Annals of Mathematics
Vol. 38, No. 4, October, 1937

ZUM HOPFSCHEN UMKEHRHOMOMORPHISMUS

Von Hans Freudenthal

(Received January 11, 1937)

Eine Abbildung einer Mannigfaltigkeit auf eine andere induziert einen Homomorphismus zwar der Bettischen Gruppen der einen in die der andern, nicht aber im Allgemeinen auch des einen Schnittringes in den andern. Vor längerer Zeit hat aber H. Hopf [1] mit der Lefschetzschen Produktmethode "Umkehrungen" von Mannigfaltigkeitsabbildungen angegeben; eine solche Umkehrung besitzt unter anderen wichtigen Eigenschaften die, ein Schnittringhomomorphismus zu sein; aus diesen Eigenschaften hat H. Hopf eine Reihe bedeutsamer Folgerungen gezogen. Später hat H. Hopf [2] zur Untersuchung der Abbildungen der S_3 auf die S_2 wiederum derartige Umkehrungen definiert (für Abbildungen verschieden-dimensionaler Mannigfaltigkeiten). Auch Verf. [4] hat sich mit derartigen Umkehrungen beschäftigt, und zwar im Außenraum abgeschlossener Teilmengen von Sphären.

Hier soll gezeigt werden,[1] wie sich diese Umkehrhomomorphismen sehr einfach im Rahmen der neueren Homologietheorie ergeben, übrigens wird sich ihr Gültigkeitsbereich einigermaßen erweitern. Alle diese "Umkehrungen" kommen übrigens auf dasselbe hinaus; die Art, wie sie hier eingeführt werden, erinnert wohl sehr an die Methode von H. Hopf [2] und Verf. [4], ist aber vielleicht noch etwas einfacher. Die Haupteigenschaft der "Umkehrungen" ergibt sich aber sicher viel einfacher als bisher.

Eine frühere Arbeit des Verfassers[1a] wird als bekannt vorausgesetzt und mit AG zitiert.

1. Wir übernehmen die Bezeichungen von AG. Insbesondere sei also $\mathfrak{d}$ der Dualitätsoperator, der (in d-dimensionalen Homomlogiemannigfaltigkeiten) B^ρ topologisch isomorph auf $B_{d-\rho}$ abbildet. Wir nehmen immer eine bestimmte Eckenordnung an und können dann praktischer mit $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ arbeiten. Wir hatten (AG(2)):

$$\mathfrak{o}\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_\rho] = \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_d)[a_\rho \cdots a_d]$$

(in allen derartigen Formeln seien nur *normale* Simplexe zugelassen).

---

[1] Zusatz bei der Korrektur: Unsere Ergebnisse überschneiden sich mit denen von H. Whitney in einer inzwischen erschienenen Note: On products in a complex, Proc. Nat. Acad. USA *23* (1937), 285–291.

[1a] *Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie*, Ann. of Math. *36* (1937), 647–655.

Da für die Bettischen Gruppen $\mathfrak{d}$ ein Isomorphismus ist, so ist auch das durch

$$(z^{d-\rho}\mathfrak{d})z^\rho = z^{d-\rho}(\mathfrak{d}z^\rho)$$ [2]

definierte hintere $\mathfrak{d}$ ein Isomorphismus und zwar, wie sich zeigen wird, im Wesentlichen derselbe. Dagegen wird natürlich keineswegs auch für die Gruppe der Komplexe vorderes und hinteres $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ identisch sein. Man hat vielmehr

$$[b_\rho \cdots b_d](\mathfrak{o}\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_\rho]) = \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho b_{\rho+1} \cdots b_d),$$

falls diese Ecken ein Simplex erzeugen und $a_\rho = b_\rho$ ist, sonst 0; die rechte Seite ist aber auch gleich

$$\sum \pi(b_0 \cdots b_d)[b_0 \cdots b_\rho][a_0 \cdots a_\rho]$$

(bei festem $[b_\rho \cdots b_d]$ zu summieren) bzw. 0. Also

$$[b_\rho \cdots b_d]\,\mathfrak{o}\mathfrak{d} = \sum \pi(b_0 \cdots b_d)[b_0 \cdots b_\rho].$$

