Article

Die quadratische Form eines Knotens und ein Satz über Knotenmannigfaltigkeiten.

Erle, Dieter

in: Journal für die reine und angewandte Mathematik - 236 | Periodical
45 page(s) (174 - 218)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie sind nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.
Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:
Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.
Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.
Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:
You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.
By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.
Papendiek 14
37073 Goettingen
Email: info@digizeitschriften.de

Die quadratische Form eines Knotens und ein Satz über Knotenmannigfaltigkeiten

Von *Dieter Erle* in Bonn

Einleitung

Für die Signatur eines zahmen Knotens in der 3-Sphäre sind verschiedene Definitionen gebräuchlich. H. F. Trotter ordnete einem Knoten mit homologisch algebraischen Methoden eine quadratische Form zu ([22]). Der zugrundegelegte Ring ist dabei irgendein Oberring von $\boldsymbol{Z}$, in dem $\Delta(0)$, das konstante Glied des Alexanderpolynoms des Knotens, invertierbar ist, also zum Beispiel der Ring $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen. Die Signatur dieser quadratischen Form ist dann natürlich auch eine Knoteninvariante. J. W. Milnor behauptete 1966 in einem Brief an F. Hirzebruch eine Poincaré-Dualität für die unendlich-zyklische Überlagerung eines Knotenaußenraumes bei Verwendung eines Körpers als Koeffizientenbereich und benutzte dies, um einem Knoten eine reelle quadratische Form und damit eine Signatur zuzuordnen. K. Murasugi definiert in [14a] die Signatur einer Verkettung. Nach Mitteilung von Trotter und Murasugi stimmt diese Signatur für Knoten mit der von Trotter überein.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich in ihrem ersten Teil (§§ 1—6) damit, Milnors quadratische Form sinnvoll für allgemeinere Ringe zu definieren. Da Milnor seine quadratische Form auf der 1. Kohomologie der unendlich-zyklischen Überlagerung erklärt, wird man nach einer Bedingung für den Koeffizientenbereich suchen, unter der die Kohomologie dieses Raumes frei und endlich erzeugt ist. Diesem Ziel dienen die ersten vier Paragraphen. Dabei zeigt die ausgiebige Benutzung der in einer Seifertmatrix enthaltenen Informationen, daß sich Homologiemodul und Kohomologiealgebra der unendlich-zyklischen Überlagerung wie die einer kompakten orientierbaren Fläche mit genau einer Randkomponente verhalten, wenn der Koeffizientenring ein Integritätsbereich ist, in dem $\Delta(0)$ eine Einheit ist (§ 4). Über einem solchen Ring wird in § 5 nach Milnors Methode eine quadratische Form definiert und mit Hilfe einer Seifertmatrix des Knotens bewiesen, daß diese Verallgemeinerung mit Trotters Definition übereinstimmt. Damit hat man einerseits eine topologische Interpretation von Trotters Invariante, andererseits kann man unsere quadratische Form berechnen.

Das Ergebnis lautet folgendermaßen (Satz 5. 2): Ist V eine Seifertmatrix eines Knotens und P eine ganzzahlige unimodulare Matrix mit

$$P'VP = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & 0 & \\ 0 & \vert & 0 & & & & & \\ \cdot & \vert & -1 & 0 & & & & \\ \cdot & \vert & 0 & \vert & \cdot & & & \\ \cdot & q_1 & \cdot & \vert & & \cdot & & \\ \cdot & \vert & \cdot & q_2 & & & \cdot & \\ \cdot & \vert & \cdot & \vert & & & & \\ \cdot & \vert & \cdot & \vert & & & & \boxed{W} \\ 0 & \vert & 0 & \vert & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix},$$

wobei $\det W \neq 0$ ist, so ist für den Knoten eine quadratische Form über jedem Integritätsbereich der Charakteristik ungleich zwei definiert, in dem $\det W (= \pm \Delta(0))$ eine Einheit ist. $W + W'$ ist dann eine Matrix dieser quadratischen Form. Unter ihren Eigenschaften (§ 6) seien nur erwähnt: Bei einem amphicheiralen Knoten ist die quatratische Form zu ihrer negativen äquivalent; die Signatur der quadratischen Form über $\mathbf{Q}$ verhält sich additiv und ist gleich der Signatur von $V + V'$ für eine beliebige Seifertmatrix V.

Der zweite Teil der Arbeit (§§ 7—17) bringt einen — bis auf die differenzierbare Struktur des Orbitraumes vollständigen — Beweis des Satzes von Hirzebruch über Knotenmannigfaltigkeiten ([8], Seite 16), den dieser während eines Gastaufenthaltes in Oxford im April 1966 gefunden hatte, ohne aber seine Beweisidee schriftlich niederzulegen. Knotenmannigfaltigkeiten sind gewisse differenzierbare $O(n)$-Mannigfaltigkeiten, deren Orbitraum eine 4-dimensionale Vollkugel ist und bei denen die Fixpunktmenge im Orbitraum ein im Rand der Vollkugel gelegener Knoten ist (genaue Definition in § 7). Nach Jänich [11] stehen für jede ganze Zahl n Knoten und Knotenmannigfaltigkeiten in eineindeutiger Beziehung. Hirzebruchs Satz (§ 7. 3) macht Aussagen über Homotopie und Homologie der einem Knoten zugeordneten Knotenmannigfaltigkeit, gestattet zu entscheiden, ob es sich bei dieser um eine Sphäre handelt, und erlaubt es gegebenenfalls, die differenzierbare Struktur dieser Sphäre zu bestimmen. Hierbei erweist sich die Bedeutung der Signatur des Knotens. Im Juni 1967 teilte Hirzebruch in drei Vorträgen in Bonn seine Beweisidee mit, wobei eine Reihe von für den Beweis wesentlichen Teilproblemen offenblieb. Im Anschluß an diese Vorträge wurde der zweite Teil der vorliegenden Arbeit angefertigt.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Hirzebruch, danke ich sehr herzlich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit. Mein Dank gilt auch Herrn Dr. K. Jänich und Herrn Dr. K. H. Mayer für viele nützliche Unterhaltungen über den zweiten Teil der Arbeit.

Aufbau der Arbeit

§ 1. Seifertmatrizen eines Knotens

§ 2. Homologie der unendlich-zyklischen Überlagerung

§ 3. Vereinfachung der Relationenmatrix für die 1. Homologie

§ 4. Kohomologiering der unendlich-zyklischen Überlagerung

§ 5. Definition und Berechnung von quadratischer Form und Signatur eines Knotens

§ 6. Eigenschaften und Anwendungen der quadratischen Form

§ 7. Formulierung und Beweisidee des Satzes von Hirzebruch über Knotenmannigfaltigkeiten

§ 8. Die $O(n)$-Mannigfaltigkeiten S^{2n+1} und $S^n \times D^{n+1}$

§ 9. n-dimensionale äquivariante Mannigfaltigkeiten in S^{2n+1}

§ 10. Verschlingungszahlen äquivarianter n-Mannigfaltigkeiten in S^{2n+1}

§ 11. Äquivariante n-Sphären in S^{2n+1} und Tubenabbildungen

§ 12. Äquivariantes Henkelansetzen und äquivariante sphärische Modifikation

§ 13. Konstruktion der Knotenmannigfaltigkeiten

§ 14. Eigenschaften des Orbitraumes von $M_n(k)$

§ 15. Homotopie- und Homologie-Eigenschaften von $M_n(k)$ und $N_n(k)$

§ 16. Die Parallelisierbarkeit von $N_n(k)$

§ 17. Klassifikation der Sphären unter den Knotenmannigfaltigkeiten

Literaturverzeichnis

§ 1. Seifertmatrizen eines Knotens

1. 1. Wir beginnen mit der Festlegung verschiedener Begriffe und der Aufzählung einiger meist bekannter Tatsachen im Zusammenhang mit Seifertmatrizen.

k sei ein orientierter zahmer Knoten in S^3. Wir spannen in k eine zahme orientierbare Fläche $\tilde{S}$ ein (also $\tilde{S} < S^3$ und $\partial \tilde{S} = k$) und wählen eine Umgebung U von k in S^3 mit $\overline{U} \approx k \times D^2$ zahm, so daß $S = \tilde{S} \cap (S^3 - U)$ homöomorph zu $\tilde{S}$ ist. Nun spalten wir $S^3 - U$ längs S und nennen den so erhaltenen Raum X. X ist homotopieäquivalent zu $S^3 - \tilde{S}$, und aufgrund der Alexander-Dualität kennen wir die ganzzahlige Homologie von X. Insbesondere gilt $H_1(X) \cong H_1(S)$, und die durch die Verschlingungszahl gegebene Paarung $l: H_1(S) \otimes H_1(X) \to \boldsymbol{Z}$ ist nicht-singulär. $\tilde{S}$ ist durch seinen Rand k orientiert, und damit auch S. X ist durch S^3 orientiert. In X haben wir zwei Exemplare von S. Dasjenige Exemplar von S in X heißt das „obere", für das die von S kommende Orientierung mit der Orientierung als Teilmenge von ∂X übereinstimmt; das andere sei das „untere". $\bar{f}$ bzw. $\underline{f}: S \to X$ sei die obere bzw. die untere Inklusion.

1. 2. Definition. Sei (b_i) eine Basis von $H_1(S)$ und (b_i') die bezüglich l duale Basis von $H_1(X)$. Wir nennen die Matrix V von $\underline{f}_*: H_1(S) \to H_1(X)$ bezüglich dieser Basen „die Seifertmatrix von S bezüglich (b_i)". (Also $\underline{f}_*(b_i) = \Sigma v_{ji} b_j'$.)

Bemerkung. Die Seifertmatrix bezüglich einer andern Basis $(\bar{b}_i)$ mit $\bar{b}_i = \Sigma p_{ji} b_j$ ist $P'VP$, wie man leicht nachrechnet.

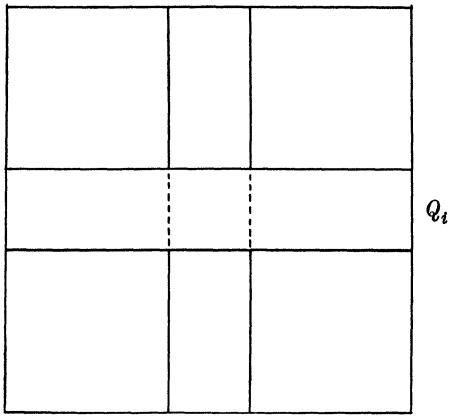
1. 3. Es ist klar, daß eine Deformation von S die Seifertmatrix nicht ändert. Denkt man sich S^3 als $\boldsymbol{R}^3 \cup \{\infty\}$ und ist $pr: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ die Projektion mit $pr(x, y, z) = (x, y)$, so kann man S immer so deformieren, daß gilt:

1) $S < \boldsymbol{R}^3$

2) Es gibt paarweise disjunkte Quadrate Q_i in $\boldsymbol{R}^2$ mit

$$(p, q \in S \wedge pr(p) = pr(q) \Rightarrow pr(p) \in \cup Q_i)$$

3) $pr^{-1}(Q_i) \cap S$ besteht aus zwei zu $[0,1] \times [0,1]$ homöomorphen Bändern, die jedes für sich durch pr injektiv abgebildet werden und die sich so überkreuzen:



Daß S immer auf diese Weise in $\boldsymbol{R}^3$ eingebettet werden kann, ist klar, wenn man S als Seifertfläche betrachtet. (Als Seifertfläche bezeichnen wir S im folgenden, wenn S als 2-Scheibe mit angehefteten Bändern gegeben ist, wobei die Seele jedes Bandes orientiert sein und die dadurch gegebene Basis der 1. Homologie die Schnittmatrix

$$I = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

auf S haben soll.)

S habe nun Eigenschaften 1), 2) und 3) und sei, von oben gesehen, im Uhrzeigersinn orientiert. b_i seien Wege auf S, die eine Basis für $H_1(S)$ bilden. In den Bändern von 3) mögen sie parallel zum Rand verlaufen. Dann errichte man einen Zylinder über b_i nach oben und schließe ihn durch den Punkt ∞ zu einem Kegel ab. Dieser liefert in X (das man sich zweckmäßig in S^3 eingebettet vorstellt) einen Kegel mit Löchern, und die Betrachtung von dessen Rand zeigt:

Wenn b_j den Weg b_i λ_{ij}-mal von links und ϱ_{ij}-mal von rechts überkreuzt, gilt $l(b_j, \bar{f}_*(b_i)) = \lambda_{ij} - \varrho_{ij}$.

Durch Errichten eines Zylinders über b_i nach unten ergibt sich:

$$l(b_j, \underline{f}_*(b_i)) = \lambda_{ji} - \varrho_{ji}.$$

Denn wenn b_j den Weg b_i λ_{ij}-mal von links und ϱ_{ij}-mal von rechts überkreuzt, so unterkreuzt b_i den Weg b_j λ_{ij}-mal von rechts und ϱ_{ij}-mal von links.

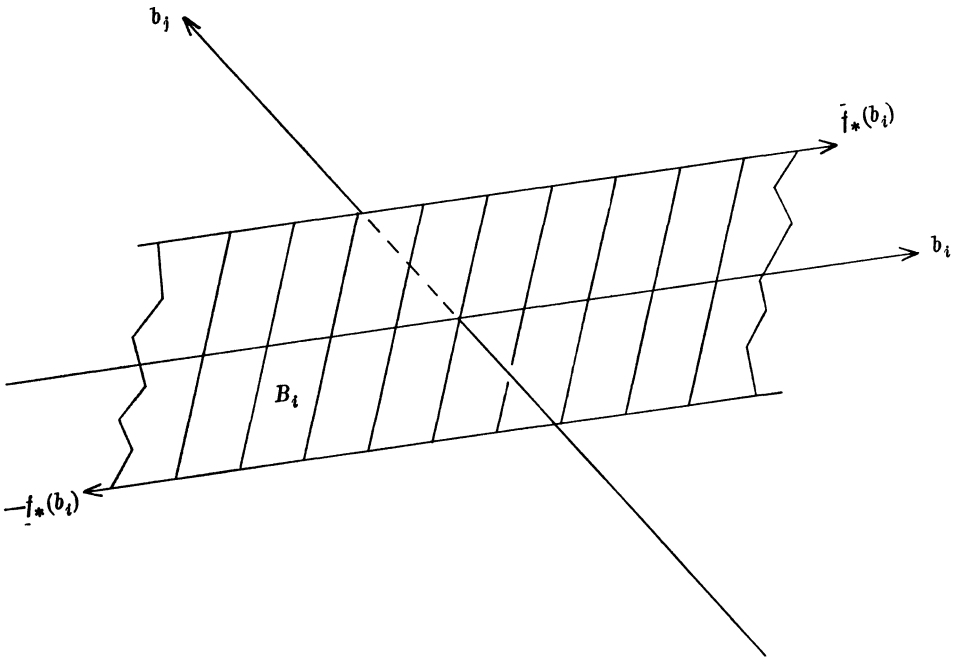
Folgerung. *Für die Seifertmatrix V von S bezüglich (b_i) gilt:*

$$v_{ij} = \lambda_{ij} - \varrho_{ij}.$$

Bemerkung. Hat $\underline{f}_*$ bezüglich (b_i) und (b_i') die Matrix V, so hat $\bar{f}_*$ die Matrix V' bezüglich dieser Basen.

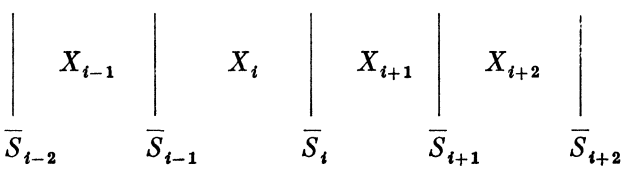
1.4. Lemma. *Ist V Seifertmatrix von S bezüglich der Basis (b_i), so ist $V' - V$ die Schnittmatrix von (b_i).*

Beweis [13]. Wir denken uns wieder X in S^3 eingebettet und spannen zwischen $\bar{f}(b_i)$ und $\underline{f}(b_i)$ ein orientiertes Band B_i mit Rand $\bar{f}_*(b_i) - \underline{f}_*(b_i)$ ein. Dann gilt $v_{ij} - v_{ji} = l(b_j, \bar{f}_*(b_i) - \underline{f}_*(b_i)) =$ Schnittzahl von b_j mit B_i. Dies ist aber die Schnittzahl $b_j \circ b_i$ in S.

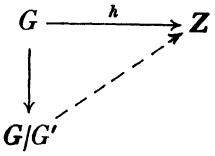


§ 2. Homologie der unendlich-zyklischen Überlagerung

2.1. Mit Hilfe einer in den Knoten k eingespannten Fläche bilden wir wie in 1.1 den Raum X. Wir haben die Inklusionen $\bar{f}, \underline{f}: S \to X$ und setzen $\bar{S} := \text{Bild}\, \bar{f}$ und $\underline{S} := \text{Bild}\, \underline{f}$. $\partial X = \bar{S} \cup \underline{S} \cup B$, wo B der längs der eingespannten Fläche aufgeschnittene Rand der Umgebung U von k ist. Zu jeder ganzen Zahl i nehmen wir nun ein Exemplar X_i von X und haben die entsprechenden Objekte $\bar{f}_i: S \to X_i$, $\underline{f}_i$, $\bar{S}_i$, $\underline{S}_i$. In der disjunkten Vereinigung $\bigcup_{i \in Z} X_i$ identifizieren wir für jedes i $\bar{S}_i$ und $\underline{S}_{i+1}$ mit Hilfe des Homöomorphismus $\underline{f}_{i+1} \circ \bar{f}_i^{-1}$. Der so entstandene Raum $\tilde{X}$ ist eine Mannigfaltigkeit mit zu $S^1 \times \boldsymbol{R}$ homöomorphem Rand. Unmittelbar klar ist, daß $\tilde{X}$ reguläre Überlagerung von $S^3 - U$ mit unendlich-zyklischer Deckbewegungsgruppe ist. t sei die erzeugende Deckbewegung, die jedes X_i in X_{i+1} wirft.



2. 2. Zur Kommutatorgruppe G' der Fundamentalgruppe G von $S^3 - U$ gehört bekanntlich eine unendlich-zyklische Überlagerung ([5]). Der Homomorphismus $h: G \to \boldsymbol{Z}$ mit Kern $h = \pi_1(\widetilde{X})$ läßt sich faktorisieren:



Alle Pfeile sind sürjektiv, daher $G/G' \dashrightarrow \boldsymbol{Z}$ bijektiv, woraus Kern $h = G'$ folgt. $\widetilde{X}$ ist also *die* unendlich-zyklische Überlagerung. (Es gibt ja im wesentlichen nur eine.)

2. 3. (Vergleiche [13].) Als Koeffizientenbereich für die Homologie verwenden wir einen Integritätsbereich A mit Eins. $J\boldsymbol{Z}$ sei der Gruppenring der unendlich-zyklischen Gruppe $\boldsymbol{Z}$, $A\boldsymbol{Z} := J\boldsymbol{Z} \otimes_{\boldsymbol{Z}} A$. Y_0 und Y_1 seien die Teilräume von $\widetilde{X}$:

$$Y_0 := \bigcup_{i \in \boldsymbol{Z}} X_{2i} \qquad Y_1 := \bigcup_{i \in \boldsymbol{Z}} X_{2i+1}$$

$(X; Y_0, Y_1)$ ist eigentliche Triade mit $Y_0 \cup Y_1 = \widetilde{X}$, $Y_0 \cap Y_1 = \bigcup_{i \in \boldsymbol{Z}} \bar{S}_i$.

$$H_q(Y_0) \oplus H_q(Y_1) \cong \coprod_{i \in \boldsymbol{Z}} H_q(X_i); \quad H_q(Y_0 \cap Y_1) \cong \coprod_{i \in \boldsymbol{Z}} H_q(\bar{S}_i).$$

Der Homomorphismus $H_0(Y_0 \cap Y_1) \to H_0(Y_0) \oplus H_0(Y_1)$ der Mayer-Vietoris-Sequenz ([6]) von $(\widetilde{X}; Y_0, Y_1)$ ist leicht als injektiv nachzuweisen. Daher ist die erste Zeile des folgenden Diagramms als Teil dieser Mayer-Vietoris-Sequenz exakt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_2(\widetilde{X}) & \longrightarrow & \coprod_{i \in \boldsymbol{Z}} H_1(\bar{S}_i) & \xrightarrow{\alpha} & \coprod_{i \in \boldsymbol{Z}} H_1(X_i) & \longrightarrow & H_1(\widetilde{X}) & \longrightarrow & 0 \\
\cong\downarrow{\scriptstyle id} & & \cong\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \cong\downarrow{\scriptstyle \psi} & & \cong\downarrow{\scriptstyle id} & & \\
H_2(\widetilde{X}) & \longrightarrow & H_1(S) \otimes A\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\beta} & H_1(X) \otimes A\boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\pi} & H_1(\widetilde{X}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Die Isomorphismen φ und ψ des Diagramms definieren wir so:

$$\varphi(x) = g_{i*}(x) \otimes (-1)^i t^i$$

$$\psi(y) = h_{i*}(y) \otimes t^i$$

$(g_i: \bar{S}_i \to S,\ h_i: X_i \to X$ kanonisch, $x \in H_1(\bar{S}_i),\ y \in H_1(X_i))$.

