \sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} \right]$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0,$$

in welcher Formulirung wir wieder die Kronecker'sche Charakteristik des obigen Functionensystems (29) erkennen.

Nun ist die Kronecker'sche Charakteristik des obigen Functionensystems, wie in den Monatsberichten von 1869 (pag. 689) gezeigt ist, direct identisch mit der Gauss'schen Curvatura integra der Fläche $\varphi = 0$; *diese stimmt also, bis auf den Factor 2, auch mit der „geometrischen Charakteristik" der Fläche überein, und steht zu der*

Riemann'schen Zusammenhangszahl in der im § 4 (pag. 484) *angeführten einfachen Beziehung*. Anknüpfend an unsere früheren Definitionen und die Ableitung der Curvatura integra einer Fläche durch die bekannte, durch die Normalen der Fläche vermittelte Abbildung auf die Kugel lässt sich diese Beziehung leicht auch auf geometrischem Wege erkennen.

§ 13.

Auftreten von Doppelcurven. Flächen mit umkehrbarer Indicatrix.

Betrachten wir die Aenderungen der Charakteristik für die im Innern einer Fläche $\psi(x, y, z) = 0$ gelegenen Theile einer sich ändernden Fläche $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$, die wir in § 6 untersucht haben, nunmehr unter der Voraussetzung, dass neben Knotenpunkten — die wir dort als Sprungstellen der Charakteristik erkannt haben — auch Doppelcurven in $\Phi = 0$ auftreten können. Wir schliessen damit nach den zu Anfang des § 5 dieses Abschnittes gegebenen Ausführungen auch die Abzählung von Flächen mit umkehrbarer Indicatrix in unsere analytische Darstellung ein.

Es ist zu untersuchen, einmal, wie sich die Charakteristik ändert beim Durchgang durch eine Fläche mit Doppelcurven, und zweitens, welche charakteristische Zahl wir der Fläche mit Doppelcurve selbst mit Rücksicht auf die in § 2 und 3 gemachten Abzählungen zuzuweisen haben.

In den Innenraum der Fläche $\psi = 0$, für welchen wir unsere Abzählung treffen, treten im Allgemeinen von der Doppelcurve einmal ganze, in sich geschlossene Züge, dann einzelne Stücke, die sich je zwischen zwei Punkten der Begrenzungsfläche hinerstrecken. Dabei verläuft die Doppelcurve entweder isolirt, oder wird von zwei reellen Flächenmänteln durchsetzt. Die Uebergangsstellen zwischen isolirten und nicht isolirten Zügen der Doppelcurve werden gebildet durch Cuspidalpunkte (pinch-points) der Fläche, die je in gerader Anzahl auf den verschiedenen Zügen der Doppelcurve vertheilt sind.

Zunächst übersehen wir nun leicht, dass sich die Charakteristik der Fläche nur an gewissen singulären Stellen der Doppelcurve ändert. Durchsetzen sich nämlich längs eines ganzen geschlossenen Curvenzuges zwei reelle Mäntel der Fläche, ohne dass in demselben ein höherer singulärer Punkt auftritt, so tritt beim Uebergang von der der Fläche mit Doppelcurve vorangehenden zu der ihr folgenden Fläche lediglich eine Umschaltung in der Verbindung der Theile der Fläche ein, die Charakteristik bleibt ungeändert. Tritt andererseits ein geschlossener Zug der Doppelcurve auf, der völlig isolirt verläuft, so entsteht, bez. verschwindet, in ihm ein ringförmig gestalteter, geschlossener Flächentheil von der Charakteristik Null, durch welchen also gleichfalls die Gesammtcharakteristik eine Aenderung nicht erleidet. Ebenso tritt eine Aenderung in der Charakteristik *nicht* ein, wenn ein von der Fläche $\psi = 0$ begrenzter Curvenzug seiner ganzen Ausdehnung nach als isolirte bez. als nicht isolirte Doppelcurve auftritt.