Hinteres $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ liefert also für die Komplexe dasselbe wie vorderes $\mathfrak{o}'\mathfrak{d}$ (wenn $\mathfrak{o}'$ die simpliziale Verschiebung ist, die auf der umgekehrten Anordnung der Ecken beruht); für die Bettischen Gruppen unterscheiden vorderes und hinteres $\mathfrak{d}$ sich also in der Tat nicht:

(D) $$\mathfrak{d}z^\rho \sim z^\rho\mathfrak{d}$$

2. Wir hatten weiter das *Alexandersche Produkt* (für normale obere Simplexe) $[a_0 \cdots a_\rho]\cdot[a_\rho \cdots a_{\rho+\sigma}] = [a_0 \cdots a_\rho \cdots a_{\rho+\sigma}]$, sonst 0, ferner in d-dimensionalen Homologiemannigfaltigkeiten den *Schnitt* (AG(4)) $\mathfrak{d}t^\rho \times t_\sigma$ oder praktischer $\mathfrak{o}(\mathfrak{d}t^\rho \times t_\sigma)$:

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_\rho] \times [a_0 \cdots a_\sigma]) = [a_\rho \cdots a_\sigma];$$ [3]

schließlich im Außenraum $S\backslash A$ eines Teilpolytops A der d-dimensionalen Homologiesphäre das *Gordonsche Produkt*

$$z_\rho \otimes z_\sigma = \mathfrak{r}(k_{\rho+1} \times k_{\sigma+1}) \text{ mit } z_\rho = \mathfrak{r}k_{\rho+1},\ z_\sigma = \mathfrak{r}k_{\sigma+1} \text{ (in } S).$$

Wir hatten den Isomorphismus $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}\mathfrak{d}$ oder, praktischer,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}\mathfrak{o}\mathfrak{d}$$

von $B^\rho(A)$ auf $B_{d-\rho-1}(S\backslash A)$ und (AG (5)) für $z^\rho, z^\sigma \subset A$:

$$\mathfrak{a}(z^\rho\cdot z^\sigma) \sim \mathfrak{a}z^\sigma \otimes \mathfrak{a}z^\rho \text{ in } S\backslash A.$$

---

[2] Die hier gebrauchte Produktbildung zwischen oberen und unteren Komplexen usw. gleicher Dimension (siehe AG 1) setzt immer duale Koeffizientenbereiche voraus. Man verwechsle sie nicht mit der Alexanderschen (AG 10), die immer mit einem Multiplikationspunkt geschrieben wird (der *hier* fehlt).

[3] Wir haben leider in AG bei der Schnittdefinition beide Faktoren vertauscht, was nur einen Vorzeichenunterschied gegen die übliche Definition ergibt, aber sonst kaum etwas ausmacht. Trotz der kleinen Unsymmetrien, die entstehen, behalten wir die Definition bei. Die Formeln (U′), (A′), (V′) usw. werden nach der Vertauschungsformel für den Schnitt von dieser Abweirhung übrigens nicht beeinflußt.

Endlich hat man nach E. Čech [1] (in beliebigen d-dimensionalen Homologiemannigfaltigkeiten) die Isomorphie

$$\mathfrak{d}(z^\rho \cdot z^\sigma) \sim \mathfrak{d}z^\sigma \times \mathfrak{d}z^\rho,$$

die sich bei uns so ergibt: Es genügt,

$$\mathfrak{o}\mathfrak{d}(z^\rho \cdot z^\sigma) \sim \mathfrak{o}(\mathfrak{d}z^\sigma \times \mathfrak{o}\mathfrak{d}z^\rho)$$

zu beweisen. Das ergibt sich wiederum aus

$$\mathfrak{o}\mathfrak{d}(t^\rho \cdot t^\sigma) = \mathfrak{o}(\mathfrak{d}t^\sigma \times \mathfrak{o}\mathfrak{d}t^\rho),$$

was wir folgendermaßen verifizieren: Sei $t^\rho = [a_0 \cdots a_\rho]$; dann ist die linke Seite gleich $\sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_{\rho+\sigma} \cdots a_d)[a_{\rho+\sigma} \cdots a_d]$, falls $t^\sigma = [a_\rho \cdots a_{\rho+\sigma}]$ ist, sonst 0. Rechts hat man für solche Wahl von t^ρ und t^σ: $\mathfrak{o}\mathfrak{d}t^\rho = \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_d)[a_\rho \cdots a_d]$. Beide Seiten stimmen also überein.