β und π sind durch die Kommutativität des Diagramms definiert. Sind $f_i: \bar{S}_i \subset X_i$ und $f_i': \bar{S}_i \subset X_{i+1}$ die Inklusionen, $x \in H_1(\bar{S}_i)$, gilt nach Definition $\alpha(x) = (-1)^i (f_{i*}(x) - f_{i*}'(x))$. Für β gilt dann die Formel

$$\beta(x \otimes t^i) = f_*(x) \otimes t^i - f_*(x) \otimes t^{i+1}.$$

β ist daher $A\boldsymbol{Z}$-Homomorphismus. (Bei der „natürlicheren" Identifikation der oberen mit der unteren Sequenz ohne das Vorzeichen bei der Definition von φ wäre β kein $A\boldsymbol{Z}$-Homomorphismus geworden!) Ist V Seifertmatrix bezüglich der Basis (b_i), hat β bezüglich dieser Basis die Matrix $V' - tV$ (1. 3). Da $\det(V' - tV) \neq 0$ nach Lemma 1. 4, ist β injektiv, folglich $H_2(\widetilde{X}) = 0$. Durch das Operieren von $t \in A\boldsymbol{Z}$ als Deckbewegung wird $H_1(\widetilde{X})$ zum $A\boldsymbol{Z}$-Modul. Man prüft leicht nach, daß π $A\boldsymbol{Z}$-Homomorphismus ist. Als Ergebnis halten wir fest:

Satz. *Sei A Integritätsbereich; dann gibt es eine exakte Sequenz über AZ:* $0 \longrightarrow H_1(S; \mathbf{Z}) \otimes AZ \xrightarrow{\beta} H_1(X; \mathbf{Z}) \otimes AZ \xrightarrow{\pi} H_1(\tilde{X}; A) \longrightarrow 0$. *$\beta$ ist bezüglich einem Paar dualer Basen in $H_1(S)$ und $H_1(X)$ durch die Matrix $V' - tV$ gegeben, wenn V Seifertmatrix bezüglich der Basis von $H_1(S)$ ist.*

2. 4. Korollar (Crowell [3]). *Für eine Knotengruppe G hat die abelsche Gruppe G'/G'' keine Torsion.*

Beweis. $G'/G'' \cong H_1(\tilde{X}; \mathbf{Z})$ als Gruppen. $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\beta} D \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$ sei die exakte Sequenz von Satz 2. 3 für $A = \mathbf{Z}$. Sei p Primzahl und $h \in H$ mit $ph = 0$, $h \neq 0$. Sei $d \in D$ mit $\pi(d) = h$. $pd \in$ Kern π, also existiert $c \in C$ mit $\beta(c) = pd$. Gäbe es $c' \in C$ mit $pc' = c$, wäre $p\beta(c') = pd$, also $\beta(c') = d$, weil D ohne p-Torsion, daher $0 = \pi\beta(c') = h \neq 0$, Widerspruch. Tensorieren wir die Sequenz mit $\mathbf{Z}_p$, ist $\beta \otimes id_{\mathbf{Z}_p}$ injektiv; aber $c \otimes 1 \neq 0$ in $C \otimes \mathbf{Z}_p$, andererseits $\beta(c) \otimes 1 = pd \otimes 1 = 0$ in $D \otimes \mathbf{Z}_p$. Widerspruch zur Injektivität von $\beta \otimes id_{\mathbf{Z}_p}$.

Bemerkung. Mit der gleichen Methode beweist man, daß $H_1(\tilde{X}; A)$ keine A-Torsion hat, wenn A Integritätsbereich mit eindeutiger Primfaktorzerlegung ist.

2. 5. Es gilt auch $G'/G'' \cong H_1(\tilde{X}; \mathbf{Z})$ als $J\mathbf{Z}$-Moduln. (G'/G'' ist der von Crowell untersuchte Knotenmodul.) Als weitere Folgerung aus Satz 2. 3 erhalten wir also, daß $V' - tV$ Relationenmatrix des Knotenmoduls ist. Die Determinante einer quadratischen Relationenmatrix für G'/G'' (also auch det $(V' - tV)$) ist nach Crowell bis auf Einheiten in $J\mathbf{Z}$ das Alexanderpolynom des Knotens.

2. 6. Die natürlichen Inklusionen induzieren das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen (Koeffizienten in A):

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_2(\bar{S}_i, \partial\bar{S}_i) & \xrightarrow{\cong} & H_1(\partial\bar{S}_i) & \xrightarrow{o} & H_1(\bar{S}_i) & \xrightarrow{\cong} & H_1(\bar{S}_i, \partial\bar{S}_i) \longrightarrow 0 \\
 & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}) & \xrightarrow{\cong} & H_1(\partial\tilde{X}) & \xrightarrow{o} & H_1(\tilde{X}) & \xrightarrow{\cong} & H_1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

$\cong$ bedeutet bijektiv, o die Nullabbildung.

Die Markierung der Pfeile mit $\cong$ bzw. o in der oberen Zeile ist klar. $\partial\tilde{S}_i < \partial\tilde{X}$ ist Homotopieäquivalenz. Damit folgt o in der unteren Zeile, und daraus die übrigen Markierungen. Aus dem linken Viereck des Diagramms schließen wir:

2. 7. Satz. 1) *Für einen Integritätsbereich A ist $H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ isomorph zu A. Das Einspannen einer beliebigen orientierbaren Fläche S in den orientierten Knoten liefert einen Isomorphismus vermöge des Diagramms*

$$\begin{array}{ccc}
H_2(S, \partial S; A) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_1(\partial S; A) \cong A \\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow \\
H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_1(\partial\tilde{X}; A)
\end{array}$$

Der Isomorphismus hängt nur von der Orientierung des Knotens ab. 2) *Die Gruppe der Deckbewegungen von $\tilde{X}$ operiert trivial auf $H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$.*

Definition. Das Bild der Fundamentalklasse des Knotens in $H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ unter dem Isomorphismus des Satzes nennen wir Fundamentalklasse von $\tilde{X}$.

2. 8. Wir fassen zusammen, was wir bis jetzt über die Homologie von $\tilde{X}$ wissen:

$H_0(\tilde{X}; A) \cong H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \cong A$

$H_0(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) = H_2(\tilde{X}; A) = 0$

$H_1(\tilde{X}; A) \cong H_1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ hat als AZ-Modul Relationenmatrix $V' - tV$.

§ 3. Vereinfachung der Relationenmatrix für die 1. Homologie

3. 1. Um eine hinreichende Bedingung dafür zu finden, daß $H_1(\tilde{X}; A)$ als A-Modul endlich erzeugt ist (als AZ-Modul ist $H_1(\tilde{X}; A)$ wegen 2. 3 endlich erzeugt), beschäftigen wir uns etwas ausführlicher mit Relationenmatrizen (siehe zum Beispiel [23]).

Jede Matrix über einem kommutativen unitären Ring K ist Relationenmatrix eines K-Moduls M: M ist der Kokern eines Homomorphismus $\beta: C \to D$ von freien endlich erzeugten K-Moduln C und D, dessen Matrix bezüglich Basen die gegebene ist. $C \xrightarrow{\beta} D \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ ist dann exakt. Links- und Rechtsmultiplikation der Matrix mit invertierbaren Matrizen ändern den Kokern nicht; denn sie bedeuten den Übergang zu andern Basen in D bzw. C.

3. 2. Ist $e \in K$ eine Einheit, N eine (r, r)-Matrix über K, n ein r-Tupel über K, so definieren wir folgende Diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc}
K^{r+1} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} e & n \\ 0 & N \end{bmatrix}} & K^{r+1} & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle [0\ E]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [0\ E]} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
K^r & \xrightarrow{[N]} & K^r & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
K^{r+1} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} e & 0 \\ n' & N \end{bmatrix}} & K^{r+1} & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle [0\ E]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [-e^{-1}n'E]} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
K^r & \xrightarrow{[N]} & K^r & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

E ist die (r, r)-Einheitsmatrix. Die obere Zeile jeweils ist per definitionem exakt. M_1 hat also Relationenmatrix $\begin{bmatrix} e & n \\ 0 & N \end{bmatrix}$, M_2 Relationenmatrix $\begin{bmatrix} e & 0 \\ n' & N \end{bmatrix}$. Die Homomorphismen $K^r \to M_i$ definieren wir so: Das j-te Basiselement von K^r bilden wir auf das Bild des $(j+1)$-ten unter dem Homomorphismus $K^{r+1} \to M_i$ der oberen Zeile ab. Damit werden die Diagramme kommutativ.

Die untere Zeile jedes der Diagramme ist ebenfalls exakt, wie leicht nachzuprüfen ist.

Den Übergang von der oberen zur unteren Zeile kann man daher interpretieren als Weglassen eines überflüssigen Erzeugenden und einer überflüssigen Relation. Als Ergebnis stellen wir fest:

Lemma. *N, $\begin{bmatrix} e & n \\ 0 & N \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} e & 0 \\ n' & N \end{bmatrix}$ definieren isomorphe K-Moduln.*

3. 3. Sei A wieder ein Integritätsbereich mit Eins. Wir benötigen einen algebraischen

Hilfssatz. *$(AZ)^r \xrightarrow{\beta} (AZ)^r \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$ sei eine exakte Sequenz über AZ. β sei bezüglich der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_r$ von $(AZ)^r$ gegeben durch*

$$\beta(e_n) = \sum_{i=1}^{r} (t_{in} - t\delta_{in}) e_i,$$

wobei $T = (t_{in})$ eine (r, r)-Matrix über A ist, deren Determinante eine Einheit ist. Dann ist H als A-Modul frei vom Rang r und $(\pi(e_i))_{i=1,\ldots,r}$ ist eine A-Basis.

Beweis. Wir zeigen zuerst: $\pi(e_1), \ldots, \pi(e_r)$ erzeugen H über A. Seien $h \in H$, $x \in (AZ)^r$ mit $\pi(x) = h$. $x = \sum_{i=1}^{r} l_i e_i$, wo die l_i Laurentpolynome in t mit Koeffizienten in A sind. Ist $T^{-1} = (\theta_{in})$, gilt

$$te_n = -\beta(e_n) + \sum_{i=1}^{r} t_{in} e_i,$$

$$t^{-1} e_n = \beta\left(\sum_{i=1}^{r} \theta_{in} t^{-1} e_i\right) + \sum_{i=1}^{r} \theta_{in} e_i.$$

Durch vollständige Induktion beweist man leicht, daß für jede ganze Zahl j Elemente $y \in (AZ)^r$ und $a_{in} \in A$ existieren mit

$$t^j e_n = \beta(y) + \sum_{i=1}^{r} a_{in} e_i.$$

Deshalb gibt es auch $z \in (AZ)^r$ und $a_i \in A$, so daß $x = \beta(z) + \sum_{i=1}^{r} a_i e_i$. Dann gilt $h = \pi(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i \pi(e_i)$.

$\pi(e_1), \ldots, \pi(e_r)$ sind aber auch linear unabhängig über A. Sei nämlich $\sum_{i=1}^{r} a_i \pi(e_i) = 0$ für gewisse $a_i \in A$. Dann existiert ein $x = \sum_{i=1}^{r} l_i e_i \in (AZ)^r$, $l_i = \sum_j \lambda_{ji} t^j \in AZ$, mit $\beta(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i e_i$. Angenommen x ist ungleich null. Sei p die kleinste ganze Zahl, so daß $\lambda_{ij} = 0$ für alle (j, i) mit $j \geqq p$ und $1 \leqq i \leqq r$, und q die größte ganze Zahl, so daß $\lambda_{ji} = 0$ für alle (j, i) mit $j \leqq q$ und $1 \leqq i \leqq r$. p und q existieren wegen $x \neq 0$, und $p \geqq q + 2$. $\beta(x) = \sum_{n=1}^{r} \sum_j \sum_{i=1}^{r} (\lambda_{ji} t_{ni} - \lambda_{j-1,i} \delta_{ni}) t^j e_n = \sum_{n=1}^{r} a_n e_n$. Wäre $p \geqq 1$, folgte $0 = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_{pi} t_{ni} - \lambda_{p-1,i} \delta_{ni}) = -\lambda_{p-1\,n}$ für alle n, und p wäre nicht die kleinste Zahl. Wäre $q \leqq -2$, folgte $0 = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_{q+1,i} t_{ni} - \lambda_{qi} \delta_{ni}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{q+1,i} t_{ni}$ für alle n und wegen der Maximaleigenschaft von q lineare Abhängigkeit der Spalten von T, im Widerspruch zu $\det T \neq 0$. $p \leqq 0$ und $q \geqq -1$ widerspricht $p \geqq q + 2$. Also $x = 0$ und $a_1, \ldots, a_r = 0$. q. e. d.

Korollar. *$t \in AZ$ operiert als Automorphismus auf H, der bezüglich der A-Basis $(\pi(e_i))$ die Matrix T hat.*

3. 4. Wir wenden uns wieder unserem Knoten k zu.

Definition. Die ganzzahlige quadratische nicht-singuläre Matrix W heißt reduzierte Seifertmatrix des Knotens k, wenn es eine Seifertmatrix V von k und eine ganzzahlige unimodulare Matrix P gibt, so daß $P'VP$ die folgende Gestalt hat:

$$P'VP = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & & 0 & & & & \\ \cdot & & -1 & 0 & & & \\ \cdot & & 0 & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & q_1 & \cdot & q_2 & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & & & \boxed{W} \\ \cdot & & \cdot & & & & \\ 0 & & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right]$$

(W hat also gerade Reihenzahl; V selbst ist reduzierte Seifertmatrix genau dann, wenn $\det V \neq 0$ ist. Ebenso wie für V müssen wir auch für W unter Umständen eine Matrix mit null Zeilen und Spalten zulassen. Diese soll per definitionem nicht-singulär sein.)

Da $V' - V$ nicht-singulär ist, existiert zu jeder Seifertmatrix eine reduzierte ([22]).

3. 5. Satz. *Für jede reduzierte Seifertmatrix W von k ist $W' - tW$ Relationenmatrix für $H_1(\tilde{X}; A)$.*

Beweis. Anwendung von 3. 1 und 3. 2.

3. 6. Korollar. $\det(W' - tW)$ *ist bis auf Vorzeichen gleich dem Alexanderpolynom Δ von k. Insbesondere gilt* $|\det W| = \Delta(0)$.

Beweis. $\det(W' - tW)$ ist bis auf Einheiten in JZ gleich Δ, wie 2. 5 und eine triviale Rechnung zeigen. Das Korollar folgt dann aus $\det W' \neq 0$.

3. 7. Satz. *Δ sei das Alexanderpolynom des Knotens k und A ein Integritätsbereich, in dem $\Delta(0)$ eine Einheit ist. Dann ist $H_1(\tilde{X}; A)$ freier endlich erzeugter A-Modul. Ist W eine reduzierte Seifertmatrix von k, so existiert in $H_1(\tilde{X}; A)$ eine A-Basis, bezüglich der der Automorphismus t_* die Matrix $W'W^{-1}$ hat.*

Beweis. Nach 2. 3, 3. 1 und 3. 2 gibt es ein kommutatives Diagramm über AZ mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(S; Z) \otimes AZ & \xrightarrow{\beta} & H_1(X; Z) \otimes AZ & \xrightarrow{\pi} & H_1(\tilde{X}; A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{b} & D & \xrightarrow{p} & H_1(\tilde{X}; A) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Die AZ-Homomorphismen β und b haben bei passender Basiswahl die Matrizen $V' - tV$ bzw. $W' - tW$. Da W über A invertierbar ist, hat b nach einem Basiswechsel in C die Matrix $W'W^{-1} - tE$ (3. 1). Die Behauptungen des Satzes folgen dann aus Hilfssatz und Korollar in 3. 3. q. e. d.

§ 4. Kohomologiering der unendlich-zyklischen Überlagerung

4. 1. Im folgenden sei A immer ein Integritätsbereich mit Eins, in dem für das Alexanderpolynom Δ unseres Knotens k $\Delta(0)$ eine Einheit ist. Dann wissen wir aufgrund unserer bisherigen Untersuchungen und der Künnethsequenz:

$H_0(\tilde{X}; A) \cong H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \cong A$

$H_1(X; A) \cong H_1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ endlich erzeugte freie A-Moduln von geradem Rang.

In allen andern Fällen verschwindet die Homologie.

$H^q \cong \mathrm{Hom}_A(H_q, A) \cong H_q$ für $\tilde{X}$ und $(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$ und alle q.

Wir bestimmen nun den Kohomologiering für A als Koeffizientenbereich. Wegen der soeben angeführten homologischen Eigenschaften von $\tilde{X}$ und $(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$ kennen wir diesen, sobald wir die schiefsymmetrische Paarung

$$\begin{aligned} H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \otimes H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) &\to A \\ x \otimes y &\mapsto \langle x \cup y, z\rangle \end{aligned}$$

kennen. Hierbei ist z die in 2. 7 eingeführte Fundamentalklasse.

4. 2. Lemma. *Ist V Seifertmatrix und W reduzierte Seifertmatrix von k, so gibt es eine über A unimodulare Matrix P, so daß*

$$P'VP = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$$

gilt für eine Matrix U über A der Gestalt

$$U = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & 0 & \\ 0 & \vdots & \ddots & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & 0 & & & \\ \vdots & p_1 & & & -1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots & 0 & \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 & 0 & p_m & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beweis. V ist über $\boldsymbol{Z}$ kongruent zu einer Matrix

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & 0 & \\ 0 & \vdots & \ddots & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & 0 & & & \\ \vdots & q_1 & & & -1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & q_{m+1} & \boxed{W} & \\ 0 & \vdots & \cdots & 0 & 0 & \vdots & & \end{bmatrix}$$

(siehe 3. 4). Da W über A invertierbar, kann man die Spalte q_{m+1} aus den Spalten von W linear kombinieren. Rechtsmultiplikation mit passendem über A unimodularem P_1 bewirkt daher, daß q_{m+1} durch null ersetzt wird.

$$P_1' V_1 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & 0 & \\ 0 & \vert & \cdot & & & & & \\ \cdot & \vert & & \cdot & & & & \\ \cdot & \vert & & & \cdot & 0 & & \\ \cdot & \tilde{q}_1 & & & & -1 & 0 & -\tilde{q}_{m+1} - \\ \cdot & \vert & & & & 0 & \cdot & \\ \cdot & \vert & & & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \vert & & & & \cdot & \cdot & \boxed{W} \\ 0 & \vert & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Da die $(2m+1)$-te Spalte in der $(2m+2)$-ten Zeile -1 und sonst überall Nullen hat, wird nach Rechtsmultiplikation mit geeignetem P_2 $\tilde{q}_{m+1}$ durch null ersetzt. Dann hat $P_2' P_1' V_1 P_1 P_2$ die Form

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & \vert & \cdot & & & & & \\ \cdot & \vert & & \cdot & & 0 & & \\ \cdot & \vert & & & \cdot & \vert & 0 & \\ \cdot & \tilde{\tilde{q}}_1 & & & & -1 & 0 & \\ \cdot & \vert & & & & \tilde{\tilde{q}}_m \; 0 & \cdot & \\ \cdot & \vert & & & & \vert & \cdot & \cdot \\ \cdot & \vert & & & & \vert & \cdot & \cdot \; \boxed{W} \\ 0 & \vert & \cdot & \cdot & \cdot & \vert & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jetzt ist klar, wie man das Lemma durch Induktion beweist.

4. 3. Wir berechnen nun bezüglich Basen die Matrizen von

$$f_*: H_1(S;\ A) \to H_1(\tilde{X};\ A)$$

und

$$t_*: H_1(\tilde{X};\ A) \to H_1(\tilde{X};\ A),$$

wobei $f: S \to \tilde{X}$ die zusammengesetzte Inklusion $S \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\approx} X_0 \xrightarrow{\subseteq} \tilde{X}$ und t die erzeugende Deckbewegung ist.

Lemma. *Ist W reduzierte Seifertmatrix von k, so gibt es Basen in $H_1(S;\ A)$ und $H_1(\tilde{X};\ A)$, für die f_* die Matrix $[0\ W]$ und t_* die Matrix $T = W' W^{-1}$ hat.*

Beweis. Man betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & H_1(X;A) & \xleftarrow{i_*} & H_1(S;A) & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle t_*} & & \\ 0 & \longrightarrow & H_1(S;A)\otimes AZ & \xrightarrow{\beta} & H_1(X;A)\otimes AZ & \xrightarrow{\pi} & H_1(\tilde{X};A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{b} & D & \xrightarrow{p} & H_1(\tilde{X};A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(Der untere Teil wurde in 3. 7 definiert.) Nach Lemma 4. 2 und Bemerkung 1. 2 kann man in $H_1(S; A)$ und $H_1(X; A)$ A-Basen finden, für die f_* eine Matrix $\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$ wie in Lemma 4. 2 hat. β hat bezüglich der entsprechenden AZ-Basen die Matrix

$$\begin{bmatrix} U' - tU & 0 \\ 0 & W' - tW \end{bmatrix}.$$

(Siehe zum Beispiel 2. 3.) Nach einem Basiswechsel in $H_1(S; A) \otimes AZ$, durch den die $(2i)$-te mit der $(2i-1)$-ten Spalte in $U' - tU$ $(i = 1, \ldots, m+1)$ vertauscht wird, können wir 3. 2 anwenden und erhalten für g die Matrix

$$[0 \;\; E_w]\,[0 \;\; E_{w+1}]\,[0 \;\; E_{w+2}] \begin{bmatrix} 0 & & \\ | & & \\ -tp_m & & \\ | & & \\ 0 & E_{w+3} & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \cdots [0 \;\; E_{w+2m}] \begin{bmatrix} 0 & & \\ | & & \\ -tp_1 & & \\ | & & \\ 0 & E_{w+2m+1} & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ 0 & & \end{bmatrix} = [\tilde{0} \; E_w],$$

wo w die Reihenzahl von W, E_i die i-reihige Einheitsmatrix und $\tilde{0}$ die $(w, 2m+2)$-Nullmatrix ist, und für b die Matrix $W' - tW$. Durch eine Basistransformation in C erreichen wir, daß b die Matrix $W'W^{-1} - tE_w$ hat und schließen aus Hilfssatz und Korollar 3. 3, daß die Bilder der AZ-Basis von D unter p eine A-Basis für $H_1(\tilde{X}; A)$ sind, bezüglich der t_* die Matrix $W'W^{-1}$ hat. f_* hat dann für diese Basen die Matrix $[\tilde{0} \; E_w] \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} = [\tilde{0} \; W]$. q. e. d.