Betrachten wir also singuläre Stellen der Doppelcurve: zunächst die schon erwähnten Cuspidalpunkte, dann Punkte, in denen sich zwei Mäntel der Fläche berühren (Doppelpunkte der Doppelcurve), endlich Punkte, in denen sich drei Mäntel der Fläche durchsetzen. Sie lassen im Wesentlichen die möglichen Umformungen erkennen und desshalb sei die Beschränkung auf diese Singularitäten gestattet*). Denken wir uns die Umgebung eines singulären Punktes etwa durch eine Kugel aus der ganzen Fläche ausgeschnitten und betrachten in der Schaar der Flächen $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$ die der Fläche mit singulärem Punkte, (λ_x), vorausgehende, $(\lambda_x - d\lambda)$, und folgende, $(\lambda_x + d\lambda)$, Fläche (unter $d\lambda$ wieder eine positive Grösse verstanden), so ergiebt die in diesem Bereich erfolgende Aenderung der Charakteristik der ausgeschnittenen Flächentheile den Einfluss des betr. singulären Punktes auf die Gesammtcharakteristik.

a) *Cuspidalpunkte.*

Fig. 13 giebt in der Umgebung eines Cuspidalpunktes die Gestalt unserer drei soeben unterschiedenen Flächen (λ_x), $(\lambda_x + d\lambda)$ und $(\lambda_x - d\lambda)$. Die eine (F_0 in der Figur) besteht aus einem von zwei Randcurven begrenzten ringförmigen Flächenstück — von der Charakteristik Null; die andere (F_2) ist von zwei Stücken, Elementarflächen, gebildet — ihr kommt sonach die Charakteristik 2 zu; während die dazwischenliegende Fläche (F_1) mit Cuspidalpunkt eine (nach Art einer Verzweigungsstelle verschlungene) Elementarfläche darstellt — derselben also die Charakteristik 1 zukommt. *Die Aenderung der Charakteristik einer Fläche beim Durchgang durch eine Fläche mit Doppelcurve wird also, soweit Cuspidalpunkte dabei auftreten, durch die Zahlen $+1$, bez. $+2$ bezeichnet, sofern der Durchgang durch den Cuspidalpunkt von der Fläche F_0 durch F_1 nach F_2 erfolgt, durch die Zahlen -1 bez. -2, wenn dieser Uebergang in der entgegengesetzten Reihenfolge statt hat.*

Die analytische Unterscheidung für die Abzählung der Cuspidalpunkte ergiebt sich nun sofort. Eine Fläche (λ_x) des Systems $\Phi = 0$ besitzt eine Doppelcurve, wenn für diesen Parameter λ_x die Function

*) Beiläufig sei, was sofort geometrisch ersichtlich, noch bemerkt, dass das Auftreten einer continuirlichen Reihe von Cuspidalpunkten, d. h. eine Rückkehrcurve *keine* Aenderung der Charakteristik hervorruft.

Φ sammt ihren ersten Ableitungen nach $x, y, z, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ für ein einfach unendliches Werthsystem der Variablen verschwinden; für einen auf der Doppelcurve gelegenen Cuspidalpunkt verschwindet dann auch noch die Determinante der zweiten Ableitungen sammt ihren zweigliedrigen Unterdeterminanten; die Tangentialebene des Knotenpunktes ist gegeben durch:

$$\Phi_{i1}(x - x_0) + \Phi_{i2}(y - y_0) + \Phi_{i3}(z - z_0) = 0,$$

wo i beliebig 1, 2 oder 3 bedeutet, und

$$\Phi_{i1} = \lambda \Phi_{i2} = \mu \Phi_{i3},$$

insbesondere

$$\Phi_{11} = \lambda^2 \Phi_{22} = \mu^2 \Phi_{33}$$

ist. Die Entwickelung von Φ im Cuspidalpunkt beginnt mit dem Quadrate dieser Tangentialebene, etwa in der Form

$$\Phi_{11}\left[(x - x_0) + \frac{1}{\lambda}(y - y_0) + \frac{1}{\mu}(z - z_0)\right]^2.$$