Damit hat sich die Isomorphie beider Produktbildungen ergeben.

3. Wir betrachten jetzt eine stetige Abbildung $\mathfrak{f}$ einer μ-dimensionalen Homologiemannigfaltigkeit M in eine ν-dimensionale, N. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, daß $\mathfrak{f}$ simplizial ist und die Reihenfolge der Ecken nicht stört (also $\mathfrak{o}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{o}$).

Bei den Operationen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{d}$ müssen wir im Folgenden unterscheiden, ob sie in M oder in N genommen sind; da im Allgemeinen keine Mißverständnisse möglich sind, wollen wir diesen Unterschied nicht explizit ausdrücken; nur wo es unbedingt nötig ist, hängen wir den Index M oder N an.

Gemäß AG 2 induziert $\mathfrak{f}$ Homomorphismen

$$\mathfrak{f}K_\rho(M) \subset K_\rho(N),\ \mathfrak{f}B_\rho(M) \subset B_\rho(N),$$
$$K^\rho(N)\mathfrak{f} \subset K^\rho(M),\ B^\rho(N)\mathfrak{f} \subset B^\rho(M).$$

Bei Homologiemannigfaltigkeiten ist aber auch

$$\mathfrak{f}^* = \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{f}\mathfrak{d}$$

ein Homomorphismus

$$\mathfrak{f}^*B^\rho(M) \subset B^{\rho-\mu+\nu}(N),$$
$$B_\rho(N)\mathfrak{f}^* \subset B_{\rho+\mu-\nu}(M).$$

$\mathfrak{f}^*$ wirkt also gerade in umgekehrter Richtung wie $\mathfrak{f}$.

Man hat die Relationen

$$\text{(R)} \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{d}\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}\mathfrak{d}, \quad \text{oder praktischer} \\ &\mathfrak{o}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}\mathfrak{o}\mathfrak{d}, \end{aligned}$$

was auch für Komplexe sinnvoll ist.

Es ist für die Anwendungen sehr wichtig, daß $\mathfrak{f}^*$ nicht einfach abstrakt definiert ist, sondern daß es etwa zu einem unteren Zyklus in N ganz konkret ein $\mathfrak{f}^*$-Bild liefert. In Worten ausgedrückt lautet die Konstruktion z. B. so:

Man nehme den Zyklus als Linearform von Dualzellen an; von einer Dualzelle erhält man das $\mathfrak{f}^*$ -Bild, indem man vom zugehörigen Simplex der ursprünglichen Teilung die (gleichdimensionalen) Urbilder sucht und deren Dualzellen addiert.

Das hintere $\mathfrak{f}^*$ ist damit für untere Komplexe aus Dualzellen ($\mathfrak{d}k^{\nu-\rho}$) erklärt und bildet $\mathfrak{d}K^{\nu-\rho}(N)$ homomorph in $\mathfrak{d}K^{\nu-\rho}(M)$ ab. Nach AG (1) geht dabei der Rand eines Komplexes in den Rand des Bildes über, also ein Zyklus in einen Zyklus, usw., so daß diese konkrete Definition (unter Berücksichtigung von (D)) dasselbe liefert wie die obige abstrakte (für die Elemente der Bettischen Gruppen).

Man bemerkt, daß die zu $\mathfrak{f}\mathfrak{f}^*z_\rho$ gehörige Punktmenge in der zu z_ρ gehörigen Punktmenge enthalten ist oder wenigstens in denselben ν-dimensionalen Simplexen wie die von z_ρ liegt. Das ist für Anwendungen (H. Hopf [2]) sehr wichtig und würde bereits die Auffassung von $\mathfrak{f}^*$ als "Umkehrung" von $\mathfrak{f}$ rechtfertigen.