4. 4. Ist z' Fundamentalklasse von S, so ist $z = f_*(z')$ Fundamentalklasse von $\tilde{X}$. Wir schreiben $H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) = \mathrm{Hom}\,(H_1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A), A) = \mathrm{Hom}\,(H_1(\tilde{X}; A), A)$ und ebenso für S. Zu den Basen von Lemma 4. 3 haben wir dann die entsprechenden Dualbasen $x^i \in H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ und $y^i \in H^1(S, \partial S; A)$, und f^* hat für diese als Matrix $N = \begin{bmatrix} 0 \\ W' \end{bmatrix}$.

Satz. *Die Paarung*

$$H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \otimes H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \to A$$

$$x \otimes y \qquad\qquad \mapsto \langle x \cup y, z \rangle$$

hat bezüglich der Basis (x^i) *die Matrix* $-W(W' - W)^{-1}W'$.

Beweis. $\langle x^i \cup x^j, f_* z' \rangle = \langle f^* x^i \cup f^* x^j, z' \rangle = \sum_l \sum_r n_{li} n_{rj} \langle y^l \cup y^r, z' \rangle$. Die gesuchte Matrix ist also $N'\Sigma N$, wobei wir $(\langle y^l \cup y^r, z' \rangle = \Sigma$ gesetzt haben. Sei (γ^i) die Basis von $H^1(S, \partial S; A)$ mit $\langle y^j \cup \gamma^i, z' \rangle = \delta_{ji}$. $y^l = \sum_i \gamma_{li}\gamma^i$. $\langle y^l \cup y^r, z' \rangle = \sum_i \sum_j \gamma_{li}\gamma_{jr} \langle \gamma^i \cup \gamma^j, z' \rangle$. Da (y^i) Dualbasis zur Basis $(\gamma^i \cap z')$ ist, deren Schnittmatrix in S durch $\begin{bmatrix} U' - U & 0 \\ 0 & W' - W \end{bmatrix}$ gegeben ist (Lemma 1. 4), folgt

$$\Sigma = \Gamma' \begin{bmatrix} U' - U & 0 \\ 0 & W' - W \end{bmatrix} \Gamma.$$

$$\langle y^l \cup y^r, z' \rangle = \sum_i \gamma_{ir} \langle y^l \cup \gamma^i, z' \rangle = \sum_i \gamma_{ir} \delta_{li} = \gamma_{lr}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \Sigma' \begin{bmatrix} U' - U & 0 \\ 0 & W' - W \end{bmatrix} \Sigma \Rightarrow \Sigma = - \begin{bmatrix} (U' - U)^{-1} & 0 \\ 0 & (W' - W)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N' \Sigma N = -W(W' - W)^{-1} W' \qquad \text{q. e. d.}$$

4. 5. Folgerung. *Die in Satz 4. 4 genannte Paarung ist nicht-entartet.*

Beweis. Nach einem Basiswechsel hat die Paarung die Matrix $-(W' - W)^{-1}$.

4. 6. Wir können unsere Ergebnisse auch so formulieren:

Ist im Koeffizientenbereich $\Delta(0)$ eine Einheit, so verhält sich die unendlichzyklische Überlagerung bezüglich Homologiemodul und Kohomologiealgebra wie eine kompakte orientierbare Fläche mit genau einer Randkomponente. Insbesondere gilt:

Satz. *Das cup-Produkt mit der Fundamentalklasse liefert Isomorphismen*

$$H^*(\tilde{X}; A) \xrightarrow{\frown z} H_*(\tilde{X}, \partial \tilde{X}; A)$$

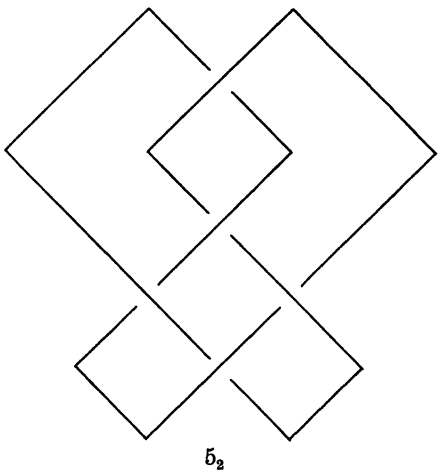
$$H^*(\tilde{X}, \partial \tilde{X}; A) \xrightarrow{\frown z} H_*(\tilde{X}; A),$$

was man als „Poincaré-Dualität" für $\tilde{X}$ ansehen kann.

4. 7. *Bemerkung.* Die Fundamentalklasse existiert nach 2. 7 auch für $\boldsymbol{Z}$ als Koeffizientenbereich. Daher kann man die beiden Homomorphismen $\frown z$ des Satzes 4. 6 auch für $A = \boldsymbol{Z}$ definieren. Im allgemeinen sind diese jedoch nicht bijektiv:

Beispiel. Für den Knoten 5_2 der Alexander-Briggs-Tabelle ([15]) ist $H^1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}) = 0$, aber

$$H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}) \neq 0.$$



5_2

Beweis. Nach [4] ist für diesen Knoten

$$H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}) \neq 0$$

und jedes Element dieser Gruppe durch 2 teilbar. Daraus folgt $H^1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}) = \mathrm{Hom}\,(H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}), \boldsymbol{Z}) = 0$.

Mit den Methoden dieser Arbeit kann man den Beweis so führen: 5_2 gestattet eine Seifertmatrix $V = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Die Sequenz von Satz 2. 3 für $A = \boldsymbol{Z}_2$ ist die obere Zeile des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(S; \boldsymbol{Z}) \otimes \boldsymbol{Z}_2 \boldsymbol{Z} & \xrightarrow{\beta} & H_1(X; \boldsymbol{Z}) \otimes \boldsymbol{Z}_2 \boldsymbol{Z} & \longrightarrow & H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{b} & D & \longrightarrow & H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

β hat Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t & t+1 \end{bmatrix}$, und durch Anwendung von 3. 2 erhalten wir die untere Zeile mit Matrix $[t]$ für b. b ist daher bijektiv, also $H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}_2) = H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}) \otimes \boldsymbol{Z}_2 = 0$. Deshalb ist jedes Element von $H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z})$ durch 2 teilbar. Für $A = \boldsymbol{Z}$ ist β nicht bijektiv, da $\det(V' - tV) = \pm \Delta$ keine Einheit in $J\boldsymbol{Z}$ ist, also $H_1(\tilde{X}; \boldsymbol{Z}) \neq 0$.

Bemerkung. Mir ist nicht bekannt, ob aus der Bijektivität von $\frown z$ folgt, daß $H_1(\tilde{X}; A)$ endlich erzeugter freier A-Modul ist. Frei, aber nicht endlich erzeugt sein kann $H_1(\tilde{X}; A)$ jedenfalls nicht, wenn $\frown z$ bijektiv ist.

4. 8. *Bemerkung.* Für einen Neuwirth-Knoten (das ist ein Knoten, dessen Gruppe endlich erzeugte Kommutatorgruppe hat) ist bekanntlich $\tilde{X} \approx S \times \boldsymbol{R}$; unsere bisherigen Ergebnisse sind in diesem Fall also trivial. Man kann diese daher als eine Antwort auf die Frage interpretieren, für welche Koeffizientenbereiche sich $\tilde{X}$ wenigstens homologisch wie ein Produkt verhält.

§ 5. Definition und Berechnung von quadratischer Form und Signatur eines Knotens

5. 1. Generalvoraussetzung: In §§ 5 und 6 sei die Charakteristik des Integritätsbereiches A von 2 verschieden.

Definition. k sei ein orientierter Knoten, $z \in H_2(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ die durch die Orientierung von k eindeutig bestimmte Fundamentalklasse der unendlich-zyklischen Überlagerung $\tilde{X}$, A ein Integritätsbereich, in dem das absolute Glied $\Delta(0)$ des Alexanderpolynoms von k eine Einheit ist. t sei die zur Orientierung von k gehörige erzeugende Deckbewegung von $\tilde{X}$. Dann sei die quadratische Form über A von k durch folgende symmetrische Bilinearform b definiert:

$$b: H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \otimes H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \to A$$

$$(*) \qquad b(x \otimes y) = \langle x \cup t^* y + y \cup t^* x, z\rangle$$

5. 2. Da $H^*(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ wegen der Voraussetzung über A frei und endlich erzeugt ist, hat es einen Sinn, die quadratische Form durch eine Matrix zu beschreiben.

Satz. *Ist W reduzierte Seifertmatrix von k (Definition* 3. 4*), so ist die Matrix der quadratischen Form von k bezüglich einer passenden Basis $W + W'$.*

Es sei darauf hingewiesen, daß $W + W'$ ganzzahlig ist!

Beweis. Die Hauptarbeit haben wir bereits in § 4 geleistet, als das cup-Produkt in $H^*(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ ausgerechnet wurde. Wir benutzen die Bezeichnungen von 4. 2 bis 4. 4.

$$b(x^i \otimes x^j) = \langle f^* x^i \cup f^* t^* x^j + f^* x^j \cup f^* t^* x^i, z'\rangle$$

$$= \sum_l \sum_m \sum_r n_{li} n_{rm} t_{jm} \langle y^l \cup y^r, z'\rangle + \sum_l \sum_m \sum_r n_{lj} n_{rm} t_{im} \langle y^l \cup y^r, z'\rangle.$$

In Matrizenform $B = N'\Sigma N T' + T N' \Sigma' N = -W(W' - W)^{-1} W + W'(W' - W)^{-1} W'$. Da $\det(W' - W) = 1$ ist, gibt es eine ganzzahlige unimodulare Matrix M mit $M'(W' - W)^{-1} M = I$. Hier soll I die Kästchenmatrix mit lauter Kästchen $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ längs der Hauptdiagonalen sein. Setzt man noch $P = M^{-1} W' M'^{-1}$, gelten

$$P' - P = I$$

$$P' I' P' + P I P = P' + P$$

$$P' I' P' + P I P = M^{-1} B M'^{-1}.$$

Dann folgt $B = M(P' + P) M' = W + W'$. q. e. d.

5. 3. *Bemerkung.* In [22] wurde gezeigt, daß die Kongruenzklasse von $W + W'$ über A eine Knoteninvariante ist (allerdings für etwas speziellere A). Wir haben also mit Satz 5. 2 eine schöne topologische Interpretation von Trotters Invariante und können andererseits die topologisch definierte quadratische Form aus einer beliebigen Seifertmatrix des Knotens rein algebraisch ausrechnen.

5. 4. Daß man die Bedingung für den Ring A im allgemeinen nicht abschwächen kann, sieht man an Beispiel 4. 7: Für den Knoten 5_2 ist $H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; \boldsymbol{Z}) = 0$; aber wenn $\Delta(0) = 2$ Einheit in A ist, gilt $H^1(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \cong A \oplus A$.

5. 5. Jeder Knoten hat eine quadratische Form über $A = \boldsymbol{Q}$, den rationalen Zahlen.

Definition. Die Signatur $\sigma(k)$ eines Knotens k definieren wir als Signatur seiner quadratischen Form über $\boldsymbol{Q}$.

5. 6. Die Signatur eines Knotens ist dann natürlich die Signatur der Matrix $W + W'$ für eine reduzierte Seifertmatrix W. Man kann sie aber berechnen, ohne eine reduzierte Seifertmatrix zu suchen:

Satz. *Ist V Seifertmatrix von k, ist $\sigma(k)$ gleich der Signatur der Matrix $V + V'$.*

Beweis. $V + V'$ ist über $\boldsymbol{Z}$ kongruent zu einer Matrix

$$\begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & & q_1' & \\
0 & & 0 & -1 & 0 \\
\vdots & & -1 & 0 & \\
 & & 0 & & \\
 & q_1 & \vdots & & \\
 & & q_2 & & \\
 & & & & W + W' \\
0 & & 0 & &
\end{bmatrix}.$$

(Vergleiche 3. 4.) Diese Matrix ist aber — wie leicht zu sehen — kongruent zu

$$\begin{bmatrix}
\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & & & \\
 & \ddots & & \\
 & & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \\
 & & & W + W'
\end{bmatrix}.$$

Da $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ Signatur null hat, ist der Satz bewiesen.

§ 6. Eigenschaften und Anwendungen der quadratischen Form

6. 1. Zur Definitionsgleichung $(*)$ von 5. 1 äquivalent ist die Gleichung

$$(**) \qquad b(x \otimes y) = \langle x \cup (t^* - t^{*-1})y, z\rangle.$$

Denn $t_* z = z$ nach 2. 7 2).

6. 2. Satz. *Ändert man die Orientierung von k, geht die quadratische Form in sich über. Die quadratische Form ist also in Wirklichkeit eine Invariante des unorientierten Knotens.*

Beweis. Bei Umkehrung der Orientierung von k hat man z durch $-z$ und t durch t^{-1} zu ersetzen. Die Behauptung folgt dann aus $(*\,*)$ in 6. 1.

6. 3. Satz. *Ändert man die Orientierung von S^3, das heißt geht man zum Spiegelbild des Knotens über, so ändert die quadratische Form ihr Vorzeichen.*

Beweis. Man hat t durch t^{-1} zu ersetzen. Dann wende man wieder 6. 1 $(*\,*)$ an.

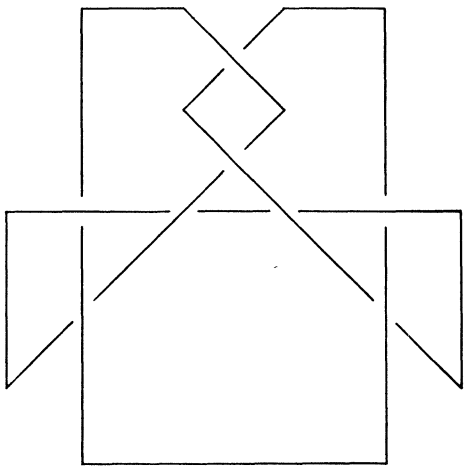
Folgerung. *Für einen amphicheiralen Knoten (das ist ein Knoten, der zu seinem Spiegelbild äquivalent ist) ist die quadratische Form über A zu ihrer negativen äquivalent. Ist umgekehrt die quadratische Form eines Knotens nicht zu ihrer negativen äquivalent, ist der Knoten nicht amphicheiral.*

Entsprechend gilt: Ein amphicheiraler Knoten hat Signatur null.

6. 4. *Beispiele.* Üblicherweise benutzt man die in [15] definierten Minkowski-Einheiten, um einen Knoten als nicht amphicheiral zu erkennen. Bei dem Knoten 8_{20} der Tabelle in [15] gestatten diese keine Entscheidung über Amphicheiralität. Bei Knoten mit zwei Brücken kann man Amphicheiralität erkennen ([18]); mir ist jedoch nicht bekannt, ob 8_{20} eine Darstellung mit zwei Brücken zuläßt. $\Delta(0)$ hat den Wert 1, wir erhalten also eine quadratische Form über $\boldsymbol{Z}$, und zwar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Die Signatur ist null und hilft deshalb nicht weiter. Die quadratische Form über $\boldsymbol{Z}_3$ ist aber von ihrer negativen verschieden, 8_{20} also nicht amphicheiral.



8_{20}

Die quadratische Form liefert natürlich keine hinreichende Bedingung für Amphicheiralität. 8_1, 8_8, 8_{13} sind nicht-amphicheirale Knoten, deren quadratische Form zu ihrer negativen äquivalent ist.

6. 5. Satz. *k sei ein Knoten und A ein Integritätsbereich, so daß $\Delta_k(0)$ Einheit in A ist. Hat A die Charakteristik null, ist die quadratische Form über A von k nicht-entartet.*

Beweis. Ist W reduzierte Seifertmatrix von k, hat

$$W + W' = (W' - W) + 2W$$

ungerade und deshalb von null verschiedene Determinante.

6. 6. Satz. *k_1 und k_2 seien orientierte Knoten und A ein Integritätsbereich, so daß für die Alexanderpolynome von k_1 und k_2 gilt: $\Delta_{k_1}(0)$ und $\Delta_{k_2}(0)$ sind Einheiten in A. Dann ist die quadratische Form über A von $k_1 \# k_2$ die direkte Summe der quadratischen Formen von k_1 und k_2.*

Beweis. Wegen $\Delta_{(k_1 \# k_2)} = \Delta_{k_1} \cdot \Delta_{k_2}$ hat $k_1 \# k_2$ eine quadratische Form über A. Ist V_i Seifertmatrix und W_i reduzierte Seifertmatrix von k_i $(i = 1, 2)$, hat $k_1 \# k_2$ Seifertmatrix $\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$ und reduzierte Seifertmatrix $\begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$.

Korollar. $\sigma(k_1 \# k_2) = \sigma(k_1) + \sigma(k_2)$.

6. 7. Jede ganzzahlige Matrix V mit $\det(V' - V) = 1$ kommt als Seifertmatrix vor. Die Frage nach der Menge der quadratischen Formen aller Knoten kann man deshalb natürlich so beantworten: Eine quadratische Form über A ist quadratische Form eines Knotens genau dann, wenn sie eine Matrixdarstellung $W + W'$ erlaubt mit einer ganzzahligen Matrix W, für die $\det(W' - W) = 1$ und $\det W$ in A invertierbar ist. (Eine befriedigende Antwort ist das freilich nicht.) Für Charakteristik A gleich null kommen jedenfalls nur gerade Formen mit geradem Rang, die nicht-entartet sind, vor, aber nicht alle diese. Die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ gehört zum Beispiel für kein A zur quadratischen Form eines Knotens (vergleiche jedoch 6. 4).

6. 8. Es ist klar, daß man die quadratische Form zur Unterscheidung von Knoten heranziehen kann. Zum Beispiel haben 6_1 und 9_{46} gleiches Alexanderpolynom. $\Delta(0)$ ist 2. Über einem Ring, in dem 2 Einheit ist, haben die entsprechenden quadratischen Formen die Matrizen

$$\begin{bmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Für $A = \boldsymbol{Z}_3$ und $A = \boldsymbol{Z}(1/2)$, den kleinsten Unterring von $\boldsymbol{Q}$, der 1/2 enthält, sind diese Matrizen nicht kongruent. 7_4 und 9_2 sind Knoten mit dem gleichen Alexanderpolynom, aber verschiedenen quadratischen Formen über $\boldsymbol{Z}_5$.

Bedeutung hat die quadratische Form (oder genauer die Signatur) auch für die differentialtopologische Klassifikation gewisser Knotenmannigfaltigkeiten. Hierzu siehe den zweiten Teil dieser Arbeit.

§ 7. Formulierung und Beweisidee des Satzes von Hirzebruch über Knotenmannigfaltigkeiten

7. 1. Mit der Einbettung $O(n-1) < O(n)$ sei immer die Zuordnung $A \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ gemeint.

Definition. M sei eine kompakte differenzierbare unberandete $O(n)$-Mannigfaltigkeit der Dimension $2n + 1$ $(n \geqq 2)$. M heißt Knotenmannigfaltigkeit, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind (vergleiche [11], [8]):

(1) In jedem Punkt von M ist die Isotropiegruppe konjugiert zu
(i) $O(n)$, (ii) $O(n-1)$ oder (iii) $O(n-2)$.

(2) Die Darstellung der Isotropiegruppe auf dem Normalraum an den Orbit ist im Falle

(i) 1-dim. triviale Darst. $\oplus$ Standarddarst. $\oplus$ Standarddarst.

(ii) 3-dim. triviale Darst. $\oplus$ Standarddarst.

(iii) 4-dim. triviale Darst.

(3) Der Orbitraum von M — wegen (1) und (2) eine berandete 4-Mannigfaltigkeit — ist, versehen mit der in [11] definierten differenzierbaren Struktur, diffeomorph zur Standard-4-Scheibe.

(4) Die Fixpunktmenge von M ist — in den Orbitraum projiziert — ein Knoten in der den Orbitraum berandenden 3-Sphäre.

7. 2. Nach [11] gibt es zu jedem $n \geqq 2$ und jedem differenzierbaren Knotentyp k bis auf äquivariante Diffeomorphie genau eine Knotenmannigfaltigkeit $M_n(k)$ der Dimension $2n + 1$, so daß die Fixpunktmenge im Rand des Orbitraumes von $M_n(k)$ ein Knoten vom gleichen Typ wie k ist.

Für $n = 1$ definieren wir $M_1(k)$ als zweifache verzweigte Überlagerung des Außenraumes von k in der 3-Sphäre. $O(1) = \boldsymbol{Z}_2$ operiert als Deckbewegungsgruppe auf $M_1(k)$. Auch $M_1(k)$ wollen wir als Knotenmannigfaltigkeit bezeichnen.

