

# Beiträge zur Analysis situs.

## II. Aufsatz.

### Mannigfaltigkeiten von $n$ Dimensionen.

Von

WALTHER DYCK in München.

---

#### Einleitung.

In den vorangehenden Untersuchungen zur Analysis situs\*) wurde die Frage nach absoluten Charakteristiken für ein-, zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten zunächst in der *geometrischen* Herleitung charakteristischer Zahlen behandelt unter Zugrundelegung gewisser in ganz allgemeiner Form gekennzeichneter Umformungsprocesse. Die *analytische* Formulirung derselben, für durch Gleichungen und Ungleichungen zwischen reellen Variablen gegebene Mannigfaltigkeiten führte dann, unter Zugrundelegung *continuirlicher* Entstehungs- und Umformungsprocesse zu der Darstellung der erhaltenen Zahlen als *Kronecker'scher Charakteristiken* gewisser Functionensysteme\*\*).

*Es handelt sich jetzt darum, die analogen Betrachtungen für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen zu entwickeln.*

Für eine schliessliche analytische Formulirung ist dabei in den Kronecker'schen Untersuchungen der unmittelbare Weg gewiesen. Wesentlich aber erscheint es, auch die allgemeine, in den früheren Untersuchungen für Mannigfaltigkeiten von ein bis drei Dimensionen in rein geometrischer Form gegebene Herleitung der charakteristischen Zahlen auch für Mannigfaltigkeiten von höheren Dimensionen zu

---

\*) Beiträge zur Analysis situs. I. Aufsatz: Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Diese Annalen Bd. 32. p. 457 ff. (In der Folge nur durch Band- und Seitenzahl citirt). — Ferner: Beiträge zur Analysis situs I, II, III in den Berichten der k. sächs. Ges. d. W., Juli 1885, Februar 1886, März 1887.

\*\*\*) Man vergl. bezüglich der dabei zu Grunde gelegten, auch in der Folge massgebenden Principien Annalen 32, Einleitung, ebenda auch die auf die Kronecker'schen Abhandlungen bezüglichen Literaturangaben.

betrachten. Muss dabei selbstverständlich von der Anschauung abstrahiert werden und sind gleich von Anfang an Elementarmannigfaltigkeiten und Elementaroperationen in analytischer Definition einzuführen, so ist es doch möglich, gewisse Analogien mit den uns geometrisch zugänglichen Gebilden und Operationen besonders hervortreten zu lassen, die wie ich glaube die Uebersicht über jene mehrdimensionalen Gebilde erleichtern. In diesem Sinne mag es auch gerechtfertigt erscheinen, wenn geometrische Bezeichnungen auch für diese mehrdimensionalen Gebilde nicht ganz unterdrückt sind.

Der Aufsatz beschäftigt sich zunächst — *im I. Abschnitte* — in allgemeinsten Form mit der Definition der Umformungsprocesse, welche wir zur Umgestaltung der als Ausgangsformen zu Grunde gelegten einfachsten Mannigfaltigkeiten („Elementarmannigfaltigkeiten“) verwenden; mit den Regeln ihrer Abzählung und der hieraus entspringenden Definition der charakteristischen Zahlen. Die Abzählungen werden dann an Beispielen durchgeführt, nämlich 1) an den im Gebiete von  $n$  von einander unabhängigen Variablen durch eine Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

gegebenen „sphärischen“ Mannigfaltigkeiten. 2) an den „projectiven“ Mannigfaltigkeiten von  $n$  Dimensionen und 3) an gewissen Mannigfaltigkeiten vierten Grades, die wir deshalb ausführlich betrachten, weil wir auf sie die im folgenden Abschnitt zu behandelnden Fälle von singulären Stellen einer Mannigfaltigkeit und ebenso auch die im III. Abschnitte zu untersuchenden Mannigfaltigkeiten zweiten Grades zurückführen.

*Im II. Abschnitte* betrachten wir speciell Mannigfaltigkeiten von  $n - 1$ , bez. von  $n$  Dimensionen, die wir in dem Gebiete der reellen, von einander unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  durch eine Gleichung  $f = 0$ , bez. durch eine Ungleichung  $f < 0$  gegeben voraussetzen. Für dieselben legen wir, analog wie in den früheren Aufsätzen, *continuirliche* Entstehungs- und Umformungsprocesse zu Grunde. Damit wird die Abzählung der für diese Mannigfaltigkeiten charakteristischen Zahlen auf die Betrachtung der *singulären Stellen* jener Umformungsgebilde und die Feststellung des „*Punktcharakters*“ derselben geworfen und führt damit wieder direct auf *Kronecker'sche Charakteristiken gewisser Functionensysteme*.

Ich beschränke mich hier auf die einfachst möglichen *continuirlichen* Umformungsprocesse. Es lassen sich an ihnen die principiell wichtigen Ueberlegungen am übersichtlichsten entwickeln; andererseits bieten die Verallgemeinerungen, wie ich sie bei 1, 2 und 3 Dimensionen in meinen früheren Untersuchungen ausgeführt habe, auch für mehr Dimensionen keine neuen Schwierigkeiten.

Die Zurückführung unserer charakteristischen Zahlen auf Kronecker'sche Charakteristiken liefert uns hier den einzigen Beweis für die Unabhängigkeit der von uns definirten Zahlen vom jeweiligen Entstehungsprocess der Mannigfaltigkeit. Im Gebiete von ein und zwei Dimensionen war es nämlich noch möglich, jenen Beweis auch unmittelbar zu führen durch Herleitung kanonischer Formen für alle möglichen, im Sinne der Analysis situs verschiedenen (d. h. nicht umkehrbar eindeutig auf einander beziehbaren) Mannigfaltigkeiten, an welchen kanonischen Formen die charakteristischen Zahlen sofort abgelesen werden konnten. Dieser directe Beweis versagt hier und stösst, da ja mit jener einen charakteristischen Zahl die für eine völlige Charakteristik nothwendigen Bestimmungen keineswegs erschöpft sind\*), auf Schwierigkeiten, deren Ueberwindung mir zunächst nur noch im Gebiete von drei Dimensionen (auf welches ich in einem weiteren Aufsatze näher einzugehen beabsichtige) möglich erscheint.

In einem III. Abschnitte gehe ich auf die durch Gleichungen zweiten Grades definirten Mannigfaltigkeiten näher ein, für welche sich die Charakteristik aus den vorhergehenden Betrachtungen auf einfachste Weise ergibt. Gerade hier glaube ich erweist sich das Hervortretenlassen der Analogie mit den geometrischen Verhältnissen der Gebiete von ein, zwei und drei Dimensionen als förderlich für die Entwicklung der „Analysis situs“ jener Gebilde. Es gelingt auf die übersichtlichste Weise die in

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - \dots - x_n^2 - 1 = 0$$

durch die verschiedenen Werthe von  $\nu$  unterschiedenen  $\frac{n}{2}$  bez.  $\frac{n+1}{2}$  Fälle mit Hilfe der Reihe

$$\xi_1^2 = 1, \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1, \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1, \dots \left( \text{bis } \frac{n}{2}, \text{ bez. } \frac{n+1}{2} \right)$$

von sphärischen Mannigfaltigkeiten zu charakterisiren. Es ergeben sich dabei, wie noch bemerkt sei, die Mannigfaltigkeiten zweiten Grades von gerader Dimension als solche „mit nicht umkehrbarer Indicatrix“, während diejenigen von ungerader Dimension (mit Ausnahme der einen sphärischen  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ ) sämtlich Mannigfaltigkeiten „mit umkehrbarer Indicatrix“ sind.

---

\*) Man vergl. hierzu die Entwicklungen des Aufsatzes III in den Berichten d. sächs. Ges. (März 1887).

## Inhalts-Übersicht.

	Seite
Einleitung . . . . .	273
<b>I. Abschnitt.</b>	
<b>Definition und Herleitung der Charakteristik <math>n</math>-dimensionaler Mannigfaltigkeiten . . . . .</b>	<b>277</b>
§ 1. Allgemeine Festsetzungen über die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten $M_n$ . . . . .	277
§ 2. Die Entstehungs- und Umformungsprocesse für die Mannigfaltigkeiten. Fixirung ihrer Abzählung an Elementarmannigfaltigkeiten . . . . .	278
§ 3. Verallgemeinerung auf beliebige Mannigfaltigkeiten . . . . .	281
§ 4. Beispiele: 1. Die sphärischen Mannigfaltigkeiten $S_n$ . 2. Die linearen projectiven Mannigfaltigkeiten $P_n$ . . . . .	282
§ 5. Beispiele (Fortsetzung): 3. Ein Büschel von gewissen Mannigfaltigkeiten vierten Grades $R_{n-1}$ . . . . .	284
§ 6. Beispiel 3. Fortsetzung: Abzählung der Charakteristik . . . . .	287
<b>II. Abschnitt.</b>	
<b>Zurückführung der Abzählungen auf Kronecker'sche Charakteristiken für den Fall von Mannigfaltigkeiten <math>M_{n-1}</math> bez. <math>M_n</math>, die im Gebiete von <math>n</math> von einander unabhängigen Variablen durch eine Gleichung <math>f = 0</math>, bez. eine Ungleichung <math>f &lt; 0</math> gegeben sind . . . . .</b>	<b>289</b>
A. Erste Abzählung mit Hilfe von singulären Stellen im Gebiete $f < 0$ .	
§ 1. Die singulären Stellen. Vorbereitung der Abzählung. . . . .	289
§ 2. Bestimmung des Punktcharakters der singulären Stellen durch Zurückführung auf die Abzählungen des § 6 (Abschnitt I). . . . .	293
§ 3. Analytische Formulirung. Summation über die Punktcharaktere . . . . .	294
§ 4. Allgemeine Folgerungen. . . . .	296
B. Zweite Abzählung mit Hilfe von singulären Stellen im Gebiete $f = 0$ .	
§ 5. Umformung der Charakteristik. Die singulären Stellen auf $f = 0$ . . . . .	298
§ 6. Punktcharaktere der verschiedenen Stellen. Summenformeln . . . . .	301
§ 7. Zusammenstellung. Relationen zwischen den singulären Punkten . . . . .	304
§ 8. Schlussbemerkungen . . . . .	306
<b>III. Abschnitt:</b>	
<b>Analysis situs der Mannigfaltigkeiten zweiten Grades . . . . .</b>	<b>308</b>
§ 1. Kanonische Formen für die Mannigfaltigkeiten zweiten Grades. Unterscheidung derjenigen mit nicht umkehrbarer und derer mit umkehrbarer Indicatrix . . . . .	308
§ 2. Beispiel: Die zwei- und drei-dimensionalen $M^2$ . . . . .	311
§ 3. Abzählung der Charakteristik . . . . .	313

## I. Abschnitt.

Definition und Herleitung der Charakteristik  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten.

## § 1.

Allgemeine Festsetzungen  
über die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten  $M_n$ .

Wir gehen aus von der durch  $n$  von einander unabhängige endliche\*) reelle Variable  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gebildeten Mannigfaltigkeit von Werthsystemen („Punkten“)  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Die „Umgebung“ jedes Punktes“  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  derselben ist durch eine Ungleichung:

$$\sum (x_i - \bar{x}_i)^2 < r^2$$

bezeichnet und soll eine *Elementarmannigfaltigkeit  $n^{\text{ter}}$  Dimension  $E_n$*  heissen. Ebenso bezeichnen wir alle auf eine solche  $E_n$  umkehrbar eindeutig und stetig beziehbaren Werthsysteme  $(x_i)$  als *Elementarmannigfaltigkeiten  $E_n$* .

Solche sind z. B. die durch die Ungleichungen

$$x_1 < a, \quad x_2 < b \dots x_n < k,$$

in welchen  $a, b \dots k$  endliche reelle Zahlen bedeuten, definirten Werthsysteme der  $(x_i)$ .

Weiter (wie wir mit Rücksicht auf spätere Anwendungen hervorheben) die durch die Ungleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 < 1, \quad x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2 + \dots + x_n^2 < 1$$

gegebenen, in welchen also den Punkten einer Elementarmannigfaltigkeit  $E_r$  zu einander congruente Mannigfaltigkeiten  $E_{n-r}$  so zugeordnet sind, dass den benachbarten Punkten von  $E_r$  benachbarte Mannigfaltigkeiten  $E_{n-r}$  eindeutig entsprechen.

Noch allgemeiner ist in unserem Systeme der  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  durch die Ungleichungen

$$\sum x_i^2 < 1, \quad \sum x_k^2 < 1 \dots \sum x_m^2 < 1,$$

wobei *alle*  $x$  je einmal oder in beliebig vielen der Ungleichungen vorkommen, eine  $E_n$  defnirt.

In einfachster Form geben wir die  $E_n$  durch die Ungleichung

$$(1) \quad \sum_1^n x_i^2 < 1.$$

\*) Wegen gewisser Festsetzungen bezüglich unendlich grosser Werthsysteme der  $x$  vergl. § 4 (pag. 282).

Ihre Begrenzung ist dargestellt durch die Gleichung

$$(2) \quad \sum_1^n x_i^2 = 1,$$

die wir in dieser speciellen Form als eine „sphärische“ Mannigfaltigkeit von  $(n - 1)$  Dimensionen  $S_{n-1}$ , mit dem Mittelpunkt

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

bezeichnen. Die Begrenzung jeder andern  $E_n$  ist umkehrbar eindeutig und stetig auf diese  $S_{n-1}$  beziehbar.

