Heritage of European Mathematics

Advisory Board

Michèle Audin, Strasbourg
Ciro Ciliberto, Roma
Ildar A. Ibragimov, St. Petersburg
Władysław Narkiewicz, Wrocław
Peter M. Neumann, Oxford
Samuel J. Patterson, Göttingen



Hans Freudenthal

Selecta

Edited by
Tonny A. Springer
Dirk van Dalen



European Mathematical Society

Editors:

Tonny A. Springer
Department of Mathematics
Utrecht University
Budapestlaan 6
3584 CD Utrecht
The Netherlands

Dirk van Dalen
Department of Philosophy
Utrecht University
Heidelberglaan 8
3584 CS Utrecht
The Netherlands

2010 Mathematics Subject Classification: 00B60, 01A75

ISBN 978-3-03719-058-6

The Swiss National Library lists this publication in The Swiss Book, the Swiss national bibliography, and the detailed bibliographic data are available on the Internet at http://www.helveticat.ch.

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. For any kind of use permission of the copyright owner must be obtained.

© 2009 European Mathematical Society

Contact address:

European Mathematical Society Publishing House
Seminar for Applied Mathematics
ETH-Zentrum FLI C4
CH-8092 Zürich
Switzerland

Phone: +41 (0)44 632 34 36
Email: info@ems-ph.org
Homepage: www.ems-ph.org

Typeset using the author's TEX files: I. Zimmermann, Freiburg
Printed in Germany

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Foreword

The present book brings a selection of papers of Hans Freudenthal. His interests ranged widely and this is reflected in his many publications (more than 700). The emphasis of our selection is on technical mathematical papers. In particular, we left aside Freudenthal's many writings on didactical matters; they would require a separate volume.

The selection of the papers is necessarily somewhat arbitrary. But we believe to have included Freudenthal's best mathematical work.

Most – but not all – of the selected papers are accompanied by brief comments and references to the literature.

We are grateful to Mirjam Freudenthal for her interest and support and to the late B. Eckmann and W. Luxemburg for advice. Finally, we thank the Publishing House of the European Mathematical Society, in particular Dr. Manfred Karbe, for the interest in the production of these Selecta and for help in editorial matters.

Utrecht, September 2009

T. A. Springer
D. van Dalen

Contents

(Entries in square brackets refer to the bibliography on pp. 645–652)

Foreword v

Biographical Note 1

Ph.D. Students of Hans Freudenthal 4

Über die Enden topologischer Räume und Gruppen [1931b] 7
Einige Sätze über topologische Gruppen [1936a] 31
Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen [1936b] 42
Teilweise geordnete Moduln [1936d] 63
Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren [1936h] 74
Zum intuitionistischen Raumbegriff [1936i] 76
Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln [1936j] 106
Entwicklungen von Räumen und Gruppen [1936k] 111
Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie [1937f] 117
Zum Hopfschen Umkehrhomomorphismus [1937g] 126
Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I. Große Dimensionen [1937h] 133
Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. I [1941] 149
Simplizialzerlegungen von beschränkter Flachheit [1942b] 173
Über die Enden diskreter Räume und Gruppen [1945] 176
Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie [1951b] 214
Sur le groupe exceptionnel E_7 [1953b] 270
Sur des invariants caractéristiques des groupes semi-simples [1953c] 279
Sur le groupe exceptionnel E_8 [1953d] 284
Zur ebenen Oktavengeometrie [1953e] 288
Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I [1954b] 294
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene II [1954c] 307
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene III [1955a] 313
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene IV [1955b] 320
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene V [1959b] 329

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene VI [1959c] 344
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene VII [1959d] 356
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene VIII [1959e] 366
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene IX [1959f] 385
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene X [1963b] 394
Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene XI [1963c] 409
Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen I [1954d] 425
Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen II [1954e] 433
Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen III [1956e] 438
Neuere Fassungen des Riemann–Helmholtz-Lieschen Raumproblems [1956a] . . . 442
Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache [1957d] 474
Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie [1957e] 486
Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen [1958c] 524
Symplektische und metasymplektische Geometrien [1962c] 529
Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen [1962d] 534
Das Helmholtz-Liesche Raumproblem bei indefiniter Metrik [1964b] 537
Lie groups in the foundation of geometry [1964c] 587

Comments 633

Acknowledgements 644

Bibliography 645
Mathematical articles 645
Selected books 652

Biographical Note

Hans Freudenthal was born in Luckenwalde (about 50 km south of Berlin) on 17 September 1905 as the first child of Joseph Freudenthal and Elsbeth Ehmann. The father was teacher and cantor of Luckenwalde's small Jewish community.

Freudenthal grew up in a liberal Jewish atmosphere. He was a precocious child. Being of a delicate health (he suffered from asthma until his fifties) he had to spend much time at home, where he read voraciously. He immersed himself in German literature, history, philosophy. But the sciences, in particular mathematics, equally attracted him. At the age of twelve he had already familiarized himself with differential and integral calculus.

At the local Gymnasium he absorbed what the Wilhelmian education system could offer.

Eighteen years old, he enrolled at the Berlin University, majoring in mathematics (but he also attended courses in several other areas). At that time several distinguished mathematicians taught in Berlin: Ludwig Bieberbach, Erhard Schmidt, Issai Schur. Mathematicians of a younger generation with whom Freudenthal came into contact in Berlin were Georg Feigl (who taught courses for beginners) and in later years Heinz Hopf, Karl Löwner (later: Charles Loewner) and Johann (later: John) von Neumann.

Courses by Hopf on algebraic topology (1926/27) and by Löwner on continuous groups (nowadays: Lie groups) stimulated Freudenthal's interest in these subjects. Hopf was to be Freudenthal's thesis adviser ('Doktorvater'), with Bieberbach as second examiner. The thesis dealt with a topic in topology (the theory of ends). In the meantime, following a time-honored tradition, Freudenthal made a tour of German Universities, hearing a variety of authorities on a wide range of subjects.

In 1927 the Amsterdam celebrity L. E. J. Brouwer lectured in Berlin on his intuitionism. Freudenthal, having been prepared by a course by Löwner on constructive analysis, was one of the few members of Brouwer's audience who could pose sensible questions and carry on a discussion with the lecturer. Brouwer was favorably impressed by this young German, who knew both topology and intuitionism. And so, when in 1930 Freudenthal had written his doctoral dissertation, Brouwer offered him a position as assistant at the University of Amsterdam. Freudenthal accepted the offer and left Berlin for Amsterdam in October of 1930.

His duties at the University of Amsterdam were modest. He lectured on various topics, but mostly on analysis for undergraduates. Originally, Brouwer intended to engage Freudenthal as a collaborator in carrying forward the intuitionistic program. Indeed, Freudenthal published a few contributions to that program. But in most of the research of his – very productive – Amsterdam years in the 1930s he went his own way. The subjects of his publications range widely, but topological themes dominate.

The mathematical atmosphere in Berlin and that in Amsterdam were quite different from each other. Freudenthal was fortunate to find in Amsterdam a very stimulating

colleague, namely the topologist Witold Hurewicz, who around 1935 was engaged in his seminal work on the theory of homotopy groups. A little later Freudenthal also made a fundamental contribution to that theory.

After Hurewicz's departure to the United States in 1936, Freudenthal remained the sole representative of 'modern' mathematics in Amsterdam.

Meanwhile, Freudenthal had settled in the Netherlands. In 1932 he married Susanna J. C. Lutter. They had four children.

In World War II, after the German occupation of the Netherlands in 1940, Freudenthal's situation changed dramatically. All Jewish members of the University staff were dismissed. Freudenthal escaped deportation because his wife was non-Jewish, but nonetheless harassment and even danger were always lurking. He was in prison once, and at another time he found himself a forced laborer at a military airfield under construction.

Most of the time he was able to stay at home, where he pursued in isolation his mathematical, didactical and literary interests. This led to various later publications (a prize-winning novel was even, under pseudonym, published during the war).

In 1946, shortly after the end of the war Freudenthal was appointed to a full professorship at the University of Utrecht. In this position he displayed the many sides of his talents. He took pains to modernize teaching and research, establishing a first class mathematics department. He became a respected member of the academic community, serving the University as its rector in the academic year 1963–1964.

The academic year 1960–1961 he spent in the United States as a Visiting Professor at Yale University.

In 1975 Freudenthal had reached the age of mandatory retirement from his position in Utrecht. Nonetheless he remained vigorous and active; he was productive until the end of his life.

Before the 1960s Freudenthal's mathematical research in the Utrecht period was dominated by work on Lie groups and related geometric questions ('Raumprobleme' and the geometry of exceptional groups).

Already in the 1930s he became interested in educational aspects of mathematics. In his later years this theme became paramount in his work. He became a leader in the field, a source of new ideas and inspiration.

Freudenthal's wife died in 1986. Four years later, shortly after his 85th birthday and after finishing his last book, Hans Freudenthal passed away peacefully.

Freudenthal's interests ranged widely. He published an impressive number (about 700) of articles on a wide variety of topics, not only on mathematics, but also on educational matters, history, art, politics. Moreover, he wrote a number of books, several of which (notably the books on educational topics) found a wide readership and were translated into various languages. His mathematical papers and books are listed at the end of the present volume.

Freudenthal enjoyed expressing himself in print, regularly presenting his views on the most diverse topics; he did so in an original, and sometimes provocative way, not eschewing controversies or polemics. For many years he wrote newspaper columns

in Dutch – on all kinds of subjects – in the daily 'NRC-Handelsblad' and the weekly 'De Groene Amsterdammer'; altogether about 250 contributions in 40 years. He wrote with great facility and efficiency.

When he was around eighty Freudenthal wrote (in Dutch) an autobiographical book (*Schrijf dat op, Hans; Knipsels uit een leven*, Meulenhoff, Amsterdam, 1987), generously shedding light on his personal background, but with mathematics somewhat in the shadow. In his reminiscences, *Berlin 1923–1930* (in German, Walter de Gruyter, 1987), he presented recollections of mathematical life in Berlin in the 1920s.

Freudenthal had an extensive correspondence. It is preserved, together with many other papers, in the State Archive (Rijksarchief) in Haarlem. An inventory is available (P.J.M. Velthuys-Bechthold, *Inventory of the papers of Hans Freudenthal* (*1905–1990*), Haarlem, Rijksarchief, 1999). A complete list of all publications (also the newspaper articles) is included.

Ph.D. Students of Hans Freudenthal

W. T. van Est
A generalization of a theorem of J. Nielsen concerning hyperbolic groups (1950)

E. J. van der Waag
Analyse comparée des notions fondementales de la géometrie différentielle des courbes (1952)

P. J. van Albada
Integral relations in alternative coordinate rings (1955)

G. J. B. Bremer
Wijsgerige aspecten van het natuurkundig tijdbegrip (1955)

A. H. Boers
Généralisation de l'associateur (1956)

D. Kijne
Plane construction field theory (1956)

P. M. van Hiele
De problematiek van het inzicht (1957)

F. D. Veldkamp
Polar geometry (1959)

R. A. Hirschfeld
On transformation semi-groups and differential equations in Banach spaces (1960)

J. F. Benders
Partitioning in mathematical programming (1960)

G. J. Leppink
On the estimation of the special density function by the periodogram truncated at an estimated point (1961)

G. J. Schellekens
On a hexagonic structure (1962)

A. C. M. van Rooij
On lattices of rings of sets (1963)

J. Ponstein
Matrices in graph and network theory (1966)

W. I. M. Wils
Stone–Čech compatification and representations of operator algebras (1968)

J. J. Duistermaat
Energy and entropy as real morphisms for addition and order (1968)

P. W. H. Lemmens
Homotopy theory of products on spheres (1969)

N. L. J. M. de Grande-de Kimpe
Gegeneraliseerde rijenruimten (1970)

J. W. Nienhuys
Not locally compact monothetic groups (1970)

H. J. M. Bos
Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus (1973)

A. Treffers
Wiskobas doelgericht. Een methode van doelbeschrijving van het wiskundeonderwijs volgens wiskobas (1978)



Hans Freudenthal around 1935

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt von der

Philosophischen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Berlin

von

Hans Freudenthal
aus Luckenwalde

Tag der Promotion: 6. Oktober 1931

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Februar 1930

Referenten: Professor Dr. H. Hopf
Professor Dr. L. Bieberbach

Lebenslauf.