7. 3. Der Satz von Hirzebruch über Knotenmannigfaltigkeiten macht nähere Angaben über $M_n(k)$:

Satz ([8]). *k sei ein differenzierbarer Knoten. Für jedes $n \geqq 1$ ist dann $M_n(k)$ der Rand einer parallelisierbaren Mannigfaltigkeit. Für gerades n ist $M_n(k)$ homöomorph zu S^{2n+1} und repräsentiert daher ein Element von bP_{2n+2}. Dies ist die Standardsphäre, wenn $c(k) = 0$, die Kervaire-Sphäre, wenn $c(k) = 1$ ist. Für $n = 2m - 1$ ist $M_{2m-1}(k)$ $(2m - 2)$-fach zusammenhängend und $H_{2m-1}(M_{2m-1}(k); \boldsymbol{Z})$ ist isomorph zu $H_1(M_1(k); \boldsymbol{Z})$. $M_{2m-1}(k)$ ist für $m \geqq 2$ homöomorph zu S^{4m-1} genau dann, wenn $\det(k) = \pm 1$. Das Element von bP_{4m}, das $M_{2m-1}(k)$ mit einer Orientierung dann repräsentiert, ist $\pm \frac{\sigma(k)}{8} \cdot g_m$.*

Hier ist $c(k) \in \boldsymbol{Z}_2$ die von Robertello [16] eingeführte Knoteninvariante. Aus [16] geht hervor, daß $c(k) = 0 \Leftrightarrow \det(k) \equiv \pm 1 \bmod 8$ und $c(k) = 1 \Leftrightarrow \det(k) \equiv \pm 3 \bmod 8$ gilt. $\sigma(k)$ ist die Signatur des Knotens (siehe § 5) und g_m das von Kervaire und Milnor eingeführte Erzeugende von bP_{4m} ([12]).

7. 4. Zum Beweis des Satzes wird im folgenden ein Konstruktionsverfahren für jede der Mannigfaltigkeiten $M_n(k)$ angegeben. Dies erlaubt es, die in obigem Satz behaupteten Eigenschaften von $M_n(k)$ zu zeigen. Die Tatsache, daß der Orbitraum der von uns konstruierten Mannigfaltigkeiten diffeomorph zur Standard-4-Scheibe ist, werden wir nicht beweisen. Hier wird nur seine Homöomorphie zu D^4 gezeigt. Abgesehen davon ist der Beweis vollständig. Bezüglich der differenzierbaren Struktur des Orbitraumes wird auf [9] verwiesen.

7. 5. Wir skizzieren im folgenden die Konstruktion der Knotenmannigfaltigkeiten $M_n(k)$ zu vorgegebenem Knoten k.

Wir denken uns k als Rand einer Seifertfläche (siehe 1. 3). Sind x_0, x_1, y_0, y_1 Koordinaten in $\boldsymbol{R}^4$ und ist S^3 durch $x_0^2 + x_1^2 + y_0^2 + y_1^2 = 1$ gegeben, so sei $\{(x_0, x_1; y_0, y_1) \in S^3 \mid x_1 = 0 \wedge y_1 \geqq 0\}$ die Scheibe der Seifertfläche. Von den Bändern

wollen wir annehmen, daß sie im Bereich $x_1 \geqq 0$ liegen und den Äquator $x_1 = 0$ nur in Punkten mit $y_1 = 0$ schneiden. Wir betten S^3 in S^{2n+1} wie folgt ein:

$$i\colon (x_0, x_1; y_0, y_1) \mapsto (x_0, x_1, 0, \ldots, 0; y_0, y_1, 0, \ldots, 0),$$

und lassen $A \in O(n)$ so auf S^{2n+1} operieren:

$$A(x_0, \ldots, x_n; y_0, \ldots, y_n) = (x_0, A(x_1, \ldots, x_n); y_0, A(y_1, \ldots, y_n)).$$

(Auf der rechten Seite ist das übliche Operieren von A auf einem n-Tupel reeller Zahlen gemeint.)

Ist l die Seele eines Bandes unserer Seifertfläche, so ist $O(n)\,(i(l))$ eine n-Sphäre, die wir uns als differenzierbare Untermannigfaltigkeit von S^{2n+1} vorstellen dürfen und die sogar diffeomorph zu S^n ist. Mit Hilfe des zu l gehörigen Bandes definieren wir eine Trivialisierung des Normalenbündels von $O(n)\,(i(l))$ und damit eine Tubenabbildung $O(n)\,(i(l)) \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$. Letztere benutzen wir für eine sphärische Modifikation auf S^{2n+1}. $M_n(k)$ ergibt sich, wenn man für jedes Band der Seifertfläche die entsprechende sphärische Modifikation durchführt. Eine Aktion von $O(n)$ auf $M_n(k)$ können wir erklären, weil unsere Tubenabbildungen äquivariant sind.

§ 8. Die $O(n)$-Mannigfaltigkeiten S^{2n+1} und $S^n \times D^{n+1}$

8. 1. Die Bausteine, aus denen wir unsere Knotenmannigfaltigkeiten zusammensetzen werden, sind gewisse äquivariante Untermannigfaltigkeiten von S^{2n+1} und Exemplare von $S^n \times D^{n+1}$. Wir definieren zunächst das Operieren von $O(n)$ auf S^{2n+1} und $S^n \times D^{n+1}$ und zeigen dann (1) und (2) der Definition 7. 1 für diese $O(n)$-Mannigfaltigkeiten.

Wir fassen S^{2n+1} und $S^n \times D^{n+1}$ $(n \geqq 1)$ als Teilräume von $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ auf:

$$S^{2n+1} = \{(x_0, x; y_0, y) \mid x_0, y_0 \in \boldsymbol{R} \wedge x, y \in \boldsymbol{R}^n \wedge x_0^2 + \| x \|^2 + y_0^2 + \| y \|^2 = 1\}$$

$$S^n \times D^{n+1} = \{(z_0, z; a_0, a) \mid z_0, a_0 \in \boldsymbol{R} \wedge z, a \in \boldsymbol{R}^n \wedge z_0^2 + \| z \|^2 = 1 \wedge a_0^2 + \| a \|^2 \leqq 1\}$$

$A \in O(n)$ operiere auf $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ wie folgt:

$$A(x_0, x; y_0, y) = (x_0, Ax; y_0, Ay).$$

Auf der rechten Seite ist dabei die Standard-Operation von $O(n)$ auf $\boldsymbol{R}^n$ gemeint. Die Aktion von $O(n)$ auf S^{2n+1} und $S^n \times D^{n+1}$ sei durch die Einschränkung der Aktion auf $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ gegeben. Damit sind S^{2n+1} und $S^n \times D^{n+1}$ differenzierbare $O(n)$-Mannigfaltigkeiten.

8. 2. Satz. *Die $O(n)$-Mannigfaltigkeiten S^{2n+1} und $S^n \times D^{n+1}$ haben die Eigenschaften:*

(1) *In jedem Punkt ist die Isotropiegruppe konjugiert zu*

(i) $O(n)$, (ii) $O(n-1)$ *oder* (iii) $O(n-2)$.

(2) *Die Darstellung der Isotropiegruppe auf dem Normalraum an den Orbit ist im Falle*

(i) 1-dim. *triviale Darst.* $\oplus$ *Standarddarst.* $\oplus$ *Standarddarst.*

(ii) 3-dim. *triviale Darst.* $\oplus$ *Standarddarst.*

(iii) 4-dim. *triviale Darst.*

Beweis. Da später (§ 11) äquivariante differenzierbare Einbettungen von $S^n \times D^{n+1}$ in S^{2n+1} angegeben werden, braucht die Behauptung nur für S^{2n+1} bewiesen zu werden.

Sei $p = (x_0, x; y_0, y) \in S^{2n+1}$. Die Isotropiegruppe in p besteht aus den orthogonalen Transformationen von $\boldsymbol{R}^n$, die x und y festlassen. Je nach der Dimension des von x und y in $\boldsymbol{R}^n$ aufgespannten Raumes ergeben sich folgende Fälle:

(i) $x = y = 0$. Dann ist p Fixpunkt und ganz $O(n)$ die Isotropriegruppe in p. Wir untersuchen die Darstellung von $O(n)$ im Normalraum an den Orbit von p, das ist in diesem Fall die Darstellung von $O(n)$ im Tangentialraum von S^{2n+1} in p.

Wegen $x_0^2 + y_0^2 = 1$ dürfen wir $| y_0 | \neq 1$ annehmen. Bezüglich der letzten $2n + 1$ Koordinaten von $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ als Karte für S^{2n+1} liefert die Zuordnung

$$(u_1, \ldots, u_n, v_0, \ldots, v_n) \mapsto (u_1, \ldots, u_n, y_0 + v_0, v_1, \ldots, v_n)$$

einen Diffeomorphismus einer Umgebung von $0 \in \boldsymbol{R}^{2n+1}$ auf eine Umgebung von $p \in S^{2n+1}$. Damit ist klar, daß die Darstellung von $O(n)$ im Tangentialraum an p folgende direkte Summe ist:

Standarddarst. $\oplus$ 1-dim. triviale Darst. $\oplus$ Standarddarst.

(ii) x und y sind linear abhängig, aber nicht beide null. Die Isotropriegruppe in p läßt einen 1-dimensionalen Unterraum von $\boldsymbol{R}^n$ fest, ist also konjugiert zu $O(n-1)$. Die Äquivalenzklasse der Darstellung der Isotropiegruppe auf dem Normalraum an den Orbit hängt nur vom Orbit ab, braucht also nur in einem beliebigen Punkt des Orbits untersucht zu werden. Man darf daher annehmen:

$$x = (x_1, 0, \ldots, 0) \text{ und } y = (a x_1, 0, \ldots, 0)$$

mit $x_1 > 0$ und $a \in \boldsymbol{R}$. Die Isotropiegruppe ist dann $O(n-1)$ selbst. Bezüglich der letzten $2n + 1$ Koordinaten von $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ als Karte für S^{2n+1} erhält man einen Diffeomorphismus einer Umgebung von $0 \in \boldsymbol{R}^{2n+1}$ auf eine Umgebung von $p \in S^{2n+1}$ durch die Zuordnung

$$(u_1, \ldots, u_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}, w_1, w_2, w_3)$$
$$\mapsto (r(u) + w_1, u_1, \ldots, u_{n-1}, y_0 + w_2, a \cdot r(u) + w_3, a u_1 + v_1, \ldots, a u_{n-1} + v_{n-1}).$$

Dabei sei $r(u) = +\sqrt{x_1^2 - u_1^2 - \cdots - u_{n-1}^2}$.

Für $v = w = 0$ ist dies eine Karte für den Orbit von p. Setzt man $u = 0$, ergibt sich für das Operieren von $O(n-1)$ auf dem Normalraum an den Orbit:

3-dim. triviale Darstellung $\oplus$ Standarddarstellung.

(iii) x und y sind linear unabhängig. Dann läßt die Isotropiegruppe in p einen 2-dimensionalen Unterraum von $\boldsymbol{R}^n$ fest, ist also konjugiert zu $O(n-2)$. Wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$x = (x_1, 0, \ldots, 0) \text{ und } y = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0)$$

mit $x_1 > 0$, $y_2 > 0$, und die Isotropiegruppe in p ist $O(n-2)$. Wir wollen den Orbit in einer Umgebung von p bestimmen. Als Koordinaten in S^{2n+1} benutzen wir wieder die letzten $2n + 1$ Koordinaten von $\boldsymbol{R}^{2n+2}$. $(u_0, \ldots, u_{n-1}, y_0, v_0, \ldots, v_{n-1})$ gehört genau dann zum Orbit von p, wenn

$$\| u \|^2 = x_1^2$$
$$\| v \|^2 = y_1^2 + y_2^2$$
$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es in einer Umgebung des Nullpunktes von $\boldsymbol{R}^{2n-3}$ definierte differenzierbare Funktionen q, r, s von $u_1, \ldots, u_{n-1}, v_2, \ldots, v_{n-1}$, so daß $(u_1, \ldots, u_{n-1}, v_2, \ldots, v_{n-1}) \mapsto (q, u_1, \ldots, u_{n-1}, y_0, r, s, v_2, \ldots, v_{n-1})$ den Orbit in einer Umgebung von p beschreibt. (Hier wird $x_1 y_2 \neq 0$ benutzt.) Die Zuordnung

$$(u_1, \ldots, u_{n-1}, v_2, \ldots, v_{n-1}, w_1, \ldots, w_4)$$
$$\mapsto (q + w_1, u_1, \ldots, u_{n-1}, y_0 + w_2, r + w_3, s + w_4, v_2, \ldots, v_{n-1})$$

ergibt einen Diffeomorphismus einer Umgebung von $0 \in \boldsymbol{R}^{2n+1}$ auf eine Umgebung von $p \in S^{2n+1}$. Für $u = v = 0$ ergibt sich die Aktion von $O(n-2)$ auf dem Normalraum des Orbits in p, nämlich die

4-dim. triviale Darstellung. q. e. d.

8. 3. *Bemerkung.* 1) Im Fall (i) sind die Orbits Punkte, bei (ii) $(n-1)$-Sphären und bei (iii) diffeomorph zu $O(n)/O(n-2)$ (Stiefel-Mannigfaltigkeit). Letztere nennen wir Stiefel-Orbits. Während für $n \geqq 2$ alle drei Typen von Orbits vorkommen, hat S^3 nur Fixpunkte und Sphären-Orbits.

2) Wir benutzen im folgenden, daß die Vereinigung aller Sphären-Orbits in S^{2n+1} der Totalraum eines $(n-1)$-Sphärenbündels ist ([2]).

§ 9. n-dimensionale äquivariante Mannigfaltigkeiten in S^{2n+1}

9. 1. Wir interessieren uns für äquivariante topologische Untermannigfaltigkeiten der Dimension n in S^{2n+1}, die auf eine im folgenden beschriebene Art gegeben sind.

F sei die Fixpunktmenge der $O(1)$-Mannigfaltigkeit S^3, Θ die offene Hemisphäre $\{(x_0, x_1; y_0, y_1) \in S^3 \mid x_1 > 0\}$.

Lemma. *Sei K ein Teilraum von S^3 mit den Eigenschaften:*

(1) *K ist kompakte topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 1.*

(2) $K < \Theta \cup F$

(3) $\partial K = K \cap F$

S^3 bette man vermöge

$$(x_0, x_1; y_0, y_1) \mapsto (x_0, x_1, 0, \ldots, 0; y_0, y_1, 0, \ldots, 0)$$

in S^{2n+1} ein. Dann ist $T^n K := O(n)\,(K)$ eine n-dimensionale äquivariante topologische Untermannigfaltigkeit von S^{2n+1}.

Beweis. Verschiedene Punkte von K liegen auf verschiedenen Orbits von S^{2n+1}. Da die Vereinigung aller Sphären-Orbits in S^{2n+1} ein Faserbündel mit Faser S^{n-1} bilden, ist $(T^n K) - \partial K$ lokal euklidisch von der Dimension n. In einem Fixpunkt ist $T^n K$ lokal homöomorph zur Einpunktkompaktifizierung von $S^{n-1} \times (0, 1]$, das heißt zu D^n. q. e. d.

9. 2. Ist K orientiert, so versehen wir auch $T^n K$ mit einer Orientierung: Sei $p \in K - \partial K$, $f: (0, 1) \to \boldsymbol{R}^4$ mit den Komponentenfunktionen $f_0, \ldots, f_3$ ein orientierungstreuer Homöomorphismus auf eine Umgebung von p in K und B^{n-1} die offene Einheitsvollkugel in $\boldsymbol{R}^{n-1}$. $B^{n-1} \times (0, 1) \to T^n K$, gegeben durch

$$(u, t) \mapsto (f_0(t), f_1(t)\,(+\sqrt{1 - \| u \|^2}, u);\ f_2(t), f_3(t)\,(+\sqrt{1 - \| u \|^2}, u)),$$

liefert eine Karte für $T^n K$, die wir als orientierungstreu definieren.

In späteren Anwendungen wird K entweder ein simplizialer Komplex in S^3 oder aber eine differenzierbar eingebettete Mannigfaltigkeit (mit noch zu erwähnenden weiteren Eigenschaften) sein. Im wichtigsten Spezialfall ist K die Seele eines Bandes einer Seifertfläche, also homöomorph zu einem kompakten Intervall. T^nK ist dann — wie leicht zu sehen — homöomorph zu S^n.

§ 10. Verschlingungszahlen äquivarianter n-Mannigfaltigkeiten in S^{2n+1}

10. 1. K und L seien Teilräume von S^3, für die (1), (2) und (3) von Lemma 9. 1 erfüllt sind. Wir machen weitere Voraussetzungen über K und L:

(4) K und L sind orientiert.

(5) K und L liegen im Bereich $x_0 > 0$.

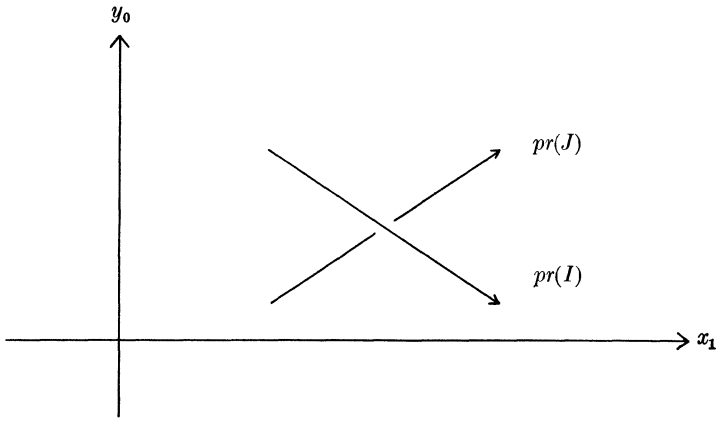
(6) Bezüglich der Koordinaten x_1, y_0, y_1 von S^3 sind K und L endliche Streckenzüge.

(7) $K \cap L = \emptyset$.

$pr: S^3 \to \boldsymbol{R}^2$ sei die Projektion auf die x_1-y_0-Ebene.

(8) Über jedem Punkt von $\boldsymbol{R}^2$ liegen bezüglich pr höchstens zwei Punkte von $K \cup L$.

(9) Sind p und $q \in K \cup L$ mit $pr(p) = pr(q)$, so gibt es zusammenhängende geradlinige disjunkte Umgebungen I bzw. J von p bzw. q in $K \cup L$, so daß sich $pr(I)$ und $pr(J)$ transversal schneiden.



10. 2. Eigenschaften (8) und (9) sorgen für vernünftiges Überkreuzungsverhalten von K und L, so daß wir definieren können:

Definition. Sind (1) bis (9) für K und L erfüllt, so bezeichne $v(K, L)$ die Anzahl der Stellen, an denen L die Mannigfaltigkeit K von links nach rechts überkreuzt, minus die Anzahl der Stellen, an denen L die Mannigfaltigkeit K von rechts nach links überkreuzt (bezüglich pr).

10. 3. *Bemerkung.* Wegen (7) sind T^nK und T^nL disjunkt. Da wir die Verschlingungszahl von T^nK mit T^nL in S^{2n+1} berechnen wollen, sind die Forderungen (8) und (9) nicht allzu einschränkend. Sei nämlich $H: K \times [0, 1] \to S^3$ eine Homotopie, so daß Bild $H \subset (\Theta \cup F) - L$, H_t topologische Einbettung mit $H_t(\partial K) \subset F$ für alle t, $H_0 = id_K$. Dann ist $T^n(\text{Bild } H_1)$ zu T^nK homotop in $S^{2n+1} - T^nL$ (vergleiche Bemerkung 8. 3 2)). Man kann mit dieser Methode leicht K so zu einem Komplex K' abändern, daß (1) bis (9) für K' und L gelten und T^nK und T^nK' in $S^{2n+1} - T^nL$ homotop sind. Dann haben T^nK und T^nK' mit T^nL die gleiche Verschlingungszahl.

10. 4. Wegen (4) und der Vereinbarung in 9. 2 sind T^nK und T^nL orientiert. S^{2n+1} sei so orientiert: Im Punkt $x_0 = 1$ sollen $x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$ in dieser Reihenfolge ein positiv orientiertes Koordinatensystem bilden. Nun ist die Verschlingungszahl $l(T^nK, T^nL)$ von T^nK und T^nL in S^{2n+1} wohldefiniert. (Wir legen die Definition von [19] zugrunde.)

Satz. *Für die Verschlingungszahl* $l(T^nK, T^nL)$ *gilt*:

$$l(T^nK, T^nL) = v(L, K) + (-1)^{n+1}v(K, L).$$

Der Rest des Paragraphen befaßt sich mit dem Beweis dieses Satzes. Wir wenden folgende Methode an: Jede der orientierten Untermannigfaltigkeiten T^nK und T^nL wird schrittweise durch eine im Komplement der andern homologe orientierte Untermannigfaltigkeit ersetzt. Dabei ändert sich die Verschlingungszahl ja nicht, und die Berechnung wird auf einen einfachen Spezialfall zurückgeführt.