Die Abzählungen, die wir im Folgenden für Mannigfaltigkeiten  $n^{\text{ter}}$  Dimension  $M_n$  festsetzen, beziehen sich stets auf *reguläre Mannigfaltigkeiten*, d. h. solche, für welche die Umgebung eines inneren Punktes stets durch eine  $E_n$  dargestellt ist; die Begrenzung (sofern es sich um nicht geschlossene Mannigfaltigkeiten handelt) setzen wir ebenso als reguläre Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$  voraus. Dabei aber ist es zweckmässig, Mannigfaltigkeiten von niedrigerer Dimension  $\kappa$   $M_\kappa$  als Grenzfälle von Mannigfaltigkeiten  $M_n$  zu betrachten, insofern wir gerade die Vereinigung bez. Trennung einer Mannigfaltigkeit  $M_n$  längs den Punkten einer enthaltenen Mannigfaltigkeit  $M_\kappa$  zur Umgestaltung der ursprünglichen  $M_n$  verwenden. Die Art nun, wie wir eine solche im Innern der  $M_n$  enthaltene Mannigfaltigkeit  $M_\kappa$  als Mannigfaltigkeit  $n^{\text{ter}}$  Dimension aufzufassen haben, ist eine völlig bestimmte und am einfachsten dadurch zu bezeichnen, dass wir eine Elementarmannigfaltigkeit  $E_n$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2 - \varrho^2 < 0$$

mit ihrem Mittelpunkt die  $M_\kappa$  durchlaufen lassen; das dann von der  $E_n$  bestrichene Gebiet ist die Mannigfaltigkeit  $n^{\text{ter}}$  Dimension, welche der  $M_\kappa$  entspricht; die „Envelope“ der  $E_n$ . — wenn dieser sofort analytisch umzusetzende geometrische Ausdruck gestattet ist — die Begrenzung jenes Gebietes von  $n$  Dimensionen.

## § 2.

**Die Entstehungs- und Umformungsprozesse für die Mannigfaltigkeiten.  
Fixirung ihrer Abzählung an Elementarmannigfaltigkeiten.**

Wir legen geradezu die Prozesse des Zerschneidens bez. Vereinigens einer Elementarmannigfaltigkeit  $E_n$  in den Punkten einer  $E_\kappa$  — die dann in dem eben bezeichneten Sinne als ein solches Grenzgebilde einer  $n$  dimensionalen Mannigfaltigkeit aufzufassen ist — zu Grunde, um aus der  $E_n$  Mannigfaltigkeiten  $M_n$  entstehen zu lassen. Indem wir

für diese Prozesse (und zwar in der sogleich noch zu erörternden typischen Form) die Bezeichnung

$$\mp E_x$$

einführen, können wir für die betreffende Mannigfaltigkeit eine ihre Entstehungsweise andeutende symbolische Gleichung

$$(1) \quad M_n = E_n + \sum (\mp E_x)$$

aufstellen, wo sich die Summation auf alle angewandten Umformungen  $\mp E_x$  (wo  $x$  die Zahlen  $0, 1 \dots n - 1$  bedeuten kann) erstreckt.

Die Mannigfaltigkeit  $M_n$  ist durch die obige Formel keineswegs definiert; für ein und dieselbe  $M_n$  sind überdies noch die verschiedensten Umformungsprozesse denkbar, welche dieselbe aus einer  $E_n$  entstehen lassen. Weiter kann ein Process  $\mp E_x$  auf verschiedene Mannigfaltigkeiten angewandt noch ganz verschiedene Umformungen derselben zur Folge haben. Wir legen aber, in Analogie mit den früheren Untersuchungen\*) in der nachfolgend präzisirten Form eine ganz bestimmte Abzählung der Prozesse  $\mp E_x$  zu Grunde, an der wir festhalten auch wenn die Wirkung jener Umformungen verschieden ist von derjenigen, welche die Abzählung geliefert hat. Der symbolischen Gleichung (1) lässt sich dann eine Summenformel über die einzelnen den Processen  $\mp E_x$  zugeordneten Zahlen an die Seite setzen und diese ist es, welche wir als Charakteristik der Mannigfaltigkeit  $M_n$  bezeichnen. Die kanonische Form, in welcher wir — für die zu treffenden Abzählungen — das Ausschneiden (bez. Einfügen) einer Mannigfaltigkeit  $E_x$  aus einer Mannigfaltigkeit  $M_n$  stets vornehmen, ist nun die, bei welcher die („sphärische“) Begrenzung  $S_{x-1}$  der  $E_x$  ganz der Begrenzung der  $M_n$  angehört. Für die Abzählung der in dieser Form durch

$$\mp E_x$$

bezeichneten Prozesse setzen wir (wie früher) fest:

1. Jeder Elementarmannigfaltigkeit  $E_n$  kommt die charakteristische Zahl  $+1$  zu.

2. Jede Umformung einer  $M_n$ , die das Entstehen einer  $E_n$  hervorruft, wird entsprechend mit  $+1$  gezählt, umgekehrt, jedes Verschwinden einer  $E_n$  mit  $-1$ .

Diese Festsetzungen führen uns sofort dazu, jedem Prozesse  $\mp E_x$  für die Umgestaltung einer  $M_n$  eine ganz bestimmte Zahl zuzuweisen, indem wir für's erste unsere Prozesse  $\mp E_x$  dazu verwenden, eine Elementarmannigfaltigkeit  $E_n$  in zwei Stücke  $E_n$  zu zerspalten. Dies gelingt auf die einfachste Weise:

\*) Vergl. Annalen 32, pag. 461 ff.

Wir zerschneiden zunächst die Elementarmannigfaltigkeit  $E_n$ :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$$

durch die Elementarmannigfaltigkeit  $E_{n-1}$ :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1 \quad x_n = 0;$$

sie zerfällt in die beiden Mannigfaltigkeiten  $E_n$ :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1 \quad x_n < 0$$

und

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1 \quad x_n > 0.$$

Wir haben — die Begrenzung der  $E_{n-1}$  gehört der Begrenzung der ursprünglichen  $E_n$  an, es handelt sich also um die kanonische Zerschneidung durch die  $E_{n-1}$  — die symbolische Gleichung

$$E_n - E_{n-1} = 2E_n,$$

und schliessen daraus: *Der Process*

$$- E_{n-1} \text{ ist mit } + 1$$

für die Ableitung einer Charakteristik einer  $M_n$  zu zählen. Umgekehrt zählt:

$$+ E_{n-1} \text{ mit } - 1.$$

Die Ausschneidung der  $E_{n-1}$  kann nun aber ihrerseits wieder dadurch erfolgen, dass wir zunächst die  $E_{n-2}$ :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-2}^2 < 0, \quad x_{n-1} = 0, \quad x_n = 0$$

ausschneiden, und dann die beiden  $E_{n-1}$ :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1 \quad \begin{cases} x_{n-1} > 0 & x_n = 0, \\ x_{n-1} < 0 & x_n = 0. \end{cases}$$

Wir formuliren den Process analog wie oben durch:

$$E_n - E_{n-2} - 2E_{n-1} = 2E_n$$

und erkennen im Vergleich mit oben, dass

$$\mp E_{n-2} \text{ mit } \mp 1$$

für die  $M_n$  zu zählen ist. Indem wir die Operation  $- E_{n-2}$  nun wieder analog zerlegen und so fortfahren, gelangen wir allgemein zu der symbolischen Formel:

$$E_n - E_x - 2E_{x+1} - \dots - 2E_{n-1} = 2E_n$$

und erhalten für die Abzählung des Ausschneidens bez. Einfügens einer  $E_x$  die Regel: *Der Process*

$$\mp E_x \text{ zählt mit } \mp (-1)^{n-x}$$

für die Charakteristik einer  $M_n$ .

Indem wir bei dieser Abzählung für die Umgestaltung einer Mannigfaltigkeit  $M_n$  die Fälle  $n$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right.$  unterscheiden, ergibt sich\*):

\*) Vergl. hier und für das Folgende die Sätze (1), (2), (3) Annalen 32, pag. 475, 476.

Das Ausschneiden einer  $E_x$  aus einer geraden  $M_n$  zählt  $\mp 1$ ;  
 je nachdem  $x$   $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$  ist.

Das Ausschneiden einer  $E_x$  aus einer ungeraden  $M_n$  zählt  $\pm 1$ ;  
 je nachdem  $x$   $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$  ist.

Der umgekehrte Process  $+ E_x$  zählt im umgekehrten Sinne.

§ 3.

Verallgemeinerung auf beliebige Mannigfaltigkeiten.

Einer Mannigfaltigkeit  $M_n$  also, die ihrer Entstehung aus einer  $E_n$  nach durch die oben angegebene symbolische Form:

$$(1) \quad M_n = E_n + x \sum (\mp E_x)$$

bezeichnet werden kann, ist nach unserem Princip eine Zahl  $K_n$  zuzuweisen:

$$(2) \quad K_n = 1 + x \sum \mp (-1)^{n-x}.$$

Diese Formel können wir noch erweitern. Wir denken uns die  $M_n$  durch Ausschneiden bez. Einfügen beliebiger Mannigfaltigkeiten  $M_x$  umgeformt. Diese letzteren sind ihrerseits wieder aus Mannigfaltigkeiten  $E_x$  durch Umformung mittelst Mannigfaltigkeiten  $E_i$  entstanden:

$$M_x = E_x + i \sum (\mp E_i)$$

und somit gehören ihnen Zahlen

$$K_x = 1 + i \sum \mp (-1)^{x-i}$$

zu. Nehmen wir nun an, dass die Begrenzungsmanigfaltigkeit  $M_{x-1}$  der  $M_x$  ganz der Begrenzung der  $M_x$  angehört, und betrachten wir wieder die in dieser Form als kanonisch bezeichnete Operation  $\mp M_x$ , so sind die auf die  $M_x$  angewandten kanonischen Zerschneidungen  $\mp E_i$  auch kanonische Zerschneidungen für die  $M_n$ , und die Operation

$$\mp M_x$$

ist für die  $M_n$  mit

$$\mp (-1)^{n-x} \cdot K_x$$

zu zählen. Gehört aber ein Theil  $M'_{x-1}$  der Begrenzung der  $M_x$  nicht auch zur Begrenzung der  $M_n$  und sei etwa die Operation  $- M_x$  zu vollziehen, so ist zunächst dieser Theil  $M'_{x-1}$  zur Begrenzung der  $M_x$  zu ziehen durch die Operation  $- M'_{x-1}$ , (welche in analoger Behandlung einen bestimmten Beitrag zur Charakteristik  $K_n$  liefert); nach dieser Operation  $- M'_{x-1}$  erscheint dann  $- M_x$  in kanonischer Form u. s. f.

Dabei sei noch bemerkt, dass wenn es sich um die Umformung einer *geschlossenen* Mannigfaltigkeit handelt, eine „kanonische Zerschneidung“ mit der Operation  $-E_0$  („Punktirung“) zu beginnen hat, durch welche wir zunächst der Mannigfaltigkeit eine (sphärische) Begrenzung ertheilen, von der aus die weitere Zerschneidung erfolgen kann.

So übersehen wir, dass wir der symbolischen Entstehungsformel einer Mannigfaltigkeit  $M_n$

$$M_n = E_n + \ast \sum (\mp M_x)$$

oder (indem wir unter den  $M_x$  auch die Ausgangsmannigfaltigkeit  $E_n$  einbegreifen) kürzer:

$$(3) \quad M_n = \sum (\mp M_x)$$

die Abzählungsformel für eine Charakteristik  $K_n$ :

$$K_n = 1 + \ast \sum (\mp (-1)^{n-x} \cdot K_x)$$

beziehungsweise kürzer:

$$(4) \quad K_n = \sum (\mp (-1)^{n-x} \cdot K_x)$$

an die Seite setzen können.

#### § 4.

Beispiele: 1. Die sphärischen Mannigfaltigkeiten  $S_n$ . 2. Die linearen projectiven Mannigfaltigkeiten  $P_n$ .

Das hiermit gewonnene Princip der Abzählung führen wir zunächst an verschiedenen Beispielen durch.

1. Eine sphärische Mannigfaltigkeit  $S_n$  von  $n$  Dimensionen, ist im Sinne der Analysis situs äquivalent mit einer linearen Mannigfaltigkeit  $L_n$  von  $n$  Dimensionen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , soferne wir die unendlich grossen Werthsysteme der  $x_i$  zu einem einzigen zusammenfassen.\*) Für sie ergibt sich sofort, da das Ausschneiden eines Punktes die Mannigfaltigkeit in eine  $E_n$  verwandelt, die symbolische Gleichung:

$$S_n - E_0 = E_n;$$

da aber  $-E_0$  mit  $\mp 1$  zu zählen ist, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade, so folgt, je nach dieser Unterscheidung von  $n$

$$(1) \quad S_n = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$$

\*) In der Folge sei stets mit  $L_n$  die lineare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem unendlich weiten Punkt bezeichnet, im Gegensatz zu der sogleich zu besprechenden linearen „projectiven“ Mannigfaltigkeit  $P_n$ . Für die Umformung der  $L_n$  in eine  $S_n$  mit Hilfe der „Transformation durch reciproke Radien“ vergl. z. B. die auf  $n-1$  Dim. bezüglichen Formeln auf pag. 293.