Ich, Hans Freudenthal, bin am 17. September 1905 als Sohn des Lehrers Joseph Freudenthal und seiner Frau Elsbeth geb. Ehmann zu Luckenwalde geboren. Von Ostern 1911 bis Ostern 1914 besuchte ich die Vorschule der Friedrichsschule, von da an das Reformrealgymnasium Friedrichsschule zu Luckenwalde und bestand dort im Februar 1923 die Reifeprüfung. Vom Sommersemester 1923 bis zum Wintersemester 1926/27 studierte ich an der Universität zu Berlin Mathematik und Physik, im Sommersemester 1927 an der Faculté des Sciences zu Paris und vom Wintersemester 1927/28 an wieder an der Universität zu Berlin. Seit November 1928 bin ich Hilfsassistent am Mathematischen Seminar der Universität Berlin.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten Bieberbach, Blasius, L. E. J. Brouwer, Coolidge, Einstein, Feigl, Fischel, Hadamard, Hamburger, Hammerstein, H. Hopf, Julia, Köhler, Löwner, Marckwald, v. Mises, J. v. Neumann, Picard, Planck, P. Pringsheim, Rosenberg, E. Schmidt, Schrödinger, Spranger, I. Schur, Szegö, Vierkandt und Wehnelt. Besonderen Dank schulde ich den Herren Prof. Bieberbach, Prof. v. Mises, Prof. Schmidt, Prof. Schur und nicht zuletzt Herrn Prof. H. Hopf und Herrn Prof. H. Kneser, durch deren wertvolle Ratschläge diese Arbeit in hohem Maße gefördert wurde.

Hans Freudenthal.

Über die Enden topologischer Räume und Gruppen [1931b]

Math. Z. 33 (1931), 692–713
[JFM 57.0731.01; Zbl 0002.05603]

Obzwar die Eigenschaften im Kleinen einer Lieschen kontinuierlichen Gruppe in hohem Maße ihre Eigenschaften im Großen bestimmen, leistet die Liesche Theorie doch wenig für die Erkenntnis dieser Eigenschaften. Erweiterungen des Begriffes der kontinuierlichen Gruppe erleichtern den Einblick in ihre topologischen Eigenschaften. Man läßt die Voraussetzung der Differenzierbarkeit fallen und deutet die Gruppenelemente als Punkte einer topologischen Mannigfaltigkeit oder sogar eines topologischen Raumes.

Wenn man nun von einem gegebenen topologischen Gebilde entscheiden will, ob es sich als Gruppe eignet oder nicht, so kommt man häufig schon mit einfachen Kriterien sehr weit.

Solche Forderungen, die ein Gruppenraum erfüllen muß, sind die Homogeneität, ferner nach Schreier[1]) die Kommutativität der Wegegruppe; dann z. B. für geschlossene Mannigfaltigkeiten das Verschwinden der Eulerschen Charakteristik, das nach H. Hopf[2]) notwendig für die Existenz fixpunktfreier Deformationen ist.

Ein anderes Kriterium findet sich bei Leja[3]), der direkt die bereits durch L. E. J. Brouwer[4]) und Schreier[1]) bekannte Tatsache beweist, daß die mehr als einmal gelochte Ebene nicht Gruppenmannigfaltigkeit sein kann.

---

[1]) O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, Hamb. Abh. **4** (1925), S. 30; Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im Großen, Hamb. Abh. **5** (1927), S. 238.

[2]) H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **96** (1926), S. 244.

[3]) F. Leja, Un lemme topologique et son application dans la theorie des groupes abstraits, Fund. Math. **10** (1927), p. 421–426.

[4]) L. E. J. Brouwer, Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, Math. Annalen **67** (1909), S. 246–267; **69** (1910), S. 181–203.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist der gruppentheoretische Kern der vorliegenden Arbeit. Wir betrachten im Kleinen kompakte, zusammenhängende, im Kleinen zusammenhängende[5]) topologische Räume mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom und führen in ihnen eine möglichst starke Komponentenzerfällung des „Unendlich Fernen" durch; diese Komponenten nennen wir Endpunkte. In zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten leisten unsere Endpunkte dasselbe wie die Kerékjártóschen[6]) „Randstücke". Mit den Endpunkten können wir den betrachteten Raum in einer Weise abschließen, die sich mit einfachen topologischen Mitteln vor allen anderen Abschließungen, z. B. der Tietzeschen[7]), auszeichnen läßt.

Der Endpunktbegriff steckt in allen Kriterien, die wir für Gruppenräume und „Wirkungsräume" von Gruppen ableiten werden. Von diesen Kriterien seien hier die folgenden genannt:

Die Verallgemeinerung in der Lejaschen Richtung: Ein Gruppenraum hat höchstens zwei Endpunkte.

Unter gewissen Stetigkeits- und Kompaktheitsbedingungen besitzt der Wirkungsraum einer transitiven Gruppe genau so viel Endpunkte wie die Gruppe selbst.

In dem durch die Endpunkte abgeschlossenen Gruppenraum läßt sich jede im Gruppenraum kompakte Punktmenge stetig auf einen Punkt zusammenziehen.

Die Sätze über Gruppenräume werden ohne Benutzung des assoziativen Gesetzes bewiesen, treffen also auch auf die Schiebräume zu, d. h. Räume, die eine einfach transitive Schar bis auf die Identität fixpunktfreier Transformationen (mit gewissen Stetigkeitsbedingungen) besitzen.

Es sei noch bemerkt, daß wir von der Normalität und Metrisierbarkeit der im Kleinen kompakten Räume mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom[8]) nirgends explizit Gebrauch machen werden; wir werden die diesbezüglichen Eigenschaften direkt ableiten. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom dürfte für unsere Untersuchungen nicht wesentlich sein; man brauchte wohl nur den Begriff „kompakt" durch „bikompakt"[9]) und Folgen durch Wohlordnungstypen zu ersetzen.

---

[5]) Siehe auch Fußnote [15]), S. 702.

[6]) B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, S. 164.

[7]) H. Tietze, Beiträge zur allgemeinen Topologie II, Math. Annalen **91** (1924), S. 213.

[8]) P. Alexandroff, Über die Metrisation der im Kleinen kompakten Räume, Math. Annalen **92** (1924), S. 299.

[9]) P. Alexandroff und P. Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen **92** (1924), S. 260.

Im ersten Kapitel werden wir die Enden topologischer Räume definieren und einige Sätze über sie ableiten; das zweite Kapitel wird Anwendungen des Endenbegriffes auf Schiebräume bringen; im dritten Kapitel tritt an die Stelle des Schiebraumes der Gruppenraum. Besonders hingewiesen sei noch auf den Satz 19 dieses Kapitels, der mit der Endentheorie nichts zu hat und vielleicht für sich Interesse beanspruchen darf.

Alle folgenden Untersuchungen gelten natürlich insbesondere, wenn der betrachtete topologische Raum eine topologische Mannigfaltigkeit ist.[10])

1. Kapitel.

Die Enden topologischer Räume.

§ 1.

Definition der Endpunkte und Folgerungen.

Unter $\mathfrak{G}$ verstehen wir im folgenden stets einen *topologischen* Raum im Hausdorffschen Sinne, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, und den wir schrittweise weiteren Einschränkungen unterwerfen werden; gegen Schluß dieses Kapitels wird er im Kleinen kompakt, zusammenhängend und im Kleinen zusammenhängend sein. Seine Punkte bzw. Teilmengen bezeichnen wir durch die Buchstaben a bis w bzw. A bis W; kleine griechische Buchstaben bedeuten natürliche Zahlen, nur σ und τ bedeuten reelle Zahlen zwischen 0 und 1. $\mathfrak{V}, \mathfrak{D}, \mathfrak{R}$ sind bzw. die Funktionszeichen der *Vereinigungs-*, *Durchschnitts-* und *Rand*bildung von Mengen; auch durch $+$ und $-$ verbinden wir Mengen in üblicher Weise. Die Bildung der *abgeschlossenen Hülle* einer Menge wird durch Überstreichen ihres Buchstabens angedeutet. *Kompakt* heißt eine echte oder unechte Teilmenge von $\mathfrak{G}$, wenn es in $\mathfrak{G}$ zu jeder ihrer unendlichen Teilmengen einen Häufungspunkt gibt. Das Wort „zusammenhängend" wird im Hausdorffschen Sinne verwandt werden.

Der Buchstabe C bedeutet (auch mit Indizes) stets eine offene Menge von $\mathfrak{G}$ mit kompakter Berandung $\mathfrak{R}(C)$, G bedeutet (auch mit Indizes) ein Gebiet mit kompakter Berandung $\mathfrak{R}(G)$ (also ein zusammenhängendes C), das aber selbst nicht kompakt ist.

Im folgenden werden wir häufig von folgenden beiden Bemerkungen Gebrauch machen:

1. Sind zwei offene Punktmengen gegeneinander fremd[11]), so ist jede gegen die abgeschlossene Hülle der anderen fremd.

---

[10]) Die vorliegende Arbeit bildet den Inhalt meiner Dissertation (Berlin 1930); für zahlreiche Anregungen spreche ich den Herren H. Hopf und H. Kneser meinen Dank aus.

[11]) d. h. ohne gemeinsame Punkte.

2. Ein Gebiet, das mit einer offenen Menge und ihrer Komplementärmenge Punkte gemeinsam hat, hat auch mit dem Rand der offenen Menge Punkte gemeinsam.

Definition der Endpunkte von $\mathfrak{G}$: Eine unendliche Folge $G_\alpha^1 \supset G_\alpha^2 \supset \ldots \supset G_\alpha^\nu \supset \ldots$ heißt ein Endpunkt $\mathfrak{e}_\alpha$ von $\mathfrak{G}$, wenn $\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{D}}}(\bar{G}_\alpha^\nu) = 0$, d. h. leer ist[12]).

Definitionen. $\mathfrak{e} \subset C$ heißt: fast alle $\mathfrak{e}$ erzeugenden Gebiete G^ν sind in C enthalten. $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_2$ heißt: $\mathfrak{e}_1$ ist in allen $\mathfrak{e}_2$ erzeugenden Gebieten G_2^ν enthalten, oder: zu jedem ν gibt es ein ν' mit $G_1^{\nu'} \subset G_2^\nu$.

Daraus folgt unmittelbar der

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_2$ *und* $\mathfrak{e}_2 \subset \mathfrak{e}_3$, *so ist auch* $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_3$.

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_2$, *so ist auch* $\mathfrak{e}_2 \subset \mathfrak{e}_1$.