In der nächsten Umgebung des singulären Punktes ist also (abgesehen vom Fortschreiten *in* der Tangentialebene) die Function Φ überall positiv bez. überall negativ, dem Vorzeichen von Φ_{11} entsprechend. Es ist dies der Bereich der aus einem Stück bestehenden Nachbarfläche F_0 (Fig. 13), während wir zu der (zweitheiligen) Nachbarfläche F_2 gelangen, wenn wir zunächst in Richtung der Tangentialebene fortschreiten (für die Entwickelung also weiterhin die aus drei linearen Factoren bestehenden Glieder dritter Dimension heranziehen). Nun wird die der Fläche $\Phi = 0$ vorangehende bez. folgende Fläche bei wachsendem Parameter λ) in erster Annäherung dargestellt durch $\Phi - d\lambda \,.\, \Phi_4 = 0$ bez. durch $\Phi + d\lambda \,.\, \Phi_4 = 0$. Die *eintheilige* Fläche F_0 der Figur ist also vorangehende bez. folgende Fläche, jenachdem für den singulären Punkt Φ_4 und Φ_{11} im Vorzeichen übereinstimmen bez. nicht übereinstimmen. *Die durch alle Cuspidalpunkte einer Doppelcurve hervorgerufene Aenderung der Charakteristik ist also durch die Summe*

$$\sum [\Phi_4 \cdot \Phi_{11}] \tag{27}$$

für den Uebergang zu der Fläche mit Doppelcurve selbst, beziehungsweise durch die doppelte Summe

$$2 \cdot \sum [\Phi_4 \cdot \Phi_{11}] \tag{28}$$

gegeben, wenn wir den Durchgang (von F_0 nach F_2 oder umgekehrt) betrachten.

b) Selbstberührungspunkte.

Auch hier beginnt die Entwickelung von Φ mit dem Quadrate

$$\Phi_{11}\left[(x - x_0) + \frac{1}{\lambda}(y - y_0) + \frac{1}{\mu}(z - z_0)\right]^2,$$

in welchem der lineare Factor die doppelt zählende Tangentialebene bezeichnet, während die Glieder dritter Ordnung diesen Factor einfach enthalten. Dabei lassen sich (wir haben die Glieder bis zum vierten Grade zu berücksichtigen) zwei getrennte Entwickelungen in dem Selbstberührungspunkte herstellen, welche (in erster Annäherung als Paraboloide) die sich berührenden Flächenmäntel ersetzen. Es ist dann zunächst zu unterscheiden, ob die Berührung der beiden Mäntel in einem isolirten Punkte erfolgt oder in einem Punkte, in welchem sich zwei reelle Zweige der Doppelcurve durchsetzen.

Für den Fall der Berührung in einem isolirten Punkte vereinigen sich (wenn wir wieder (vergl. Fig. 14[a]) die nächste Umgebung des singulären Punktes für die der besonderen Fläche vorangehende und folgende Fläche des Systems betrachten) entweder die zwei Theile der Fläche zu einem einzigen, bez. findet das umgekehrte statt, je nachdem (vgl. die vorhin bei (a) gegebene Entwickelung) das Vorzeichen von

$$(29) \qquad \Phi_4 \cdot \Phi_{11}$$

positiv oder negativ ist. Die Charakteristik ändert sich bei diesem Durchgange um -2 bez. um $+2$, während wir der zwischenliegenden Fläche mit dem singulären Punkt selbst, insofern wir die Theile derselben in dem Berührungspunkt als *nicht* zusammenhängend betrachten, die *grössere* der beiden Charakteristiken zuweisen.