2. Fasst man dagegen die Werthesysteme der  $n$  unabhängigen Variablen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bezüglich ihres Verhaltens für unendlich grosse Werthe der  $x_i$  so auf, dass man diese je nach dem Werthe der Verhältnisse dieser Grössen unterscheidet — die dann ihrerseits ein lineares Werthsystem von  $n - 1$  Dimensionen bilden, für welches die gleichen Festsetzungen getroffen seien — so gelangt man zu folgender Abzählung. Es sei die so definirte  $M_n$  als „projective Mannigfaltigkeit“  $P_n$  (in aus den räumlichen Vorstellungen übertragenem Sinne) bezeichnet. Das Ausschneiden aller unendlichen Werthsysteme der  $(x_i)$  kann dann als Entfernen einer  $P_{n-1}$  bezeichnet werden, durch welches die  $P_n$  in eine  $E_n$  verwandelt wird:

$$P_n - P_{n-1} = E_n$$

Dies Ausschneiden der  $P_{n-1}$  kann nun seinerseits wieder ersetzt werden nach der symbolischen Beziehung:

$$P_{n-1} - P_{n-2} = E_{n-1}$$

und ebenso hat man wieder

$$P_{n-2} - P_{n-3} = E_{n-2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_2 - P_1 = E_2,$$

$$P_1 - P_0 = E_1,$$

und schliesslich:

$$P_0 = E_0.$$

Die Addition der sämtlichen Gleichungen führt auf

$$P_n = E_n + E_{n-1} + E_{n-2} + \dots + E_1 + E_0;$$

da nun bei der Abzählung der  $E_n$  je zwei Zahlen  $\pm 1$  sich zerstören, folgt

$$(2) \quad P_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist. —

Die Mannigfaltigkeiten  $P_n$  gerader Dimension erweisen sich als „Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer Indicatrix“. Dies ist, wenn wir die Definition solcher Mannigfaltigkeiten direct aus dem uns geläufigen Verhalten der entsprechenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten (vergl. etwa Annalen 32 pag. 479) übertragen, dadurch zu erweisen, dass wir\*) ein „Cöordinatensystem“ von  $n$  Axen mit bestimmten

\*) Es sei in dieser Entwicklung zur Kürze eine mehr geometrische Rede-weise gestattet. In analytischer Form lässt sich unter zu Grundlegung eines ersten Bezugssystemes von Coordinaten  $\xi_i$  eine continuirliche Veränderung von Coordinatenrichtungen längs eines geschlossenen Weges durch eine lineare Transformation der  $\xi_i$  mit einem Parameter fixiren. Hat dann nach Durchlaufung des Weges eine Anzahl von Coordinatenaxen ihre ursprüngliche Lage wieder erreicht,

„positiven“ Richtungen in unserer Mannigfaltigkeit annehmen und nun einen geschlossenen Weg in derselben angeben, auf welchem nach einmaliger Durchlaufung die Richtungen einer ungeraden Anzahl von Axen in die entgegengesetzten verwandelt erscheinen. Wir übersehen dies hier am einfachsten aus dem Umstande, dass wir unsere  $P_n$  auch, dadurch aus der  $E_n$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$$

herstellen können, dass wir je einen Punkt:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$$

der sphärischen Begrenzung von  $E_n$  seinem diametral gegenüberliegenden

$$-\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \dots, -\bar{x}_n$$

zuordnen. Die Begrenzung schliesst sich dann in einer  $P_{n-1}$  zusammen. ( $n-1$ ) im Punkte  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  in der Begrenzung fixirten Richtungen, die wir am einfachsten als orthogonales Axensystem der tangentialen linearen Mannigfaltigkeit

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n - 1 = 0$$

wählen können, entsprechen nun im Punkte  $-\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \dots, -\bar{x}_n$  gerade die *entgegengesetzten* Richtungen. Durchlaufen wir also mit diesem Axensystem den durch die gerade Verbindungslinie der beiden Gegenpunkte bezeichneten geschlossenen Weg [wobei dieser radius vector die  $n^{\text{te}}$  Coordinatenaxe für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in unserer Mannigfaltigkeit abgiebt], so werden auf demselben  $n-1$  Richtungen in die entgegengesetzten verwandelt. *Somit sind die projectiven Mannigfaltigkeiten  $P_n$  gerader Dimension solche mit umkehrbarer Indicatrix*, während die von ungerader Dimension, bei welchen sich auf dem bezeichneten Wege eine *gerade* Anzahl von Coordinatenrichtungen umkehren, und wie direct ersichtlich auch keine *anderen* Wege der verlangten Eigenschaft möglich sind, als solche mit nicht umkehrbarer Indicatrix zu bezeichnen sind.

## § 5.

**Beispiele (Fortsetzung). 3. Ein Bündel von gewissen Mannigfaltigkeiten vierten Grades  $R_{n-1}$ .**

Wir betrachten als drittes Beispiel ein einfach unendliches Bündel von Mannigfaltigkeiten  $R_{n-1}$ , welche lückenlos und einfach die durch

so hat ein auf sie bezüglicher Theil der Determinante der linearen Transformation wieder seinen Ausgangswerth erlangt und zwar mit dem gleichen bez. entgegengesetzten Vorzeichen, je nachdem eine gerade bez. ungerade Anzahl dieser Axen dabei ihre Richtung in die entgegengesetzte verwandelt haben.

das System der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gegebene Ausgangsmannigfaltigkeit  $L_n$  erfüllen, dergestalt, dass jedes Werthsystem  $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$  der  $L_n$  einer und nur einer  $R_{n-1}$  angehört. Unter  $\lambda$  den Parameter des Büschels verstanden, seien diese  $R_{n-1}$  durch die Gleichung gegeben:

$$(1) \quad \left( \sum_1^n x_i^2 + 1 \right)^2 - (2 + \lambda)^2 \sum_1^v x_i^2 = 0.$$

Für  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$  ergeben sich die zwei reellen Grenzmannigfaltigkeiten des Büschels, nämlich einmal die sphärische Mannigfaltigkeit

$$(2a) \quad \sum_1^v x_i^2 - 1 = 0, \quad x_{v+1} = 0, \quad x_{v+2} = 0, \dots, \quad x_n = 0$$

von  $v - 1$  Dimensionen:  $S_{v-1}$ ; dann die lineare Mannigfaltigkeit

$$(2b) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \dots, \quad x_v = 0$$

von  $n - v$  Dimensionen:  $L_{n-v}$ .

Eine beliebige der Mannigfaltigkeiten  $R_{n-1}$  bezeichnen wir am besten durch die beiden Systeme sphärischer Mannigfaltigkeiten, welche dieselbe lückenlos und einfach überdecken:

Einmal nämlich können wir jedem Punkte der eben (2a) genannten sphärischen Mannigfaltigkeit  $S_{v-1}$  eine auf der  $R_{n-1}$  gelegene sphärische Mannigfaltigkeit  $S_{n-v}$  zuweisen. Man lege nämlich durch einen Punkt  $A$

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_v; \quad x_{v+1} = 0, \quad x_{v+2} = 0 \dots x_n = 0$$

der  $S_{v-1}$ , für welchen also

$$\sum_1^v \bar{x}_i^2 = 1$$

ist und durch die „Coordinatenaxen“  $x_{v+1}, x_{v+2}, \dots, x_n$  die so bestimmte  $L_{n-v+1}$ :

$$x_1 = r\bar{x}_1, \quad x_2 = r\bar{x}_2, \dots, \quad x_v = r\bar{x}_v;$$

dieselbe schneidet unsere  $S_{v-1}$  in den beiden Punkten  $A, A'$

$$x_i = \bar{x}_i \quad \text{und} \quad x_i = -\bar{x}_i$$

und die  $R_{n-1}$  nach zwei in der Gleichung\*):

$$\left( r^2 \cdot \sum_1^v \bar{x}_i^2 + \sum_{v+1}^n x_i^2 + 1 \right)^2 - (2 + \lambda)^2 \cdot r^2 \cdot \sum_1^v \bar{x}_i^2 = 0$$

enthaltenen sphärischen Mannigfaltigkeiten  $S_{n-v}$ , welche wir eindeutig je diesen beiden Punkten zuweisen.

\*) Der Radius vector  $r$  ist als Coordinatenaxe mit den  $x_{v+1}, x_{v+2}, \dots, x_n$  in der  $L_{n-v}$  eingeführt.

Die  $R_{n-1}$  erscheint so lückenlos und einfach von einem  $(n-1)$ -fach unendlichen System von Mannigfaltigkeiten  $S_{n-\nu}$  überdeckt.

Als Innenraum der  $R_{n-1}$  sei der Theil der Mannigfaltigkeit  $L_n$  bezeichnet, für welchen die linke Seite der Glg. (1) kleiner als Null ist. In demselben liegt die Mannigfaltigkeit  $S_{\nu-1}$  (2a), von welcher jeder Punkt  $\bar{x}_i$  das Innengebiet  $E_{n-\nu+1}$  der im zugeordneten  $S_{n-\nu}$  bezeichnet. Die Gesammtheit aller dieser längs der  $S_{\nu-1}$  angeordneten  $E_{n-\nu+1}$  erfüllt den Innenraum unserer  $R_{n-1}$  und auf jene  $S_{\nu-1}$  zieht sich derselbe für  $\lambda = 0$  zusammen.

Die ganz analoge Rolle aber ergiebt sich für die im Aussenraum einer beliebigen unserer  $R_{n-1}$  gelegene  $L_{n-\nu}$  (2b) und ein ihr zugehöriges auf der  $R_{n-1}$  gelegenes System sphärischer Mannigfaltigkeiten  $S_{\nu-1}$ .

Legt man nämlich durch einen Punkt  $B$  der  $L_{n-\nu}$ :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_\nu = 0, \quad \bar{x}_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2}, \dots, \bar{x}_n$$

und die sphärische Mannigfaltigkeit  $S_{\nu-1}$ :

$$\sum_1^\nu x_i^2 = 1, \quad x_{\nu+1} = 0 \dots x_n = 0$$

die dadurch in unserer  $L_n$  völlig bestimmte  $S_\nu$ , so schneidet dieselbe einmal die  $L_{n-\nu}$  in den 2 Punkten  $B, B'$ :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_\nu = 0, \quad \bar{x}_{\nu+1}, \bar{x}_{\nu+2}, \dots, \bar{x}_n$$

und

$$x_1 = x_2 = \dots = x_\nu = 0, \quad -\frac{\bar{x}_{\nu+1}}{\bar{r}'^2}, -\frac{\bar{x}_{\nu+2}}{\bar{r}'^2}, \dots, -\frac{\bar{x}_n}{\bar{r}'^2}$$

wo

$$\bar{r}'^2 = \bar{x}_{\nu+1}^2 + \bar{x}_{\nu+2}^2 + \dots + \bar{x}_n^2,$$

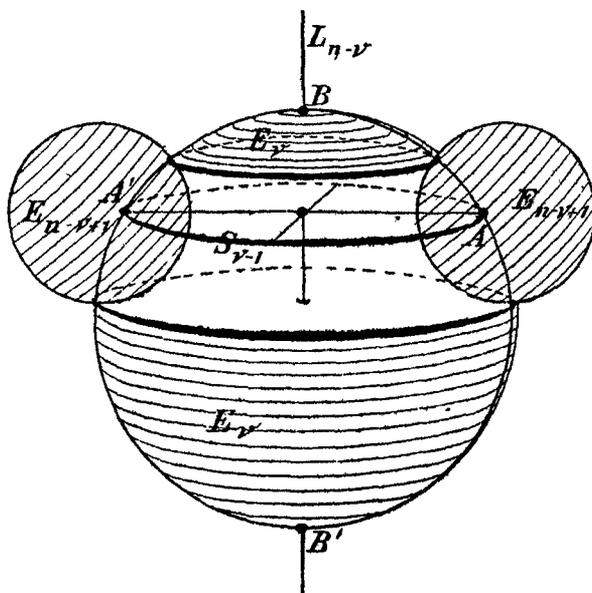
und die  $R_{n-1}$  nach zwei sphärischen Mannigfaltigkeiten  $S_{\nu-1}$ , welche wir eindeutig jenen beiden Punkten zuweisen. So erscheint die  $R_{n-1}$  auch einfach und lückenlos überdeckt von einem  $(n-\nu)$ -fach unendlichen System von  $S_{\nu-1}$ .

Der Aussenraum der  $R_{n-1}$  enthält unsere  $L_{n-\nu}$ ; jedem Punkt derselben gehört das (hier sphärisch gestaltete) Elementargebiet  $E_\nu$  zu, welches auf der oben bestimmten sphärischen Mannigfaltigkeit  $S_\nu$  von  $R_{n-1}$  ausgeschnitten wird. Die Gesammtheit aller dieser längs  $L_{n-\nu}$  angeordneten  $E_\nu$  erfüllt den Aussenraum unserer  $R_{n-1}$  und auf jene  $L_{n-\nu}$  zieht sich derselbe für  $\lambda = \infty$  zusammen.

Es sei, die Anordnung kurz zu veranschaulichen, an die Verhältnisse beim Kreisring ( $n = 3, \nu = 2$ ) erinnert. Auf demselben liegen als die zwei Systeme sphärischer Mannigfaltigkeiten  $S_{n-\nu}$  und  $S_{\nu-1}$  — die beiden Kreissysteme. Der Innenraum ist erfüllt von den längs der

Mittellinie des Ringes angeordneten Kreisscheiben ( $E_{n-\nu+1}$ ), der *Aussenraum* von Kugelabschnitten ( $E_\nu$ ) deren Mittelpunkte sich längs der Axe des Ringes (der  $L_{n-\nu}$ ) anordnen. Man vergleiche die nebenstehende Figur, die für den Ring entworfen ist, in welcher aber die allgemeinen Bezeichnungen eingetragen sind.

Fig. 1.



§ 6.

Beispiel 3, Fortsetzung: Abzählung der Charakteristik.

Mit Hülfe der so geschilderten Zusammensetzung des Innen- und Aussengebietes,  $R_n^i$  bez.  $R_n^a$  der  $R_{n-1}$  ergibt sich nun sofort die Verwandlung derselben in Elementargebiete und damit die Abzählung der zugehörigen charakteristischen Zahlen.

Die Mannigfaltigkeit  $R_n^i$  ist, wie eben abgeleitet, constituirt aus jenen  $(\nu - 1)$ -fach unendlich vielen, längs der  $S_{\nu-1}$  (2a) kontinuierlich angeordneten  $E_{n-\nu+1}$ . Schalten wir aus der  $S_{\nu-1}$  einen Punkt ( $E_0$ ) aus, so können wir dieselbe umkehrbar eindeutig beziehen auf eine  $E_{\nu-1}$ , etwa:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_\nu^2 - a < 0$$

während wir die, je einem Punkte dieser  $E_{\nu-1}$  zugeordnete  $E_{n-\nu+1}$  durch

$$\xi_{\nu+1}^2 + \xi_{\nu+2}^2 + \dots + \xi_n^2 - b < 0$$

darstellen können. Die  $R_n^i$  ist somit nach Ausscheidung der einen jenem Punkte  $E_0$  zugeordneten  $E_{n-\nu+1}$  in die durch die obigen Ungleichungen (vergl. § 1 pag. 277) gegebene  $E_n$  verwandelt. Da weiter die Ausschneidung jener  $E_{n-\nu+1}$  in der kanonischen Form — die Begrenzung der  $E_{n-\nu+1}$  gehört ganz der Begrenzung der  $R_n^i$  an — vor-



Wir halten für die sogleich zu gebende Verwendung unserer Mannigfaltigkeiten  $R_n^i$  und  $R_n^a$  die in den symbolischen Gleichungen (2) und (5) ausgedrückte einfachste Form fest als *Mannigfaltigkeiten*  $E_n$ , aus welchen eine *Elementarmannigfaltigkeit*  $E_k$  ausgeschnitten wird. Im Sinne der Analysis situs sind also unsere obigen Definitionsgleichungen äquivalent mit der einfachsten Darstellung einer solchen Mannigfaltigkeit durch:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-k}^2) (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1) < 0$$

in welcher aus der Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 < 0$$

die  $E_k$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-k} = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 < 0$$

ausgeschlossen ist.

