Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie.

Von

F. Frankl und L. Pontrjagin in Moskau.

Im folgenden wird bewiesen, daß *jedes* (und zwar auch jedes *verknotete*) einfach geschlossene Polygon des R^3 Rand einer singularitätenfreien orientierbaren Mannigfaltigkeit ist. Z. B. ist die Kleeblattschlinge Rand einer Fläche vom Geschlecht 1.

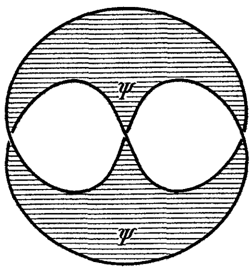
Mit Hilfe dieses Satzes wird dann gezeigt, daß für kompakte Teile des R^3 der Alexandroffsche Dimensionsbegriff[1]) mit dem Brouwer-Menger-Urysohnschen übereinstimmt[2]).

Wir beweisen zunächst den Satz über die Polygone. Sei also p ein einfach geschlossenes Polygon des R^3, so projizieren wir es von einem außerhalb gelegenen Punkt π, wodurch ein Kegel Φ entsteht. Den Punkt π wählen wir in allgemeiner Lage zu den Kanten und Eckpunkten des Polygons. Dann treten höchstens *Doppel*erzeugende auf. Wir triangulieren den Kegel so, daß jede Doppelerzeugende (d. h. die Strecke zwischen der Spitze und dem ersten Durchschnittspunkt mit dem Knoten) als Kante der Triangulierung auftritt. Die Dreiecke seien kohärent mit einem bestimmten Umlaufssinn des Knotens orientiert. Wir wollen nun die Fläche an den Doppelerzeugenden und an der Spitze so abändern, daß sie zu einer singularitätenfreien zweiseitigen Mannigfaltigkeit wird. Längs einer Doppelerzeugenden a stoßen genau vier Dreiecke zusammen. Wir numerieren sie entsprechend ihrer zyklischen Aufeinanderfolge im Raum mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ und zwar so, daß a in Δ_1 und Δ_2 entgegengesetzt orientiert erscheint (und natürlich ebenso in Δ_3 und Δ_4). Δ_1 und Δ_2 schließen den Winkelraum A, Δ_3 und Δ_4 den Winkelraum B ein. Wir verbinden nun den Mittelpunkt α

1) Alexandroff, „Zum allgemeinen Dimensionsproblem", Göttinger Nachrichten 6. Juli 1928, § 3, sowie „Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen", Annals of Math. (2) **30**, S. 101—187, insbes. S. 183 u. f.

2) Der Satz über die Polygone und die beiden darauf folgenden Lemmata wurden von beiden Verfassern unabhängig voneinander gefunden. Im folgenden wird die Franklsche Form des Beweises wiedergegeben. Der dimensionstheoretische Satz stammt von Pontrjagin.

von a mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt von Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dadurch zerfällt Δ_i in zwei Dreiecke Δ_i' und Δ_i''. Wir nehmen jetzt in A in der Nähe von α einen Punkt α_A und ebenso in B einen Punkt α_B an und ersetzen die Dreiecke Δ_1', Δ_2', Δ_1'', Δ_2'' durch Dreiecke $\bar{\Delta}_1$, $\bar{\Delta}_2$, $\bar{\bar{\Delta}}_1$, $\bar{\bar{\Delta}}_2$, welche statt α den Eckpunkt α_A haben, und analog die Dreiecke Δ_3', Δ_4', Δ_3'', Δ_4'' durch Dreiecke $\bar{\Delta}_3$, $\bar{\Delta}_4$, $\bar{\bar{\Delta}}_3$, $\bar{\bar{\Delta}}_4$. Wenn α_A und α_B genügend nahe an α gewählt sind und wir diesen Prozeß an allen Doppelerzeugenden ausführen, so entsteht aus Φ eine orientierte Fläche Φ', in der jede Kante der Triangulierung höchstens zweimal vorkommt. Nur im Punkte π bleibt noch eine Singularität, welche folgendermaßen zu beheben ist: Wir legen um π eine kleine Kugel K. Diese schneidet Φ' in endlich vielen fremden einfach geschlossenen Linien, in welche man im Inneren von K fremde, einfach zusammenhängende Flächen einspannen kann. Ersetzen wir durch diese Flächen den im Inneren von K gelegenen Teil von Φ', so erhalten wir eine Fläche Ψ, welche alle Forderungen erfüllt.