Beweis. Zu jedem ν gibt es ein ν' mit $G_1^{\nu'} \subset G_2^\nu$. Die zur Berandung von $G_1^{\nu'}$ gehörenden Punkte von $\bar{G}_2^\mu$ bilden, wenn μ die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\overset{\infty}{\underset{\mu=1}{\mathfrak{D}}}(\bar{G}_2^\mu)$, also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein ν'', derart, daß $\bar{G}_2^{\nu''}$ fremd gegen $\mathfrak{R}(G_1^{\nu'})$ ist. Andererseits enthält $G_2^{\nu''}$ fast alle G_1^μ, und diese sind Teilmengen von $G_1^{\nu'}$. Also hat $G_2^{\nu''}$ mit $G_1^{\nu'}$ einen nicht leeren Durchschnitt, während es, wie wir sahen, gegen den Rand von $G_1^{\nu'}$ fremd ist. Weil die G Gebiete sind, folgt daraus, daß $G_2^{\nu''}$ vollständig in $G_1^{\nu'}$ liegt. Somit ist $\mathfrak{e}_2$ enthalten in dem von den $G_1^{\nu'}$ erzeugten Endpunkt, also nach Satz 1 in $\mathfrak{e}_1$.

Durch diesen Satz ist die Bezeichnung End*punkt* erst gerechtfertigt; wir werden in Zukunft statt $\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}_2$ stets $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2$ schreiben. Sind zwei Endpunkte nicht gleich, so nennen wir sie verschieden.

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{e}_1 \neq \mathfrak{e}_2$, *so gibt es ein* ν, *derart, daß* $\bar{G}_1^\nu$ *und* $\bar{G}_2^\nu$ *gegeneinander fremd sind.*

Beweis. Es ist $\mathfrak{e}_1 \not\subset \mathfrak{e}_2$, also gibt es ein μ' mit $G_1^\mu \not\subset G_2^{\mu'}$ für $\mu \geqq \mu'$. Die zur Berandung von $G_2^{\mu'}$ gehörenden Punkte von $\bar{G}_1^\mu$ bilden, wenn μ die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\overset{\infty}{\underset{\mu=1}{\mathfrak{D}}}(\bar{G}_1^\mu)$, also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein $\nu \geqq \mu'$ derart, daß $\bar{G}_1^\nu$ fremd gegen $\mathfrak{R}(G_2^{\mu'})$ ist; da es aber, wie wir sahen, nicht in $G_2^{\mu'}$ enthalten ist, so ist es, weil die G Gebiete sind, auch gegen $G_2^{\mu'}$ selbst fremd. Somit sind $\bar{G}_1^\nu$ und $\bar{G}_2^{\mu'}$ gegeneinander fremd, also auch $\bar{G}_1^\nu$ und $\bar{G}_2^\nu$.

---

[12]) Bei konstruktiver Formulierung dieser Definition lassen sich die Sätze 2 und 3 konstruktiv beweisen.

§ 2.

Die Abschließung von $\mathfrak{G}$ durch seine Endpunkte.

Im folgenden werden wir häufig von dem bekannten Überdeckungssatz Gebrauch machen: Eine kompakte abgeschlossene Menge von $\mathfrak{G}$, die in der Vereinigung einer Menge von Umgebungen aus $\mathfrak{G}$ enthalten ist, ist schon in der Vereinigung einer endlichen Teilmenge dieser Menge von Umgebungen enthalten.

Wir benutzen diesen Überdeckungssatz zunächst zum Beweise des folgenden bekannten Hilfssatzes.

Hilfssatz 1. A und B seien zwei kompakte, abgeschlossene und gegeneinander fremde Mengen von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es unter den Umgebungen $U_1, U_2, \ldots$ von $\mathfrak{G}$ endlich viele $V_1, \ldots, V_\alpha$ und $W_1, \ldots, W_\beta$ derart, daß $A < V_1 + \ldots + V_\alpha$ und $B < W_1 + \ldots + W_\beta$ und $V_1 + \ldots + V_\alpha$ fremd ist gegen $W_1 + \ldots + W_\beta$.

Beweis. Zu je zwei Punkten $a < A$ und $b < B$ gibt es Umgebungen $U_a > a$, $U_b > b$ mit $\mathfrak{D}(U_a, U_b) = 0$. Wir halten zunächst a fest und lassen b alle Punkte von B durchlaufen, dann ändern sich U_a und U_b; auf Grund des Überdeckungssatzes läßt sich B mit endlich vielen dieser U_b überdecken, die wir $U_1^a, \ldots, U_\lambda^a$ nennen. Jedem dieser U entspricht ein zu ihm fremdes U_a, und im Durchschnitt dieser endlich vielen U_a gibt es eine Umgebung von a namens V_a, die also gegen $U_1^a, \ldots, U_\lambda^a$ fremd ist. Nun lassen wir a alle Punkte von A durchlaufen; dann ändert sich sowohl V_a als auch das B überdeckende und zu V_a fremde System $U_1^a, \ldots, U_\lambda^a$; mit endlich vielen der dabei entstehenden V_a läßt sich auf Grund des Überdeckungssatzes A überdecken, wir nennen sie $V_1, \ldots, V_\alpha$. Zu jedem dieser V_ν $(\nu = 1, \ldots, \alpha)$ gehört ein B überdeckendes und gegen V_ν fremdes System $U_1^\nu, \ldots, U_{\lambda_\nu}^\nu$. Im Durchschnitt derjenigen unter den $U_1^\nu, \ldots, U_{\lambda_\nu}^\nu$ $(\nu = 1, \ldots, \alpha)$, in denen der Punkt $b < B$ liegt, gibt es eine Umgebung W_b von b, die also gegen alle V_ν fremd ist. Auf Grund des Überdeckungssatzes läßt sich B mit endlich vielen dieser W_b überdecken, die wir nun $W_1, \ldots, W_\beta$ nennen, und die gegen alle V_ν fremd sind. Die so hergestellten $V_1, \ldots, V_\alpha$ und $W_1, \ldots, W_\beta$ leisten das vom Hilfssatz Verlangte.

Von nun an wollen wir $\mathfrak{G}$ als *im Kleinen kompakt* voraussetzen, d. h. wir wollen annehmen, daß die abgeschlossenen Hüllen der $\mathfrak{G}$ erzeugenden Umgebungen U kompakt sind. Wir beweisen dann ohne Metrisierung folgenden

Hilfssatz 2. Unter den Umgebungen U_ν von $\mathfrak{G}$ gibt es eine $\mathfrak{G}$ überdeckende Folge $V_1, V_2, \ldots$ derart, daß jedes der V_ν gegen fast alle $\overline{V}_\nu$ fremd ist und also auch jeder Punkt in nur endlich vielen $\overline{V}_\nu$ enthalten ist.

Beweis. Wir führen die Konstruktion der V_ν induktionsmäßig durch. Wir setzen:

$$L_1 = U_1 = V_1 = K_1,$$

$$L_2 = \mathfrak{R}(K_1) + (U_2 - \mathfrak{D}(U_2, K_1)).$$

Wegen der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$ ist L_2 kompakt; $\bar{L}_2$ läßt sich durch endlich viele Umgebungen überdecken, die wir $V_2, \ldots, V_{\lambda_2}$ nennen.

$$L_2 \subset V_2 + \ldots + V_{\lambda_2} = K_2.$$

Damit haben wir L_2, K_2 und $V_2, \ldots, V_{\lambda_2}$ angegeben. Wir setzen nun

$$L_3 = \mathfrak{R}(K_1 + K_2) + (U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)),$$

und wir bemerken wieder, daß wegen der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$ unser L_3 kompakt ist, da auch K_2 kompakt war. Ferner ist

$$\mathfrak{R}(K_1) \subset L_2 \subset K_2,$$

also

$$\bar{K}_1 \subset K_1 + K_2 \tag{1}$$

außerdem, weil $K_1 + K_2$ offen ist,

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \mathfrak{R}(K_1 + K_2)) = 0. \tag{2}$$

Schließlich ist

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)) = 0$$

und, weil $K_1 + K_2$ offen ist,

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \overline{U_3 - \mathfrak{D}(U_3, K_1 + K_2)}) = 0. \tag{3}$$

Also gilt auch nach (2) und (3)

$$\mathfrak{D}(K_1 + K_2, \bar{L}_3) = 0$$

und nach (1)

$$\mathfrak{D}(\bar{K}_1, \bar{L}_3) = 0.$$

Nach dem ersten Hilfssatz gibt es dann ein Überdeckungssystem von $\bar{L}_3$, das gegen $\bar{K}_1$ fremd ist; wir nennen seine Umgebungen $V_{\lambda_2+1}, \ldots, V_{\lambda_3}$ und schreiben

$$\bar{L}_3 \subset V_{\lambda_2+1} + \ldots + V_{\lambda_3} = K_3.$$

Damit haben wir L_3, K_3 und $V_{\lambda_2+1}, \ldots, V_{\lambda_3}$ hergestellt und fahren nunmehr genau so fort. Wir nehmen an, die Herstellung sei ebenso wie für den Index 3 bis L_ν, K_ν, $V_{\lambda_{\nu-1}+1}, \ldots, V_{\lambda_\nu}$ gediehen und werden sie noch für $L_{\nu+1}$, $K_{\nu+1}$, $V_{\lambda_\nu+1}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ durchführen. Wir setzen

$$L_{\nu+1} = \mathfrak{R}(K_1 + \ldots + K_\nu) + (U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, K_1 + \ldots + K_\nu))$$

und wir bemerken wieder, daß $L_{\nu+1}$ kompakt ist. Ferner ist

$$\mathfrak{R}(K_1 + \ldots + K_{\nu-1}) \subset L_\nu \subset K_\nu,$$

also

$$(1^*) \qquad \overline{K_1 + \ldots + K_{\nu-1}} \subset K_1 + \ldots + K_\nu ,$$

außerdem, weil $K_1 + \ldots + K_\nu$ offen ist,

$$(2^*) \qquad \mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_\nu, \mathfrak{R}(K_1 + \ldots + K_\nu)) = 0 .$$

Schließlich ist

$$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_\nu, U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, K_1 + \ldots + K_\nu)) = 0$$

und, weil $K_1 + \ldots + K_\nu$ offen ist,

$$(3^*) \qquad \mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_\nu, \overline{U_{\nu+1} - \mathfrak{D}(U_{\nu+1}, \overline{K_1 + \ldots + K_\nu})}) = 0 .$$

Also gilt nach (2*) und (3*)

$$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_\nu, \bar{L}_{\nu+1}) = 0$$

und nach (1*)

$$\mathfrak{D}(\overline{K_1 + \ldots + K_{\nu-1}}, \bar{L}_{\nu+1}) = 0 .$$

Nach dem ersten Hilfssatz gibt es dann ein Überdeckungssystem von $\bar{L}_{\nu+1}$, das gegen $\overline{K_1 + \ldots + K_{\nu-1}}$ fremd ist; wir nennen seine Umgebungen $V_{\lambda_\nu+1}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ und schreiben

$$\bar{L}_{\nu+1} \subset V_{\lambda_\nu+1} + \ldots + V_{\lambda_{\nu+1}} = K_{\nu+1} .$$

Damit sind nun auch $L_{\nu+1}$, $K_{\nu+1}$, $V_{\lambda_\nu+1}, \ldots, V_{\lambda_{\nu+1}}$ hergestellt.