Es gilt aber noch mehr: Wir werden beweisen:

(U) $$\mathfrak{f}^*(z^\rho\mathfrak{f}) \sim \gamma z^\rho \text{ für } \mu \geqq \nu,$$

(γ = Abbildungsgrad von $\mathfrak{f}$).

Weiter wissen wir (AG, 10), daß das hintere $\mathfrak{f}$ ein Ringhomomorphismus ist,

(A) $$(z^\rho\cdot z^\sigma)\mathfrak{f} \sim z^\rho\mathfrak{f}\cdot z^\sigma\mathfrak{f};$$

etwas Derartiges können wir von seiner "Umkehrung", dem vorderen $\mathfrak{f}^*$, natürlich nicht erwarten, wohl aber erhält man, wenn man in (U) z^ρ durch $z^\rho\cdot z^\sigma$ ersetzt und (A) berücksichtigt,

$$\mathfrak{f}^*(z^\rho\mathfrak{f}\cdot z^\sigma\mathfrak{f}) \sim z^\rho\cdot\gamma z^\sigma \sim z^\rho\cdot\mathfrak{f}^*(z^\sigma\mathfrak{f}).$$

Wir werden aber viel mehr beweisen: ganz allgemein (für beliebige μ, ν) gilt

(V) $$\mathfrak{f}^*(z^\rho\cdot z^\sigma\mathfrak{f}) \sim \mathfrak{f}^*z^\rho\cdot z^\sigma$$

(hier ist natürlich $z^\rho \subset M$, $z^\sigma \subset N$).

(U) ist (wenigstens für $\mu = \nu$) ein Spezialfall von (V), den man erhält, wenn man in (V) für z^ρ den 0-dimensionalen oberen Grundzyklus von M (die Summe der Ecken), also für $\mathfrak{f}^*z^\rho$ den γ-fachen 0-dimensionalen Grundzyklus von N einsetzt.

Nehmen wir vorläufig (U) und (V) als bewiesen an! Ersetzen wir in (U), (A), (V) bzw. z^ρ und z^σ durch $z_{\rho'}\mathfrak{d}$ und $z_{\sigma'}\mathfrak{d}$ (was wir bis auf Homologien dürfen), berücksichtigen wir (R), (D) und die Beziehung, die nach 2 zwischen Produkt- und Schnittbildung besteht, und schreiben wir zum Schluß wieder ρ und σ für ρ' und σ', so erhalten wir

(U′) $$\mathfrak{f}(z_\rho\mathfrak{f}^*) \sim \gamma z_\rho \quad \text{für } \mu \geqq \nu,$$

(A′) $$(z_\rho \times z_\sigma)\mathfrak{f}^* \sim z_\rho\mathfrak{f}^* \times z_\sigma\mathfrak{f}^*,$$

(V′) $$\mathfrak{f}(z_\rho\mathfrak{f}^* \times z_\sigma) \sim z_\rho \times \mathfrak{f}z_\sigma.$$

Umgekehrt kann man natürlich aus (U′), (A′), (V′) wieder (U), (A), (V) ableiten.

(U′), (A′), (V′) sind dieselben Formeln, die bei der Hopfschen Umkehrung [1] auftreten. Man darf daher vermuten, daß das hintere $\mathfrak{f}^*$ selbst mit der Hopfschen Umkehrung übereinstimmt; in 7 werden wir das auch beweisen. Dann haben wir für die Hopfsche Umkehrung eine neue (einfachere) Definition gegeben und ihre Haupteigenschaften von neuem (einfacher) abgeleitet.

Seien nun die Mannigfaltigkeiten M und N Homologiesphären R und S, und sei $\mathfrak{f}R \subset S$, $\mathfrak{f}A \subset B$ (A und B abgeschlossene Teilmengen von R und S). Eine einfache Überlegung wird aus (U′), (A′), (V′) die Formeln (U″), (A″), (V″) ergeben:

$$\text{(U'')} \qquad \mathfrak{f}(z_\rho \mathfrak{f}^*) \sim \gamma z_\rho \quad \text{in } S \backslash B \text{ für } \mu \geqq \nu,$$

$$\text{(A'')} \qquad (z_\rho \otimes z_\sigma)\mathfrak{f}^* \sim z_\rho \mathfrak{f}^* \otimes z_\sigma \mathfrak{f}^* \quad \text{in } R \backslash A,$$

$$\text{(V'')} \qquad \mathfrak{f}(z_\rho \mathfrak{f}^* \otimes z_\sigma) \sim z_\rho \otimes \mathfrak{f} z_\sigma \quad \text{in } S \backslash B.$$