Auf die charakteristische Zahl für die *Begrenzung* einer solchen Mannigfaltigkeit gehen wir weiter unten ein (vergl. pag. 297):

## II. Abschnitt.

**Zurückführung der Abzählungen auf Kronecker'sche Charakteristiken für den Fall von Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$ , bez.  $M_n$ , die im Gebiete von  $n$  von einander unabhängigen Variablen durch eine Gleichung  $f = 0$ , bez. eine Ungleichung  $f < 0$  gegeben sind.**

A. Erste Abzählung mit Hülfe von singulären Stellen im Gebiete  $f < 0$ .

### § 1.

Die singulären Stellen. Vorbereitung der Abzählung.

Wir gehen nunmehr dazu über, die Charakteristik aufzustellen für diejenigen begrenzten Mannigfaltigkeiten von  $n$  Dimensionen, die wir in unserer zu Grunde gelegten linearen Mannigfaltigkeit der  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  durch eine Ungleichung

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$$

definiren können und treffen gleichzeitig die Abzählung für die begrenzende Mannigfaltigkeit

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Dabei setzen wir noch voraus, dass die ersten Ableitungen  $f_1, f_2, \dots, f_n$  von  $f$  nach den  $x_i$  nur für eine *endliche* Anzahl von Werthsystemen

$(x_i)$  gleichzeitig verschwinden, und dass für dieselben nicht auch  $f = 0$  sein soll.

Analog wie in den früheren Aufsätzen für  $M_2$  und  $M_3$  betrachten wir die  $M_{n-1}$   $f = 0$  als enthalten in einem einfach unendlichen System von Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$ , und wählen für die folgenden Formulierungen auch hier wieder am zweckmässigsten das System

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$$

welches lückenlos und einfach die lineare Mannigfaltigkeit  $L_n$  der  $x_i$  erfüllt\*). Setzen wir dabei voraus, dass für den „unendlich fernen Punkt“ die Function  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  positiv sei, so können wir ebenso wie früher annehmen, dass für einen gewissen negativen Werth der Constanten  $C = C_0$  einmal die Mannigfaltigkeit  $f = C_0$  lediglich aus einem isolirten Punkte besteht, und das von hier ab, mit wachsender Constante  $C$  die Entstehung des Gebietes  $f < 0$  durch ein continuirliches „Wachsen des Innenraumes“ verfolgt werden kann; gleichzeitig entsteht dann die Mannigfaltigkeit  $f = 0$  durch successive Deformation aus  $f = C$ .

Dieser Entstehungsprocess eignet sich nun sofort für die Abzählung charakteristischer Zahlen für diese  $M_n$  ( $f < 0$ ) und die  $M_{n-1}$  ( $f = 0$ ). Eine Aenderung der Zahlen tritt nämlich sprunghaft *an den singulären Stellen* der Mannigfaltigkeiten  $f = C$  ein; es sind die Stellen im Innengebiet von  $f = 0$ , für welche

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_n = 0$$

ist (wobei die Indices die Ableitungen von  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nach den Variablen bezeichnen).

An diesen Stellen entstehen, bez. vereinigen sich Theile der Mannigfaltigkeiten  $f = C$  und sie haben wir daher in ihrem Einfluss auf die Charakteristik der  $M_n$  und  $M_{n-1}$  zu betrachten. In der Umgebung jeder solchen Stelle lässt sich nun (nach unseren früheren Voraussetzungen) das System  $f = C$  ersetzen durch ein System von Mannigfaltigkeiten zweiten Grades und daher *die Bestimmung des Punktecharakters einer solchen Stelle sofort, an der durch eine reelle lineare Transformation erhaltenen canonischen Form:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - x_{r+2}^2 - \dots - x_n^2 = \mp \varepsilon$$

\*) Wie schon in der Einleitung erwähnt, beschränken wir uns hier auf die einfachsten Entstehungsprocesse. Verallgemeinerungen, wie sie etwa für ein System

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, C) = 0,$$

welches den Parameter in beliebiger Abhängigkeit enthält, u. a. zu treffen wären, lassen sich in Analogie mit den früheren Untersuchungen (vergl. etwa die in Bd. 32, pag. 467 ff., pag. 491 ff. gegebenen Formulierungen) entwickeln.

( $\varepsilon$  sei als positive Grösse vorausgesetzt) *vornehmen*. Wir grenzen dabei den singulären Punkt

$$x_i = 0, \quad \varepsilon = 0$$

durch die sphärische Mannigfaltigkeit  $S_{n-1}$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \varrho^2$$

ab, wo  $\varrho$  einen kleinen, festen Werth bezeichnet, so zwar, dass im *Innern* dieser  $S_{n-1}$  unsere obigen Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$  mit den eben gegebenen Mannigfaltigkeiten zweiten Grades identificirt werden können.

Wir machen noch die nicht weiter beschränkende Annahme, dass in dem Intervalle von  $-\varepsilon$  bis  $+\varepsilon$  unsere Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$   $f = C$  keinen *weiteren* singulären Punkt besitzen und betrachten nun die Aenderung der charakteristischen Zahlen beim Durchgang von  $-\varepsilon$  nach  $+\varepsilon$ , wobei also der singuläre Punkt  $x_i' = 0$  zunächst *ausserhalb*, dann *innerhalb* der begrenzenden Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$  liegt.

Es sei nun, zur kürzeren Ausdrucksweise mit  $M_{n-1}^0$  die Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$  mit singulärem Punkte bezeichnet, mit  $M_{n-1}^{-\varepsilon}$  eine unmittelbar vorangehende, mit  $M_{n-1}^{+\varepsilon}$  eine unmittelbar darauf folgende. Ebenso seien die betr. Innengebiete dieser Mannigfaltigkeiten durch  $M_n^0$ ,  $M_n^{-\varepsilon}$ ,  $M_n^{+\varepsilon}$  bezeichnet.

Dann ergeben sich sofort folgende Lagenbeziehungen:

In dem Aussengebiet

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > \varrho^2$$

unserer den singulären Punkt abgrenzenden sphärischen Mannigfaltigkeit  $S_{n-1}$  ist der Verlauf der drei Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$  und ebensô der drei  $M_n$  im Sinne der Analysis situs nicht verschieden. Ebenso ist auch der Schnitt jeder der drei Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$  mit der  $S_{n-1}$  im Sinne der Analysis situs identisch. Nur die im Innengebiet der  $S_{n-1}$  liegenden Theile der drei  $M_{n-1}$  unterscheiden sich von einander; wir charakterisiren sie am einfachsten dadurch, dass wir dieselben auf die sphärische Mannigfaltigkeit  $S_{n-1}$  abbilden. Bezeichnen wir nämlich den Schnitt der  $M_{n-1}^0$  mit der  $S_{n-1}$  durch  $T_{n-2}^0$ , und die beiden Gebiete, in welche diese  $T_{n-2}^0$  die  $S_{n-1}$  trennt

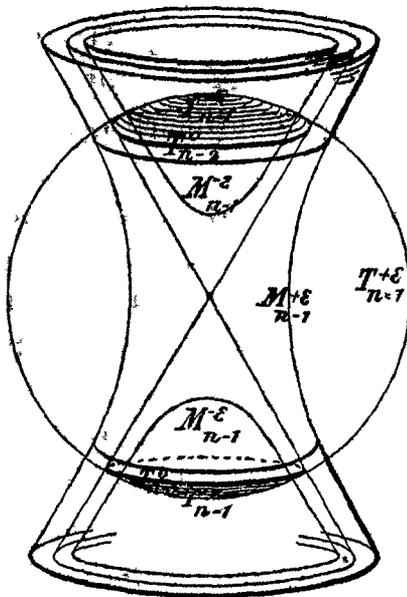
$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \varrho^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2 - x_{v+1}^2 - x_{v+2}^2 - \dots - x_n^2 \begin{cases} < 0, \\ > 0 \end{cases}$$

beziehungsweise durch  $T_{n-1}^{-\varepsilon}$  und  $T_{n-1}^{+\varepsilon}$ , so ergibt sich sofort (durch

Projection vom Mittelpunkt  $x'_i = 0$  aus), dass das im Innern der  $S_{n-1}$  gelegene Gebiet der  $M_{n-1}^{-\varepsilon}$  umkehrbar eindeutig auf das Gebiet  $T_{n-1}^{-\varepsilon}$  und ebenso das analoge Gebiet der  $M_{n-1}^{+\varepsilon}$  auf  $T_{n-1}^{+\varepsilon}$  bezogen werden kann, während die  $T_{n-2}^0$  selbst 1 —  $\infty^1$ -deutig der singulären Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}^0$  entspricht.

Fig. 2.



In nebenstehender Figur ist für  $n=3$  — an dem Uebergang

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \mp \varepsilon$$

von einem zweischaligen ( $M_{n-1}^{-\varepsilon}$ ) zu einem einschaligen ( $M_{n-1}^{+\varepsilon}$ ) Hyperboloid durch den Kegel ( $M_{n-1}^0$ )

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

die gemeinte Bezeichnung eingetragen. Das zweischalige Hyperboloid wird auf die beiden Kugelhauben ( $T_{n-1}^{-\varepsilon}$ ), das einschalige auf den ringförmigen Theil ( $T_{n-1}^{+\varepsilon}$ ) der Kugel abgebildet. —

Wir können nun wegen dieser eindeutigen Beziehung die Mannigfaltigkeiten

$M_{n-1}^{-\varepsilon}$  und  $M_{n-1}^{+\varepsilon}$ , ohne sie im Sinne der Analysis situs zu ändern, dadurch gestaltlich umformen, dass wir je die in das Innere der  $S_{n-1}$  ragenden Gebiete derselben ersetzen bez. durch die beiden auf der  $S_{n-1}$  liegenden Gebiete  $T_{n-1}^{-\varepsilon}$  und  $T_{n-1}^{+\varepsilon}$ .

Mit Umgehung der singulären Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}^0$  kann demnach auch der Uebergang von der  $M_{n-1}^{-\varepsilon}$  zur  $M_{n-1}^{+\varepsilon}$  im Sinne der Analysis situs ersetzt werden durch den folgenden: Aus der  $M_{n-1}^{-\varepsilon}$  wird durch Zerschneidung längs der  $T_{n-2}^0$  das Gebiet  $T_{n-1}^{-\varepsilon}$  entfernt und an dessen Stelle längs eben jener  $T_{n-2}^0$  das Gebiet  $T_{n-1}^{+\varepsilon}$  eingefügt. In symbolischer Form lässt sich also diese Aenderung darstellen durch

$$(1) \quad - T_{n-1}^{-\varepsilon} + T_{n-1}^{+\varepsilon};$$

während das Gebiet  $T_{n-2}^0$ , welches zuerst ausgeschnitten, dann aber wieder zugefügt wird, für die Abzählung ausser Betracht bleibt.

Analog gestaltet sich der Uebergang für die Mannigfaltigkeiten  $n^{\text{ter}}$  Dimension, von  $M_n^{-\varepsilon}$  zu  $M_n^{+\varepsilon}$ , folgendermassen:

Es wird eine Elementarmannigfaltigkeit  $E_n$  (der Innenraum der  $S_{n-1}$ ) der  $M_n^{-\varepsilon}$  zugefügt und zwar mit derselben längs der in der Begrenzung der  $M_n^{-\varepsilon}$  enthaltenen  $T_{n-1}^{-\varepsilon}$  vereinigt. Dabei ist zu beachten, dass die Begrenzung der  $T_{n-1}^{-\varepsilon}$ , die  $M_{n-2}^0$ , vollständig in der Begrenzung

sowohl der  $M_n^{-s}$  als der  $E_n$  gelegen ist. Für die Abzählung ergibt sich also hier die symbolische Darstellung der Umänderung durch:

$$(2) \quad + E_n + T_{n-1}^{-s}.$$

§ 2.

Bestimmung des Punktecharakters der singulären Stellen durch Zurückführung auf die Abzählungen des § 6 (Abschnitt I).

Die für die Abzählung in Betracht kommenden Mannigfaltigkeiten  $T_{n-1}^{-s}$ ,  $T_{n-1}^{+s}$  und deren Begrenzung  $T_{n-2}^0$  sind uns aber wohlbekannt. Verwandeln wir nämlich die sphärische Mannigfaltigkeit  $S_{n-1}$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \rho^2,$$

welche die obigen Mannigfaltigkeiten enthält, in eine *lineare* Mannigfaltigkeit  $L_{n-1}$ , durch eine „Transformation durch reciproke Radien“, deren Centrum auf der  $S_{n-1}$  liegt, etwa durch:

$$x_1 = 4\rho^2 \cdot \frac{\xi_1}{\sum_1^n \xi_i^2}, \quad x_2 = 4\rho^2 \cdot \frac{\xi_2}{\sum_1^n \xi_i^2}, \dots, \quad x_n + \rho = 4\rho^2 \cdot \frac{\xi_n}{\sum_1^n \xi_i^2},$$

so gehen die beiden, unsere Mannigfaltigkeit  $T_{n-2}^0$  definirenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{\nu}^2 - x_{\nu+1}^2 - x_{\nu+2}^2 - \dots - x_n^2 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= \rho^2 \end{aligned}$$

über in

$$32\rho^2(\xi_1^2 + \dots + \xi_{\nu}^2) - \left(4\rho^2 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 = 0$$

$$\xi_n = 2,$$

also (in einer um eins niedrigeren Dimension) genau in eine der in § 5 und 6 betrachteten Mannigfaltigkeiten. Dabei ist der Innen- bez. Aussenraum

$$32\rho^2(\xi_1^2 + \dots + \xi_{\nu}^2) - \left(4\rho^2 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

derselben punktweise auf die Gebiete  $T_{n-1}^{-s}$  beziehungsweise  $T_{n-1}^{+s}$  bezogen.