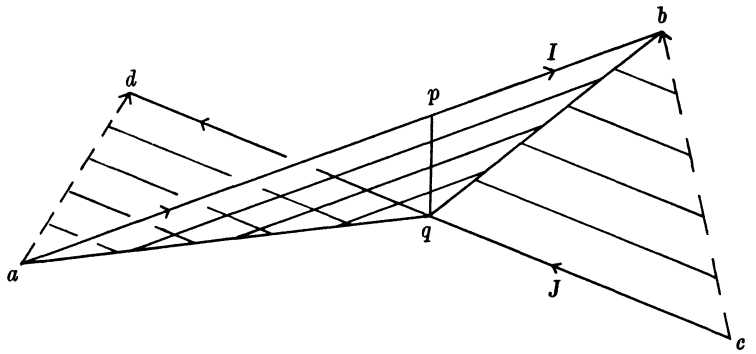
10. 5. Zunächst beseitigen wir die Doppelpunkte von K unter der Projektion pr. Seien $p, q \in K$ mit $pr(p) = pr(q)$. Die orientierten Umgebungen I und J von (9) mit den Anfangspunkten a bzw. c und den Endpunkten b bzw. d wählen wir so klein, daß sie eine Umgebung der Fixpunktmenge F in S^3 nicht schneiden und daß über der kompakten Viereckfläche mit den Ecken $pr(a)$, $pr(d)$, $pr(b)$, $pr(c)$ keine Punkte von $(K \cup L) - \overline{I \cup J}$ liegen. Aus K nehmen wir $I \cup J$ heraus und setzen die von a nach d führende und die von c nach b führende Strecke ein. Dabei geht K in eine orientierte 1-Untermannigfaltigkeit K' über, so daß

a) für K' und L (1) bis (9) gelten,

b) $v(K', L) = v(K, L)$ und $v(L, K') = v(L, K)$,

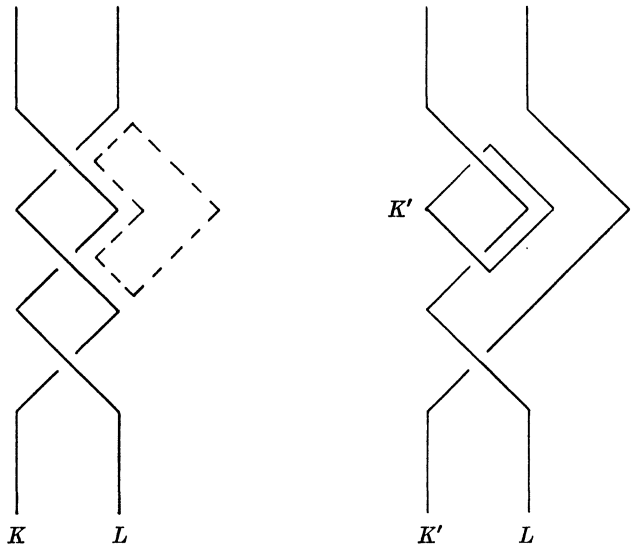
c) $l(T^nK', T^nL) = l(T^nK, T^nL)$.

a) und b) sind klar; c) folgt daraus, daß $T^nK - T^nK'$ in $S^{2n+1} - T^nL$ homolog zum Rand eines S^{n-1}-Bündels über einer vom Streckenzug $abcda$ berandeten simplizialen 2-Zelle ist.



Nach diesem Verfahren kann man alle Doppelpunkte von K und alle Doppelpunkte von L beseitigen. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $pr \mid K$ und $pr \mid L$ injektiv sind. Das bedeutet, daß jede Zusammenhangskomponente von $pr(K)$ und $pr(L)$ — eventuell zusammen mit einem Stück von $pr(F)$ — Rand einer in $\boldsymbol{R}^2$ eingebetteten 2-Scheibe ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

dürfen wir deshalb weiter voraussetzen, daß jede Komponente von K mit jeder Komponente von L höchstens zwei Überkreuzungspunkte bezüglich der Projektion pr hat:



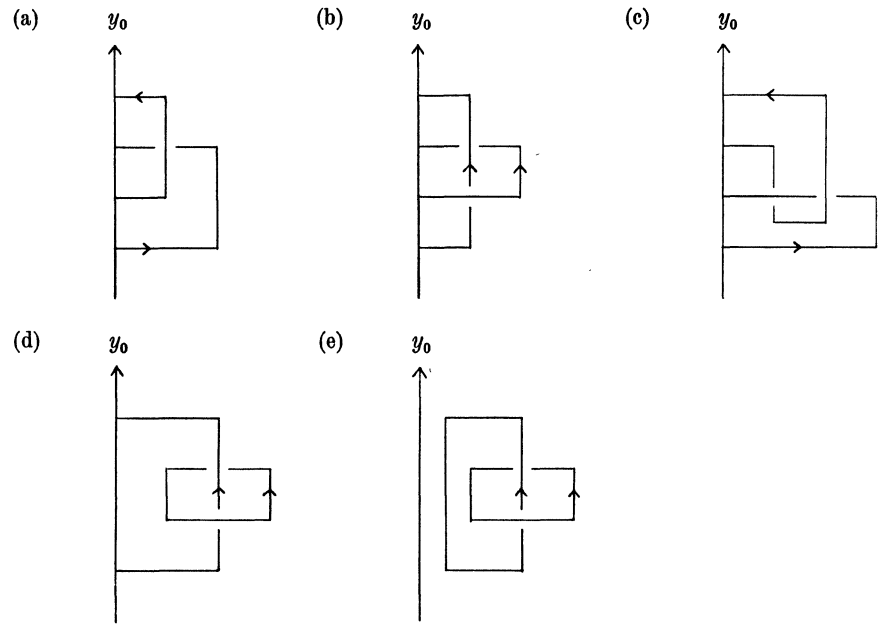
Wenn das noch nicht der Fall ist, kann man wieder K durch ein K' ersetzen, so daß a), b) und c) erfüllt sind.

Da die Verschlingungszahl bilinear ist, haben wir den Satz auf folgendes Lemma zurückgeführt:

10. 6. Lemma. *Wenn weder K noch L Doppelpunkte bezüglich pr hat und wenn K mit L höchstens zwei Überkreuzungspunkte hat, gilt*

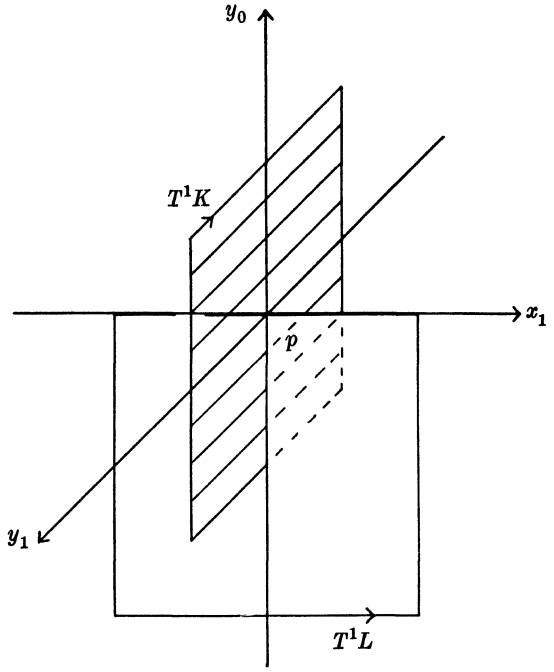
$$l(T^n K, T^n L) = v(L, K) + (-1)^{n+1} v(K, L).$$

Beweis. Wenn man Bemerkung 10. 3 berücksichtigt, erhält man bis auf Wechsel der Orientierungen und auf Vertauschen von Über- und Unterkreuzungen folgende nicht-triviale Fälle:



Es wird zunächst Fall (a) behandelt:

Wir legen L in die x_1-y_0-Ebene und K in die y_0-y_1-Ebene. Daß dann für K nicht mehr Eigenschaft (2) gilt, spielt hier keine Rolle; wir können trotzdem definieren $T^nK := O(n)\,(K)$.



T^nK liegt in dem von den Achsen $y_0, y_1, \ldots, y_n$ aufgespannten und T^nL in dem von den Achsen $x_1, \ldots, x_n, y_0$ aufgespannten Unterraum. Klar ist: T^1K berandet eine 2-Zelle Z in der y_0-y_1-Ebene, die von T^1L transversal geschnitten wird. Betten wir wieder S^3 in S^{2n+1} ein, so gilt: $O(n)\,(Z)$ ist eine $(n+1)$-Zelle in dem von den Achsen $y_0, \ldots, y_n$ aufgespannten Unterraum. Ihr Rand ist gerade T^nK. T^nL schneidet $O(n)\,(Z)$ transversal in p. Die Verschlingungszahl von T^nK mit T^nL ist definiert als die Schnittzahl von $O(n)\,(Z)$ mit T^nL. Da $O(n)\,(Z)$ die Orientierung vom Rand T^nK erbt, ist $O(n)\,(Z)$ im Schnittpunkt so orientiert, daß die Achsen $y_1, \ldots, y_n, y_0$ in dieser Reihenfolge ein positiv orientiertes System bilden. Um die Orientierung von T^nL im Schnittpunkt zu bestimmen, spannen wir in T^1L die 2-Zelle Z' ein, die in der x_1-y_0-Ebene liegt. $O(n)\,(Z')$ erbt von T^nL im Schnittpunkt von $O(n)\,(Z')$ und T^nK die Orientierung $x_1, \ldots, x_n, y_0$, also die $(-1)^n$-fache Orientierung $y_0, x_1, \ldots, x_n$. Die Orientierung von T^nL in p ist also die Orientierung $-x_1, \ldots, -x_n$. Für S^{2n+1} ist das System $y_1, \ldots, y_n$, y_0, $-x_1, \ldots, -x_n$ positiv orientiert. Also:

$$l(T^nK,\ T^nL) = 1.$$

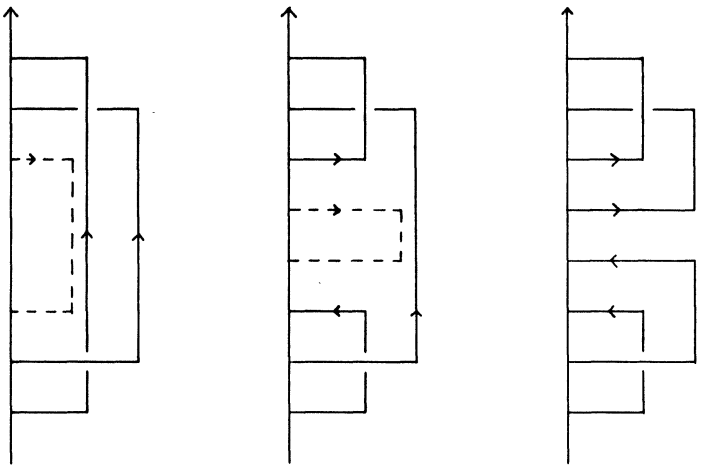
Wegen $v(K, L) = 0$ und $v(L, K) = 1$ gilt für diesen Fall das Lemma. Ändert man eine Orientierung, so wechseln sowohl l als auch v das Vorzeichen. Vertauscht man Über- und Unterkreuzungen, so ist die Orientierung der in T^nK eingespannten Zelle $O(n)\,(Z)$ durch das System $-y_1, \ldots, -y_n, y_0$ gegeben, also

$$l(T^nK,\ T^nL) = (-1)^n.$$

Andererseits $v(K, L) = -1$ und $v(L, K) = 0$, und die im Lemma angegebene Formel gilt.

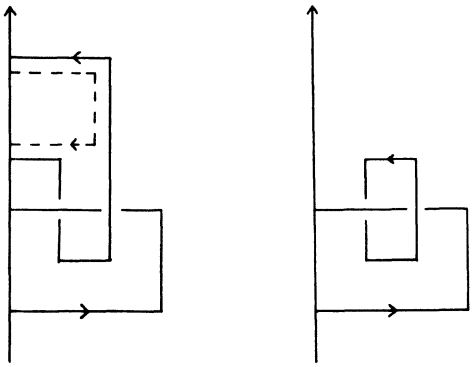
Die Fälle (b) bis (e) sind leicht auf (a) zurückzuführen. Man geht nach folgendem Schema zu homologen Untermannigfaltigkeiten über:

(b)



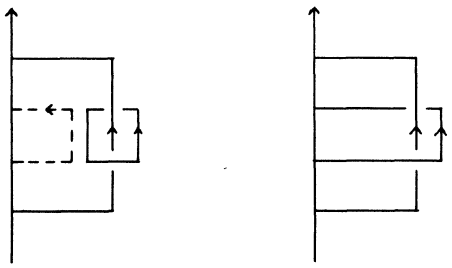
d. i. Fall (a)

(c)



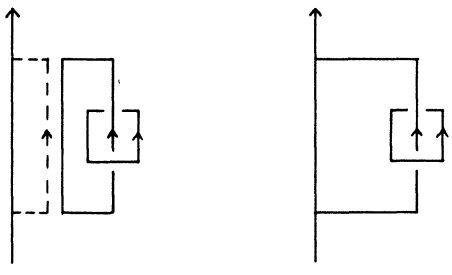
d. i. Fall (d)

(d)



d. i. Fall (b)

(e)



d. i. Fall (d)

Damit sind alle Fälle des Lemmas erfaßt und daher auch der Satz bewiesen.

§ 11. Äquivariante n-Sphären in S^{2n+1} und Tubenabbildungen

11. 1. Sei wieder $K < S^3$, so daß die Voraussetzungen (1), (2) und (3) von Lemma 9. 1 erfüllt sind. Darüber hinaus verlangen wir:

K ist gegeben als Bild einer differenzierbaren Einbettung $f: [0, 1] \to S^3$ mit den Eigenschaften ($f_0, \ldots, f_3$ seien die Komponentenfunktionen von f):

(a) Bild $f_0 > 0$

(b) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $t \in [0, \varepsilon)$

$$f(t) = (f_0(t), t, f_2(0), 0)$$

und für alle $t \in (1 - \varepsilon, 1]$

$$f(t) = (f_0(t), 1 - t, f_2(1), 0)$$

gilt.

Satz. *T^nK ist äquivariante differenzierbare Untermannigfaltigkeit von S^{2n+1} und diffeomorph zur Standard-n-Sphäre. Der Totalraum des äquivarianten Normalenbündels ist äquivariant diffeomorph zu $S^n \times D^{n+1}$ (vergleiche* § 8).

11. 2. Zum Beweis braucht nur eine äquivariante differenzierbare Einbettung

$$g: S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$$

mit $g(S^n \times \{0\}) = T^nK$ angegeben zu werden.

Unser g wird von einem differenzierbaren Vektorfeld $v: [0, 1] \to \boldsymbol{R}^3$ (mit Komponenten v_1, v_2, v_3) abhängen, von dem wir fordern:

(c) Für alle t seien $(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ und $(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$ linear unabhängig.

(d) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $t \in [0, \varepsilon)$

$$v(t) = (0, -1, 0)$$

und für alle $t \in (1 - \varepsilon, 1]$

$$v(t) = (0, 1, 0)$$

gilt.

v ist also ein Schnitt im Normalenbündel von K und liefert durch

$$(t, a) \mapsto (f_1(t) + a v_1(t), f_2(t) + a v_2(t), f_3(t) + a v_3(t))$$

ein Band, dessen Seele K ist. Später werden sich solche Paare K, v in natürlicher Weise aus den Bändern einer Seifertfläche ergeben.

Wir führen noch zwei Hilfsfunktionen ein.

$w: [0, 1] \to \boldsymbol{R}^3$ (mit Komponenten w_1, w_2, w_3) sei das normierte Vektorprodukt

$$w = \frac{v \times (f_1', f_2', f_3')}{\| v \times (f_1', f_2', f_3') \|}$$

$s: [-1, 1] \to [0, 1]$ sei eine stetige Funktion mit:

s ist in $(-1, 1)$ differenzierbar.

s' ist in $(-1, 1)$ positiv.

In einer Umgebung von -1 ist $s(t) = {}_+\sqrt{1 - t^2}$.

In einer Umgebung von 1 ist $s(t) = 1 - {}_+\sqrt{1 - t^2}$.

Die Existenz einer solchen Funktion s ist leicht zu zeigen.

Wir bezeichnen mit p den Nordpol $(1, 0, \ldots, 0)$ und mit q den Südpol $(-1, 0, \ldots, 0)$ von $S^n < \boldsymbol{R}^{n+1}$.

T^nK liegt wegen (a) in der Hemisphäre von S^{2n+1}, auf der die erste Koordinate positiv ist. Wir verwenden daher die letzten $2n+1$ Koordinaten von R^{2n+2} als Karte für S^{2n+1}.

Bezüglich dieser Karte definieren wir nun für einen genügend kleinen ε-Ball D_ε^{n+1} um $0 \in \boldsymbol{R}^{n+1}$:

$$\bar{g}: (S^n - \{p, q\}) \times D_\varepsilon^{n+1} \to S^{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{g}(z_0, \ldots, z_n; a_0, \ldots, a_n) \\
&= \Bigg(\left[f_1(s(z_0)) + a_0 v_1(s(z_0)) + \frac{z_1 a_1 + \cdots + z_n a_n}{\| (z_1, \ldots, z_n) \|} w_1(s(z_0))\right] \cdot \frac{(z_1, \ldots, z_n)}{\| (z_1, \ldots, z_n) \|}, \\
&\quad f_2(s(z_0)) + a_0 v_2(s(z_0)) + \frac{z_1 a_1 + \ldots + z_n a_n}{\| (z_1, \ldots, z_n) \|} w_2(s(z_0)), \\
&\quad \left[f_3(s(z_0)) + a_0 v_3(s(z_0)) + \frac{z_1 a_1 + \cdots + z_n a_n}{\| (z_1, \ldots, z_n) \|} (w_3(s(z_0)) - 1)\right] \cdot \frac{(z_1, \ldots, z_n)}{\| (z_1, \ldots, z_n) \|} \\
&\qquad + (a_1, \ldots, a_n)\Bigg)
\end{aligned}$$

$\bar{g}$ ist differenzierbar und äquivariant. ($O(n)$ operiert auf den letzten n Komponenten von D_ε^{n+1} in der üblichen Weise.) $\bar{g}'$ hat Höchstrang in jedem Punkt $(z_0, z_1, 0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0)$ mit $|z_0| \neq 1$. Dies folgt leicht durch Ausrechnen der Funktionalmatrix, wenn man $z_1 \neq 0$ und die Eigenschaften von f, v, w, s benutzt. Sie lautet nämlich — nach Division der ersten Zeile durch $s'(z_0)$ — bezüglich $z_0, z_2, \ldots, z_n, a_0, \ldots, a_n$ als Koordinaten:

$$\begin{bmatrix}
f_1'(s(z_0)) & 0 & f_2'(s(z_0)) & f_3'(s(z_0)) & 0 \\
0 & z_1^{-1} f_1(s(z_0)) \cdot E & 0 & 0 & z_1^{-1} f_3(s(z_0)) \cdot E \\
v_1(s(z_0)) & 0 & v_2(s(z_0)) & v_3(s(z_0)) & 0 \\
w_1(s(z_0)) & 0 & w_2(s(z_0)) & w_3(s(z_0)) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E
\end{bmatrix}$$

Hier ist E die $(n-1, n-1)$-Einheitsmatrix.

Da jedes $A \in O(n)$ einen Diffeomorphismus von $(S^n - \{p, q\}) \times D_\varepsilon^{n+1}$ auf sich liefert und jeder Punkt von $(S^n - \{p, q\}) \times \{0\}$ durch ein $A \in O(n)$ in einen Punkt der Form $(z_0, z_1, 0 \ldots, 0; 0, \ldots, 0)$ mit $|z_0| \neq 1$ transportiert wird, hat $\bar{g}'$ auf $(S^n - \{p, q\}) \times \{0\}$ Höchstrang.

Man rechnet nach, daß in der Nähe des Nordpols

$$\bar{g}(z_0, \ldots, z_n; a_0, \ldots, a_n) = (z_1, \ldots, z_n, f_2(1) + a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

und in der Nähe des Südpols

$$\bar{g}(z_0, \ldots, z_n; a_0, \ldots, a_n) = (z_1, \ldots, z_n, f_2(0) - a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

gilt. $\bar{g}$ kann deshalb differenzierbar und äquivariant fortgesetzt werden zu

$$\bar{\bar{g}}: S^n \times D_\varepsilon^{n+1} \to S^{2n+1}.$$

$\bar{\bar{g}}'$ hat in einer ganzen Umgebung von $S^n \times \{0\}$ Maximalrang, $\bar{\bar{g}}$ ist dort also lokal injektiv. $\bar{\bar{g}}$ ist aber auf $S^n \times \{0\}$ injektiv. Da S^n kompakt ist, folgt Injektivität von $\bar{\bar{g}}$ sogar auf einer ganzen Umgebung $S^n \times D_\varrho^{n+1}$ von $S^n \times \{0\}$. g definiert man nun als Komposition $g = \bar{\bar{g}} \circ (id \times m_\varrho)$, wo $m_\varrho: D^{n+1} \to D_\varrho^{n+1}$ die Multiplikation mit ϱ ist. q. e. d.

§ 12. Äquivariantes Henkelansetzen und äquivariante sphärische Modifikation

12. 1. Sei $g: S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$ irgendeine äquivariante differenzierbare Einbettung. S^{2n+1} betrachten wir als Rand der $O(n)$-Mannigfaltigkeit D^{2n+2} (vergleiche § 8). Wir erklären, was es heißt, mittels g äquivariant einen Henkel an D^{2n+2} anzusetzen.

Der Henkel, den wir ansetzen wollen, ist $D^{n+1} \times D^{n+1}$. Schreibt man

$$D^{n+1} \times D^{n+1} < \boldsymbol{R}^{2n+2},$$

wird der Henkel zur $O(n)$-Mannigfaltigkeit. Sei

$$N = (D^{n+1} \times D^{n+1}) \underset{h}{\cup} D^{2n+2},$$

wo h die auf der Teilmenge $S^n \times D^{n+1}$ von $D^{n+1} \times D^{n+1}$ definierte Abbildung $h: S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$, $h(x, y) = g\left(x, \frac{1}{2} y\right)$ ist. Da h äquivariant ist, ist N eine $O(n)$-Mannigfaltigkeit. Wir erklären eine differenzierbare Struktur für N:

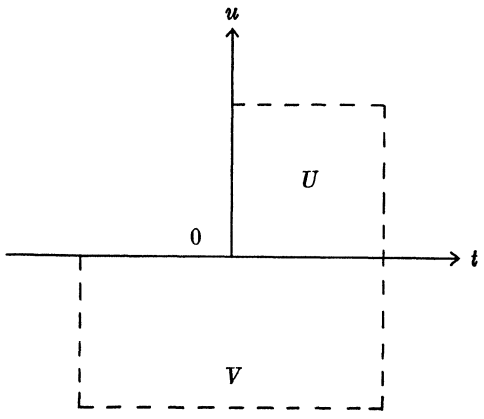
1) Die natürlichen Inklusionen $(D^{n+1} - S^n) \times D^{n+1} < N$ und $D^{2n+2} - g(S^n \times D^{n+1}_{1/2}) < N$ sollen Diffeomorphismen sein.