Wir müssen uns jetzt davon überzeugen, daß die angegebene Folge V wirklich den Anforderungen des zu beweisenden Satzes genügt. Wir bemerken zunächst, daß K_1 gegen das Überdeckungssystem von $\bar{L}_3$, also gegen K_3 fremd ist, ebenso gilt

$$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_{\nu-1}, K_{\nu+1}) = 0 .$$

Wir betrachten irgendeins der V, das z. B. in K_μ enthalten sei, und wollen von ihm zeigen, daß es nur mit endlich vielen $\overline{V}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Es ist

$$V \subset K_\mu \subset K_1 + \ldots + K_{\mu+\alpha} ,$$

$$\mathfrak{D}(K_1 + \ldots + K_{\mu+\alpha}, K_{\mu+\alpha+2}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0 ,$$

also

$$\mathfrak{D}(V, K_{\mu+\alpha+2}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0 ,$$

also

$$\mathfrak{D}(V, K_{\mu+\alpha+2} + K_{\mu+\alpha+3} + \ldots) = 0$$

und, weil die V offen sind

$$\mathfrak{D}(V, \overline{K_{\mu+\alpha+2} + K_{\mu+\alpha+3} + \ldots}) = 0 .$$

Da in $\overline{K_{\mu+\alpha+2} + K_{\mu+\alpha+3} + \ldots}$ fast alle $\overline{V}$ enthalten sind, haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Ferner haben wir zu zeigen, daß die angegebene Folge V unsern Raum $\mathfrak{G}$ überdeckt, d. h. daß jeder Punkt in wenigstens einem V enthalten ist. In der Tat, sei der zu untersuchende Punkt in U_ν enthalten und ν möglichst klein gewählt. Dann ist er entweder in $K_1 + \ldots + K_{\nu-1}$ oder in L_ν enthalten, sicherlich also in $K_1 + \ldots + K_\nu$, gehört also einem V_μ mit $\mu \leqq \lambda_\nu$ an.

Damit ist der zweite Hilfssatz vollständig bewiesen.

Von nun an wollen wir $\mathfrak{G}$ als *zusammenhängend* und *im Kleinen zusammenhängend* voraussetzen, d. h. wir wollen annehmen, daß sowohl $\mathfrak{G}$ als auch die $\mathfrak{G}$ erzeugenden Umgebungen U zusammenhängend sind[13]). Die Voraussetzung über die Kompaktheit im Kleinen behalten wir bei. Aus ihr folgt die Äquivalenz unserer Definition des Zusammenhangs im Kleinen mit der üblichen, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen.

Wir werden nun ein Verfahren zur Herstellung der Endpunkte von $\mathfrak{G}$ angeben.

Wir setzen für alle $\gamma \geqq 1$

$$M_\gamma = V_{\gamma+1} + V_{\gamma+2} + \ldots,$$

dabei haben die V die ihnen vom Hilfssatz zugeschriebene Bedeutung. Es ist

$$\mathfrak{R}(M_\gamma) < V_1 + \ldots + V_\gamma. \tag{4}$$

Wir betrachten die Komponenten, d. h. die größten zusammenhängenden Teilmengen von M_γ; jedes V_ν $(\nu \geqq \gamma + 1)$, ist nach der Voraussetzung über den Zusammenhang im Kleinen vollständig in einer Komponente von M_γ enthalten. In einer in $V_1 + \ldots + V_\gamma$ enthaltenen Umgebung eines Randpunktes einer Komponente von M_γ liegen nach Hilfssatz 2 Punkte nur endlich vieler in dieser Komponente enthaltener V_ν; jeder Randpunkt einer Komponente von M_γ ist also Randpunkt von mindestens einem in ihr enthaltenen V_ν. Nach Hilfssatz 2 liefern nur endlich viele $\overline{V}_\nu$ Beiträge zum Rande von M_γ. Andererseits besitzt wegen des Zusammenhangs von $\mathfrak{G}$ jede Komponente Randpunkte, sobald nur $M_\gamma \neq \mathfrak{G}$ ist. Daher besitzt M_γ nur endlich viele Komponenten.

Wir sehen weiter, daß jede Komponente ein Gebiet und wegen (4) kompakt berandet ist, und daß für jedes γ jede Komponente von $M_{\gamma+1}$ Teilmenge einer Komponente von M_γ ist. Die kompakten Komponenten lassen wir außer acht und benennen die übrigen mit $H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma}$ und zwar so, daß für jedes γ

$$H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma} \supset H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{\gamma+1}}$$

---

[13]) In diesem Kapitel genügt, wie man leicht sieht, sogar die Annahme, daß die V und $\mathfrak{G}$ selbst höchstens endlich viel Komponenten besitzen.

gilt. Dabei ist, wie wir sahen, ν_γ nur endlich vieler Werte fähig. Die H sind Gebiete mit kompakter Berandung und selbst nicht kompakt, haben also die Eigenschaften, die wir früher von einem G verlangten.

Eine Folge

$$H_{\nu_1} \supset H_{\nu_1 \nu_2} \supset \ldots \supset H_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma} \supset \ldots$$

stellt einen Endpunkt von $\mathfrak{G}$ dar; denn sei irgendein Punkt gegeben, so gibt es nach dem Hilfssatz 2 ein $\overline{V}_\gamma$ mit möglichst großem γ, das ihn enthält. Dieser Punkt ist nicht in $\overline{M}_\gamma$ enthalten, also auch in keinem $\overline{H}$ mit γ oder mehr Indizes. Also gilt in der Tat

$$\mathfrak{D}(\overline{H}_{\nu_1}, \overline{H}_{\nu_1 \nu_2}, \ldots, \overline{H}_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\gamma}, \ldots) = 0.$$

Ich ergänze nun $\mathfrak{G}$ durch Hinzunahme der so entstandenen Endpunkte zu einem Raum $\overline{\mathfrak{G}}$, indem ich die einen Endpunkt erzeugenden H einschließlich ihrer[14]) Endpunkte zu seinen Umgebungen ernenne. Ich habe mich aber noch davon zu überzeugen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ wirklich den Hausdorffschen Axiomen genügt. Einer besonderen Nachprüfung bedarf dabei aber nur das Trennungsaxiom und dies auch nur für den Fall, daß einer der beiden Punkte Endpunkt und der andere Punkt von $\mathfrak{G}$ ist. Nach Hilfssatz 2 ist der Punkt von $\mathfrak{G}$ in einem V_γ mit möglichst großem γ enthalten; unter den H mit γ Indizes gibt es aber auch eine Umgebung des Endpunktes, und sie ist fremd gegen die Umgebung des Punktes von $\mathfrak{G}$.

Wir können uns ferner davon überzeugen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ kompakt ist. Jede unendliche Menge von $\mathfrak{G}$ ohne Häufungspunkt hat nämlich für jedes γ außerhalb M_γ nur endlich viele Punkte, also fast alle Punkte innerhalb. Da es nur endlich viel H mit γ Indizes gibt, enthält also mindestens eins unendlich viel Punkte der gegebenen Menge. Es gibt also einen Endpunkt, der in jeder seiner Umgebungen unendlich viel Punkte dieser Menge besitzt, also in $\overline{\mathfrak{G}}$ einen Häufungspunkt dieser Menge. Aber auch jede unendliche Menge von Endpunkten besitzt in $\overline{\mathfrak{G}}$ einen Häufungspunkt, denn für jedes γ gibt es ihrer unendlich viele, die von demselben H mit γ Indizes erzeugt werden.

Ehe wir beweisen, daß wir mit dem oben geschilderten Verfahren alle Endpunkte von $\mathfrak{G}$ erschöpfen, wollen wir uns beschäftigen mit dem folgenden

Hilfssatz 3. Notwendig und hinreichend, damit ein C einen Endpunkt $H^1 \supset H^2 \supset \ldots$ enthält im Sinne der Definition aus § 1, ist, daß das in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommene $\overline{C}$ ihn enthält.

Beweis. Wenn C den Endpunkt enthält, so gibt es ein ν' mit $H^\nu \subset C$ für $\nu \geqq \nu'$, also $\overline{H}^\nu \subset \overline{C}$ für $\nu \geqq \nu'$. Der Endpunkt ist in dem in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommenen $\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{D}}}(\overline{H}^\nu)$, also in $\overset{\infty}{\underset{\nu=\nu'}{\mathfrak{D}}}(\overline{H}^\nu)$, also in $\overline{C}$ enthalten.

[14]) Im Sinne von Definition „$\mathfrak{e} \subset C$“, S. 695.

Wenn umgekehrt der Endpunkt im Sinne von $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\overline{C}$ enthalten ist, so ist er Häufungspunkt von $\overline{C}$; es gibt also in jeder Umgebung $\overline{H}^\nu$ des Endpunktes Punkte von $\overline{C}$. Die in $\mathfrak{G}$ zur Berandung von C gehörenden Punkte von $\overline{H}^\nu$ bilden, wenn ν die Zahlenreihe durchläuft, eine absteigende Folge abgeschlossener kompakter Mengen. Ihr gemeinsamer Durchschnitt ist Teilmenge von $\mathfrak{D}(\overline{H}^\nu)$, also leer. Wäre keine von ihnen leer, so wäre auch ihr Durchschnitt nicht leer. Also gibt es ein ν', so daß in $\mathfrak{G}$ das $H^{\nu'}$ fremd gegen $\mathfrak{R}(C)$ ist. Andererseits enthält C Punkte von jedem H^ν. Mithin gilt für fast alle ν: $H^\nu < C$. Der Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ ist also in C enthalten.

Daraus folgt ohne weiteres der

Hilfssatz 4. Ist ein Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ von $\mathfrak{G}$ in C enthalten, so ist eine ganze Umgebung von ihm in dem in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommenen $\overline{C}$ enthalten.

Satz 4. *Jedes nicht kompakte $\mathfrak{G}$ besitzt Endpunkte und ihre Gesamtheit läßt sich durch ein finites Verfahren erzeugen. Mittels seiner Endpunkte läßt sich $\mathfrak{G}$ zu einem kompakten Raum $\overline{\mathfrak{G}}$ ergänzen.*

Beweis. Es fehlt nur noch der Nachweis, daß jeder Endpunkt $G^1 > G^2 > \ldots$ mit einem Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$ zusammenfällt. Das in $\overline{\mathfrak{G}}$ genommene $\overline{\mathfrak{D}}_{\nu=1}^{\infty}(\overline{G}^\nu)$ ist nicht leer, enthält also einen Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$. Im Sinne von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält also jedes $\overline{G}^\nu$ den Endpunkt $H^1 > H^2 > \ldots$, also enthält nach Hilfssatz 3 im Sinne von $\mathfrak{G}$ jedes G^ν diesen Endpunkt, und der G-Endpunkt enthält den H-Endpunkt, ist daher nach Satz 2 mit ihm identisch.

Definition. Unter dem *Ende* $\mathfrak{E}(C)$ von C verstehen wir die Menge der in C enthaltenen Endpunkte.

Ohne Schwierigkeit ergibt sich daraus

Satz 5. *Die Funktion $\mathfrak{E}$ bildet den Ring der C-Mengen von $\mathfrak{G}$ stetig homomorph ab auf einen Ring abgeschlossener Teilmengen des Raumes $\mathfrak{E}(\mathfrak{G})$. (Ringoperationen sind Vereinigungs- und Durchschnittbildung.) Dabei ist jeder Endpunkt in mindestens einem $\mathfrak{E}(C)$ enthalten. Einem C entspricht dann und nur dann die leere Menge, wenn es kompakt ist, und ihrer zwei haben dann und nur dann dasselbe Ende, wenn sie sich in etwas Kompaktem unterscheiden. Der Durchschnitt der Enden der Gebiete, die einen Endpunkt erzeugen, ist der Endpunkt selbst.*

Satz 6. *$\mathfrak{G}$ sei aus einem zusammenhängenden kompakten topologischen Raum $\mathfrak{H}$ entstanden durch Weglassen der abgeschlossenen Menge P. Dann gibt es eine (vielleicht in keiner Richtung eindeutige) Abbildung von $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{H}$, bei der jeder Punkt von $\mathfrak{G}$ festbleibt, jede Komponente Q von P Bild einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{F}(Q)$ von Endpunkten von $\mathfrak{G}$*

ist, jeder Endpunkt in genau einem $\mathfrak{F}(Q)$ enthalten ist und die Umgebungen von Q und $\mathfrak{F}(Q)$ wechselseitig aufeinander bezogen sind.