Die Abzählung der Aenderung der Charakteristik unserer Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$  und  $M_n$  beim Durchgang durch die singuläre Stelle

(in der Richtung von  $-\varepsilon$  nach  $+\varepsilon$ ) ergibt sich also aus den Tabellen (6) und (3) auf pag. 288 sofort folgendermassen:

1. Für die  $M_{n-1}$  ergibt sich nach der symbolischen Formel (1) des vorigen Paragraphen (pag. 292): Der Process  $-T_{n-1}^{-\varepsilon}$  zählt:

	$\nu$ gerade	$\nu$ ungerade
$n$ gerade	0	- 2
$n$ ungerade	- 2	0

der zweite Process  $+T_{n-1}^{+\varepsilon}$

	$\nu$ gerade	$\nu$ ungerade
$n$ gerade	0	+ 2
$n$ ungerade	0	+ 2

Der Uebergang von  $M_{n-1}^{-\varepsilon}$  zu  $M_{n-1}^{+\varepsilon}$  zählt also:

	$\nu$ gerade	$\nu$ ungerade
(1) $n$ gerade	0	0
$n$ ungerade	- 2	+ 2

2. Für die gleichzeitige Aenderung der Charakteristik des Innenraumes der  $M_{n-1}$  ergeben sich ebenso aus der symbolischen Gleichung (2) (pag. 293) die Zahlen:

	$\nu$ gerade	$\nu$ ungerade
(2) $n$ gerade	+ 1	- 1
$n$ ungerade	- 1	+ 1

Beim Durchlaufen der Mannigfaltigkeiten in der entgegengesetzten Richtung — wo also der singuläre Punkt zuerst im Innenraum der  $M_{n-1}$  gelegen ist und nach der Umformung in den Aussenraum zu liegen kommt — tritt die umgekehrte Zählung ein.

### § 3.

**Analytische Formulierung.** Summation über die Punktcharaktere.

Beachten wir nun, dass die Unterscheidung von geradem und ungeradem  $\nu$  ganz allgemein und ohne die für die Herleitung benutzte canonische Form für jede Stelle

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_n = 0$$

in unseren Mannigfaltigkeiten  $f(x_1 \dots x_n) = C$  gegeben wird durch das Vorzeichen der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

so lässt sich der Unterschied der Abzählung sofort in der Kronecker'schen Form der Punktcharakteristik mit Hilfe dieser Functionaldeterminante darstellen. Versteht man nämlich unter  $[\Delta]$  die Werthe  $+1, -1$ , je nachdem der Werth von  $\Delta$  positiv oder negativ\*) ist, so ist für die von uns betrachteten Punkte der Werth von  $[\Delta]$  gegeben in der Tabelle:

	$\nu$ gerade	$\nu$ ungerade
$n$ gerade	$+1$	$-1$
$n$ ungerade	$-1$	$+1$

Er stimmt also mit den in Formel (2) der vorigen Seite gegebenen Werthen für die Aenderung der charakteristischen Zahl der  $M_n$  beim Durchgang durch den singulären Punkt überein, während für ungerade  $n$  der doppelte Werth auch die Aenderung der Charakteristik der begrenzenden  $M_{n-1}$  bezeichnet.

Bildet man nun die Summe der Werthe, welche  $[\Delta]$  für sämtliche im Innern von  $f = 0$  gelegenen singulären Punkte, also für die Punkte

$$f < 0, f_1 = 0, f_2 = 0 \dots f_n = 0,$$

besitzt, so ist direct

$$(1) \quad K_n' = \sum [\Delta]$$

und weiter für ungerade  $n$  die Charakteristik  $K_{n-1}$  der begrenzenden Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$   $f = 0$ :

$$(2) \quad K_{n-1} = 2K_n' = 2 \sum [\Delta].$$

Für gerades  $n$  dagegen ist die charakteristische Zahl der durch  $f = 0$  gegebenen („geschlossenen“) Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$  stets Null, weil nach den obigen Tabellen jeder Uebergang durch einen singulären Punkt mit 0 zählt.

\*) Wir schliessen der Einfachheit halber den speciellen Fall  $\Delta = 0$  aus.

So erhalten wir die folgende

Tabelle I.

für die Charakteristiken unserer Mannigfaltigkeiten, bei der Abzählung im Gebiet  $f < 0$ .

Für die Abzählung der Mannigfaltigkeit	ist der <i>Punktcharakter</i> der Sprungstellen gegeben durch:		Daraus folgt die <i>Charakteristik</i> :	
$M_n^i$	[ $\Delta$ ]		$K_n^i = \sum [\Delta]$ $\Sigma$ über $f < 0, f_1 = 0, \dots, f_n = 0$	
$M_{n-1}$	$n$ gerade 0	$n$ ungerade $2[\Delta]$	$n$ gerade $K_{n-1} = 0$	$n$ ungerade $K_{n-1} = 2 \sum [\Delta] = 2 K_n^i$ $\Sigma$ über $f < 0, f_1 = 0, \dots, f_n = 0.$

§ 4.

Allgemeine Folgerungen.

Wir können aus den Formeln noch einige weitere Folgerungen ableiten. Betrachten wir gleichzeitig mit der Mannigfaltigkeit  $M_n^i, f < 0$ ; die andere  $M_n^a, f > 0$ , so erfüllen beide zusammen mit der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}, f = 0$  das ganze Gebiet  $L_n$  der Variablen  $(x_1, \dots, x_n)$ , was durch die symbolische Gleichung:

$$M_n^i + M_n^a + M_{n-1} = L_n$$

ausgedrückt sei. Setzen wir diese Gleichung in die für die zugehörigen Charakteristiken um und beachten, dass für gerades  $n$  das Gebiet  $L_n$  die Charakteristik 2, für ungerades  $n$  dagegen die Charakteristik 0 besitzt (vergl. pag. 282), dass ferner für gerade  $n$  die Charakteristik der  $M_{n-1}$

$$K_{n-1} = 0;$$

für ungerade  $n$

$$K_{n-1} = 2 K_n^i$$

ist, so folgt:

Für gerade  $n$  die Relation:

$$(1) \quad K_n^a + K_n^i = 2,$$

für ungerade  $n$  dagegen

$$(2) \quad K_n^a - K_n^i = 0.$$

Weiter folgt hieraus sofort die Abzählung der Aenderung der Charakteristik beim Durchgang durch die oben erwähnten singulären Punkte für den „Aussenraum“, die wir vorhin für den „Innenraum“ formulirt haben:

Aendert sich nämlich beim Durchgang durch einen singulären Punkt die Charakteristik  $K_n^i$  um  $+1$ , so ändert sich die Charakteristik des „Aussenraumes“  $K_n^a$  gleichzeitig um  $-1$ , bez.  $+1$ , je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist.

### Beispiel.

Für das in § 5 und 6 des I. Abschnittes betrachtete Beispiel der Mannigfaltigkeiten

$$\left( \sum_1^n x_i^2 + 1 \right)^2 - (2 + \lambda)^2 \sum_1^v x_i^2 \begin{array}{l} > 0 & R_n^a \\ = 0 & R_{n-1} \\ < 0 & R_n^i \end{array}$$

ergeben die für die Charakteristiken  $K_n^a$  und  $K_n^i$  auf pag. 288 abgeleiteten Tabellen sofort (für gerades und ungerades  $n$ ) die Bestätigung unserer obigen Formeln (1) und (2).

Weiter folgt jetzt direct die Charakteristik  $K_{n-1}$  der begrenzenden Mannigfaltigkeit  $R_{n-1}$  für ungerades  $n$

$$K_{n-1} = 2 K_n^i = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

je nachdem  $v$  gerade oder ungerade ist.

Insoferne nun unsere Mannigfaltigkeit  $R_{n-1}$  (cf. pag. 285) sich für  $\lambda = 0$  auf die sphärische Mannigfaltigkeit

$$S_{v-1} \quad \sum_1^v x_k^2 - 1 = 0, \quad x_{v+1} = 0, \dots, x_n = 0$$

zusammenzieht, haben wir hier, wenn wir etwa den Innenraum  $R_n^i$  durch den continuirlichen Process des Anwachsens von  $\lambda = 0$  an erzeugt denken, ein Beispiel für die Abzählung eines durch die obigen Gleichungen gegebenen singulären Vorkommnisses:

Das Auftreten jener  $S_{v-1}$  zählt für die Charakteristik  $K_n^i$  mit  $\begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$ , je nachdem  $v$  gerade oder ungerade ist, also (vergl. § 4 des I. Abschnittes, Beispiel 1) im Sinne der Charakteristik  $K_{v-1}$  derselben.

In analoger Weise würden die Abzählungen anderer — über unsere in den §§ 1—3 dieses Abschnittes betrachteten singulären Punkte hinausgehenden — singulären Vorkommnisse zu treffen sein. Es ist dann stets auf die in den §§ 3 und 4 des I. Abschnittes gegebenen Regeln zurückzugreifen.

### B. Zweite Abzählung mit Hilfe von singulären Stellen im Gebiete $f = 0$ .

#### § 5.

Umformung der Charakteristik. Die singulären Stellen auf  $f = 0$ .

Die von Kronecker gegebene Umformung von  $\Sigma[\Delta]$ , wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

führt noch zu einer zweiten Methode der Abzählung für geschlossene Mannigfaltigkeiten.

Es ist nämlich:

$$\sum [\Delta] = -\frac{1}{2} \sum [\Delta']$$

wo

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn die erste Summe über alle Werthsysteme, für welche

$$f < 0, f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_n = 0,$$

die zweite über alle Werthsysteme, für welche

$$f = 0, f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, f_n = 0$$

mit Ausschluss von:  $f_k = 0$   
 ausgedehnt wird\*).

Danach ist also die Abzählung der Zahl  $K_n^i$  (bez. für gerade  $n$  auch der Zahl  $K_{n-1}$ ) an die Charakteristik von Punkten auf der Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$   $f = 0$  geknüpft.

Es soll nun auch diese neue Methode der Abzählung unserer Charakteristik auf die im I. Abschnitt gegebenen allgemeinen Formulierungen zurückgeführt werden. Wir übersehen die dabei auftretenden Beziehungen am besten, wenn wir noch die lineare Mannigfaltigkeit  $L_{n-1}$ , etwa

$$x_n = C$$

zu Hülfe nehmen, und nun folgende Anzahlbestimmungen vornehmen.

Die „endlich“ vorausgesetzte Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

liege zwischen den linearen Mannigfaltigkeiten

$$x_n = C^o \quad \text{und} \quad x_n = C^u$$

als oberer und unterer Grenze. Die  $L_{n-1}$

$$x_n = C, \quad \text{wo} \quad C^o > C > C^u$$

theilt unsere Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$  in zwei Gebiete  $M_{n-1}^o$ , bez.  $M_{n-1}^u$  und ebenso das Gebiet  $M_n^i$   $f < 0$  in zwei Gebiete  $M_n^o$ ,  $M_n^u$ . Endlich wird die  $L_{n-1}$   $x_n = C$  durch  $f = 0$  in zwei Gebiete getrennt von denen das Innengebiet ( $f < 0$ ) durch  $L_{n-1}^i$  bezeichnet sei.

Wir fragen nach den charakteristischen Zahlen dieser Gebiete.

Bezeichne wie in nebenstehender Figur zur Uebersicht symbolisch angedeutet:

$K_{n-1}$	die charakter. Zahl für das Gebiet	$M_{n-1}$	$f = 0,$
$K_{n-1}^o$	„ „ „ „ „ „	$M_{n-1}^o$	$f = 0 \quad x_n \geq C,$
$K_{n-1}^u$	„ „ „ „ „ „	$M_{n-1}^u$	$f = 0 \quad x_n < C,$

ferner:

$K_n^i$	die charakter. Zahl für das Gebiet	$M_n^i$	$f < 0,$
$K_n^o$	„ „ „ „ „ „	$M_n^o$	$f < 0 \quad x_n > C,$
$K_n^u$	„ „ „ „ „ „	$M_n^u$	$f < 0 \quad x_n < C,$

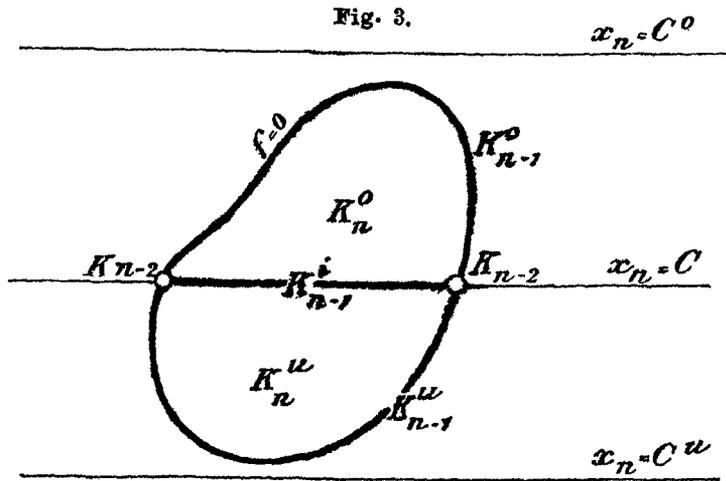
\*) Wir wählen in der Folge zur Vereinfachung der Schreibweise stets  $f_n \geq 0$ , wo dann

$$[\Delta] = - \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-11} & \dots & f_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

wird.

endlich

$K_{n-1}^i$  die charakter. Zahl für das Gebiet  $M_{n-1}^i$   $f < 0$   $x_n = C$ ,  
 $K_{n-2}$  „ „ „ „ „ „  $M_{n-2}$   $f = 0$   $x_n = C$



so hat man (vergl. pag. 295) sofort folgende für gerades und ungerades  $n$  zu unterscheidende Relationen:

I. Für gerades  $n$

$$K_{n-1}^o + K_{n-1}^u - K_{n-2} = K_{n-1} = 0,$$

$$K_{n-1}^o + K_{n-1}^i - K_{n-2} = 0,$$

$$K_{n-1}^u + K_{n-1}^i - K_{n-2} = 0$$

und hieraus:

$$K_{n-2} = 2 K_{n-1}^i = 2 K_{n-1}^o = 2 K_{n-1}^u.$$

Also: Bildet eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension  $M_{n-2}$  die volle Begrenzung einer Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$ , mag diese nun eine „lineare“ ( $M_{n-1}^i$ ), oder in einem Raume  $L_n$  enthalten sein (wie  $M_{n-1}^o$  bez.  $M_{n-1}^u$ ) so ist ihre Charakteristik stets eine gerade Zahl, die doppelte Charakteristik jener Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$ .