Die nebenstehende Figur stellt eine nach der obigen Methode für die Kleeblattschlinge konstruierte Fläche dar.

Wir beweisen nun folgenden Hilfssatz: Sei M eine polyedrale orientierbare berandete zweidimensionale Mannigfaltigkeit im R^3 und r ihr Rand, dann gibt es beliebig viele ebensolche Mannigfaltigkeiten $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots, \mathsf{M}_n$ mit dem Rand r, welche aber sonst weder untereinander noch mit M Punkte gemein haben.

Wir zeigen zunächst, daß es in beliebiger Nähe zu M eine solche Mannigfaltigkeit M_1 mit dem Rand r gibt, welche sonst mit M keinen Punkt gemein hat. Wir zerlegen zu diesem Zwecke den R^3 simplizial so, daß M aus Dreiecken dieser Triangulation besteht und jedes Tetraeder höchstens *ein* (null-, ein- oder zweidimensionales) Randelement mit M gemein hat. Wir betrachten alle Tetraeder, welche mit M ein Randelement gemein haben, das nicht auf r liegt, und unter diesen alle, die auf einer vorgegebenen Seite von M liegen. Sei T ein solches Tetraeder und x das mit M gemeinsame Randelement; y sei das x gegenüberliegende Randelement von T. Wir ziehen alle Verbindungsstrecken von Punkten von x mit Punkten von y und betrachten die Menge ihrer Mittelpunkte; sie ist ein zweidimensionales Element. Alle so erhaltenen Elemente bilden zusammen eine Mannigfaltigkeit $\bar{\mathsf{M}}$, die M nicht schneidet[3]). Ihr Rand sei $\bar{r}$; er

[3]) Diese Methode der Approximation durch Mannigfaltigkeiten stammt von Alexandroff, Math. Annalen 98 (1928), S. 623, und Lefschetz, Ann. of Math. (2) 29 (1928), S. 241.

berandet zusammen mit r einen Komplex N, der aus einer Anzahl von zylindrischen Streifen besteht (jeder Randkurve von M entspricht einer). $\mathsf{M}_1 = \bar{\mathsf{M}} + \mathsf{N}$ hat dann die geforderte Eigenschaft. — Durch Wiederholung dieser Konstruktion gelangen wir zu beliebig vielen Flächen $\mathsf{M}_2, \mathsf{M}_3, \ldots, \mathsf{M}_n$.

Daraus folgern wir einen weiteren Hilfssatz, nämlich:

Sei Z ein Zylinder (d. h. die geschlossene Fläche, die aus dem Mantel und den beiden Basisflächen besteht). α_1 und α_2 seien die Endpunkte seiner Achse. Diese Endpunkte seien auf Z durch mehrere Linien $l_1, l_2, \ldots, l_n$ verbunden, wobei $l_i = r_{i1} + e_i + r_{i2}$, e_i eine Erzeugende des Zylinders und r_{1i} und r_{2i} Radien der beiden Basiskreise sind. Die Numerierung soll der zyklischen Aufeinanderfolge der Radien in den Basisflächen entsprechen. Außerdem seien α_1 und α_2 im Inneren von Z durch ein reguläres Polygon p verbunden. Dann gibt es im Inneren von Z zweiseitige Mannigfaltigkeiten M_i mit dem Rand $p + l_i$, welche bis auf Punkte von p zueinander fremd sind.