4. Wir beweisen nun (U′) und (V′) (statt (U) und (V)). Wir nehmen in (U′) $z^{\nu-\rho}\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ statt z_ρ und haben dann (wegen (R))

$$\mathfrak{f}(z^{\nu-\rho}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\mathfrak{d}) \sim \gamma z^{\nu-\rho}\mathfrak{o}\mathfrak{d} \text{ für } \mu \geqq \nu$$

zu beweisen. Wir werden sogar

$$\mathfrak{f}(z^{\nu-\rho}\mathfrak{f}\mathfrak{o}\mathfrak{d}) = \gamma z^{\nu-\rho}\mathfrak{o}\mathfrak{d}$$

beweisen,[4] und das ergibt sich aus

$$\mathfrak{f}(t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}\mathfrak{o}\mathfrak{d}) = \gamma t^{\nu-\rho}\mathfrak{o}\mathfrak{d},$$

was wir jetzt verifizieren: Sei $t^{\nu-\rho} = [b_\rho \cdots b_\nu]$. Dann ist $t^{\nu-\rho}\mathfrak{f} = \sum [a_\rho \cdots a_\nu]$ mit $b_\rho = \mathfrak{f}a_\rho, \cdots, b_\nu = \mathfrak{f}a_\nu$, also $t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}\mathfrak{o}\mathfrak{d} = \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_\nu)\,[a_0 \cdots a_\rho]$ erstreckt über alle $[a_0 \cdots a_\rho \cdots a_\nu]$ mit $b_\rho = \mathfrak{f}a_\rho, \cdots, b_\nu = \mathfrak{f}a_\nu$. Links haben wir demnach

$$\mathfrak{f}(t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}\mathfrak{o}\mathfrak{d}) = \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_\nu)[b_0 \cdots b_\rho] = \sum [b_0 \cdots b_\rho] \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_\nu),$$

wo $b_0 = \mathfrak{f}a_0, \cdots, b_\rho = \mathfrak{f}a_\rho$ gesetzt ist und die innere Summe sich auf festes $[b_0 \cdots b_\rho]$ bezieht, während die äußere über alle $[b_0 \cdots b_\rho]$ zu erstrecken ist, die mit $[b_\rho \cdots b_\nu]$ ein ν-dimensionales Simplex bilden. Die innere Summe ist aber gleich $\gamma\pi(b_0 \cdots b_\rho \cdots b_\nu)$, also stimmen linke und rechte Seite tatsächlich überein.

Führen wir in (V′) die Substitution $z_\rho = z^{\nu-\rho}\mathfrak{d}$ aus, so haben wir nur (unter Berücksichtigung von (D))

$$\mathfrak{f}\mathfrak{o}(\mathfrak{d}(t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}) \times t_\sigma) = \mathfrak{o}(\mathfrak{d}t^{\nu-\rho} \times \mathfrak{f}t_\sigma)$$

zu beweisen. Nehmen wir $t_\sigma = [a_0 \cdots a_\sigma]$, $\mathfrak{f}t_\sigma = [b_0 \cdots b_\sigma]$, so verschwindet gemäß 2 die rechte Seite dann und nur dann nicht, wenn $t^{\nu-\rho} = [b_0 \cdots b_{\nu-\rho}]$ ist; sie wird dann $[b_{\nu-\rho} \cdots b_\sigma]$. Links erhält man dann und nur dann etwas Nicht-

---

[4] Man beachte $\mathfrak{o}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{o}$.

verschwindendes—und zwar auch wieder $[b_{\nu-\rho} \cdots b_\sigma]$—, wenn in $t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}$ $[a_0 \cdots a_{\nu-\rho}]$ auftritt, also auch wieder für $t^{\nu-\rho} = [b_0 \cdots b_{\nu-\rho}]$.