II. Für ungerades  $n$  folgt:

$$K_{n-2} = 0,$$

$$K_{n-1}^o + K_{n-1}^u = 2 K_n^i,$$

$$K_{n-1}^o + K_{n-1}^i = 2 K_n^o,$$

$$K_{n-1}^u + K_{n-1}^i = 2 K_n^u,$$

Formeln, welche wesentlich das gleiche besagen, wie die eben in I gegebenen, und speciell noch den Satz illustriren, dass die Charakteristik einer Mannigfaltigkeit gerader Dimension  $(n-1)$  durch Ausschneiden (oder Einfügen) einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ungerader (hier  $n-2^{\text{ter}}$ ) Dimension nicht geändert wird.

## § 6.

## Punktcharaktere der verschiedenen Stellen. Summenformeln.

Analog wie in den früheren Ausführungen (vgl. z. B. Sächs. Ber. Febr. 1886, pag. 62 ff.) lassen wir nun unsere Mannigfaltigkeiten  $M_n, M_{n-1}, M_{n-2}$  in einem continuirlichen Prozesse entstehen, indem wir in

$$x_n = C$$

die Constante von  $C = C^o$  bis  $C = C^u$  sich ändern lassen und dabei jedesmal die in das Gebiet

$$x_n > C, \text{ bez. } x_n = C$$

eintretenden Theile der  $f = 0$  u.  $f < 0$  in's Auge fassen.

Die Sprungstellen der zugehörigen Charakteristiken sind dann eben durch jene Werthsysteme, für welche

$$f = 0, f_1 = 0 \cdots f_{n-1} = 0 \quad (\text{mit Ausschluss von } f_n),$$

gegeben und nach ihrem „Punktcharakter“ sofort aus unseren allgemeinen Entwicklungen abzulesen. Wir mögen, wenn diese geometrische Bezeichnung gestattet ist, diese neuen singulären Stellen als die „Berührungsstellen“ der Mannigfaltigkeiten  $x_n = C$  mit  $f = 0$  bezeichnen.

Wir studiren die Punktcharaktere derselben für die verschiedenen Mannigfaltigkeiten wieder an einer canonicen Form:

$$\varphi \equiv (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_v^2) - (x_{v+1}^2 + x_{v+2}^2 + \cdots + x_{n-1}^2) \pm x_n = 0^*),$$

wo wir dann

$$x_n = C$$

setzen und der Constanten  $C$  die Werthe  $+\varepsilon, 0, -\varepsilon$  ( $\varepsilon$  eine positive Grösse) ertheilen.

Was zunächst die Aenderung der Charakteristik des Gebietes  $M_n^i$

$$\varphi < 0, \quad x_n - \varepsilon > 0$$

anlangt, wenn wir nach

$$\varphi < 0, \quad x_n + \varepsilon > 0$$

fortschreiten, so können wir direct an die frühere Abzählung (§ 1 dieses Abschn.) anknüpfen, indem wir das Gebiet

$$\varphi \cdot (x_n - C) < 0$$

betrachten. Es enthält einmal das von uns zu betrachtende

$$\varphi < 0, \quad x_n - C > 0$$

und das andere

\*) Wir setzen  $x_n$  mit *doppeltem* Vorzeichen, um bei der Unterscheidung der möglichen Fälle für  $\varphi < 0$  einen Vorzeichenwechsel zu vermeiden.

$$\varphi > 0, \quad x_n - C < 0,$$

beide Gebiete getrennt durch:

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad x_n - C = 0.$$

Betrachten wir nun, für  $\Gamma$  als Parameter, die Systeme von Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$

$$\varphi \cdot (x_n - C) - \Gamma = 0,$$

so wird die Aenderung der charakteristischen Zahl unseres Gebietes  $M_n^i$  bestimmt durch die Charakteristik der singulären Stellen dieses Systems, welche im Bereiche

$$\varphi < 0; \quad x_n - C > 0$$

neu zutreten, bez. verschwinden, wenn wir die Constante  $C$  einmal gleich  $+\varepsilon$ , dann gleich  $-\varepsilon$  annehmen. Wir denken uns dabei analog wie früher die Umgebung der „Berührungsstelle“ abgegrenzt durch eine  $S_{n-1}$

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 - \varrho^2 = 0,$$

wo dann wieder die ausserhalb  $S_{n-1}$  gelegenen Gebiete der abzuzählenden Mannigfaltigkeiten im Sinne der Analysis situs übereinstimmen.

Bestimmen wir nun (nach § 3) mit Hülfe der partiellen Ableitungen von

$$\varphi \cdot (x_n - C) - \Gamma = 0$$

die singulären Punkte dieses Systemes, so ergibt sich, wenn wir zunächst

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2 - x_{v+1}^2 - \dots - x_{n-1}^2 + x_n$$

voraussetzen, sofort als einzige in Betracht kommende singuläre Stelle der Punkt

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0, \quad x_n = -\frac{\varepsilon}{2}$$

im Gebiete

$$\varphi < 0, \quad x_n + \varepsilon > 0, \quad (C = -\varepsilon),$$

für welchen Punkt die charakteristische Determinante den Werth

$$[\Delta] = (-1)^{n-1-v}$$

besitzt. Für  $C = +\varepsilon$  dagegen befinden sich im Gebiete

$$\varphi < 0, \quad x_n - \varepsilon > 0$$

keine singulären Stellen.  $[\Delta]$  bezeichnet also gleichzeitig die Aenderung der Charakteristik von  $M_n^i$ , beim Durchgang durch unsere „Berührungsstelle“, wenn wir von  $C = +\varepsilon$  nach  $C = -\varepsilon$  fortschreiten.

Für den analogen Uebergang unter Zugrundelegung von

$$\varphi = x_1^2 + \dots + x_r^2 - (x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2) - x_n < 0$$

ergibt sich *keine* Aenderung durch singuläre Stellen und *somit auch keine Aenderung der charakteristischen Zahl für die  $M_n^i$ .*

Nun ist die Darstellung der betreffenden Berührungspunkte für die beliebige Mannigfaltigkeit

$$f(x_1 \dots x_n) = 0$$

in einer der obigen kanonischen Formen

$$\varphi = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 \pm x_n = 0$$

ausser an das Vorzeichen der Determinante

$$\Delta' = - \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1n-1} & \dots & f_{n-1} & f_{n-1} \end{vmatrix}, *)$$

noch an das Vorzeichen von  $f_n$  geknüpft: Die Punkte, für welche  $f_n < 0$  ist, liefern keinen Beitrag für die Aenderung der Charakteristik beim Durchgang durch die betr. singuläre Stelle, die anderen  $f_n > 0$  aber den dem Vorzeichen von  $[\Delta']$  entsprechenden.

Also wird die Charakteristik  $K_n^o$  unserer  $M_n^o$

$$f < 0, \quad x_n - C > 0$$

gegeben durch

$$K_n^o = - \sum [\Delta'],$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \dots f_{n-1} = 0, \quad f_n > 0, \quad x_n - C > 0.$$

Die Charakteristik der ganzen durch das Innengebiet  $f < 0$  gegebenen  $M_n^i$  wird entsprechend:

$$K_n^i = - \sum [\Delta'],$$

die Summation verstanden über:

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \dots f_{n-1} = 0, \quad f_n > 0.$$

Nun lässt sich aber die Summation auch in umgekehrter Richtung mit wachsenden  $C$  vornehmen. Dabei sind dann lediglich die Punkte,

---

\*) Wir fügen das Minuszeichen zu, um in Analogie mit den Kronecker'schen Formeln pag. 298 zu bleiben.

für welche  $f_n < 0$ , in Betracht zu ziehen, während die Punkte  $f_n > 0$  keinen Beitrag für die Charakteristik liefern. So erhalten wir, wenn wir gleich die Charakteristik  $K_n^i$  des ganzen Innenraumes  $M_n^i$  formulieren, auch

$$K_n^i = - \sum [\Delta'],$$

die Summation ausgedehnt über

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \dots f_{n-1} = 0, \quad f_n < 0$$

und daraus folgt schliesslich die schon oben angeführte (aus Formel (1) pag. 295) durch die Kronecker'sche Umformung erhaltene Formel:

$$K_n^i = - \frac{1}{2} \sum [\Delta'],$$

wobei die Summation sich auf alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0 \dots f_{n-1} = 0, \quad f_n \geq 0$$

erstreckt.

### § 7.

**Zusammenstellung.** Relationen zwischen den singulären Punkten.

Analoge Betrachtungen an der kanonischen Form der singulären Punkte führen nun auch zu den Charakteristiken der übrigen oben (pag. 299) bezeichneten Mannigfaltigkeiten von  $(n-1)$  und  $(n-2)$  Dimensionen. In der nachfolgenden Tabelle sind einmal die „Punktcharaktere“ der Sprungstellen dieser Charakteristiken und dann diese selbst durch die Summenformeln zusammengestellt.

Fig. 3.

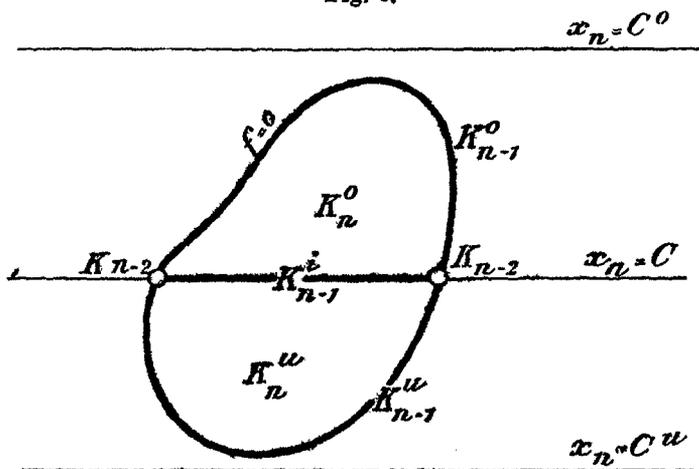


Tabelle II

für die Charakteristiken unserer Mannigfaltigkeiten, bei der Abzählung auf  $f = 0$ .

Für die Abzählung der Mannigfaltigkeit:	ist der <i>Punktcharakter</i> der Sprungstellen gegeben durch:	Daraus folgt die <i>Charakteristik</i> :	
$M_n^o$	$-\ [\Delta']$	$K_n^o = - \sum [\Delta']$ $\Sigma \text{ über: } f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, f_n > 0, x_n - C > 0.$	
$M_n^i$	$-\ [\Delta']$	$K_n^i = - \sum [\Delta'] = - \frac{1}{2} \sum [\Delta']$ $\Sigma \text{ über: } f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, f_n > 0.$ $\Sigma' \text{ über: } f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0.$	
$M_{n-1}^o$	$n$ gerade $-\ [f_n \cdot \Delta']$	$n$ ungerade $-\ [\Delta']$	$K_{n-1}^o = - \sum [f_n \cdot \Delta'] \quad \parallel \quad K_{n-1}^o = - \sum [\Delta']$ $\Sigma \text{ über: } f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, x_n - C > 0.$
	$-\ [f_n \cdot \Delta']$	$-\ [\Delta']$	$K_{n-1} = - \sum [f_n \cdot \Delta'] = 0 \quad \parallel \quad K_{n-1} = - \sum [\Delta'] = 2 K_n^i$ $\Sigma \text{ über: } f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0.$
$M_{n-1}^i$	$-\ [f_n \cdot \Delta']$	$-\ [f_n \cdot \Delta']$	$K_{n-1}^i = - \sum [f_n \cdot \Delta'] \quad \parallel \quad K_{n-1}^i = - \sum [f_n \cdot \Delta'] = K_{n-1}^o$ $\Sigma \text{ über: } f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, x_n - C > 0.$
$M_{n-2}$	$-\ 2 \cdot [f_n \cdot \Delta']$	$0$	$K_{n-2} = - 2 \sum [f_n \cdot \Delta'] \quad \parallel \quad K_{n-2} = 0, = 2 K_{n-1}^i$ $\Sigma \text{ über: } f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, x_n - C > 0.$
	$0$	$0$	$K_{n-2} = 0$ $\Sigma \text{ über: } f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, x_n - C > 0.$

Es ergeben sich dabei für die Anzahl der auf der Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$   $f = 0$  vorhandenen singulären Stellen zwei Relationen:

$$\text{I. } - \sum [\Delta'] = 2K_n^i,$$

$$\text{II. } \sum [f_n \cdot \Delta'] = 0$$

die Summen über diese Stellen:

$$f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0$$

verstanden.

Die Relation I ergibt  $K_n^i$  (bez. bei ungeradem  $n$  auch  $K_{n-1}$ ) als Kronecker'sche Charakteristik des speciellen Functionensystems:

$$f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, f_n = 0.$$

Die Relation II ist die bekannte von Kronecker für ein solches System aufgestellte Beziehung.

Diese letztere Relation folgt hier direct aus der oben gegebenen Bedeutung der

$$- \sum [f_n \cdot \Delta'] = K_{n-1}^i,$$

falls die Summation nur über die Punkte

$$f = 0, f_1 = 0, \dots, f_{n-1} = 0, x_n - C > 0$$

erstreckt wird: als der Charakteristik der Mannigfaltigkeit

$$M_{n-1}^i: f = 0, x_n = C.$$

Diese entsteht nämlich und verschwindet, wie oben erwähnt, innerhalb des Intervalls von  $x_n = C^0$  bis  $x_n = C^u$ , in welchem das Gebiet  $f = 0$  sich erstreckt.