B e w e i s. Wir konstruieren zunächst nach den bisherigen Sätzen Flächen $\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots, \mathsf{N}_n$ mit dem Rand $p + l_1$, welche sich sonst nicht schneiden; sie seien um die Achse in demselben Drehungssinn angeordnet wie die l_i; wie man leicht erkennt, kann man sie so wählen, daß sie im Inneren von Z liegen. Wir betrachten nun einen im Inneren von Z liegenden (etwa im bezug auf den Mittelpunkt homothetischen) etwas kleineren Zylinder Z'. Wir setzen $l_i' = \mathsf{N}_i \cdot \mathsf{Z}'$ und bezeichnen den im Inneren von Z' liegenden Teil von N_i mit N_i'. Aus Z' ragen zwei Strecken p_1 und p_2 von p heraus. In die geschlossenen Kurven $p_1 + l_i + p_2 + l_i'$ kann man nun paarweise fremde, zwischen Z und Z' gelegene orientierbare Flächen O_i einspannen[4]). Die Flächen $\mathsf{M}_i = \mathsf{N}_i' + \mathsf{O}_i$ erfüllen dann unsere Forderungen.

Wir gehen nun zum Beweis des dimensionstheoretischen Satzes über. Zu diesem Zwecke stützen wir uns auf Alexandroffs „Rechtfertigungssatz"[5]), dessen für uns in Frage kommender Spezialfall folgendermaßen lautet: Eine in sich kompakte Teilmenge F des R^3 ist dann und nur dann im

---

[4]) Dies zeigt man etwa so: Man kann annehmen, daß p_1 und p_2 in der Achse liegen, daß die Linien l_i' ebenfalls aus Radien und Erzeugenden bestehen und daß das zwischen Z' und Z gelegene Stück von $\mathsf{M}_1 = \mathsf{N}_1$ in einer von der Achse begrenzten Halbebene liegt Sei E_i die von der Achse begrenzte Halbebene, welche l_i trägt, und E_i' die von der Achse begrenzte Halbebene, welche l_i' trägt. Wir konstruieren nun ein System von zu Z homothetischen Zylindern $\mathsf{Z}_1 = \mathsf{Z}, \mathsf{Z}_2, \ldots, \mathsf{Z}_n = \mathsf{Z}'$, so daß Z_2 im Innern von Z_1, Z_3 im Innern von Z_2 liegt usw. Sei nun O_i' der Teil von E_i, der zwischen Z_i und Z liegt, O_i'' der Teil von E_i', der zwischen Z' und Z_i liegt, und O_i''' der Teil von Z_i, der im Winkelraum liegt, den man beschreibt, wenn man E_i' im angenommenen Drehungssinn um die Achse in die Lage von E_i dreht (wobei wir von der leicht realisierbaren Annahme ausgehen, daß die Winkel $\mathsf{E}_1 \mathsf{E}_i'$ sehr klein sind). Dann können wir $\mathsf{O}_i = \mathsf{O}_i' + \mathsf{O}_i'' + \mathsf{O}_i'''$ setzen.

[5]) Alexandroff, Gött. Nachr., § 5; Annals, S. 184.

Sinne von Alexandroff höchstens eindimensional, wenn sie kein Gebiet des R^3 zerlegt. Da die Alexandroffsche Dimension niemals größer ist als die Brouwer-Menger-Urysohnsche[6]), müssen wir nur folgendes zeigen: Wenn F kein Gebiet des R^3 zerlegt, so ist F im Sinne von Brouwer, Menger und Urysohn höchstens eindimensional[7]).