Um (U″), (A″), (V″) zu erhalten, müssen wir etwas genauer verfahren. Wir brauchen uns nur um Polytope A und B zu kümmern. Die Ecken von S dürfen wir so anordnen, daß die von B hinter allen andern kommen. Ist nun z_ρ ein Zyklus aus $S\backslash B$, so kann man $z^{\nu-\rho}\mathfrak{od}$ innerhalb $S\backslash B$ wählen, so daß es in $S\backslash B$ mit z_ρ homolog ist. Analog darf man mit einem etwaigen $k_{\rho+1}$ aus $S\backslash B$ verfahren, dessen Rand $z_{\rho+1}$ ist. Wendet man darauf hinten $\mathfrak{f}^*$ an, so kommt man in die Urbildmenge von $S\backslash B$, also sicherlich in $R\backslash A$, woran die weitere Anwendung von $\mathfrak{od}$ nichts ändert. $\mathfrak{f}^*$ ist damit als Homomorphismus

$$B_\rho(S\backslash B)\mathfrak{f}^* \subset B_{\rho+\mu-\nu}(R\backslash A)$$

definiert. Die Gleichheit, die wir oben im Beweise von (U′) erhalten haben, zeigt aber unmittelbar, daß die durch (U″) ausgedrückte Homologie wirklich in $S\backslash B$ gilt. (A″) ist ohne weiteres klar, und (V″) ergibt sich analog aus (U″) bei genauerer Betrachtung des Beweises von (U′).

5. Die folgenden Sätze beziehen sich wieder auf beliebige Homologiemannigfaltigkeiten.

a. $(\mathfrak{f}\mathfrak{g}) = \mathfrak{f}^*\mathfrak{g}^*$. (Beweis klar.)

b. Ist die Homologiemannigfaltigkeit M Teilmenge von N und $\mathfrak{g}$ die Abbildung, die M punktweise auf sich selbst abbildet, so ist $z_\rho\mathfrak{g}^* \sim z_\rho \times M$ (wo M auch den μ-dimensionalen Grundzyklus von M bezeichne).—Denn wenn wir in (U′) z_σ durch M, also $\mathfrak{g}z_\sigma$ auch durch M ersetzen, können wir links den Faktor M weglassen und erhalten die gewünschte Beziehung.

c. Ist $\mathfrak{f}M \subset N$, $\mathfrak{h}M' \subset N$, ist weiter M' Teilmannigfaltigkeit von M und stimmen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{h}$ auf M' überein, so ist $z_\rho\mathfrak{h}^* \sim z_\rho\mathfrak{f}^* \times M'$.—Das folgt aus a und b, wenn man noch die Abbildung $\mathfrak{g}$ $M' \subset M$ einführt, die auf M' die Identität ist.

d. Ist $M \subset N$, so ist es gleichgültig, ob man den Schnitt zweier Zyklen aus M in M oder in N bildet.—Folgt aus (A′).

e. (;) bedeute die Bildung des Cartesischen Produktes. $\mathfrak{p}$ sei die Projektion von $(M; N)$ auf N. Dann ist (für $z_\rho \subset N$):

$$(M; z_\rho) \sim z_\rho\mathfrak{p}^*.$$

Beim Beweise machen wir von einer anderwärts von Verf. [5] abgeleiteten Simplizialzerlegung des Cartesischen Produktes zweier Simplexe t_μ und t_ν Gebrauch. Die Ecken von t_μ werden mit $0, \cdots, \mu$, die von t_ν mit $0, \cdots, \nu$ numeriert. Ecken von $(t_\mu; t_\nu)$ sind die Paare ($\alpha\beta$ aus den Ecken von t_μ und t_ν; man kann sie sich in der Matrix

$$\mathfrak{M}: \quad \begin{array}{cccc} 00 & 01 & \cdots & 0\nu \\ 10 & 11 & \cdots & 1\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu 0 & \mu 1 & \cdots & \mu\nu \end{array}$$