Durchsetzen sich im Berührungspunkt zwei reelle Züge der Doppelcurve, dann findet (vergl. Fig. 14[b]) ein Uebergang von zwei Flächentheilen zu vier Flächentheilen oder der umgekehrte statt, je nach dem positiven bez. negativen Vorzeichen von

$$\Phi_4 \cdot \Phi_{11},$$

und damit eine Aenderung der Charakteristik um $+2$ bez. um -2, während wir diesmal der Uebergangsform selbst die *kleinere* der beiden Charakteristiken zuzuweisen haben.

c) Dreifache Punkte.

Durchsetzen sich in einem Punkte drei Mäntel der Fläche, so gehen von ihm drei Zweige der Doppelcurve aus und wir unterscheiden α) zwei der Zweige sind conjugirt imaginär, dann wird ein isolirt verlaufender Zweig der Doppelcurve von einem reellen Flächenmantel geschnitten; β) die drei Zweige sind reell, dann sind auch drei reelle Flächentheile vorhanden. Die in Fig. 15[a] und 15[b] (Tafel III) gegebene Darstellung der vorausgehenden und folgenden Flächenform zeigt, dass beidemal *beim Durchgang durch die singuläre Fläche die Charakteristik ungeändert bleibt; dass aber der singulären Fläche selbst in Fall α) eine um eins höhere, in Fall β) eine um eins niedrigere Charakteristik zu ertheilen ist.*

Diese Entwickelungen mögen genügen, um die Art des Einflusses höherer singulärer Punkte für die Charakteristik der Flächen eines Systems $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$ zu bezeichnen.

Was die Abzählung der Charakteristik einer Fläche $\varphi = 0$ betrifft, sofern wir dieselbe nach den in § 8 und 9 gegebenen Methoden durchführen, wo es sich darum handelt, die Aenderung der Charakteristik im Innern eines Flächensystems $\Psi(x, y, z, \mu) = 0$, beziehungsweise $X(x, y, z, \nu) = 0$ zu verfolgen, also mit Hülfe eines auf der Fläche verlaufenden Curvensystems, so erleidet dieselbe, sofern wir in $\varphi = 0$ Doppelcurven und singuläre Punkte der eben betrachteten Art voraussetzen, *gar keine Aenderung.* Wir haben lediglich zu beachten, dass in einer Doppelcurve sich zwei dort völlig getrennte Mäntel der Fläche durchsetzen, dass also die durch die Doppelcurve hervorgerufenen Doppelpunkte des auf φ betrachteten Curvensystems für die Charakteristik der Fläche *nicht* zu zählen sind; ebenso ergiebt die Betrachtung des Curvensystems, welches die Flächen $\Psi = 0$ bez. $X = 0$ in der Nähe eines auf $\varphi = 0$ vorhandenen Cuspidalpunktes (vergl. Fig. 16) ausschneiden, lediglich, dass dort eine Curve des Systems eine Spitze besitzt; u. s. w. Wir können allgemein den Satz aussprechen:

Singuläre Punkte des Curvensystems $\Psi = 0$ bez. $X = 0$ *auf* $\varphi = 0$, *welche durch singuläre Punkte der Fläche* $\varphi = 0$ *hervorgerufen werden*), sind für die Abzählung der Charakteristik von* φ *ohne Einfluss, so lange sie nicht eigentlichen Berührungen einer Fläche* $\Psi = 0$ *bez.* $X = 0$ *mit* $\varphi = 0$ *entsprechen; dann aber zählen sie in dem früher entwickelten Sinne.*

§ 14.

Beispiel für die Discussion einer Fläche mit umkehrbarer Indicatrix.