Zum Beweise zerlegen wir den R^3 simplizial so, daß kein Eckpunkt dieser Triangulation in F enthalten ist. Da F in R^3 nirgendsdicht sein muß, gibt es beliebig feine Zerlegungen dieser Art. Sei k eine Kante dieser Zerlegung und S die Vereinigung aller Tetraeder mit der Kante k. Wir konstruieren nun einen Zylinder Z, dessen Achse Teil von k ist, der im Inneren von S liegt und den Durchschnitt $k \cdot F$ im Inneren enthält; dies machen wir für jede Kante und zwar so, daß alle so entstandenen Zylinder zueinander fremd werden. Nach dem Rechtfertigungssatz ist es nun möglich, die Endpunkte der Achse von Z im Inneren von Z durch ein reguläres Polygon p zu verbinden, welches zu F fremd ist. Seien nun $T_1, T_2, \ldots, T_n$ die Tetraeder mit der Kante k, entsprechend ihrer zyklischen Anordnung im Raume numeriert, und Δ_i die Dreiecke mit der Seite k (wobei $\Delta_1 = T_1 \cdot T_2$ usw.). Setzen wir $l_i = Z \cdot \Delta_i$, so können wir auf Z und die Linien $p + l_i$ das soeben bewiesene Lemma anwenden. Wir bekommen Flächen M_i, welche das Innere von Z, $J(Z)$ (in analoger Weise wie die Δ_i) in n Teile teilen, wobei an Stelle von $J(Z) \cdot T_i$ etwa M_i tritt. Wir ändern nun T_i so ab, daß $J(Z) \cdot T_i$ durch M_i ersetzt wird, und führen diesen Prozeß für alle Kanten und Tetraeder durch. An Stelle des Tetraeders T tritt dann eine dreidimensionale berandete Mannigfaltigkeit U. Stellen wir nun F als Summe aller $F \cdot U$ dar, so haben höchstens zwei dieser Teile Punkte gemein (nämlich, wenn die entsprechenden U eine Fläche gemein haben). Da diese Teile, indem man von einer genügend feinen Zerlegung des Raumes ausgeht, beliebig klein gemacht werden können, ist F nach dem Pflastersatz der Dimensionstheorie höchstens eindimensional im Sinne von Brouwer, Menger und Urysohn.

Zusatz bei der Korrektur (7. 10. 1929). Daß in dem obigen Beweis die Kurven $p + l_i$ im allgemeinen nicht unverknotet angenommen werden können, zeigt folgendes Beispiel, welches Alexandroff und Grużewski (Warschau) unabhängig voneinander gefunden haben.

Man geht aus von dem Würfel $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$ und bezeichnet ihn mit M_0. Diesen teilt man durch zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen in $(2n-1)^3$ Teilwürfel, wobei n genügend groß

---

[6]) Annals, S. 183; Gött. Nachr., § 4.

[7]) Die Frage nach der Gültigkeit dieses Satzes wurde bereits von Urysohn, Fund. Math. 7, aufgeworfen.

gewählt sein muß. Nun läßt man aus M_0 einen verknoteten Kanal weg, der das mittlere Teilquadrat der oberen Basisfläche verbindet und aus Würfeln der Unterteilung besteht, so daß eine abgeschlossene Menge M_1 übrigbleibt (welche im wesentlichen mit dem abgeschlossenen Komplement eines verknoteten Torus homöomorph ist). In jedem Teilwürfel von M_1 wiederholen wir die Konstruktion, mit der Abänderung, daß jetzt der Kanal von links nach rechts geführt wird. Es entsteht eine Menge M_2. In jedem ihrer Teilwürfel wiederholen wir abermals die Konstruktion, nur daß jetzt die Kanäle von vorne nach hinten geführt werden. Dadurch entsteht eine Menge M_3, deren Teilwürfel wir wieder von oben nach unten durchbohren usw. Die Menge $M = \underset{i=0}{\overset{\infty}{D}} M_i$ hat die geforderte Eigenschaft. Um zu beweisen, daß sie im klassischen Sinne eindimensional ist, muß man den oben bewiesenen Knotensatz wesentlich verwenden.

(Eingegangen am 8. 4. 1929.)