## § 8.

### Schlussbemerkungen.

Durch die Zurückführung unserer Abzählungen auf die Kronecker'sche Darstellung ist deren invariante Bedeutung (bei Abänderung der zu Grunde gelegten Entstehungsprocesse, sowie bei Umformungen der Mannigfaltigkeiten im Sinne der Analysis situs) erwiesen. Für die Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen war es nun möglich, speciell auch auf geometrischem Wege die invariante Bedeutung dieser charakteristischen Zahlen (ganz unabhängig von der Kronecker'schen Formulierung) zu erweisen. Es war nämlich, wie schon in der Einleitung erwähnt, möglich, für alle Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen Normalformen herzustellen, an welchen direct die charakteristischen Zahlen abgelesen werden konnten.

Die gleiche Darstellung für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension würde auch hier die Aufstellung von Normalformen verlangen, als Repräsentanten aller möglichen Mannigfaltigkeiten. Eine solche scheint

aber zunächst noch nicht zu bewältigende Schwierigkeiten zu bieten. In der That ist die Frage nach solchen Normalformen eine viel umfassendere. Sie erfordert die Berücksichtigung *aller* Charakteristiken, welche eine  $M_n$  bis auf eindeutige Umformungen (im Sinne der Analysis situs) charakterisiren und dazu ist durch die vorliegenden Untersuchungen nur erst ein erster Schritt gemacht. So erscheint es naturgemäss, die invariante Bedeutung unserer Zahlen durch ihre Zurückführung auf Kronecker'sche Charakteristiken — welchen als solchen diese invariante Bedeutung zukommt — zu bezeichnen.

Es wird in gleicher Weise die Aufgabe weiterer Untersuchungen auf diesem Gebiete sein, auch andere charakteristische Zahlen einer  $M_n$  — ich erwähne die von Riemann (Fragmente aus der Analysis situs; Werke, Seite 448 ff.) und Betti (Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. Annali di Matematica, Serie II, Bd. 4) aufgestellten — mit Hilfe Kronecker'scher Charakteristiken *analytisch* darzustellen.

Die gegenwärtigen Untersuchungen bedürfen aber noch in einer anderen Richtung der Weiterführung. Wir haben uns hier in der analytischen Darstellung im Wesentlichen auf die durch eine Gleichung bez. eine Ungleichung im Gebiete von  $n$  unabhängigen Veränderlichen definirten Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$  bez.  $M_n$  beschränkt. In allgemeiner Form ist *ein beliebiges System von Gleichungen und Ungleichungen* für die Definition einer Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen. Von den dadurch nothwendigen Erweiterungen unserer analytischen Formulierungen, auf die ich bei späterer Gelegenheit einzugehen denke, sei hier kurz nur auf die eine aufmerksam gemacht, welche wieder die Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten mit nicht umkehrbarer und mit umkehrbarer Indicatrix betrifft: Wenn wir im Gebiete von  $n$  Veränderlichen eine Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}$  durch eine Gleichung  $f=0$  definiren, und (wie dies in den vorstehenden Untersuchungen geschehen ist) die  $f=0$  als „endlich“ voraussetzen, weiter singuläre Vorkommnisse auf  $f=0$  ausschliessen, so ist die so definirte Mannigfaltigkeit stets eine solche *mit nicht umkehrbarer Indicatrix*\*). Dies gilt nicht mehr, wenn wir jene allgemeineren Mannigfaltigkeiten in Betracht ziehen; hier ist (ebenso wie schon in unseren früheren Untersuchungen) die Frage nach der Classe der betr. Mannigfaltigkeit zu entscheiden. In dem in § 4 des I. Abschn. gegebenen Beispiel und bei den im folgenden Abschnitt zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten zweiten Grades treten Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer Indicatrix ohne singuläre Stellen noch in einer andern Form auf. *Indem wir nämlich die Mannigfaltigkeit der  $n$  Variablen  $x_1 \dots x_n$  im projectiven Sinne auffassen, erscheinen*

\*) Vergl. Annalen 32, pag. 489.

durch's Unendliche gehende Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$ , für welche die durch das Unendliche mit einander vereinigten Gebiete auch noch auf einem endlichen Wege zusammenhängen, als Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer bez. mit nicht umkehrbarer Indicatrix, je nachdem  $n$  ungerade oder gerade ist, ein Satz, der sich in analoger Weise wie der in § 4 pag. 283 für die projectiven Mannigfaltigkeiten  $P_n$  gegebene entwickeln lässt.

### III. Abschnitt.

#### Analysis situs der Mannigfaltigkeiten zweiten Grades.

##### § 1.

Kanonische Formen für die Mannigfaltigkeiten zweiten Grades. Unterscheidung derjenigen mit nicht umkehrbarer und derer mit umkehrbarer Indicatrix.

In den Entwicklungen des § 2 (pag. 293 ff.) haben wir die  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M_{n-1}^2$ :

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2 - x_{v+1}^2 - x_{v+2}^2 - \dots - x_n^2 - 1 = 0,$$

zunächst durch eine Centralprojection auf das „sphärische“ Gebiet:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2 - x_{v+1}^2 - x_{v+2}^2 - \dots - x_n^2 > 0, \end{cases}$$

umkehrbar eindeutig abgebildet und dieses sphärische Abbild wieder durch die Transformation durch reciproke Radien:

$$(3) \quad x_1 = \frac{4\xi_1}{\sum_1^n \xi_i^2}, \quad x_2 = \frac{4\xi_2}{\sum_1^n \xi_i^2}, \quad \dots \quad x_n + 1 = \frac{4\xi_n}{\sum_1^n \xi_i^2}$$

in die „lineare“ Mannigfaltigkeit  $R_{n-1}^i$

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_n = 2, \\ \left(4 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 - 32(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_v^2) < 0. \end{cases}$$

Dabei sind, wenn wir die Mannigfaltigkeit der  $x_1, x_2, \dots, x_n$  im „projectiven“ Sinne als  $P_n$  auffassen, die unendlich fernen Punkte der Mannigfaltigkeit (1) abgebildet auf das Begrenzungsgebiet der Mannigfaltigkeit (4), die  $R_{n-2}$ :

$$(5) \quad \left(4 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2\right)^2 - 32(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_v^2) = 0,$$

so zwar, dass je den beiden diametral entgegengesetzten unendlich weiten Punkten, deren Lage durch

$$(6) \quad \begin{array}{l} \text{und} \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \\ -x_1, -x_2, -x_3, \dots -x_n \end{array}$$

auf der Kugel (2) fixirt ist und welche dem „asymptotischen“ Gebilde

$$(7) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_n^2 = 0$$

genügen, in (5) zwei Punkte

$$(8) \quad \begin{array}{l} \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n-1}, \quad (\xi_n = 2), \\ \xi'_1 = \frac{-4\xi_1}{\sum_1^{n-1} \xi_i^2}, \quad \xi'_2 = \frac{-4\xi_2}{\sum_1^{n-1} \xi_i^2}, \dots, \xi'_{n-1} = \frac{-4\xi_{n-1}}{\sum_1^{n-1} \xi_i^2}, \quad (\xi'_n = 2) \end{array}$$

entsprechen.

Fassen wir nun die  $M_{n-1}^2$  als geschlossenes Gebilde auf, indem wir je diese in diametraler Richtung unendlich weiten Punkte einander zuordnen, so entspricht dem in unserer transformirten Mannigfaltigkeit (4) eben die Zuordnung der Punkte  $\xi_i$  und  $\xi'_i$ . Diese Zuordnung stellt sich, wie die Formeln (8) sofort erkennen lassen, auf die einfachste Weise dar, indem die  $\xi'_i$  aus den  $\xi_i$  hervorgehen durch eine Transformation durch reciproke Radien an der sphärischen Mannigfaltigkeit

$$(9) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 - 4 = 0$$

in Verbindung mit einer Verwandlung je des transformirten Punktes in seinen diametralen Gegenpunkt.

Greifen wir nun noch auf die in § 5 Abschn. I gegebene Beschreibung der Mannigfaltigkeiten zurück, so lassen sich die verschiedenen im Sinne der Analysis situs zu unterscheidenden Formen der Mannigfaltigkeiten zweiten Grades  $M_{n-1}^2$  sehr übersichtlich charakterisiren:

*Man denke sich die sämmtlichen „sphärischen“ Mannigfaltigkeiten  $S_0, S_1, S_2 \dots S_{r-1} \dots$  der verschiedenen Dimensionen*

$$(10) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_r^2 = r^2$$

*als „Kernformen“ dadurch zu Mannigfaltigkeiten von  $(n-1)$  Dimensionen umgestaltet, dass man die Punkte derselben — wenn dieser Ausdruck gestattet ist — „mit  $n-1$  dimensionaler Masse belegt“ denkt, präciser gesprochen, dass man eine Elementarmannigfaltigkeit von  $(n-1)$  Dimensionen*

$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \dots + \xi_{n-1}'^2 - \varrho^2 < 0 \quad (\varrho < r)$$

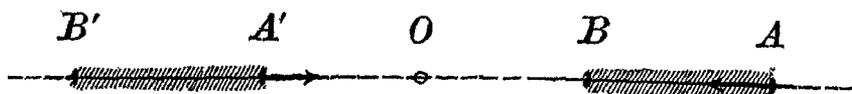
*mit ihrem Mittelpunkt je die sphärischen Mannigfaltigkeiten  $S_0, S_1 \dots S_{n-1}$*

durchlaufen lässt\*), dann entstehen die Gebilde  $R_{n-1}^i$  von  $(n-1)$  Dimensionen, die punktweise eindeutig auf die  $M_{n-1}^2$

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_\nu^2 - x_{\nu+1}^2 - \dots - x_n^2 - 1 = 0$$

bezogen werden können. Die Begrenzung derselben entspricht den unendlich weiten Elementen der  $M_{n-1}^2$ , deren paarweise Zuordnung sich auf's einfachste ergibt, insoferne jeder Radius vector  $\xi_i = \lambda \bar{\xi}_i$  durch den Coordinatenanfang (soferne überhaupt) in 4 Punkten die Begrenzung schneidet. Lage und Zuordnung dieser Punkte erläutert die untenstehende Figur, in welcher die schraffirten Theile das „Innengebiet“ bezeichnen.

Fig. 4.



Wir erhalten dabei, wenn wir  $\nu$  die Werthe  $1, \dots, n$  ertheilen (von der imaginären Mannigfaltigkeit für  $\nu = 0$  sehen wir natürlich ab) die verschiedenen Fälle in je zwei Formen, den Werthen

$$\nu = 1, \quad \nu = n;$$

$$\nu = 2, \quad \nu = n - 1 \text{ u. s. w.}$$

entsprechend.

Die in Figur (4) angedeutete Zuordnung der Punkte der Begrenzung durch die Radienvectoren von  $O$  aus lässt weiter erkennen, dass von Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}^2$  diejenigen ungerader Dimension mit Ausschluss der einen für  $\nu = 1$  ( $\nu = n$ )

$$x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 - 1 = 0$$

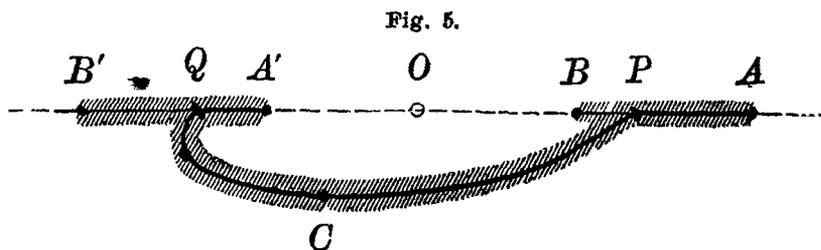
Mannigfaltigkeiten mit umkehrbarer Indicatrix sind\*\*).

Fixiren wir nämlich (analog wie bei Betrachtung der Mannigfaltigkeiten  $P_n$ ) in dem Punkte  $A$  der Begrenzung in der dort tangirenden linearen Mannigfaltigkeit  $L_{n-2}$  ein rechtwinkliches Axensystem, so werden die  $n-2$  Äxenrichtungen desselben im entsprechenden Punkte  $A'$  in die entgegengesetzten verwandelt; aber auch der  $n-1^{\text{ten}}$ , auf dieser orthogonalen Richtung des Radius vector, von  $A$  aus etwa in den Innenraum gezogen (vergl. Fig. 4), entspricht in  $A'$  die entgegengesetzte, so dass  $n-1$  Richtungen bei diesem Uebergang sich umkehren. Nun gelangen wir aber von  $A$  nach  $A'$  auf einem ganz innerhalb unseres Gebietes (4) verlaufenden Wege. Wir gehen nämlich z. B.

\*) Vergl. pag. 278.

\*\*\*) Mit Zuziehung des auf pag. 307, 308 ausgesprochenen allgemeinen Satzes kann diese Eigenschaft selbstverständlich auch direct an den Formen (1) unserer Mannigfaltigkeiten abgelesen werden.

(vergl. Fig. 5) von  $A$  auf dem Radius vector  $\overline{AO}$  fort bis zum Schnitt  $P$  mit der innerhalb (4) gelegenen Grenzmannigfaltigkeit  $S_{\nu-1}$  (10),



auf dieser zum Punkte  $Q$  derselben und von da nach  $A'$ . Dieser Weg ist durch die Zuordnung von  $A$  und  $A'$  ein geschlossener. Die „Indicatrix“ unserer Mannigfaltigkeit wird daher auf demselben, wenn wir ihn etwa von einem Punkte  $C$  an durchlaufen und dabei die oben charakterisirte Umkehrung der entsprechenden Richtungen im Punkte  $A, A'$  berücksichtigen, umgekehrt, bez. nicht umgekehrt, je nachdem  $n - 1$  ungerade bez. gerade ist.

Nur der Fall  $\nu = 1$  (bez. der gleichwerthige  $\nu = n$ ) bildet eine Ausnahme. Für  $\nu = 1$  besteht nämlich die sphärische Mannigfaltigkeit  $S_{\nu-1} = S_0$  gerade nur aus den beiden Punkten  $P$  und  $P'$ , die von zwei, die  $R'_{n-1}$  bildenden Elementarmannigfaltigkeiten  $E_{n-1}$  umgeben sind. Die Zuordnung der Begrenzungsmanigfaltigkeit ist zwar den allgemeinen Entwicklungen entsprechend, aber je die diametral zugeordneten Punkte hängen nicht mehr durch einen Weg  $PCQ$  zusammen. Für  $\nu = n$  ist die Begrenzungsmanigfaltigkeit imaginär geworden\*) und die ganze lineare Mannigfaltigkeit  $L_{n-1}$  der  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$  das Bild der für  $\nu = n$  kommenden sphärischen Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1,$$

ein Typus, der selbstverständlich zweckmässig an die Stelle des für  $\nu = 1$  aus dem Punktepaar entstehenden zu setzen ist.