Beweis. Die Gesamtheit aller H mit γ Indizes heiße W_γ, $\overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(\overline{W_\gamma}) = 0$, $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}(W_\gamma), P) = 0$. Wir schreiben

$$\mathring{W}_\gamma = W_\gamma + P.$$

P ist innere Teilmenge von $\mathring{W}_\gamma$; denn gäbe es in jeder Umgebung von P Punkte, die nicht zu $\mathring{W}_\gamma$ gehörten, so gäbe es eine in $\mathfrak{G}$ nicht kompakte Menge, die nicht in $\mathring{W}_\gamma$ enthalten wäre; das geht aber deshalb nicht, weil $\mathfrak{G} - W_\gamma$ kompakt in $\mathfrak{G}$ ist. Die Q enthaltende Komponente von $\mathring{W}_\gamma$ heiße $\mathring{V}_\gamma$; $V_\gamma = \mathfrak{D}(\mathring{V}_\gamma, \mathfrak{G})$. Q ist innere Teilmenge von $\mathring{V}_\gamma$, $\overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(V_\gamma)$ genommen in $\mathfrak{G}$ ist leer. Also sind die $\mathring{V}_\gamma$ als Umgebungssystem von Q brauchbar. Ebenso sind nach Hilfssatz 3 und 4 die $V_\gamma + \mathfrak{E}(V_\gamma)$ als Umgebungssystem von $\overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{E}(V_\gamma))$ brauchbar.

Die im Satz angekündigte Abbildung ist folgende: Die Punkte von $\mathfrak{G}$ lassen wir sich selbst entsprechen; für die übrigen Punkte setzen wir fest, daß

$$Q < \mathring{V}_\gamma \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}(Q) < V_\gamma$$

gleichwertig sind, d. h.

$$\mathfrak{F}(Q) = \overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(\mathfrak{E}(V_\gamma)).$$

Dann sind die Aussagen des Satzes über die Zuordnung der Umgebungen von Q und $\mathfrak{F}(Q)$ erfüllt.

Die Umgebung $H_{\nu_1 \dots \nu_\gamma} + \mathfrak{E}(H_{\nu_1 \dots \nu_\gamma})$ eines Endpunktes ist in genau einem $V_\gamma + \mathfrak{E}(V_\gamma)$ enthalten und für je zwei *verschiedene* Komponenten von P ist $\overset{\infty}{\underset{\gamma=1}{\mathfrak{D}}}(V_\gamma + \mathfrak{E}(V_\gamma))$ *verschieden.* Jeder Endpunkt ist also in genau einem $\mathfrak{F}(Q)$ enthalten.

Satz 7. *Die Abschließung von $\mathfrak{G}$ durch seine Endpunkte läßt sich gegenüber andern Abschließungen charakterisieren als Abschließung durch Hinzufügung einer abgeschlossenen Menge P mit folgenden Eigenschaften: 1. die Komponenten von P sind Punkte und zwar Häufungspunkte von $\mathfrak{G}$, 2. das Umgebungssystem von $\mathfrak{G}$ bleibt unverändert, 3. keine Umgebung eines Punktes von P wird durch die in ihr enthaltene Teilmenge von P zerlegt. $\overline{\mathfrak{G}}$ ist also mit $\mathfrak{G}$ topologisch invariant verknüpft.*[15])

Beweis. Daß die Abschließung $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ diese Eigenschaften in der Tat besitzt, ist deshalb klar, weil jedes H ein Gebiet ist.

---

[15]) Bei einer Ausdehnung des Endpunktbegriffes auf im Kleinen nicht zusammenhängende Räume $\mathfrak{G}$, auf die ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen werde, lautet 3. dahin, daß kein hinzugefügter Punkt sich weiter „aufspalten" läßt.

Wir nennen $\mathfrak{H}$ eine unter den Voraussetzungen des Satzes entstehende Abschließung von $\mathfrak{G}$. Die Voraussetzungen des Satzes 6 sind dann gegeben. Jedes Q ist ein Punkt. Enthielte $\mathfrak{F}(Q)$ mehr als einen Endpunkt, z. B.

$$H_{\mu_1} \supset H_{\mu_1\mu_2} \supset \ldots \supset H_{\mu_1\ldots\mu_\gamma} \supset \ldots \quad \text{und} \quad H_{\nu_1} \supset H_{\nu_1\nu_2} \supset \ldots \supset H_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_\gamma} \supset \ldots,$$

so bestände $\mathfrak{D}(\mathring{V}_\gamma, \mathfrak{G})$ aus $H_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_\gamma}$, $H_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_\gamma}$ und etwaigen weiteren H mit γ Indizes, zerfiele also, sobald man γ so groß wählte, daß $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\gamma) \neq (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\gamma)$ ist. Also enthält $\mathfrak{F}(Q)$ einen einzigen Punkt. Nach Satz 6 sind die Endpunkte und die Punkte von P nebst ihren Umgebungen eineindeutig aufeinander bezogen; $\bar{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{H}$ sind also homöomorph.

§ 3.

Der Produktsatz.

$\mathfrak{H}$[16]) sei in diesem Paragraphen ein topologischer Raum, der denselben Anforderungen genügt, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben.

Definition. Wie üblich nennen wir die Menge aller geordneten Punktepaare

$$[a, b] \text{ mit } a \subset \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad b \subset \mathfrak{H}$$

den Produktraum $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$.

Ist $A \subset \mathfrak{G}$ und $B \subset \mathfrak{H}$, so nennen wir $[A, B]$ die Menge aller $[a, b]$ mit $a \subset A$ und $b \subset B$. Ist U eine Umgebung von a und V eine Umgebung von b, so ernennen wir $[U, V]$ zur Umgebung von $[a, b]$.

Man sieht leicht ein, daß $[A, B]$ dann und nur dann kompakt bzw. offen ist, wenn sowohl A als auch B kompakt bzw. offen ist. Ferner sieht man leicht, daß $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ denselben Anforderungen genügt, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben, und daß $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ dann und nur dann kompakt ist, wenn sowohl $\mathfrak{G}$ als auch $\mathfrak{H}$ kompakt ist. Ferner ist

$$\mathfrak{R}([A, B]) = [\mathfrak{R}(A), B] + [A, \mathfrak{R}(B)] + [\mathfrak{R}(A), \mathfrak{R}(B)].$$

Satz 8. *$\mathfrak{H}$ sei nicht kompakt. Ist auch $\mathfrak{G}$ nicht kompakt, so hat $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ genau einen Endpunkt. Ist dagegen $\mathfrak{G}$ kompakt, so lassen sich die Enden von $\mathfrak{H}$ und $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ isomorph aufeinander beziehen.*

Beweis[17]). Sei C eine C-Menge von $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ und $\mathfrak{E}(C)$ nicht leer. Wir können dann schreiben

$$C = \underset{a \subset \mathfrak{G}}{\mathfrak{V}}([a, N_a]),$$

[16]) Hat nichts mit den $\mathfrak{H}$ aus Satz 6 und 7 zu tun.

[17]) Der Beweis ist so geführt, daß sich ein ähnlicher Satz sofort aussprechen läßt für Klassen von Räumen, in denen über die Existenz usw. von Endpunkten nichts bekannt ist.

wobei über alle verschiedenen a von $\mathfrak{G}$ zu summieren ist. Jedes N_a ist offen. Wir setzen bei festem a_0

$$L = \mathfrak{V}_{a \subset \mathfrak{G}} (\mathfrak{V}(N_a, N_{a_0}) - \mathfrak{D}(N_a, N_{a_0}))$$

und werden zeigen, daß L kompakt ist.

Sei nämlich b irgendein Punkt von L, dann gibt es ein a mit

$$b < \mathfrak{V}(N_a, N_{a_0}), \quad b \notin \mathfrak{D}(N_a, N_{a_0}).$$

Wir können annehmen, daß b in N_a, also nicht in N_{a_0} ist. Dann ist

$$[a, b] < C, \quad [a_0, b] \notin C,$$

also gibt es wegen des Zusammenhangs von $[\mathfrak{G}, b]$ ein a_1 mit

$$[a_1, b] < \mathfrak{R}(C).$$

Lassen wir b alle Punkte von L durchlaufen, so folgt aus der Kompaktheit von $\mathfrak{R}(C)$ die von L.

A sei die Menge aller a mit $\mathfrak{R}(N_a) \neq 0$. Aus

$$\mathfrak{V}_{a \subset A}([a, \mathfrak{R}(N_a)]) < \mathfrak{R}(C)$$

folgt die Kompaktheit von A und $\mathfrak{R}(N_a)$.

Tritt unter den Mengen N_a die leere Menge auf, so nennen wir sie N_{a_c}. Dann ist wegen

$$\mathfrak{V}_{a \subset \mathfrak{G}}(N_a) = L$$

N_a kompakt, also von $\mathfrak{H}$ verschieden. Für alle $a \notin A$ ist nach Definition $\mathfrak{R}(N_a)$, also auch N_a leer, und es ist

$$C = \mathfrak{V}_{a \subset A}([a, N_a]) < [A, \mathfrak{V}_{a \subset A}(N_a)] = [A, L].$$

C ist dann im Widerspruch zur Annahme kompakt. Infolgedessen sind alle $N_a \neq 0$, und für $a \notin A$ ist $N_a = \mathfrak{H}$.

Wir können nun schreiben

$$C = [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H}] + \mathfrak{V}_{a \subset A}([a, N_a]),$$

und wir setzen

$$D = [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H}] + [A, N_{a_0}] \tag{1}$$

$$= [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}] - [A, \mathfrak{H} - N_{a_0}] \tag{2}$$

$$= [\mathfrak{G} - A, \mathfrak{H} - N_{a_0}] + [\mathfrak{G}, N_{a_0}]. \tag{3}$$

C und D unterscheiden sich wegen (1) in höchstens $[A, L]$, also in etwas Kompaktem.

Ist $A = 0$, so ist $D = [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ und

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

In diesem Fall sind wir bereits fertig. Wir nehmen in Zukunft an, es sei $A \neq 0$

Wir unterscheiden die beiden Möglichkeiten:

$$\text{I.}\quad \mathfrak{G} - A \neq 0; \qquad \text{II.}\quad \mathfrak{G} - A = 0.$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit I:

$$\mathfrak{R}(D) > [\mathfrak{R}(\mathfrak{G} - A), \mathfrak{H} - N_{a_0}]$$

wegen (3). $\mathfrak{R}(D)$ ist kompakt, also ist $\mathfrak{H} - N_{a_0}$ kompakt. Also unterscheidet sich wegen (2) $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ von D in etwas Kompaktem, also auch von C. Es ist daher wiederum

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

II. Wegen (3) ist

$$D = [\mathfrak{G}, N_{a_0}], \qquad D \text{ ist eine } C\text{-Menge},$$

und

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]);$$

ferner ist, weil A kompakt ist, $\mathfrak{G}$ kompakt.

Ist daher $\mathfrak{G}$ nicht kompakt, so liegt I vor, und $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ besitzt nur den einen Endpunkt

$$\mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]).$$

Ist dagegen $\mathfrak{G}$ kompakt, so bestehen die Möglichkeiten

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]) \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]).$$

Da N_{a_0} eine willkürliche C-Menge ist, besteht der im Satz behauptete Isomorphismus:

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{H}) \longleftrightarrow \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]),$$
$$\mathfrak{E}(N_{a_0}) \longleftrightarrow \mathfrak{E}([\mathfrak{G}, N_{a_0}]).$$

2. Kapitel.

Die Enden der Schiebräume.