aufschreiben Die $(\mu + \nu)$-dimensionalen Simplexe $u_{\mu+\nu}$ von $(t_\mu; t_\nu)$ werden so definiert: Jedes $u_{\mu+\nu}$ besteht aus einer Folge von Elementen von $\mathfrak{M}$, die mit 00 beginnt, mit $\mu\nu$ endet, und in der jedes Element rechter oder unterer Nachbar seines Vorgängers ist. $1 + \psi_\rho(u_{\mu+\nu})$ sei die Zahl der Elemente von $u_{\mu+\nu}$ in der β-ten Spalte; $\eta(u_{\mu+\nu}) = \sum \beta\psi_\beta(u_{\mu+\nu})$. Addiert man diese $u_{\mu+\nu}$ mit dem Koeffizienten $(-1)^{\eta(u_{\mu+\nu})}$, so erhält man die gewünschte Simplizialzerlegung von $(t_\mu; t_\nu)$.

Um

$$(M; z_\rho) \sim z_\rho \mathfrak{p}^*$$

zu beweisen, nehmen wir uns je ein willkürliches Simplex t_μ aus M und t_ν aus N und berechnen auf beiden Seiten den in $(t_\mu; t_\nu)$ liegenden Anteil. Wir können das auch so ausdrücken: Wir ersetzen M durch t_μ und N durch t_ν und beweisen

$$(t_\mu; t_\rho) = t^{\nu-\rho}\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{d} \text{ mit } t_\rho = t^{\nu-\rho}\mathfrak{o}\mathfrak{d}_N .$$

Sind die Ecken von t_μ und t_ν wie oben numeriert, so verschwindet die linke Seite dann nur dann nicht, wenn $t_\rho = [0 \cdots \rho]$, also $t^{\nu-\rho} = [\rho \cdots \nu]$ ist; sie wird dann gleich der algebraischen Simplexsumme, gebildet aus der Matrix $\mathfrak{M}'$, die nur die 0-te bis ρ-te Spalte von $\mathfrak{M}$ umfaßt. Rechts hat man $t^{\nu-\rho}\mathfrak{p} = \sum [\alpha_\rho\rho \cdots \alpha_\nu\nu]$; zu $t^{\nu-\rho}\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ liefert aber nur $[\mu\rho \cdots \mu\nu]$ einen Beitrag, und zwar gerade das, was wir links ausgerechnet haben. Für andere Wahlen von t_ρ verschwindet auch die rechte Seite, so daß unsere Gleichung bewiesen ist.

6. Wir zeigen nun, daß die Hopfsche Umkehrung [1] von Mannigfaltigkeitsabbildungen mit unserer übereinstimmt.

Die Hopfsche Umkehrung war so erklärt: Man bilde in $(M; N)$ das Lefschetzsche "Bild" von $\mathfrak{f}$, d.h. die Mannigfaltigkeit M', die aus den Punkten $(a; \mathfrak{f}a)$ zusammengesetzt ist. $(M; z_\rho) \times M'$ ist ein Zyklus in M' (wenn z_ρ einer in N ist); seine Projektion auf M ist das Umkehrungsbild von z_ρ. Wenn man M' als einen Repräsentanten von M auffaßt und $\mathfrak{f}$ durch die Projektion von M' auf N ersetzt, kann man sich die letzte Projektion übrigens sparen.

Nun ist nach 5e: $(M; z_\rho) \sim z_\rho\mathfrak{p}^*$, also $(M; z_\rho) \times M' \sim z_\rho\mathfrak{p}^* \times M'$. Das ist aber nach 5c und der letzten Bemerkung des vorigen Absatzes wesentlich nichts Anderes als $z_\rho\mathfrak{f}^*$. Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

LITERATUR

siehe AG, außerdem:

H. FREUDENTHAL: 4. *Über die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Außenraumes abgeschlossener Mengen.* Compositio Math. *2* (1935), 163–176.

5. *Eine Simplizialzerlegung des Cartesichen Produktes zweier Simplexe.* Fundamenta Math. *29* (1937), 138–144.

H. HOPF: 1. *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.* Journ. f. d. r. u. angew. Math. *163* (1930), 71–88.

2. *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.* Math. Ann. *104* (1931), 637–665.

AMSTERDAM, HOLLAND.