2) Die Abbildung $b: S^n \times (D^{n+1} - S^n) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to N (\varepsilon < 1/2)$, die definiert ist durch

$$b(x, y, t) = \begin{cases} ((1-t)x, y) \in D^{n+1} \times D^{n+1} \text{ für } t \geqq 0 \\ (1+t) g\left(x, \frac{1}{2} y\right) \in D^{2n+2} \text{ für } t \leqq 0, \end{cases}$$

sei ein Diffeomorphismus.

3) $U := [0, \varepsilon) \times [0, \varepsilon) < \boldsymbol{R}^2$, $V := (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, 0] < \boldsymbol{R}^2$



$U \cup V$ trage die differenzierbare Struktur einer berandeten Mannigfaltigkeit, so daß $(U \cup V) - \{0\}$ differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist. Dann sei die Abbildung $c: S^n \times S^n \times (U \cup V) \to N$, definiert durch

$$c(x, y, t, u) = \begin{cases} ((1-u)x, (1-t)y) \varepsilon D^{n+1} \times D^{n+1} \text{ für } (t, u) \in U \\ (1+u)\, g\left(x, \frac{1}{2}(1-t)y\right) \in D^{2n+2} \text{ für } (t, u) \in V, \end{cases}$$

ebenfalls ein Diffeomorphismus.

Diese „Karten" sind untereinander verträglich, und N ist damit eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Läßt man $O(n)$ auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ und $U \cup V$ trivial operieren, sind unsere Karten sogar äquivariant. N ist also differenzierbare $O(n)$-Mannigfaltigkeit.

Wir sagen: N entsteht durch äquivariantes Henkelansetzen an D^{2n+2} mittels g. ∂N entsteht durch äquivariante sphärische Modifikation von S^{2n+1} mittels g.

Was äquivariantes Henkelansetzen an D^{2n+2} bzw. äquivariante sphärische Modifikation von S^{2n+1} mittels mehrerer äquivarianter Einbettungen $g_1, \ldots, g_r$ bedeutet, ist klar, wenn $g_1, \ldots, g_r$ paarweise disjunkte Bilder haben.

Wenn man die $O(n)$-Aktion außer acht läßt, handelt es sich natürlich um Henkelansetzen bzw. sphärische Modifikation im üblichen Sinne.

§ 13. Konstruktion der Knotenmannigfaltigkeiten

13. 1. Wenn nichts anderes gesagt wird, sei k im folgenden ein zahmer Knoten, der als Rand einer Seifertfläche gegeben ist (siehe 1. 3). Die 2-Scheibe der Fläche sei die Menge $\{(x_0, x_1; y_0, y_1) \in S^3 \mid x_1 = 0 \wedge y_1 \geqq 0\}$. Von jedem Band B der Fläche wollen wir folgendes annehmen:

1) Zu B gehört eine differenzierbare Einbettung $f: [0, 1] \to S^3$, so daß Bild f die Voraussetzungen (1), (2), (3) von Lemma 9. 1 erfüllt und f Eigenschaften (a) und (b) von 11. 1 hat.

2) Zu B gehört ein differenzierbares Vektorfeld $v: [0, 1] \to \boldsymbol{R}^3$, das mit f zusammen (c) und (d) von 11. 2 genügt.

3) $B =$ Bild j, wo $j: [0, 1] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to S^3$ eine Einbettung in die Halbsphäre $x_0 \geqq 0$ ist, die bezüglich der Koordinaten x_1, y_0, y_1 von S^3 durch $j(t, a) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) + a \cdot (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ gegeben ist, und $j \mid [0, 1] \times \{0\}$ ist orientierungstreue Abbildung auf die Seele des Bandes B.

13. 2. Diese Annahmen bedeuten keine Beschränkung der Allgemeinheit. Ein zahmer Knoten hat nämlich einen differenzierbaren Repräsentanten, in den man eine differenzierbare Seifertfläche einspannen kann. Da nach einem Satz von Alexander die Hülle des Komplementes einer zahmen 3-Zelle in S^3 ebenfalls eine zahme 3-Zelle ist, darf man die angegebene Lage der 2-Scheibe der Fläche und weiter, daß jedes Band in $\Theta \cup F$ (siehe 9. 1) liegt, voraussetzen. Die Gültigkeit von 1), 2) und 3) kann man durch Anwendung von Milnors Sätzen über Tubenumgebungen ([14]) erreichen.

13. 3. Nun wählen wir zu jedem Band B unter Benutzung der zu B gehörigen Funktionen f und v eine äquivariante Einbettung

$$g_B: S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1},$$

wie sie in § 11 konstruiert wurde, und zwar so, daß für je zwei Bänder B und B' Bild $g_B \cap$ Bild $g_{B'}$ leer ist. Für jedes Band B setzen wir an D^{2n+2} mittels g_B äquivariant einen Henkel an und nennen die so entstandene $O(n)$-Mannigfaltigkeit $N_n(k)$. $M_n(k)$ sei der Rand von $N_n(k)$. Wir zeigen im folgenden, daß $M_n(k)$ ein Exemplar der zu k gehörigen Knotenmannigfaltigkeit ist, insbesondere auch, daß $M_1(k)$ die zweifache längs k verzweigte Überlagerung von S^3 ist.

13. 4. *Bemerkung.* Ausgegangen sind wir von einem zahmen Knoten, und nicht unbedingt von einem differenzierbaren. Aus folgendem Grunde ist das jedoch belanglos:

Ein differenzierbarer Knoten ist zahm, und ein zahmer Knoten hat auch einen differenzierbaren Repräsentanten; sind weiter k und k' zwei differenzierbare Knoten, die topologisch äquivalent sind, d. h. es gibt einen Homöomorphismus $h: S^3 \to S^3$ mit $h(k) = k'$, so existiert sogar ein Diffeomorphismus $d: S^3 \to S^3$ mit $d(k) = k'$ ([7]).

§ 14. Eigenschaften des Orbitraumes von $M_n(k)$

14. 1. Satz. *Für $n \geqq 2$ ist der Orbitraum der $O(n)$-Mannigfaltigkeit S^{2n+1} homöomorph zu D^4.*

Beweis. Betrachte die (stetige) Abbildung

$$\pi: \boldsymbol{R}^{2n+2} \to \boldsymbol{R}^4$$

mit $\pi(x_0, x; y_0, y) = (x_0, y_0, \| y \|, \langle x, y \rangle)$.

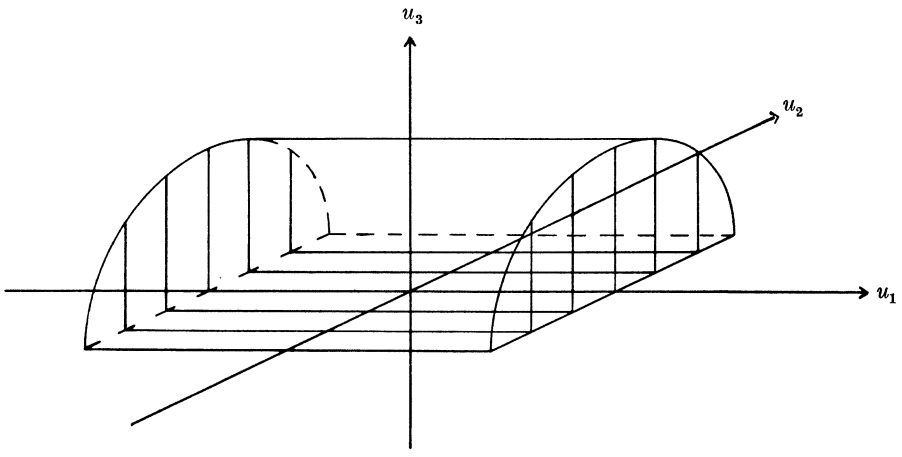
$\pi \mid S^{2n+1}$ bildet jeden Orbit auf einen Punkt ab und verschiedene Orbits auf verschiedene Punkte. Da S^{2n+1} kompakt ist, ist der Orbitraum von S^{2n+1} homöomorph zu $\pi(S^{2n+1})$. $\pi(S^{2n+1}) = \{(u_1, \ldots, u_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqq 1 \wedge u_3 \geqq 0 \wedge u_3 \cdot {}_+\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2} \geqq \mid u_4 \mid\}$. Die Projektion auf die ersten drei Koordinaten liefert eine 3-Zelle. $u_3 \cdot {}_+\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}$ ist eine nicht-negative stetige Funktion, die genau auf dem Rand dieser 3-Zelle verschwindet. Daher ist $\pi(S^{2n+1})$ eine 4-Zelle. q. e. d.

14. 2. Satz. *Für $n \geqq 2$ ist der Orbitraum von $S^n \times D^{n+1}$ der Kegel über dem Orbitraum von $S^n \times S^n$.*

Beweis. Wir benutzen wieder die Abbildung π vom vorigen Beweis. $\pi \mid S^n \times D^{n+1}$ liefert, wie man leicht nachprüft, eine Orbitabbildung.

$$\pi(S^n \times D^{n+1}) = \{(u_1, \ldots, u_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid u_1^2 \leqq 1 \wedge u_2^2 + u_3^2 \leqq 1 \wedge u_3 \geqq 0 \wedge u_3 \cdot {}_+\sqrt{1 - u_1^2} \geqq \mid u_4 \mid\}.$$

$\pi(S^n \times S^n)$ ist gerade die Teilmenge hiervon, für die $u_2^2 + u_3^2 = 1$ gilt. Die Projektion von $\pi(S^n \times D^{n+1})$ auf die ersten drei Koordinaten liefert einen geraden Halbzylinder, also eine 3-Zelle (vergleiche Figur). Der kompakte schraffierte Teil des Randes dieser 3-Zelle



ist gerade die Menge, auf der $u_3 \cdot {}_+\sqrt{1 - u_1^2}$ verschwindet. Der kompakte nicht schraffierte Teil des Randes ist das Bild von $\pi(S^n \times S^n)$ unter der zuletzt genannten Projektion. Es ist nicht schwer, diese 3-Zelle homöomorph auf die 3-Zelle $\{u \in \boldsymbol{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqq 1 \wedge u_3 \geqq 0\}$ so abzubilden, daß der schraffierte Teil des Randes auf $\{u \in \boldsymbol{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \wedge u_3 \geqq 0\}$ und der unschraffierte Teil auf $\{u \in \boldsymbol{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 \leqq 1 \wedge u_3 = 0\}$ geworfen wird. Nun ist es

leicht, $\pi(S^n \times D^{n+1})$ homöomorph auf

$$\{(u_1, \ldots, u_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \leqq 1 \wedge u_3 \geqq 0\}$$

abzubilden, so daß $\pi(S^n \times S^n)$ auf die Punkte mit $u_1^2 + u_2^2 + u_4^2 \leqq 1$ und $u_3 = 0$ geworfen wird. Daraus folgt die Behauptung. q. e. d.

14. 3. *Bemerkung.* Bewiesen wurde natürlich mehr: nämlich daß der Orbitraum von $S^n \times D^{n+1}$ eine 4-Zelle ist, in deren Rand der Orbitraum von $S^n \times S^n$ als zahme 3-Zelle liegt. Das wird im folgenden aber nicht benutzt.

14. 4. Satz. *$M_n(k)$ hat für $n \geqq 2$ einen zu D^4 homöomorphen Orbitraum.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß sich der Orbitraum nicht ändert, wenn S^{2n+1} mittels nur einer Einbettung $g: S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$ zu einer $O(n)$-Mannigfaltigkeit M sphärisch modifiziert wird. Sowohl S^{2n+1} als auch M erhält man durch äquivariantes Verkleben von $\Sigma := \overline{S^{2n+1} - g(S^n \times D^{n+1}_{1/2})}$ und $S^n \times D^{n+1}$ längs der Ränder (es wird nur eben auf verschiedene Weise verklebt). Daher und wegen des vorigen Satzes erhält man sowohl $S^{2n+1}/O(n)$ als auch $M/O(n)$, indem man an $\Sigma/O(n)$ einen Kegel über $(\partial\Sigma)/O(n)$ anklebt. Da sich jeder Autohomöomorphismus von $(\partial\Sigma)/O(n)$ offenbar zu einem solchen des Kegels über $(\partial\Sigma)/O(n)$ fortsetzen läßt, sind $S^{2n+1}/O(n)$ und $M/O(n)$ homöomorph. Nun brauchen wir nur noch Satz 14. 1 anzuwenden. q. e. d.

14. 5. Satz. *Der Orbitraum von $M_1(k)$ ist eine 3-Sphäre. Die Fixpunktmenge wird unter der Orbitabbildung auf einen Knoten k' abgebildet, der vom gleichen Typ wie k ist. $M_1(k)$ ist die zweifache längs k' verzweigte Überlagerung.*

Dem Beweis schicken wir ein Lemma voraus.

14. 6. Lemma. *Die $O(1)$-Mannigfaltigkeit S^3 hat einen zu S^3 homöomorphen Orbitraum. k sei ein (nicht notwendig zahmer) Knoten in S^3. Sei $k < \Theta \cup F$ (siehe 9. 1). Dann ist das Bild von k unter der Orbitabbildung ein Knoten vom gleichen Typ wie k.*

Beweis. Mit der stereographischen Projektion

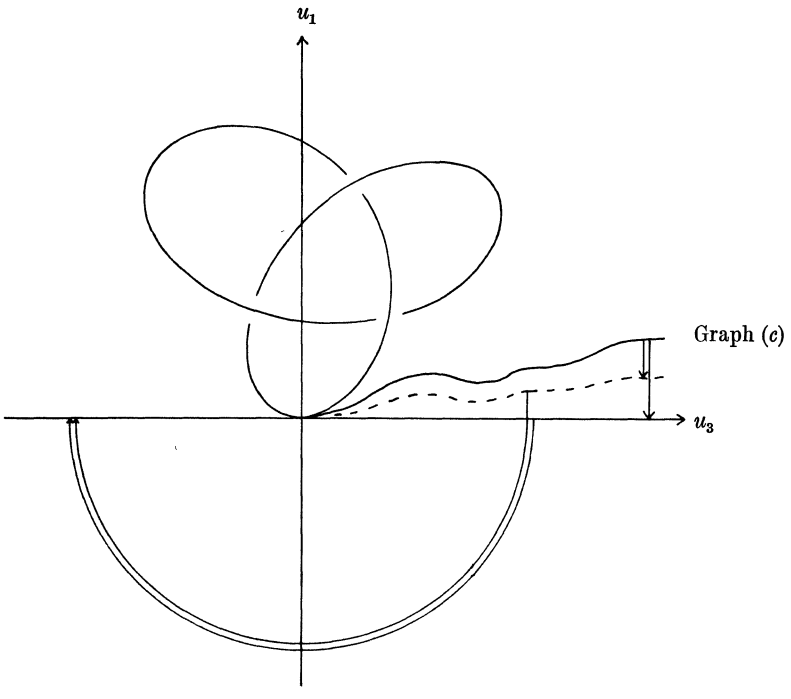
$$p: S^3 - \{(1, 0, 0, 0)\} \to \boldsymbol{R}^3, \quad p(x_0, x_1; y_0, y_1) = (x_1, y_0, y_1)/(1 - x_0)$$

gehen wir zum entsprechenden Problem für $\boldsymbol{R}^3$ über. Wenn $k \neq F$ ist, darf man $(1, 0, 0, 0) \notin k$ annehmen. Den Orbitraum T von $\boldsymbol{R}^3$ erhält man, indem man in $\{(u_1, u_2, u_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid u_1 \geqq 0\}$ $(0, u_2, u_3)$ mit $(0, u_2, -u_3)$ identifiziert. Sei $\pi: \boldsymbol{R}^3 \to T$ die natürliche Orbitabbildung. Da die Projektion von

$$p(k - \{(1, 0, 0, 0)\})$$

auf die u_1-u_3-Ebene kompakt ist, gibt es eine stetige Funktion

$c: [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ mit $c(0) = 0$



und $c((0, \infty)) > 0$, so daß $\{u \in \boldsymbol{R}^3 \mid u_3 > 0 \wedge 0 \leqq u_1 \leqq c(u_3)\}$ keine Punkte von $p(k - \{(1,0,0,0)\})$ enthält. Nun kann man aber leicht einen Homöomorphismus $\eta : T \to \boldsymbol{R}^3$ mit $\eta \circ \pi \circ p(k - \{(1,0,0,0)\}) = p(k - \{(1,0,0,0)\})$ konstruieren.

14. 7. *Beweis des Satzes* 14. 5. Wir überlegen uns, was bei einer sphärischen Modifikation mittels einer äquivarianten Einbettung $g : S^1 \times D^2 \to S^3$ geschieht. Der Orbitraum von $S^1 \times D^2$ ist eine 3-Zelle, deren Rand gerade der Orbitraum des Randes $S^1 \times S^1$ von $S^1 \times D^2$ ist. Für den Orbitraum von S^3 bedeutet eine sphärische Modifikation mittels g also das Herausnehmen des offenen Kerns der zahmen 3-Zelle (Bild g)$/O(1)$ und anschließend das Einsetzen einer andern 3-Zelle $Z = D^2 \times S^1/O(1)$ längs des entstandenen Randes. Damit ist gezeigt, daß $M_1(k)/O(1)$ homöomorph zu S^3 ist. Die Fixpunktmenge von $M_1(k)$ geht unter der Orbitabbildung natürlich in einen Knoten k' im Orbitraum S^3 über. Ist Z wieder wie oben, sind $C_1 := D^2 \times \{(1,0)\}/O(1)$ und $C_2 := D^2 \times \{(-1,0)\}/O(1)$ zwei in Z zahm eingebettete disjunkte 2-Scheiben. $k' \cap Z$ besteht aus zwei 1-Zellen $Z_1 < C_1$ und $Z_2 < C_2$. Z_i kann nun über C_i hinweg in $\overline{\partial C_i - Z_i}$ deformiert werden. Beachtung der in § 12 vorgenommenen Identifikationen zeigt: $\overline{\partial C_i - Z_i} = g(S^1 \times \{(\pm 1/2, 0)\})/O(1)$. Wegen § 13, der Definition von g und aufgrund des vorigen Lemmas ist damit bewiesen, daß k' zu k äquivalent ist. Die letzte Behauptung des Satzes ist klar. q. e. d.

14. 8. Satz. *Für $n \geqq 2$ geht die Fixpunktmenge von $M_n(k)$ unter der Orbitabbildung $M_n(k) \to D^4$ in einen Knoten in $\partial D^4 = S^3$ vom selben Typ wie k über.*

Beweis. Die Inklusion $\boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^{2n+2}$, $(x_0, x_1; y_0, y_1) \mapsto (x_0, x_1, 0, \ldots, 0; y_0, y_1, 0, \ldots, 0)$ induziert eine Inklusion $i : M_1(k) \to M_n(k)$. Das Bild eines Orbits in $M_1(k)$ unter i ist ganz in einem Orbit der $O(n)$-Mannigfaltigkeit $M_n(k)$ enthalten. Außerdem kommt jeder Fixpunkt von $M_n(k)$ und auf jedem Sphären-Orbit von $M_n(k)$ wenigstens ein Punkt als Bild von i vor. Wir erhalten also das kommutative Diagramm (vertikal die Orbitabbildungen):

$$\begin{array}{ccc} M_1(k) & \xrightarrow{i} & M_n(k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^3 & \xrightarrow{\subseteq} & D^4 \end{array}$$

Daß in der unteren Zeile S^3 auf ∂D^4 abgebildet wird, kann man der angegebenen Orbitabbildung von $M_n(k)$ ansehen oder aus dem Scheibensatz folgern. Die Behauptung folgt nun aus Satz 14. 5.

14. 9. *Bemerkung.* Modulo der differenzierbaren Struktur des Orbitraumes haben wir damit gezeigt, daß $M_n(k)$ die zu k gehörige Knotenmannigfaltigkeit ist. Vergleiche 7. 4.

§ 15. Homotopie- und Homologie-Eigenschaften von $M_n(k)$ und $N_n(k)$

15. 1. In diesem Paragraphen sei $n \geqq 2$, wenn nichts anderes gesagt wird. Um den Satz von Hurewicz anwenden zu können, zeigen wir zuerst:

Satz. *$N_1(k)$, $N_n(k)$ und $M_n(k)$ sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Für die beiden ersten Räume folgt der einfache Zusammenhang unmittelbar aus dem Satz von van Kampen-Seifert. $g_1, \ldots, g_j : S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$ seien die Einbettungen, mit deren Hilfe $M_n(k)$ definiert wurde. Da $D^{n+1} \times S^n$ einfach zusammenhängend und $S^n \times S^n$ zusammenhängend ist, können wir $\pi_1(M_n(k)) = \{1\}$ nach van Kampen-Seifert schließen, wenn wir zeigen, daß $\Sigma := S^{2n+1} - \bigcup_{i=1}^{j} g_i(S^n \times \{0\})$

einfach zusammenhängend ist. Sei $w: S^1 \to \Sigma$ ein geschlossener Weg. Dann existiert eine Erweiterung $\bar{w}: D^2 \to S^{2n+1}$. $\bar{w}$ darf als differenzierbar angenommen werden. Approximiert man $\bar{w}$ nach Thom durch eine zu $\bigcup_{i=1}^{j} g_i(S^n \times \{0\})$ transversal-reguläre Abbildung, so liegt wegen $n \geqq 2$ das Bild der neuen Funktion in Σ. w ist also nullhomotop. q. e. d.