In den von uns betrachteten Räumen $\mathfrak{G}$, d. h. in den im Kleinen kompakten, zusammenhängenden, im Kleinen zusammenhängenden, topologischen Räumen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, lassen sich je zwei Punkte durch ein kompaktes Kontinuum verbinden.

Darüber hinaus sei $\mathfrak{G}$ von nun an ein *Schiebraum*. Das soll heißen: Es gibt eine einfach transitive Schar bis auf die Identität fixpunktfreier topologischer Transformationen von $\mathfrak{G}$ in sich mit dem Bild eines festen Punktes e als Parameter; jeder der drei Punkte: Parameter, Original und Bild ist stetig von den beiden andern zusammen abhängig.

Wir schreiben das Bild als geordnetes Produkt von Parameter und Original. Dann ist

$$e\,a = a\,e = a$$

und aus der Existenz je zweier der drei Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a, \quad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b, \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu b_\nu = ab \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

folgt die des dritten.

Unter MN verstehen wir die Menge aller Punkte mn mit $m \subset M$ und $n \subset N$. Mit je zweien der drei Mengen

$$M, \quad N, \quad MN$$

ist auch die dritte kompakt.

aC bzw. aG ist eine C- bzw. G-Menge, desgleichen Ca bzw. Ga. Es ist $\mathfrak{R}(aC) = a\mathfrak{R}(C)$ usw.

Satz 9. $\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(aC) = \mathfrak{E}(Ca)$.

Beweis. Im Falle $\mathfrak{E}(C) = 0$ ist der Satz klar. Wir nehmen also an $\mathfrak{E}(C) \neq 0$. Sei $\mathfrak{E}(C) \neq \mathfrak{E}(aC)$. Dann gibt es entweder in C eine gegen aC oder in aC eine gegen C fremde nicht kompakte Menge $c_1, c_2, \ldots$. Wir verbinden e mit a durch ein kompaktes Kontinuum A. Dann ist z. B.

$$c_\nu \nsubset aC \quad \text{und} \quad ac_\nu \subset aC, \quad \text{also} \quad \mathfrak{D}(A, \mathfrak{R}(aC)) \neq 0.$$

Es gibt also zu jedem ν ein $a_\nu \subset A$ mit

$$a_\nu c_\nu \subset \mathfrak{R}(aC).$$

Die Mengen a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und $\mathfrak{R}(aC)$ sind kompakt, also ist im Widerspruch zur Annahme die Menge c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ kompakt. Also ist

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(aC).$$

Ebenso beweist man

$$\mathfrak{E}(C) = \mathfrak{E}(Ca).$$

Satz 10. *Sei* $\mathfrak{E}(C) \neq 0$ *und* $c_1, c_2, \ldots$ *eine divergente Folge aus* C. *Dann liegen fast alle* ac_ν *und fast alle* $c_\nu a$ *in* C.

Beweis. Nach Satz 9 unterscheidet sich $\mathfrak{D}(C, aC)$ von aC in einer kompakten Menge. Alle ac_ν sind in aC, also fast alle in $\mathfrak{D}(C, aC)$ und daher auch in C. Ebenso folgt der zweite Teil des Satzes.

Satz 11. M *sei kompakt. Ferner sei* $c_1, c_2, \ldots$ *eine divergente Folge aus* C. *Dann liegen fast alle* $c_\nu M$ *und fast alle* Mc_ν *in* C.

Beweis. m sei ein Punkt von $\overline{M}$ und U_m eine seiner Umgebungen. Nach Satz 10 gibt es ein ν'_m mit

$$c_\nu m \subset C \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'_m.$$

Wäre für unendlich viele ν

$$c_\nu U_m \nsubset C,$$

so gäbe es wegen des Zusammenhangs von U_m eine Teilfolge μ_ν und Punkte $q_{\mu_\nu} \subset U_m$ mit

$$c_\nu q_{\mu_\nu} \subset \mathfrak{R}(C).$$

Die Mengen q_{μ_ν} und $\mathfrak{R}(C)$ wären kompakt, also im Widerspruch zur Voraussetzung auch die Menge $c_1, c_2, \ldots$. Darum gibt es ein ν_m'' mit $c_\nu U_m \subset C$ für $\nu \geqq \nu_m''$. Mit endlich vielen U_m läßt sich M überdecken: unter den Zahlen ν_m'' gibt es eine größte ν''. Für $\nu \geqq \nu''$, also für fast alle ν ist $c_\nu M \subset C$. Ebenso folgt der zweite Teil des Satzes.

Aus diesen drei Sätzen geht unmittelbar der folgende Satz hervor:

Satz 12. *Unsere Transformationsschar läßt sich von $\mathfrak{G}$ stetig auf $\overline{\mathfrak{G}}$ fortsetzen. Die Endpunkte sind Fixpunkte. Jede in $\mathfrak{G}$ kompakte Menge läßt sich durch Transformationen der Schar in jede Umgebung jedes Endpunktes hineinziehen.*

Satz 13. *Zu jedem G gibt es ein G^* mit $\mathfrak{E}(\mathfrak{D}(G, G^*)) = 0$ und $G + G^* = \mathfrak{G}$.*

Beweis. Wir überdecken $\mathfrak{R}(G)$ mittels endlich vieler V (Hilfssatz 2). Die endlich vielen Komponenten der Überdeckungsmenge verbinden wir durch kompakte Kontinua mit einer von ihnen und überdecken diese Kontinua gleichfalls mit endlich vielen V. Die gesamte Überdeckungsmenge ist zusammenhängend bzw. kompakt wegen des Zusammenhangs bzw. der Kompaktheit im Kleinen von $\mathfrak{G}$. Wir vereinigen sie mit $\mathfrak{G} - G$ und erhalten das gewünschte G^*, das, wie man sofort sieht, allen Anforderungen genügt

Satz 14. *Es sei $\mathfrak{E}(G_2) \not\subset \mathfrak{E}(G_1)$. Ferner sei $c_1, c_2, \ldots$ eine divergente Folge aus G_1. Dann gibt es ein ν' mit $c_\nu G_2^* \subset G_1$ für $\nu \geqq \nu'$.*

Beweis. Nach Satz 11 gibt es ein ν' mit

$$c_\nu \mathfrak{R}(G_2^*) \subset G_1 - \mathfrak{D}(G_1, G_1^*) \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'.$$

Demnach besitzt $c_\nu G_2^*$ außerhalb $G_1 - \mathfrak{D}(G_1, G_1^*)$, d. h. innerhalb G_1^* keine Randpunkte. Besäße es dort überhaupt Punkte, so enthielte es G_1^*, und es wäre

$$\mathfrak{E}(G_1^*) \subset \mathfrak{E}(c_\nu G_2^*) \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu'.$$

Nach Satz 9 wäre dann

$$\mathfrak{E}(G_1^*) \subset \mathfrak{E}(G_2^*),$$

also

$$\mathfrak{E}(G_2) \subset \mathfrak{E}(G_1),$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Daher ist $\mathfrak{D}(G_1^*, c_\nu G_2^*) = 0$ und $c_\nu G_2^* \subset G_1$ für $\nu \geqq \nu'$.

Satz 15. *$\mathfrak{G}$ besitzt höchstens zwei gegeneinander fremde Enden, also höchstens zwei verschiedene Endpunkte.*

Beweis. Wir nehmen die Existenz von drei paarweise fremden nicht leeren Enden $\mathfrak{E}(G_1)$, $\mathfrak{E}(G_2)$, $\mathfrak{E}(G_3)$ an[18]; wir können voraussetzen, daß

[18]) Daß hier mit G statt C gearbeitet wird, ist nicht wesentlich; siehe auch Fußnote [15]), S. 702.

die G_ν paarweise fremd sind. Nach Satz 14 gibt es ein a mit

$$aG_2^* \subset G_1.$$

Daraus folgt nach Satz 9

$$\mathfrak{E}(G_2^*) \subset \mathfrak{E}(G_1).$$

Ferner ist

$$G_1 + G_3 \subset G_2^*,$$

also

$$\mathfrak{E}(G_1) + \mathfrak{E}(G_3) \subset \mathfrak{E}(G_2^*) \subset \mathfrak{E}(G_1).$$

Das ergibt

$$\mathfrak{D}(G_1, G_3) \neq 0 \quad (\text{wegen } \mathfrak{E}(G_3) \neq 0),$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Also war unsere Annahme falsch, und der Satz ist bewiesen.

Wir verstehen im folgenden unter G' bzw. G'' die Menge aller g' bzw. g'' mit $gg' = a$ bzw. $g''g = a$, wenn $g \subset G$ und a ein fester Punkt ist.

Satz 16. $\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_1'') = \mathfrak{E}(G_2)$ *und* $\mathfrak{E}(G_2') = \mathfrak{E}(G_2'') = \mathfrak{E}(G_1)$.

Beweis. Wäre

$$\mathfrak{E}(G_1') \neq \mathfrak{E}(G_2),$$

so wäre nach Satz 15

$$\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_1) = \mathfrak{E}(G_2^*).$$

In $\mathfrak{D}(G_2^*, G_1)$ gäbe es also eine Menge ohne Häufungspunkt $c_1, c_2, \ldots$, derart, daß auch $c_1', c_2', \ldots$ in $\mathfrak{D}(G_2^*, G_1)$ enthalten wäre. Nach Satz 14 gäbe es ein c_ν mit

$$c_\nu G_2^* \subset G_1.$$

Dann wäre auch $c_\nu c_\nu' = a \subset G_1$; wir können aber G_1 von vornherein so wählen, daß es a nicht enthält. Unsere Annahme führt zum Widerspruch, also ist $\mathfrak{E}(G_1') = \mathfrak{E}(G_2)$. Ebenso folgen die übrigen Behauptungen des Satzes.

Satz 17. *Jeder geschlossene Weg W in $\mathfrak{G}$ läßt sich unter Festhaltung eines Punktes stetig überführen in einen Weg $W_2 = A + W_1 - A$. Dabei bedeutet W_1 einen ganz in einem beliebigen C mit $\mathfrak{E}(C) \neq 0$ verlaufenden geschlossenen Weg und A einen in dem festgehaltenen Punkt beginnenden und in C endenden Weg. Ist daher irgendeine Umgebung irgendeines Endpunktes von $\mathfrak{G}$ einfachzusammenhängend, so ist $\mathfrak{G}$ einfachzusammenhängend. — Ferner läßt sich in $\overline{\mathfrak{G}}$ jede in $\mathfrak{G}$ kompakte Menge stetig auf einen Punkt zusammenziehen.*

Beweis[19]). Nach Satz 11 gibt es ein a mit $W_1 = aW \subset C$. Wir verbinden e mit a durch den Weg $A = a_\tau$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ und verstehen unter

[19]) Die im Beweis benutzte Tatsache der Verbindbarkeit zweier Punkte durch eine Kurve ist leicht zu beweisen und z. B. aus Sätzen von Hahn und Mazurkiewicz (siehe etwa Sitzungsberichte Wien **123** (1914), S. 2433) abzuleiten.

A_σ das Stück von a_τ für $0 \leqq \tau \leqq \sigma$. Wir können annehmen, daß der festgehaltene Punkt e ist. Die gewünschte Überführung lautet $A_\tau + a_\tau W - A_\tau$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$.

Der zweite Teil des Satzes folgt unmittelbar aus Satz 11.

Satz 18. *$\hat{\mathfrak{G}}$ sei eine Unterschar von $\mathfrak{G}$ und genüge denselben Anforderungen, wie wir sie an $\mathfrak{G}$ gestellt haben. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei abgeschlossen und habe genau ein Ende. Dann hat auch $\mathfrak{G}$ genau ein Ende.*

Beweis. Hätte $\mathfrak{G}$ kein Ende, so wäre es kompakt; dann wäre auch $\hat{\mathfrak{G}}$ kompakt, was einen Widerspruch zur Voraussetzung ergibt.