Um die z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems rotire ein die xy-Ebene stets berührender Kreis, dessen Radius sich proportional mit $\cos 2\varphi$ ändert, wo φ den Neigungswinkel der Ebene des Kreises gegen die x-Axe bezeichnet. Die entstehende Fläche (in Fig. 5 (Tafel II) scizzirt) hat die z-Axe zur Doppelcurve, die Punkte $z = 2$, $z = 4$ (bei specieller Wahl der Constanten) zu Cuspidalpunkten mit

*) Es ist zu beachten, dass dies nicht gilt für die auf $\varphi = 0$ durch singuläre Punkte einer Fläche des Systems $\Psi = 0$ bez. $X = 0$ hervorgerufenen singulären Punkte des Curvensystems. Ein Knotenpunkt einer Fläche $\Psi = 0$ bez. $X = 0$ z. B., der, auf $\varphi = 0$ gelegen, dort einen Doppelpunkt einer Curve des Systems hervorruft, zählt für die Charakteristik von φ im Sinne einer äquivalenten Berührung von Ψ bez. von X mit der Fläche φ.

der (yz)- bez. (xz)-Ebene als Tangentialebenen. Zwischen beiden Punkten wird die Doppelcurve von reellen Flächenmänteln durchsetzt; der sich durch's Unendliche erstreckende Theil der z-Axe — den wir für die Aufstellung der Charakteristik der Nachbarflächen als geschlossen auffassen — verläuft isolirt. Der Coordinatenanfangspunkt ist dreifacher Punkt der Doppelcurve, insofern der isolirte Zweig derselben von der Fläche (senkrecht) durchsetzt wird. Die Flächengleichung lautet:

$$\varphi \equiv (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (4x^2 + 2y^2)z = 0.$$

Betrachten wir im System

$$\varphi - \lambda = 0$$

die der obigen Fläche vorausgehende (innerhalb φ gelegene) und folgende, so bildet die erstere einen Ring, welcher den isolirten Theil der Doppelcurve von $z = 0$ bis $z = 2$ umgiebt, die letztere gleichfalls einen solchen, der zunächst kugelförmig die Fläche $\varphi = 0$ umgiebt und sich dann als unendliche Röhre um den zwischen 0 und $+4$ sich in's unendliche ziehenden Theil der z-Axe legt. Gehen wir aus etwa von der Kenntniss der Charakteristik 0 der ersteren Fläche, so zählt für den *Durchgang* zur letzteren

Cuspidalpunkt	$z = 2$	mit	$+2$,
Cuspidalpunkt	$z = 4$	mit	-2,
dreifacher Punkt	$z = 0$	mit	0,

so dass die Charakteristik der letzteren sich gleichfalls zu 0 ergiebt. Für den *Uebergang zu der singulären Fläche* selbst aber zählt

Cuspidalpunkt	$z = 2$	mit	$+1$,
Cuspidalpunkt	$z = 4$	mit	-1,
Dreifacher Punkt	$z = 0$	mit	$+1$,

so dass deren Charakteristik $= +1$ wird; in der That ist sie im Sinne der Analysis situs mit der schon in § 3 (pag. 482) gegebenen Fläche identisch.

Dabei erkennen wir hier direct aus der Abzählung in der *ungeraden Zahl,* welche wir für die Charakteristik der geschlossenen Fläche erhalten, die Fläche als eine solche *mit umkehrbarer Indicatrix.*

Lassen wir, um ein Curvensystem auf der Fläche zu fixiren, eine Ebene parallel mit der xy-Ebene über die Fläche gleiten, so zählen gleichfalls die Punkte $z = 4, 2, 0$ der z-Axe als singuläre Punkte desselben, weil hier *eigentliche* Berührungen statthaben. In $z = 4$ ist ein isolirter Punkt, in $z = 2$ ein Selbstberührungspunkt einer Curve des Systems — einem Doppelpunkte äquivalent —, in $z = 0$ wieder ein isolirter Punkt vorhanden. Den Abzählungen des § 9 entsprechend zählen die Punkte mit $+1$, -1, $+1$ für die Charakteristik der über der beweglichen Ebene entstehenden Fläche, so dass deren Charakteristik sich wieder als $+1$ ergiebt.

Hiermit seien die auf die Herleitung einer charakteristischen Zahl für ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten bezüglichen Untersuchungen abgeschlossen. Ein folgender Aufsatz wird sich mit den analogen Entwickelungen für drei- und mehr-dimensionale Mannigfaltigkeiten beschäftigen.

München, im März 1888.