15. 2. Wir berechnen nun die ganzzahlige Homologie von $N_n(k)$ und $M_n(k)$. $\tilde{H}_q(N_n(k)) \cong H_q(N_n(k), D^{2n+2}) \cong \coprod_{i=1}^{j} H_q(D^{n+1} \times D^{n+1}, S^n \times D^{n+1}) \cong \coprod_{i=1}^{j} H_q(D^{n+1}, S^n)$ (für jeden Henkel ein direkter Summand). Dies ist null für $q \neq n+1$, $\coprod_{i=1}^{j} \boldsymbol{Z}$ für $q = n+1$. Zu einem Henkel gehört ein Erzeugendes von $H_{n+1}(N_n(k))$, das man so erhält: Sei $f: [0, 1] \to S^3$ die Parametrisierung der Seele des entsprechenden Bandes der Seifertfläche (vergleiche 13. 1). $T^n(\text{Bild } f)$ (definiert in 9. 1) ist der Rand der Seele des Henkels. Verbindet man $T^n(\text{Bild } f)$ radial mit dem Zentrum von D^{2n+2} und nimmt die Seele des Henkels hinzu, so erhält man eine topologisch eingebettete $(n+1)$-Sphäre in $N_n(k)$. Für den i-ten Henkel ($i = 1, \ldots, j$) sei sie mit S_i bezeichnet. Die S_i erzeugen $H_{n+1}(N_n(k))$. Berücksichtigt man noch Künneth-Sequenz und Poincaré-Dualität, erhält man den

Satz.
$$H_q(N_n(k)) = 0 \qquad \text{für } q \neq 0,\ n+1$$
$$H_q(N_n(k), M_n(k)) = 0 \quad \text{für } q \neq n+1,\ 2n+2$$
$$H_0(N_n(k)) \cong H_{2n+2}(N_n(k), M_n(k)) \cong \boldsymbol{Z}$$
$$H_{n+1}(N_n(k)) \cong H_{n+1}(N_n(k), M_n(k)) \cong \coprod_{i=1}^{j} \boldsymbol{Z}$$

Für $H_{n+1}(N_n(k))$ hat man ein durch die Konstruktion von $N_n(k)$ gegebenes freies Erzeugendensystem S_i, $i = 1, \ldots, j$. In allen Fällen ist $H^q \cong H_q$.

15. 3. Mit $e: N_n(k) \to (N_n(k), M_n(k))$ bezeichnen wir die Inklusion.

Satz. *$e_*: H_{n+1}(N_n(k)) \to H_{n+1}(N_n(k), M_n(k))$ ist bezüglich passender Basen gegeben durch die transponierte Schnittmatrix von $N_n(k)$ bezüglich einer passenden Basis. Das gilt auch für $N_1(k)$.*

Beweis. Die Poincaré-Dualität liefert das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^{n+1}(N_n(k), M_n(k)) & \xrightarrow{e^*} & H^{n+1}(N_n(k)) \\ \cong \downarrow \frown \nu & \overset{\alpha}{\nearrow} & \cong \downarrow \frown \nu \\ H_{n+1}(N_n(k)) & \xrightarrow[e_*]{} & H_{n+1}(N_n(k), M_n(k)) \end{array}$$

Hier ist ν die Fundamentalklasse einer (fest zu wählenden) Orientierung von $N_n(k)$; α ist durch die restlichen Pfeile und die Kommutativität des Diagramms gegeben. (x_q) sei eine Basis von $H_{n+1}(N_n(k))$, (x^q) die Dualbasis in $H^{n+1}(N_n(k)) = \text{Hom}\,(H_{n+1}(N_n(k)), \boldsymbol{Z})$. Definiere a_{pq} durch

$$e_*(x_q) = \sum_p a_{pq}(x^p \frown \nu).$$

Dann ist $\alpha(x_q) = \sum_p a_{pq} x^p$, $\langle \alpha(x_q), x_r \rangle = a_{rq}$. Bleibt

$$\langle \alpha(x), y \rangle = x \circ y$$

für alle $x, y \in H_{n+1}(N_n(k))$ zu zeigen. Die Schnittzahl $x \circ y$ kann so definiert werden (siehe z. B. [17]): $x \circ y = \langle u \cup v, v\rangle$ mit $u \cap v = x$, $v \cap v = y$, $u, v \in H^{n+1}(N_n(k), M_n(k))$. $x \circ y = \langle u \cup v, v\rangle = \langle u, e_*(v \cap v)\rangle = \langle e^* u, y\rangle = \langle \alpha(x), y\rangle$. q. e. d.

15. 4. Entscheidend für die Berechnung der Homologie von $M_n(k)$ ist nun der folgende Satz.

Satz. *Gehört zu der bei der Konstruktion von $N_n(k)$ benutzten Seifertfläche die Seifertmatrix V, so hat $N_n(k)$ die Schnittmatrix $V' + (-1)^{n+1} V (n \geqq 1)$.*

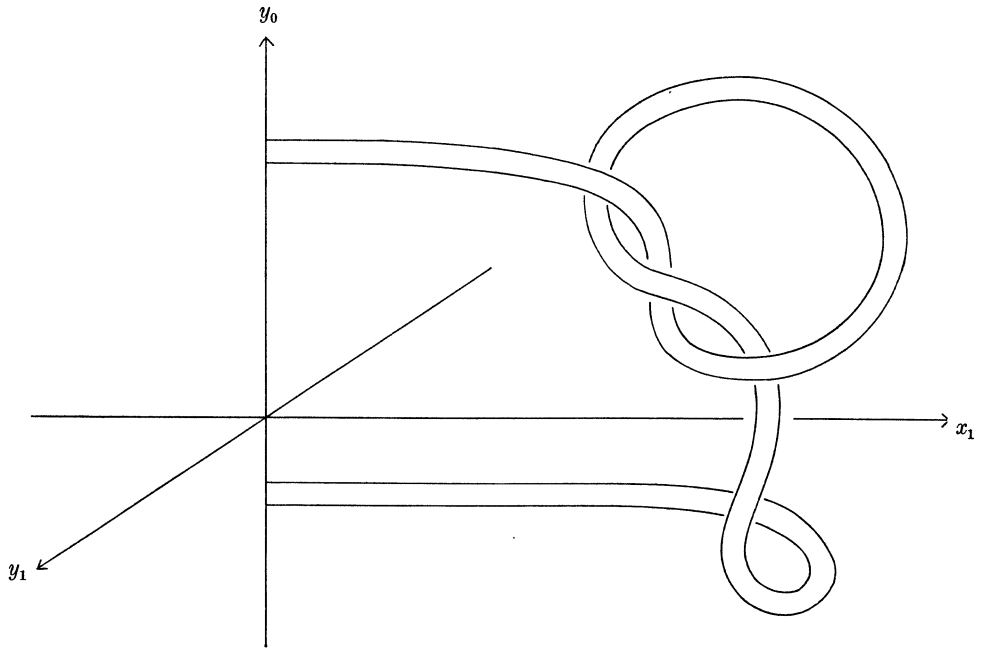
Beweis. Deformiert man die Seifertfläche, so ändert sich die Seifertmatrix nicht; denn letztere ist die Matrix einer gewissen linearen Abbildung bezüglich wohldefinierter Basen (siehe 1. 2). Eine schwache Diffeotopie der Seifertfläche, die in einer Umgebung der Scheibe der Fläche nichts ändert, bedeutet eine starke Diffeotopie der Einbettungen $S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$, die für das Henkelansetzen benutzt werden, also keine Änderung für $N_n(k)$ ([14]). Für das weitere benötigen wir ein Lemma.

15. 5. Lemma. *Sei $pr: S^3 \to \mathbf{R}^2$ die Projektion auf die x_1-y_0-Ebene. Es gibt eine starke Diffeotopie der Seifertfläche, die in einer Umgebung der Hemisphäre $x_1 \leqq 0$ die Identität ist, so daß die Bänder $\{B_i\}$ der neuen Seifertfläche folgende Eigenschaften haben (vergleiche § 10):*

(1) *Ist f^i eine Parametrisierung der Seele von B_i wie in 13. 1, so liegen über jedem Punkt von $\mathbf{R}^2$ bezüglich pr höchstens zwei Punkte von $\bigcup_i$ Bild f^i.*

(2) *Sind p und $q \in \bigcup_i$ Bild f^i mit $pr(p) = pr(q)$, so gibt es zusammenhängende geradlinige disjunkte Umgebungen I bzw. J von p bzw. q in $\bigcup_i$ Bild f^i, so daß sich $pr(I)$ und $pr(J)$ transversal schneiden.*

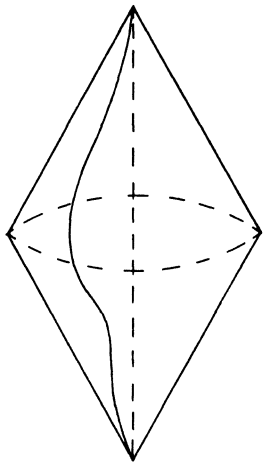
(3) *Das zu B_i gehörige Vektorfeld v^i (siehe 13. 1) hat eine überall verschwindende dritte Komponente.*



15. 6. Den Beweis des Lemmas stellen wir einstweilen zurück und fahren mit dem Beweis des Satzes fort. Wir wollen $S_i \circ S_r$ berechnen, wobei wir für die Seifertfläche Eigenschaften (1), (2), (3) des Lemmas annehmen. Sei zunächst $i \neq r$. S_i und S_r haben

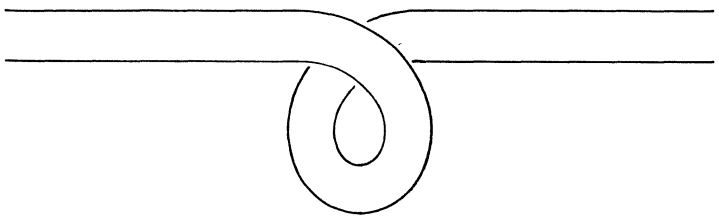
nur den Mittelpunkt von D^{2n+2} gemeinsam. $T^n(\text{Bild } f^i) = S_i \cap S^{2n+1}$ ist orientiert, daher auch $S_i \cap D^{2n+2}$, woher S_i seine natürliche Orientierung hat. Nach [17] ist deshalb $S_i \circ S_r$ gleich der Verschlingungszahl von $T^n(\text{Bild } f^i)$ mit $T^n(\text{Bild } f^r)$. Ohne das Überkreuzungsverhalten zu ändern, kann man aber Bild $f^i \cup$ Bild f^r so deformieren, daß man Satz 10. 4 anwenden kann. Damit erhält man $S_i \circ S_r = v_{ri} + (-1)^{n+1} v_{ir}$. Für $i = r$ ist nur der Fall n ungerade nicht-trivial. S_i' ergebe sich, indem man Bild f^i ein wenig auf B_i parallel verschiebt. S_i' ist homolog zu S_i. Wie oben ergibt sich $S_i \circ S_i' = v_{ii} + v_{ii}$ nach Definition der Seifertmatrix. q. e. d.

15. 7. *Beweis des Lemmas.* Zunächst darf man annehmen, daß eine Vollkugel X im x_1-y_0-y_1-Raum mit $x_1 > 0$ existiert, so daß $\bigcup_i B_i - X$ in der x_1-y_0-Ebene liegt. Wie in ([5], Appendix I) läßt sich zeigen: $\bigcup_i \text{Bild } f^i \subset \bigcup_l K_l$, wo die K_l endlich viele gerade Doppelkegel sind, von denen je zwei höchstens einen Punkt gemeinsam haben und so, daß in jedem K_l in jeder „Höhe" genau ein Punkt von $\bigcup_i \text{Bild } f^i$ liegt (vergleiche die Figur).



$A_l \subset K_l$ sei die Kegelachse. Eine beliebig kleine Rotation bewirkt, daß $\bigcup_l A_l$ in regulärer Lage bezüglich der Projektion pr ist ([5], Chap. I, (3. 1)) und daß die Tangente an $\bigcup_i \text{Bild } f^i$ in keiner Kegelspitze parallel zur y_1-Richtung ist. Nun kann man durch eine schwache Diffeotopie innerhalb $X \cap \bigcup_l K_l$ die Mannigfaltigkeit $\bigcup_i \text{Bild } f^i$ so deformieren, daß sie in der Nähe der Kegelspitzen festbleibt und in der Nähe eines jeden Doppelpunktes bezüglich pr auf der entsprechenden Kegelachse liegt. Diese letzte Deformation können wir auch vor der obigen Rotation vornehmen, die Rotation dann nur auf X ausführen und sie außerhalb von X zur Identität abklingen lassen. Dann haben wir (1) und (2) gewährleistet. Da man eine Verdrillung eines Bandes

deformieren kann in



kann man auch für das Erfülltsein von (3) sorgen. Nun braucht man nur noch von schwachen zu starken Diffeotopien überzugehen. q. e. d.

15. 8. Korollar zu den Sätzen 15. 3 und 15. 4. e_* *ist injektiv.*

Klar, da $\det(V \pm V') \neq 0$ für jede Seifertmatrix V eines Knotens.

15. 9. Satz. $H_q(M_n(k)) = 0$ *für* $q \neq 0, n, 2n+1$

$H_q(M_n(k)) \cong \boldsymbol{Z}$ *für* $q = 0, 2n+1$

$H_n(M_n(k))$ ist null für gerades n und hat $V + V'$ als Relationenmatrix für ungerades n. Dabei ist V die Seifertmatrix zu einer Seifertfläche von k.

Beweis. Aus der exakten Homologiesequenz für $(N_n(k), M_n(k))$ und Satz 15. 2 folgt

$$H_q(M_n(k)) = 0 \text{ für } q \neq 0, n, n+1, 2n+1.$$

Die Behauptung für $q = 0$ und $q = 2n + 1$ gilt wegen des Zusammenhangs und der Orientierbarkeit von $M_n(k)$.

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(M_n(k)) \longrightarrow H_{n+1}(N_n(k)) \xrightarrow{e_*} H_{n+1}(N_n(k), M_n(k)) \longrightarrow H_n(M_n(k)) \longrightarrow 0$$

ist ein Stück der exakten Homologiesequenz. $H_{n+1}(M_n(k))$ verschwindet wegen des Korollars. Aufgrund der Sätze 15. 3 und 15. 4 ist $V + (-1)^{n+1} V'$ Relationenmatrix für $H_n(M_n(k))$, und für gerades n ist diese unimodular über $\boldsymbol{Z}$. q. e. d.

15. 10. *Folgerung.* Nach 15. 1, 15. 9 und Satz von Hurewicz ist $M_{2m-1}(k)$ $(2m-2)$-fach zusammenhängend. Genau dann, wenn $\det(k) = \det(V + V') = \pm 1$ ist, ist für $m \geqq 2$ $M_{2m-1}(k)$ homöomorph zu S^{4m-1} (Smale [20]). Für gerades n ist $M_n(k)$ in jedem Fall homöomorph zu S^{2n+1} ([20]).

§ 16. Die Parallelisierbarkeit von $N_n(k)$

16. 1. Satz. *$N_n(k)$ ist für jedes $n \geqq 1$ parallelisierbar.*

Beweis. $N_n(k)$ läßt eine Zellenzerlegung zu, bei der die Vereinigung L von D^{2n+2} und den Seelen der angesetzten Henkel Unterkomplex ist. Die Inklusion $L < N_n(k)$ erzeugt Isomorphismen für die Kohomologie. Nach [21: 34. 2] ist $N_n(k)$ parallelisierbar, wenn die Beschränkung des Tangentialbündels τ von $N_n(k)$ auf L trivial ist. Auf D^{2n+2} und auf jedem Henkel haben wir eine kanonische Trivialisierung für τ. $\tau \mid L$ entsteht daher durch Verkleben („clutching") trivialer Bündel, und zwar längs des Randes der Seele eines jeden Henkels. Wir werden im folgenden ausgiebig von der Tatsache Gebrauch machen, daß homotope Klebefunktionen isomorphe Vektorbündel definieren (siehe zum Beispiel [10]). Wenn wir zeigen, daß alle Klebefunktionen, die hier vorkommen, homotop zur Identität sind, haben wir die Trivialität von $\tau \mid L$ und damit von τ bewiesen.

16. 2. Sei $g: S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$ eine Einbettung, die zum Ansetzen eines Henkels von $N_n(k)$ benutzt wurde, und $h: S^n \times D^{n+1} \to S^{2n+1}$ die Funktion $h(z, a) = g\left(z, \frac{1}{2}a\right)$ von § 13, die die Identifizierung von $S^n \times D^{n+1} < D^{n+1} \times D^{n+1}$ (letzteres ist der Henkel) mit $g(S^n \times D^{n+1}_{1/2}) < S^{2n+1} < D^{2n+2}$ liefert. Sei $\tilde{h}: (D^{n+1}_{1+\varepsilon} - D^{n+1}_{1-\varepsilon}) \times D^{n+1} \to \boldsymbol{R}^{2n+2}$ durch

$$\tilde{h}(z, a) = \| z \|^{-1} g\left(\frac{z}{\| z \|}, \frac{1}{2}a\right)$$

gegeben. $\tilde{h}$ ist differenzierbar und äquivariant, $\tilde{h} \mid S^n \times D^{n+1} = h$. Daher ist die Klebefunktion von $\tau \mid L$ auf dem Rand der Seele des betreffenden Henkels die Funktion $d: S^n \to GL(2n+2; \boldsymbol{R})$ mit $d(z) = \tilde{h}'(z, 0)$.

Wir faktorisieren $\tilde{h}$ folgendermaßen:

$$\chi\colon (z, a) \mapsto \left(z, \frac{1}{2} a\right)$$

$$\pi\colon (u_0, \ldots, u_{2n+1}) \mapsto (u_1, \ldots, u_{2n+1})$$

$$\varphi\colon (z, a) \mapsto \left(\| z \|, \pi \circ g\left(\frac{z}{\| z \|}, a\right)\right) \text{ falls definiert}$$

$$\psi\colon (u_0, \ldots, u_{2n+1}) \mapsto u_0^{-1} \cdot \left(+\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{2n+1} u_i^2}, u_1, \ldots, u_{2n+1}\right) \text{ falls definiert}$$

$$\tilde{h} = \psi \circ \varphi \circ \chi.$$

Da ψ' und χ' homotop zur Identität sind, können wir $d(z) = \varphi'(z, 0)$ annehmen. Wir bemerken noch, daß auch φ äquivariant ist. Wir benutzen nun, daß τ ein $O(n)$-Vektorbündel ist und daß wir das Operieren auf den trivialen Bündeln $\tau \mid D^{2n+2}$ und $\tau \mid$ (Seele eines Henkels) kennen. $(z, a) \in S^n \times \boldsymbol{R}^{2n+2}$ in der Faser über z aus dem Rand der Seele des Henkels wird mit $(g(z, 0), d(z) \cdot a)$ in der Faser über $g(z, 0)$ identifiziert. ($\cdot$ ist die Anwendung einer linearen Abbildung auf einen Vektor.) Soll dies mit allen $A \in O(n)$ verträglich sein, gilt

$$(A\, g(z, 0), A\,(d(z) \cdot a)) = (g(A z, 0), d(A z) \cdot A a),$$

also $A\,(d(z) \cdot a) = d(A z) \cdot A a$ für alle $z \in S^n$, $a \in \boldsymbol{R}^{2n+2}$, $A \in O(n)$, also

$$(*) \qquad d(A z) = \tilde{A} \circ d(z) \circ \tilde{A}^{-1}.$$

(Hier ist mit $\tilde{A}$ das Element aus $GL(2n + 2; \boldsymbol{R})$ mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & A & & \\ & & 1 & \\ & & & A \end{bmatrix}$$

gemeint.) Wir stellen fest:

Lemma. *Kennt man d auf einem Punkt eines Orbits, kann man d auf dem ganzen Orbit nach $(*)$ berechnen.*

16. 3. Sei $W = \{(z_0, z_1, 0, \ldots, 0) \in S^n \mid z_1 \geqq 0\}$, $p = (1, 0, \ldots, 0)$, $q = (-1, 0, \ldots, 0)$. $O(n-1)$ ist Isotropiegruppe in $z \in W - \{p, q\}$, $O(n)$ in p und q. Aus $(*)$ folgt: Für $z \in W$ ist $d(z)$ mit $\tilde{A}$ für jedes A aus der Isotropiegruppe von z vertauschbar. Umgekehrt gilt: Wenn $d(z)$ für jedes $z \in W$ mit jedem $\tilde{A}$ (A aus der Isotropiegruppe von z) vertauschbar ist, so liefert $(*)$ eine eindeutig bestimmte Klebefunktion, die mit dem Operieren von $O(n)$ verträglich ist. Ändert man $d \mid W$ homotop ab, so daß während der Änderung immer $d(z)$ mit allen $\tilde{A}$ ($A \in$ Isotropiegruppe von z) vertauschbar ist, erhält man durch $(*)$ eine Homotopie für d auf ganz S^n.

16. 4. Mit Hilfe der Gleichung für $\bar{g}$ in § 11 errechnet man für $d(z)$ im Punkte $z = (z_0, z_1, 0, \ldots, 0)$ mit $z_1 > 0$ bis auf konstanten Faktor die Matrix:

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & z_1^{-1} f_1(s(z_0)) \cdot E & 0 & z_1^{-1} f_3(s(z_0)) \cdot E \\ C_3 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

Hier ist E die $(n-1, n-1)$-Einheitsmatrix und die C_i sind $(2, 2)$-Matrizen. Wegen $d(z) \in GL(2n+2; \mathbf{R})$ ist

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

nicht-singulär.