Hätte $\mathfrak{G}$ zwei Enden, so gäbe es nach Satz 16 ein G mit $\mathfrak{E}(G) \neq \mathfrak{E}(G')$ und $\mathfrak{D}(G, G') = 0$.[20]) Es sei $\hat{G} = \mathfrak{D}(\hat{\mathfrak{G}}, G)$, dann ist $\hat{G}' = \mathfrak{D}(\hat{\mathfrak{G}}, G')$. $\mathfrak{E}(\hat{G})$ und $\mathfrak{E}(\hat{G}')$ erschöpfen $\mathfrak{E}(\hat{\mathfrak{G}})$, denn andernfalls gäbe es in $\hat{\mathfrak{G}}$, also in $\mathfrak{G}$ eine zu $G + G'$ fremde nicht kompakte Menge. Da $\hat{\mathfrak{G}}$ nicht kompakt ist, so gilt $\mathfrak{E}(\hat{G}) \neq 0$ und nach Voraussetzung

$$\mathfrak{E}(\hat{G}) = \mathfrak{E}(\hat{G}').$$

Das ergibt $\mathfrak{D}(\hat{G}, \hat{G}') \neq 0$, $\mathfrak{D}(G, G') \neq 0$ im Widerspruch zur Annahme. Mithin ist $\mathfrak{E}(G) = \mathfrak{E}(G')$, $\mathfrak{G}$ hat also genau ein Ende.

3. Kapitel.

Die Enden topologischer Gruppen.

$\mathfrak{G}$ sei von nun an eine topologische Gruppe. Das soll heißen: Zwischen den Punkten von $\mathfrak{G}$ existiert eine den bekannten Gruppengesetzen genügende verbindende Relation (zu den Forderungen des 2. Kapitels kommt also noch die der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes), und aus der Existenz von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

folgt die von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{-1} = a^{-1} \quad \text{und von} \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu b_\nu = ab \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Identität bezeichnen wir mit e und befleißigen uns auch im übrigen der von der Produktbildung aus dem 2. Kapitel her gewohnten Bezeichnungen.

$\mathfrak{G}$ ist dann auch ein Schiebraum, und wir können ohne weiteres die Sätze 9 bis 18 auch für die topologische Gruppe $\mathfrak{G}$ aussprechen. In diesem Zusammenhang wollen wir sie als 9^* bis 18^* bezeichnen. Für G' und G'' werden wir, da die Annahme $a = e$ unwesentlich ist, G^{-1} schreiben, und entsprechend erklären wir allgemein das Zeichen M^{-1}. Satz 16^* lautet dann dahin, daß in einem $\mathfrak{G}$ mit zwei verschiedenen Enden diese zueinander invers sind.

[20]) Das zur Erzeugung von G' nötige a wähle man aus $\hat{\mathfrak{G}}$.

Als Gruppenkriterien im Sinne der Einleitung dürften von den bewiesenen Sätzen am brauchbarsten Satz 15 und 17 sein. In der Tat führen diese im Fall der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten recht weit (im zweidimensionalen Fall ist man nicht auf unsere Sätze angewiesen).

Definition. $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ in dem „Wirkungsraum" $\mathfrak{W}$, wenn jedem Punkt a von $\mathfrak{G}$ eine eineindeutige Transformation $f_a(\mathfrak{W})$ von $\mathfrak{W}$ in sich zugeordnet ist mit

$$f_{ab}(x) = f_a(f_b(x)).$$ [21])

Die Punkte bzw. Mengen von $\mathfrak{W}$ bezeichnen wir durch x, y, z bzw. X, Y, Z. Über $\mathfrak{W}$ machen wir dieselben Voraussetzungen, wie wir sie über $\mathfrak{G}$ gemacht haben, d. h. $\mathfrak{W}$ soll ein topologischer Raum mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom sein, zusammenhängend, im Kleinen zusammenhängend und im Kleinen kompakt.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt einstufig, wenn aus $a \neq b$ $f_a(x) \not\equiv f_b(x)$ folgt.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt transitiv, wenn es zu je zwei Punkten x, y von $\mathfrak{W}$ ein a aus $\mathfrak{G}$ gibt mit $f_a(x) = y$.

$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ heißt stetig, wenn aus der Existenz von

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a \quad \text{und} \quad \lim_{\nu=\infty} x_\nu = x \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die von

$$\lim_{\nu=\infty} f_{a_\nu}(x_\nu) = f_a(x)$$

folgt.

Wir verstehen unter $f_A(X)$ die Menge aller $f_a(x)$ mit $a \subset A$ und $x \subset X$.

Satz 9a. $\mathfrak{E}(f_a(X)) = \mathfrak{E}(X)$, *bei stetigem* $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$.

Beweis. Genau wie der von Satz 9.

Satz 19. $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ *sei eine transitive stetige Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{W}$. *Es sei* $f_a(x_0) = x$. *Dann gibt es zu jeder Umgebung* Z_x *von* x *eine Umgebung* U_a *von* a *mit*

$$f_{U_a}(x_0) \subset Z_x$$

und zu jeder Umgebung U_a *von* a *eine Umgebung* Z_x *von* x *mit*

$$f_{U_a}(x_0) \supset Z_x.$$

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus der Stetigkeit von $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$. Wir werden den ganzen Beweis führen, ohne von dem Zusammenhang von $\mathfrak{G}$ Gebrauch zu machen; von $\mathfrak{W}$ werden wir an topologischen Eigenschaften nur benutzen, daß es ein topologischer Raum ist.

Es genügt, den zweiten Teil des Satzes für $a = e$ zu beweisen, weil aU_e eine Umgebung von a vertritt.

---

[21]) Z. B. $\mathfrak{G}$ = dreidimensionaler projektiver Raum, $\mathfrak{W}$ = zweidimensionale Kugel, $f_a(\mathfrak{W})$ = Kugeldrehungen.

Nach Hilfssatz 1 läßt sich e von dem kompakten $\mathfrak{R}(U_e)$ durch eine Umgebung abtrennen, die in U_e enthalten und gegen eine Umgebung von $\mathfrak{R}(U_e)$ fremd ist, deren abgeschlossene Hülle also in U_e enthalten ist. Es genügt daher, den zweiten Teil des Satzes mit $\overline{U}_e$ statt U_a zu beweisen.

Zunächst eine Vorbemerkung: $B_1, B_2, \ldots$ sei eine Folge abgeschlossener Mengen von $\mathfrak{G}$ ohne innere Punkte. Wir machen die Annahme,

$$B = \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{V}}}(B_\nu)$$

enthielte einen inneren Punkt b_1 und seine abgeschlossene Umgebung $\overline{V}_{b_1}$, und werden aus der Annahme einen Widerspruch herleiten.

$V_{b_1} - \mathfrak{D}(V_{b_1}, B_1)$ ist offen, enthält b_2 und $\overline{V}_{b_2}$,

$V_{b_\nu} - \mathfrak{D}(V_{b_\nu}, B_1 + \ldots + B_\nu)$ ist offen, enthält $b_{\nu+1}$ und $\overline{V}_{b_{\nu+1}}$.

Dann gilt

(1) $$\overline{V}_{b_\nu} < \overline{V}_{b_1} < B.$$

Ferner ist

(2) $$\mathfrak{D}(\overline{V}_{b_\nu}, B_1 + \ldots + B_{\nu-1}) = 0,$$

(3) $$0 + \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{D}}}(\overline{V}_{b_\nu}) > b = \lim b_\nu,$$

weil $\mathfrak{G}$ im Kleinen kompakt ist und jedes $\overline{V}_{b_\nu}$ das nachfolgende enthält.

$$b \notin \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{V}}}(B_\nu) \qquad \text{wegen (2),}$$

$$b < \overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{V}}}(B_\nu) \qquad \text{wegen (1) und (3).}$$

Damit ist der Widerspruch aufgewiesen. B enthält also keinen inneren Punkt.

Nun zum Beweise unseres Satzes. $\mathfrak{G}$ läßt sich mit abzählbar vielen $d_\nu \overline{V}_e$ überdecken, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Enthielte $f_{\overline{V}_e}(x)$ keinen inneren Punkt, so gälte das gleiche für

$$f_{d_\nu \overline{V}_e}(x_0) = f_{d_\nu}(f_{\overline{V}_e}(x_0))$$

und nach der Vorbemerkung auch für

$$\overset{\infty}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{V}}}(f_{d_\nu \overline{V}_e}(x_0)) = f_{\mathfrak{V}(d_\nu \overline{V}_e)}(x_0) = f_{\mathfrak{G}}(x_0) = \mathfrak{W}.$$

Das ist aber unmöglich. Somit enthält $f_{\overline{V}_e}(x_0)$ einen inneren Punkt y und seine Umgebung Z_y. Dann gibt es ein $b < \overline{V}_e$ mit

$$f_b(x_0) = y.$$

$$f_{b^{-1}\overline{V}_e}(x_0) = f_{b^{-1}}(f_{\overline{V}_e}(x_0))$$

enthält x_0 als inneren Punkt, also auch eine Umgebung Z_{x_0} von x_0. Man braucht daher $\overline{V}_e$ nur so zu wählen, daß

$$\overline{V}_e^{-1}\overline{V}_e < \overline{U}_e$$

gilt. Dann folgt

$$f_{\overline{U}_e}(x_0) > f_{\overline{V}_e^{-1}\overline{V}_e}(x_0) > Z_{x_0},$$

wie gewünscht.

Satz 20. *$\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ sei eine stetige einstufige transitive Darstellung von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{W}$. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei die Menge aller a mit $f_a(x_0) = x_0$. $\hat{\mathfrak{G}}$ sei kompakt. Dann haben $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{W}$ gleich viel Enden.*

Beweis. Im I. Teil des Beweises werden wir eindeutig jedem Ende von $\mathfrak{G}$ ein Ende von $\mathfrak{W}$ zuordnen, im II. Teil umgekehrt jedem Ende von $\mathfrak{W}$ ein Ende von $\mathfrak{G}$; im III. Teil werden wir die Gleichwertigkeit beider Zuordnungen nachweisen.

I. C sei eine C-Menge von $\mathfrak{G}$. C ist offen, also ist nach dem zweiten Teil von Satz 19 $f_C(x_0)$ offen; $\mathfrak{R}(C)$ ist kompakt, also ist wegen der Stetigkeit der Darstellung $\mathfrak{R}(f_C(x_0))$ kompakt.

$$Y = f_C(x_0)$$

ist demnach eine C-Menge von $\mathfrak{W}$.