### § 2.

Beispiel: Die zwei- und drei-dimensionalen  $M^2$ .

Wir umfassen alle verschiedenen Fälle der  $M^2$ , wenn wir (in Gl. (1) des vorigen Paragraphen)  $\nu$  die Werthe 1 bis  $\frac{n}{2}$  (bez.  $\frac{n+1}{2}$ ) ertheilen.

\*) Die Formel (5) (und analog (4)), bei deren Ableitung ausdrücklich der Summenindex  $\nu \leq n - 1$  vorausgesetzt ist, muss in diesem Fall ersetzt werden durch

$$\left( \sum_1^{n-1} \xi_i^2 + 4 \right)^2 = 0.$$

So hat man bei zwei Dimensionen (für  $n = 3$ ) zunächst als „Kernformen“ (Gl. (10) des vorigen Paragraphen):

- 1) die  $S_0$ , ein Punktepaar  $\xi_1^2 = r^2$ ,
- 2) die  $S_1$ , eine Kreislinie  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$ .

Sie geben, wenn wir eine Kreiſscheibe

$$\xi_1'^2 + \xi_2'^2 = \rho$$

mit ihrem Mittelpunkt die  $S_0$  bez.  $S_1$  durchlaufen lassen, für unsere  $R_2$ :

- 1) Ein Kreispaar,
- 2) Eine ebene Ringfläche,

deren punktweise Zuordnung der Ränder sofort die Flächen herstellt, auf welche sich einmal das *Ellipsoid*, dann das *einschalige Hyperboloid* punktweise eindeutig beziehen lässt.

Bei drei Dimensionen (für  $n = 4$ ) benütze man als „Kernformen“ ebenfalls 1. das obengenannte Punktepaar  $S_0$ , 2<sup>a</sup>. die Kreislinie  $S_1$ , um sie dadurch, dass wir sie „dreidimensional“ auffassen, umzugestalten in:

- 1) Ein Paar von Kugeln,
- 2<sup>a</sup>) Einen dreidimensionalen Kreisring.

Sie repräsentieren, wenn wir wieder die Begrenzungspunkte paarweise einander zuordnen, die typischen Formen für die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Wir betrachten hier noch kurz als Kernfläche

2<sup>b</sup>) Die  $S_2$ , die Kugelfläche  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = r^2$ , welche wir an Stelle der  $S_1$  zu Grunde legen können. Indem wir dieselbe dreidimensional auffassen, entsteht ein von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzter Raum. Die Uebereinstimmung des hier entstehenden geschlossenen Gebildes mit dem oben betrachteten Kreisring 2<sup>b</sup> (Fig. 6<sup>b</sup>) (die Zuordnung der Begrenzung der beiden Gebilde ist in den nebenstehenden Figuren 6<sup>a</sup>, 6<sup>b</sup> angedeutet) ist leicht zu erweisen: Man durchschneide den Raum 2<sup>b</sup> (Fig. 6<sup>b</sup>) durch eine Ebene durch den Mittelpunkt. Die (in Fig. 6<sup>b</sup> schraffierte) ebeneringförmige Schnittfigur kann dann im Sinne der Analysis situs der ringförmigen Begrenzung des Raumes 2<sup>a</sup> (Fig. 6<sup>a</sup>) entsprechend gesetzt werden. Durchschneidet man ebenso den ringförmigen Raum 2<sup>a</sup> durch eine Ebene durch die Axe des Ringes, so erhält man zwei Kreise (in Fig. 6<sup>a</sup> schraffirt), welche den begrenzenden Kugeln des Raumes 2<sup>b</sup> (Fig. 6<sup>b</sup>) äquivalent sind. Wir erhalten diese Kugelflächen selbst als neue Begrenzungsflächen, wenn wir nun die beiden Ringhälften I und II in Fig. 6<sup>a</sup>, (welche den entsprechend bezeichneten Gebieten in 6<sup>b</sup> äquivalent sind), mit dem

ringförmigen Theil ihrer Oberfläche aneinander schliessen. Es ist aber dabei zu beachten, dass (sowohl in Fig. 6<sup>a</sup>, wie in 6<sup>b</sup>) den die Indicatrix betreffenden Ausführungen des vorigen Paragraphen zufolge die Zuordnung der Oberflächen (nämlich sowohl der Ringhälften,

Fig. 6 a.

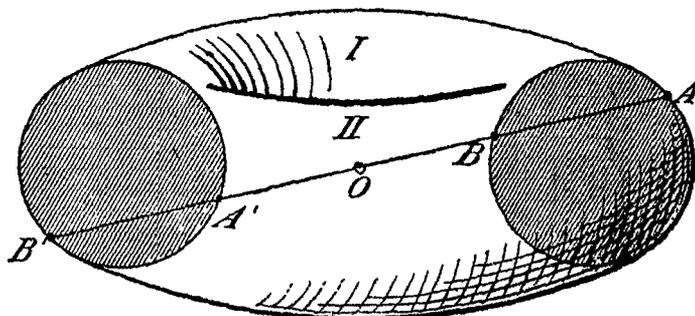
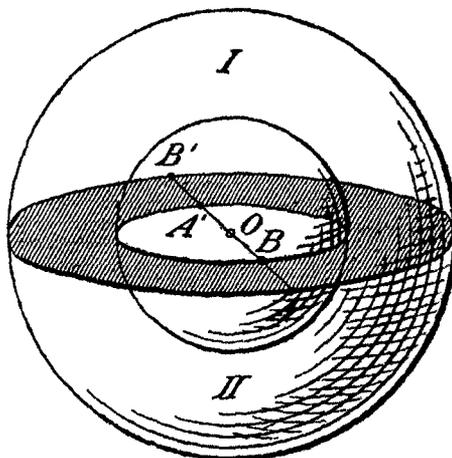


Fig. 6 b.



wie der Kugelhälften) eine *inverse* ist, dass also zunächst die eine Theilfigur in ihre symmetrische zu verwandeln ist, ehe (in unserm dreidimensionalen Raum) die Vereinigung der Begrenzungen und damit die gemeinte Umformung thatsächlich ausgeführt werden kann.

§ 3.

Abzählung der Charakteristik.

Um die *Charakteristik* der  $M_{n-1}^2$  abuzählen, müssen wir die Zuordnung der Punkte der Begrenzungsfläche  $R_{n-2}$ :

$$(1) \quad \left( 4 + \sum_1^{n-1} \xi_i^2 \right)^2 - 32 \sum_1^v \xi_i^2 = 0$$

durch:

$$(2) \quad \xi_i \sim \frac{-4\xi_i}{\sum_1^{n-1} \xi_i^2}$$

noch etwas näher betrachten.

Das Gebiet von  $R_{n-2}$  für welches  $\xi_1 > 0$  ist, es sei durch  $R_{n-2}^+$  bezeichnet, ist vermöge (2) auf das andere  $\xi_1 < 0$  ( $R_{n-2}^-$ ) bezogen. Das Gebiet  $\xi_1 = 0$ :

$$(3) \quad \left(4 + \sum_2^{n-1} \xi_i^2\right)^2 - 32 \sum_2^v \xi_i^2 = 0,$$

ein der  $R_{n-2}$  analoges Gebilde  $R_{n-3}$ , in welchem die Gebiete  $R_{n-2}^+$  und  $R_{n-2}^-$  zusammenhängen, ist auf sich selbst bezogen, so zwar, dass wir in ihm wieder durch  $\xi_2 > 0$ ,  $\xi_2 < 0$ ,  $\xi_2 = 0$  drei (mit einander zusammenhängende) Gebiete  $R_{n-3}^+$ ,  $R_{n-3}^-$ ,  $R_{n-4}$  unterscheiden können u. s. f.

Setzen wir schliesslich

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 0 \dots \xi_{v-1} = 0,$$

so erhalten wir als Schnitt mit unserer  $R_{n-2}$  noch eben ein reelles Gebilde

$$(4) \quad \left(4 + \sum_v^{n-1} \xi^2\right)^2 - 32 \xi_v^2 = 0.$$

Dasselbe zerfällt aber jetzt in zwei völlig getrennte Stücke  $\xi_v > 0$  und  $\xi_v < 0$ , da der Schnitt desselben mit  $\xi_v = 0$  imaginär ist.

So können wir also, von der den Innenraum von (1) bildenden  $R_{n-1}^i$  ausgehend, die paarweise Aneinanderschliessung je der begrenzenden Gebiete

$$R_{n-2}^+, R_{n-2}^-; R_{n-3}^+, R_{n-3}^- \dots R_{n-(v+1)}^+, R_{n-(v+1)}^-$$

in folgende symbolische Formel für unsere so entstehende *geschlossene*, der  $M_{n-1}^2$  äquivalente Mannigfaltigkeit  $R_{n-1}^g$  zusammenfassen:

$$(5) \quad R_{n-1}^g = R_{n-1}^i + R_{n-2}^+ + R_{n-2}^- + \dots + R_{n-(v+1)}^+.$$

Die Einschaltung der Mannigfaltigkeiten  $R_{n-2}^+$ ,  $R_{n-2}^-$  ... u. s. w. ist in dem Sinne unserer allgemeinen Entwicklungen in § 3 des ersten Abschnittes zu verstehen. Wir können somit dieser Formel sofort eine entsprechende für die gesuchte *Charakteristik* der  $R_{n-1}^g$  — welche auch die der  $M_{n-1}^2$  ist — an die Seite stellen:

$$(6) \quad K_{n-1}^2 = K_{n-1}^i - K_{n-2}^+ + K_{n-2}^- - \dots \pm K_{n-(v+1)}^+,$$

wobei die  $K$  je die Charakteristiken der entsprechenden  $R$  bezeichnen und die alternierenden Zeichen sich aus der in pag. 282 gegebenen allgemeinen Regel ergeben.

Die Abzählung der  $K_{n-x}^+$  lässt sich aber sehr leicht bewerkstelligen, wenn wir wieder auf unsere geschlossenen Gebiete  $R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_{n-x}$  zurückgreifen. Wir haben hier

$$R_{n-2} = R_{n-2}^+ + R_{n-2}^- + R_{n-3},$$

$$R_{n-3} = R_{n-3}^+ + R_{n-3}^- + R_{n-4}$$

u. s. w. bis endlich kommt:

$$R_{n-(\nu+1)} = R_{n-(\nu+1)}^+ + R_{n-(\nu+1)}^-.$$

Diese Formeln setzen sich sofort um in die entsprechenden Charakteristikenformeln, bei welchen nur zu beachten ist, dass die Charakteristiken je der  $R^+$  und  $R^-$  gleich sind. Also kommt:

$$K_{n-2} = 2 K_{n-2}^+ - K_{n-3},$$

$$K_{n-3} = 2 K_{n-3}^+ - K_{n-4}$$

u. s. f.; die letzte Formel lautet:

$$K_{n-(\nu+1)} = 2 K_{n-(\nu+1)}^+.$$

$\alpha)$  Ist nun  $n - 1$  gerade, so sind alle Charakteristiken der ungeraden geschlossenen Mannigfaltigkeiten ( $R_{n-2}, R_{n-4} \dots$ ) gleich Null (pag. 295) und es folgt:

$$K_{n-2}^+ = K_{n-3}^+,$$

$$K_{n-4}^+ = K_{n-5}^+$$

u. s. f. Wenn nun  $\nu$  gerade, so heben sich in der obigen symbolischen Gleichung (6) alle Glieder vom zweiten ab paarweise auf und es folgt einfach:

$$(6a) \quad K_{n-1}^2 = K_{n-1}^i.$$

Dieselbe Formel gilt aber auch für  $\nu$  ungerade, denn hier bleibt zunächst als letztes Glied in (6)  $K_{n-(\nu+1)}^+$ . Dabei ist aber

$$K_{n-(\nu+1)} = 2 K_{n-(\nu+1)}^+ = 0,$$

wieder als Charakteristik einer geschlossenen Mannigfaltigkeit ungerader Dimension. Die Charakteristiken  $K_{n-1}^i$  — der Gebiete  $R_{n-1}^i$  — sind uns nun nach den Abzählungen des § 6 Abschn. I wohlbekannt und so folgt schliesslich:

Die Charakteristik  $K_{n-1}^2$  der projectiven Mannigfaltigkeiten zweiten Grades  $M_{n-1}^2$  ( $n - 1$  gerade)

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2 - x_{v+1}^2 - \dots - x_n^2 - 1 = 0$$

ist gleich 0, beziehungsweise gleich 2, je nachdem  $v$  gerade oder ungerade ist.

b) Ist dagegen  $n - 1$  ungerade, so hat man

$$K_{n-3}^+ = K_{n-4}^+,$$

$$K_{n-5}^+ = K_{n-6}^+$$

u. s. w., und die Gleichung (6) lässt sich (in analoger Weise wie vorhin) sowohl für  $v$  gerade als auch für  $v$  ungerade reduciren auf

$$(6b) \quad K_{n-1}^2 = K_{n-1}^i - K_{n-2}^+.$$

Hier ist nun nach den früheren Abzählungen (§ 6, Abschn. I)

$$K_{n-1}^i = K_{n-2}^+ = 2 \quad \text{für } v \text{ gerade,}$$

$$K_{n-1}^i = K_{n-2}^+ = 0 \quad \text{für } v \text{ ungerade.}$$

Somit ergibt sich in beiden Fällen die Charakteristik  $K_{n-1}^2$  unserer  $M_{n-1}^2$  ( $n - 1$  ungerade) als gleich Null.

Es steht dieser Satz in Uebereinstimmung mit dem auf pag. 295 (unten) abgeleiteten, welcher dort nur für *endliche* geschlossene Mannigfaltigkeiten  $M_{n-1}$ , ungerader Dimension ausgesprochen ist, die durch eine Gleichung  $f=0$  im Gebiete  $L_n$  der Variablen  $x_1 \dots x_n$  definirt werden.

München, im Mai 1890.