In einer Umgebung von p in S^n ergibt sich für d die Einheitsmatrix, in einer Umgebung von q in S^n die Matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & E & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & E \end{bmatrix}.$$

d kann daher als Klebefunktion homotop so abgeändert werden, daß $d(W)$ in $GL(4; \mathbf{R})$, ja sogar in $SO(4)$ liegt. (Hier haben wir $GL(4; \mathbf{R})$ durch

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} C_1 & & C_2 & \\ & E & & \\ C_3 & & C_4 & \\ & & & E \end{bmatrix}$$

in $GL(2n+2; \mathbf{R})$ eingebettet.) Eine weitere, leicht zu beschreibende, Homotopie bewirkt, daß auch $d(q)$ die Einheitsmatrix wird. Nun ist $d \mid W$ ein geschlossener Weg in $SO(4)$.

16. 5. Wir schreiben $SO(2) < SO(4)$ mittels

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} c_1 & & c_2 & \\ & 1 & & \\ c_3 & & c_4 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

$SO(2)$ ist dann mit allen $\tilde{A}$ für $A \in O(n)$, $SO(4)$ mit allen $\tilde{A}$ für $A \in O(n-1)$ vertauschbar.

Lemma. *Die natürliche Abbildung $\pi_1(SO(2)) \to \pi_1(SO(4))$ ist sürjektiv.*

Beweis. Man benutze die exakte Homotopiesequenz der Faserung von $SO(r+1)$ über S^r (Faser $SO(r)$) für $r = 2, 3$ und $\pi_1(S^2) = \pi_1(S^3) = 0$.

Sei $d' : W \to SO(2)$ ein geschlossener Weg, der in $SO(4)$ homotop zu $d \mid W$ ist. $(*)$ definiert dann eine zu d homotope Klebefunktion $d'' : S^n \to GL(2n+2; \mathbf{R})$, die auf W mit d' übereinstimmt. Wegen $(*)$ und $d'(W) < SO(2)$ ist d'' auf allen Orbits konstant. Dann ist es aber leicht, d'' als Abbildung auf D^{n+1} zu erweitern. d'' ist also nullhomotop.

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 17. Klassifikation der Sphären unter den Knotenmannigfaltigkeiten

17. 1. Falls die Knotenmannigfaltigkeit $M_n(k)$ eine Sphäre ist, ist sie — wenn orientiert — nach dem vorigen Paragraphen in bP_{2n+2}. Da die Signatur von $N_{2m-1}(k)$ nach Satz 15. 4 gleich der Signatur von $V' + V$ ist (V Seifertmatrix zu einer Seifertfläche von k) und da diese nach Satz 5. 6 gleich der Signatur $\sigma(k)$ des Knotens ist, folgt aus der Arbeit [12]:

Satz. *Wenn* $\det(k) = \pm 1$ *und* $m \geqq 2$ *ist, dann gilt*

$$(**) \qquad M_{2m-1}(k) = \pm \frac{1}{8}\sigma(k) g_m.$$

g_m *ist das Erzeugende für* bP_{4m} *von* [12]. (g_m *ist Rand einer parallelisierbaren* $(2m-1)$*-fach zusammenhängenden orientierbaren Mannigfaltigkeit mit Signatur* 8.) *Das Vorzeichen in* $(**)$ *hängt von der Orientierung von* $M_{2m-1}(k)$, g_m *und dem Außenraum von* k *ab.*

17. 2. Für gerades n ist $M_n(k)$ immer homöomorph zu S^{2n+1} (Folgerung 15. 10). Um welche Sphäre in bP_{2n+2} es sich handelt, hängt von der Robertello-Invarianten $c(k)$ ab:

Satz. *Für gerades* n *ist* $M_n(k)$ *die Standard-Sphäre, wenn* $c(k) = 0$, *die Kervaire-Sphäre, wenn* $c(k) = 1$ *ist.*

17. 3. Wir zeigen zunächst:

Lemma. *Geht der Knoten* k' *aus* k *dadurch hervor, daß man bei einer Seifertfläche* S *von* k *eine Unterkreuzung eines Bandes mit einem andern oder mit sich selbst durch eine Überkreuzung ersetzt, so sind* $M_{2m}(k)$ *und* $M_{2m}(k')$ *diffeomorph.*

Beweis. Wir denken uns den Übergang von k zu k' durch eine Homotopie folgendermaßen repräsentiert. Sei B eines der Bänder von S; es sei durch f, v, ε, j gegeben wie in § 13. Sei $H : S \times \boldsymbol{R} \to S^3$ eine differenzierbare Homotopie mit folgenden Eigenschaften:

1) Es existiere ein Intervall $[a, b] \subset (0, 1)$, so daß H_t für alle $t \in \boldsymbol{R}$ außerhalb $j((a, b) \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ die Identität ist.
2) $H_t = H_{-1}$ für alle $t \leqq -1$, $H_t = H_1$ für alle $t \geqq 1$.
3) H_t ist für $t \neq 0$ eine Einbettung, für $t = 0$ eine Immersion.
4) $H_0 \mid j((a, b) \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ ist eine Einbettung.
5) $\partial(H_1(S)) = k' \wedge H_{-1} = id_S$.

Zwischen $t = -1$ und $t = 1$ wird also die Seifertfläche „durch sich selbst hindurchgeschoben", wobei nur für $t = 0$ Selbstdurchdringungen zugelassen sind.

Wie in § 11 definiert man nun mit Hilfe von H und den Daten von B eine von t differenzierbar abhängige Funktion

$$g_t : S^{2m} \times D^{2m+1} \to S^{4m+1}.$$

Diese ist natürlich nur für solche t außerhalb einer Umgebung von 0, sagen wir außerhalb von $[-1/2, 1/2]$, eine Einbettung, für $t \in [-1/2, 1/2]$ eine Immersion.

Wir benötigen noch einige Funktionen:

s sei die Hilfsfunktion von § 11.

$\pi : S^{4m+1} \to \boldsymbol{R}^{4m+1}$ sei die Projektion auf die letzten $4m + 1$ Koordinaten.

$u : \boldsymbol{R}^{4m+1} \to \boldsymbol{R}^{4m+1}$ sei gegeben durch

$$u(x_1, \ldots, x_{2m}; y_0, \ldots, y_{2m}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2m}, -x_{2m-1}; 0, \ldots, 0).$$

η sei eine (noch näher zu bestimmende) kleine positive Zahl.

$\varphi : S^{2m} \times \boldsymbol{R} \to [0, \eta]$ sei eine differenzierbare Funktion mit

$\varphi(z, t) = \eta$, wenn $t \in [-1/2, 1/2]$ und $s(z_0) \in [a, b]$, und

$\varphi(z, t) = 0$, wenn $t \notin (-1, 1)$ oder $s(z_0) \notin (a/2, (1 + b)/2)$.

Dann definieren wir für kleines $\delta > 0$:

$$G: S^{2m} \times D_\delta^{2m+1} \times \mathbf{R} \to S^{4m+1}.$$

G soll erklärt sein durch

$$\pi \circ G(z, a, t) = \pi \circ g_t(z, a) + \varphi(z, t) \cdot u \circ \pi \circ g_t(z, a)$$

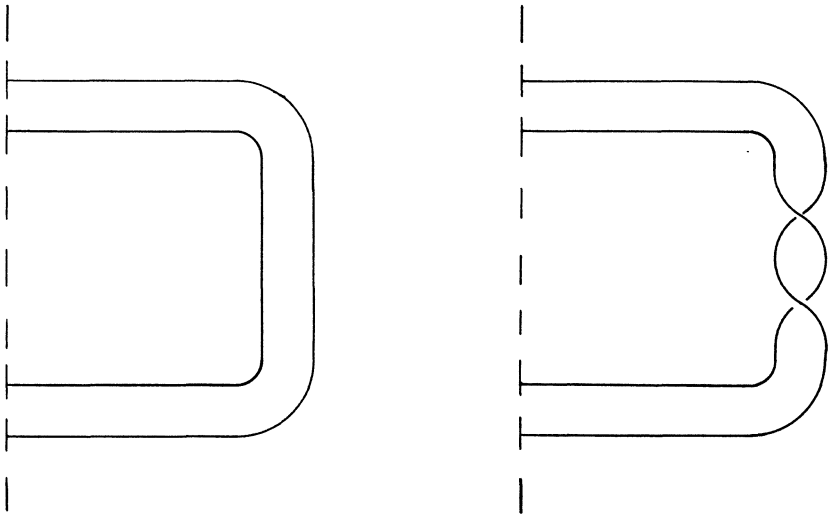
und dadurch, daß Bild G in der Hemisphäre $x_0 > 0$ liegt. Wählt man η, $\max \| \varphi' \|$ und δ klein genug, wird $\dfrac{\partial}{\partial(z, a)} G(z, a, t)$ nahe an $(\pi \circ g_t)'(z, a)$ sein (und zwar gleichmäßig in z, a und t), und da dies für kleine $\| a \|$ nicht-singulär ist, kann man δ so klein wählen, daß G_t für jedes t eine Einbettung ist. Denn $G(z, 0, t)$ ist für $\varphi(z, t) \neq 0$ in einem Stiefel-Orbit, weil die Bänder der Seifertfläche im Bereich $x_1 > 0$ liegen, und folglich ist G_t auf $S^{2m} \times \{0\}$ injektiv, also auch auf einer Umgebung.

Hiermit ist gezeigt, daß die Einbettungen $S^{2m} \times D^{2m+1} \to S^{4m+1}$, die durch $H_1(S)$ geliefert werden, diffeotop sind zu denen, die von S kommen. Das bedeutet aber Diffeomorphie von $M_{2m}(k')$ und $M_{2m}(k)$. q. e. d.

17. 4. *Beweis des Satzes* 17. 2. Ist V eine Seifertmatrix zu einer Seifertfläche von k, hat die Robertello-Invariante $c(k)$ den Wert

$$\sum_{i=1}^{r} v_{2i-1,\,2i-1} \cdot v_{2i,\,2i}$$

mod 2 reduziert ([16]). $2r$ ist hier die Zahl der Bänder der Seifertfläche. Nach 1. 3 ändert sich obige Summe mod 2 nicht, wenn man eine Unter- durch eine Überkreuzung ersetzt. Nach dem Lemma brauchen wir den Satz also nur noch für den Fall zu beweisen, in dem jedes Band entweder wie in I oder wie in II aussieht (siehe die Figur).



Fall I Fall II

Da $N_{2m}(k)$ $2m$-fach zusammenhängend ist (Sätze 15. 1, 15. 2 und Satz von Hurewicz), ist die Funktion

$$\psi_0: H_{2m+1}(N_{2m}(k)) \to \mathbf{Z}_2$$

von [12] definiert. ψ_0 ist genau dann null auf einer Homologieklasse, wenn eine diese Homologieklasse repräsentierende differenzierbar eingebettete Sphäre triviales Normalenbündel hat. Ist $S_1, \ldots, S_{2r}$ eine symplektische Basis für $H_{2m+1}(N_{2m}(k))$, d. h. gilt

$S_{2i-1} \circ S_{2i} = 1$ und $S_i \circ S_j = 0$ für alle andern Fälle mit $i < j$, so ist die Arf-Invariante von $N_{2m}(k)$ gleich

$$\sum_{i=1}^{r} \psi_0(S_{2i-1})\psi_0(S_{2i}).$$

Ist die Arf-Invariante null, ist $M_{2m}(k)$ die Standard-Sphäre, hat sie den Wert 1, ist $M_{2m}(k)$ die Kervaire-Sphäre ([12]). Für die in § 15 angegebene Basis (S_i) von $H_{2m+1}(N_{2m}(k))$, wo ja jedes S_i von einem an D^{4m+2} angesetzten Henkel kommt, ist das System $((-1)^{i-1}S_i)$ symplektisch (15. 6). Daher brauchen wir nur $\psi_0(S_i)$ für die Fälle I und II zu berechnen.

17. 5. Lemma. *In Fall* I *ist das Normalenbündel einer zu S_i homologen differenzierbar eingebetteten Sphäre trivial, in Fall* II *ist es isomorph zum Tangentialbündel der $(2m + 1)$-Sphäre.*

Folgerung. *Da S^3 und S^7 parallelisierbar sind, folgt aus dem Lemma für $m = 1, 3$, daß $M_{2m}(k)$ die Standard-Sphäre ist. In diesen Fällen ist aber die Kervaire-Sphäre zur Standard-Sphäre diffeomorph, deshalb also die Behauptung des Satzes* 17. 2 *richtig. Da S^{2m+1} für $m \neq 1, 3$ nicht parallelisierbar ist (zum Beispiel* [1]*), folgt in diesen Fällen aus dem Lemma*

$$\psi_0(S_i) = v_{ii} \pmod 2,$$

damit aber ebenfalls die Behauptung von Satz 17. 2.

17. 6. *Beweis des Lemmas.* Wir setzen wieder $n = 2m$. In Fall I dürfen wir annehmen, daß das Band ganz in der x_1-y_0-Ebene liegt. Für die Parametrisierung f der Seele des Bandes ist dann die n-Sphäre $T^n(\text{Bild } f)$ in dem von den Achsen $x_1, \ldots, x_n, y_0$ aufgespannten Unterraum enthalten. In diesem Unterraum berandet

$$T^n(\text{Bild } f) = g(S^n \times \{0\})$$

eine $(n + 1)$-Scheibe; $u : D^{n+1} \to S^{2n+1}$ sei eine Einbettung mit dieser Scheibe als Bild und mit $u \mid S^n = g \mid (S^n \times \{0\})$. Wir geben nun eine Einbettung $\tilde{u} : D^{n+1} \to D^{2n+2}$ an, so daß Bild $\tilde{u}$ vereinigt mit der Seele des angesetzten Henkels eine differenzierbar eingebettete $(n + 1)$-Sphäre ist (die dann das zugehörige Basiselement von $H_{n+1}(N_n(k))$ repräsentiert).

Sei wieder $\pi : S^{2n+1} \to \boldsymbol{R}^{2n+1}$ die Projektion auf die letzten $2n + 1$ Koordinaten. Wir erhalten eine Karte für eine Umgebung der Hemisphäre $\{(x, y) \in S^{2n+1} \mid x_0 > 0\}$ in D^{2n+2}, wenn wir den Punkt p mit $1/2 \leqq \| p \| \leqq 1$ auf den Punkt

$$(2 - 2 \| p \|, \pi(p/\| p \|)) \in \boldsymbol{R}^{2n+2}$$

abbilden. Bezüglich dieser Karte definieren wir $\tilde{u} : D^{n+1} \to D^{2n+2}$:

$$\tilde{u}(z) = \left(\varphi(1 - \| z \|), u\left(\frac{\varphi(\| z \|)}{\| z \|} \cdot z\right)\right).$$

Dabei sei $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\varphi \mid [0, 1/3] = id \text{ und } \varphi \mid [2/3, 1] = 1.$$

Wir beschreiben eine Trivialisierung des Normalenbündels von $\tilde{u}(D^{n+1})$ in D^{2n+2}. n linear unabhängige Schnitte sind durch die Achsenrichtungen $y_1, \ldots, y_n$ gegeben. Einen $(n + 1)$-ten Schnitt, von diesen linear unabhängig, finden wir senkrecht zu den ersten n Schnitten und zum Tangentialraum von $\tilde{u}(D^{n+1})$. Der $(n + 1)$-te Schnitt, beschränkt auf $\tilde{u}(S^n) = u(S^n)$, ist tangential zu S^{2n+1}; das gilt auch für die ersten n Schnitte. Diese Trivialisierung des Normalenbündels von $\tilde{u}(D^{n+1})$ ist also eine Trivialisierung des Nor-

malenbündels von $\tilde{u}(S^n)$ in S^{2n+1}, wenn sie auf $\tilde{u}(S^n)$ beschränkt wird. Da unser Band in der x_1-y_0-Ebene liegt, zeigt der Vergleich mit 11. 2, daß diese Trivialisierung bei geeigneter Wahl des Vorzeichens für den $(n+1)$-ten Schnitt homotop zu der dort definierten Trivialisierung des Normalenbündels von $T^n(\text{Bild } f) = u(S^n)$ ist. Letztere ist aber die Beschränkung einer Trivialisierung des Normalenbündels der Seele des Henkels auf den Rand der Seele; so wurde ja gerade der Henkel angesetzt. Deshalb ist das Normalenbündel von $\tilde{u}(D^{n+1}) \cup$ (Seele des Henkels) trivial.

In Fall II liegt nur die Seele des Bandes in der x_1-y_0-Ebene. Das Normalenbündel über der $(n+1)$-Sphäre ergibt sich durch Verkleben des (trivialen) Normalenbündels über $\tilde{u}(D^{n+1})$ mit dem (trivialen) Normalenbündel über der Seele des Henkels längs des Randes. Die beiden Trivialisierungen sind aber äquivariant. Daher gilt wie in 16. 2 für die Klebefunktion $d: S^n \to GL(n+1; \boldsymbol{R})$

$$(*) \qquad d(Az) = A\,d(z)\,A^{-1}$$

für alle $z \in S^n$ und alle $A \in O(n)$. Wie in § 16 gilt: d liegt durch seine Werte auf $W = \{(z_0, z_1, 0, \ldots, 0) \in S^n \mid z_1 \geqq 0\}$ fest; wenn $d \mid W$ homotop so abgeändert wird, daß während der Homotopie für jedes $z \in W$ $d(z)$ mit allen Elementen der Isotropiegruppe von z vertauschbar ist, so erhält man vermöge $(*)$ eine zu d homotope auf ganz S^n definierte Klebefunktion, die mit der $O(n)$-Aktion verträglich ist. Wir zeigen nun: 1) d läßt sich in diesem Sinne homotop abändern, so daß es auf W mit einer Klebefunktion d' des Tangentialbündels von S^{n+1} übereinstimmt; 2) d' erfüllt $(*)$. (Dann ist der Beweis fertig.)

1) $d'(z) = \alpha(z)\alpha(1, 0, \ldots, 0)$ nach [10]; dabei ist $\alpha(z)$ die Spiegelung des $\boldsymbol{R}^{n+1}$ an der zu z orthogonalen Hyperebene. Für $z \in W$ ist dann

$$d'(z) = \left[\begin{array}{cc|c} z_0^2 - z_1^2 & -2z_0z_1 & \\ 2z_0z_1 & z_0^2 - z_1^2 & 0 \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -\cos 2\gamma & -\sin 2\gamma & \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma & 0 \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right]$$

mit $z_0 = \sin\gamma$, $z_1 = \cos\gamma$, $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$. An Hand der Definitionsgleichung für $\bar{g}$ in 11. 2 überzeugt man sich, daß d auf W in d' deformierbar ist, indem nur die (2, 2)-Matrix in der linken oberen Ecke geändert wird.

2) Sei $A \in O(n)$, $z \in S^n$. Dann gilt $\alpha(Az)A = A\alpha(z)$. $\alpha(1, 0, \ldots, 0)$ ist mit A^{-1} vertauschbar. Daher

$$d'(Az) = \alpha(Az)\alpha(1, 0, \ldots, 0) = A\alpha(z)A^{-1}\alpha(1, 0, \ldots, 0) = A\,d'(z)A^{-1}. \qquad \text{q. e. d.}$$

Literaturverzeichnis

[1] *J. F. Adams*, Vector fields on spheres. Annals of Math. **75** (1962), 603—632.

[2] *A. Borel*, Seminar on transformation groups. Annals of Math. Studies 46, Princeton 1960.

[3] *R. H. Crowell*, The annihilator of a knot module. Proc. A. M. S. **15** (1964), 696—700.

[4] *R. H. Crowell*, The group G'/G'' of a knot group G. Duke Math. J. **30** (1963), 349—354.

[5] *R. H. Crowell* and *R. H. Fox*, Introduction to knot theory. Boston 1963.

[6] *S. Eilenberg* and *N. Steenrod*, Foundations of algebraic topology. Princeton 1952.

[7] *D. Erle*, Über eine mod-2-Invariante der Cobordismus-Klasse eines Knotens. Diplomarbeit. Bonn 1964.

[8] *F. Hirzebruch*, Singularities and exotic spheres. Séminaire N. Bourbaki. Novembre 1966. No. 314.

[9] *F. Hirzebruch* und *K. Jänich*, In Vorbereitung.

[10] *D. Husemoller*, Fibre bundles. New York 1966.

[11] *K. Jänich*, Differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand als Orbiträume differenzierbarer G-Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Topology **5** (1966), 301—320.

[12] *M. A. Kervaire* and *J. W. Milnor*, Groups of homotopy spheres I. Annals of Math. **77** (1963), 504—537.

[13] *J. Levine*, Polynomial invariants of knots of codimension two. Annals of Math. **84** (1966), 537—554.

[14] *J. W. Milnor*, Differentiable structures. Lecture notes. Princeton 1961.

[14a] *K. Murasugi*, On a certain numerical invariant of link types. Trans. A. M. S. **117** (1965), 387—422.

[15] *K. Reidemeister*, Knotentheorie. New York 1948.

[16] *R. Robertello*, An invariant of knot cobordism. Comm. Pure and Appl. Math. **18** (1965), 543—555.

[17] *H. Samelson*, On the Thom class of a submanifold. Mich. Math. J. **12** (1965), 257—261.

[18] *H. Schubert*, Knoten mit zwei Brücken. Math. Z. **65** (1956), 133—170.

[19] *H. Seifert* und *W. Threlfall*, Lehrbuch der Topologie. New York 1945.

[20] *S. Smale*, Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four. Annals of Math. **74** (1961), 391—406.

[21] *N. Steenrod*, The topology of fibre bundles. Princeton 1951.

[22] *H. F. Trotter*, Homology of group systems with applications to knot theory. Annals of Math. **76** (1962), 464—498.

[23] *H. Zassenhaus*, The theory of groups. Göttingen 1958.

Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen 16. April 1968