Ist C kompakt, so ist wegen der Stetigkeit der Darstellung Y kompakt. Aus

$$\mathfrak{E}(C) = 0 \qquad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(Y) = 0,$$

aus

$$\mathfrak{E}(C_1) = \mathfrak{E}(C_2) \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(Y_1) = \mathfrak{E}(Y_2).$$

II. Wir vergessen die Bedeutung von C und Y aus (I) und nehmen an, Y sei eine beliebige C-Menge von $\mathfrak{W}$. Die Menge aller c mit $f_c(x_0) < Y$ heiße C. $Y = f_C(x_0)$ ist offen, also ist nach dem ersten Teil von Satz 19 C offen. Wir wollen nachweisen, daß $\mathfrak{R}(C)$ kompakt ist, d. h. wir wollen zeigen, daß eine beliebige unendliche Teilmenge M von $\mathfrak{R}(C)$ einen Häufungspunkt besitzt.

$$f_M(x_0) < \mathfrak{R}(Y),$$

also kompakt. Es gibt also eine konvergente Teilfolge $x_1, x_2, \ldots$, von $f_M(x_0)$; ihr Grenzwert heiße

$$\begin{aligned} f_l(x_0) &= x, \\ f_{k_\nu}(x_0) &= x_\nu \qquad (k_\nu < M). \\ f_{l_\nu}(x_0) &= x_\nu \end{aligned}$$

läßt sich nach Satz 19, 2. Teil, mit $\lim l_\nu = l$ erreichen,

$$\begin{aligned} f_{k_\nu^{-1} l_\nu}(x_0) &= x_0, \\ k_\nu^{-1} l_\nu &< \hat{\mathfrak{G}} \qquad \text{kompakt.} \end{aligned}$$

Mithin hat die Folge k_ν, also auch M einen Häufungspunkt, und $\mathfrak{R}(C)$ ist kompakt. C ist daher eine C-Menge.

Genau so zeigt man, daß die Kompaktheit von Y die von C nach sich zieht, d. h.

$$\text{aus} \quad \mathfrak{E}(Y) = 0 \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(C) = 0,$$

$$\text{aus} \quad \mathfrak{E}(Y_1) = \mathfrak{E}(Y_2) \quad \text{folgt} \quad \mathfrak{E}(C_1) = \mathfrak{E}(C_2).$$

III. Wir konstruieren nach (II) zu einem Y sein C und nach (I) zu diesem C sein Y, das mit dem Ausgangs-Y identisch ist, ebenso nach (I) zu einem C sein Y und nach (II) zu diesem Y sein C, das aus dem Ausgangs-C auch durch hintere Multiplikation mit $\hat{\mathfrak{G}}$ entsteht, dessen Ende also nach Satz 9 und 11 mit dem von C zusammenfällt.

Daß Satz 20 ohne die Kompaktheit von $\hat{\mathfrak{G}}$ nicht zu gelten braucht, zeigt folgendes

Beispiel. $\mathfrak{W}$ sei die Gerade, x die Koordinate eines Punktes von $\mathfrak{W}$ (kleine lateinische Buchstaben bedeuten im folgenden reelle Zahlen). $\mathfrak{G}$ sei die Menge aller Transformationen

$$x' = a\,x + b, \quad a > 0,$$

ist also der Euklidischen Ebene homöomorph. $\hat{\mathfrak{G}}$ ist der Geraden homöomorph, also nicht kompakt, $\mathfrak{G}$ hat einen Endpunkt, $\mathfrak{W}$ hat deren zwei.

Berlin, Januar 1930.

Einige Sätze über topologische Gruppen [1936a]

Ann. of Math. (2) 37 (1936), 46–56
[JFM 62.0437.01; Zbl 0013.20201]

(Received January 19, 1935)

Im Folgenden werde ich einige einfache Sätze über topologische Gruppen beweisen, die zwar an sich nicht viel bedeuten, die aber dauernd bei allen möglichen Untersuchungen über topologische Gruppen gebraucht werden.[1] Wenn man die elementaren Sätze der reinen Gruppentheorie auf topologische Gruppen übertragen will, stösst man nämlich immer wieder auf gewisse Schwierigkeiten. Der innere Grund dieser Schwierigkeiten ist die Tatsache, dass sich schon in recht einfachen Fällen ein stetiger Homomorphismus nicht mehr durch Faktorgruppenbildung nach einem abgeschlossenen Normalteiler erzeugen zu lassen braucht. Bildet man z.B. von der Gruppe G der Translationen der (x, y)-Ebene die Faktorgruppe G' nach dem Normalteiler aller "ganzzahligen" Translationen, so geht die abgeschlossene Untergruppe H ($y = ax$, a irrational) von G in eine nicht abgeschlossene, überall dichte Untergruppe H' von G' über. Die Abbildung von H auf H' ist ein Isomorphismus, der den topologischen Charakter von H ganz ändert; sie ist nur in *einer* Richtung stetig. Wenn solche Komplikationen eintreten, kann man die Sätze der elementaren Gruppentheorie nicht ohne Weiteres übertragen. Wir wollen nun einen möglichst weiten Bereich für die Gültigkeit dieser Sätze abgrenzen.

1. Alle betrachteten topologischen Gebilde sollen separable topologische Räume sein.[2] Unter einer Gruppe verstehen wir immer eine topologische Gruppe, d.h. eine Gruppe, deren Elemente die Punkte eines topologischen Raumes (kleine lateinische Buchstaben) und deren Operationen (Bildung des Produktes und der Inversen) stetig im Sinne der Topologie des Raumes sind. Wir erinnern an die drei äquivalenten Definitionen der Stetigkeit: konvergente Folgen gehen in konvergente Folgen über; die Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen; die Urbilder offener Mengen sind offen.

"Homomorphes bzw. isomorphes (= eineindeutiges) Bild" bedeutet immer "*stetig* homomorphes bzw. isomorphes Bild." Eine in beiden Richtungen stetige Isomorphie heisst topologische Isomorphie (Zeichen $\cong$).

Der Durchschnitt zweier Teilmengen M und N einer Gruppe wird mit $M \vee N$ bezeichnet; MN bezeichnet die Menge aller Punkte mn mit $m \subset M$, $n \subset N$.

Eine Untergruppe ist als Teilmenge zu topologisieren, ein direktes Produkt

[1] Siehe nachfolgende Arbeit des Verf.: *Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen.* Annals of Math., dieses Heft.

[2] d.h. reguläre Hausdorffsche Räume mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom (F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914). Die Voraussetzung der Regularität ist jedoch überflüssig (wenn man es mit Gruppen zu tun hat), wie D. van Dantzig gezeigt hat. Siehe: *Zur topologischen Algebra* I, Math. Ann. 107 (1932), 587–626, Satz TG 14.

als topologisches Produkt der Faktoren, d.h. ist U_1 eine Umgebung in G_1, U_2 eine in G_2, so ist $U_1 \times U_2$ eine in $G_1 \times G_2$; die Faktorgruppe[3] G/H von G nach dem abgeschlossenen Normalteiler H ist zu topologisieren als Raum der Nebengruppen, d.h. ist U eine Umgebung in G, so ist die Gesamtheit der in UH enthaltenen Nebengruppen aH eine Umgebung in G/H (dass die topologischen Axiome erfüllt sind, ist klar).

2. Alle folgenden Untersuchungen gelten, ohne dass wir es bei den einzelnen Sätzen ausdrücklich erwähnen, auch für Gruppenkeime.[4] Ein Gruppenkeim ist ein Raum, in dem die Gruppenoperationen zwischen den Punkten in einer *offenen* Teilmenge erklärt sind; soweit die Gruppenoperationen erklärt sind, sollen sie den gruppentheoretischen und topologischen Voraussetzungen genügen; die offene Teilmenge soll die Identität enthalten.

3. Ein Homomorphismus heisst *gebietstreu*, wenn das Bild jeder offenen Menge eine offene Menge ist.

4. *Ein Homomorphismus ist dann und nur dann gebietstreu, wenn das Bild jeder offenen Menge einen inneren Punkt enthält.*

BEWEIS: Die Notwendigkeit ist evident.—Sei U eine Umgebung in G, U' ihr Bild in G'. U' enthält nach Voraussetzung eine offene Menge W', der Durchschnitt des Urbildes von W' mit U heisse W. Dann ist W' das Bild von W. Die Umgebungen von e[5] mögen $U_1, U_2, \cdots$ heissen. In U_n gibt es, wie wir sahen, eine offene Menge W_n, deren Bild offen ist. Ist O irgendeine offene Menge von G, so lässt sich zu jedem Punkt von O ein ihn enthaltendes $a_n W_n$ angeben, das in O enthalten ist. O lässt sich also als Vereinigung offener Mengen mit offenen Bildern darstellen; das Bild O' von O ist als Vereinigung offener Mengen selbst offen.

5. *Das homomorphe Bild einer im Kleinen kompakten*[6] *Gruppe ist dann und nur dann gebietstreu, wenn es von zweiter Kategorie*[7] *ist.*[8]

[3] Zuerst zu finden bei D. van Dantzig, *Studiën over topologische Algebra*, Diss. Amsterdam 1931, S. 6. Siehe auch D. van Dantzig, *Zur topologischen Algebra* I, Math. Ann. 107 (1932), 587–626, insbesondere S. 609–610. Man beachte jedoch, dass der Satz TG 20 (ähnlich wie T33) dieser Arbeit zur Hälfte unrichtig ist, wie gerade das Beispiel unserer Einleitung zeigt.

[4] Der Begriff des Gruppenkeimes wird in der Lieschen Theorie immerzu verwendet; zum ersten Mal hat ihn O. Schreier (Jahresberichte DMV 37 (1928), 113–132) vollständig formuliert.

[5] Die Identität wird—in welcher Gruppe auch—immer mit e bezeichnet.

[6] Eine echte oder unechte Teilmenge eines Raumes heisst kompakt, wenn jede ihrer unendlichen Teilmengen im Raume einen Häufungspunkt besitzt. Wichtig ist: Der Durchschnitt einer absteigenden Folge nichtleerer abgeschlossener kompakter Mengen ist nichtleer. Im Kleinen kompakt heisst: die Umgebungen sind kompakt.

[7] Ein Raum heisst von zweiter Kategorie, wenn er sich nicht als Summe abzählbar vieler nirgendsdichter Teilmengen darstellen lässt. Siehe F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin 1927, S. 142. Für die Anwendungen wichtig ist, dass jeder im Kleinen kompakte Raum von zweiter Kategorie ist.

[8] Im Wesentlichen *dieser* Satz (in der allgemeineren Form von Satz 26) findet sich auch

BEWEIS: U sei eine kompakte Umgebung in G; dann ist G die Vereinigung abzählbar vieler aU. G' ist die Vereinigung der abzählbar vielen Bilder $a'U'$ der aU. Wenn G' von zweiter Kategorie ist, muss eines der $a'U'$ irgendwo dicht sein, also muss auch U', das Bild von U, irgendwo dicht sein. Die abgeschlossene Hülle von U', die das Bild der abgeschlossenen Hülle $\overline{U}$ von U ist,[9] enthält also einen inneren Punkt, d.h. das Bild von $\overline{U}$ enthält einen inneren Punkt. Ist O nun irgendeine offene Menge, so gibt es in O eine Umgebung U, deren abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ auch noch in O ist;[10] das Bild von O enthält das von $\overline{U}$, also einen inneren Punkt. Nach 4 ist die Abbildung also gebietstreu.

Die Umkehrung folgt aus dem nächsten Satz.

6. *Das gebietstreue homomorphe Bild einer im Kleinen kompakten Gruppe ist im Kleinen kompakt.* (Beweis klar, denn das Bild einer kompakten offenen Menge wird wieder eine kompakte offene Menge.)

7. *Ist das homomorphe Bild einer Gruppe im Kleinen kompakt, so ist es gebietstreu.*

BEWEIS: O sei eine offene Menge in G. Dann ist G die Vereinigung abzählbar vieler aO. Das Bild von O in G' heisse O'. Dann ist G' die Vereinigung abzählbar vieler $a'O'$ (Bilder der aO). W' sei eine kompakte abgeschlossene Umgebung in G'. W' ist also in der Vereinigung endlich vieler $a'O'$ enthalten; eines von ihnen enthält einen inneren Punkt,[11] also enthält O' einen inneren Punkt, also ist nach 4 die Abbildung gebietstreu.

8. *Notwendig und hinreichend für Gebietstreue eines Homomorphismus ist, dass man zu jeder konvergenten Folge eine konvergente Folge von Urbildern finden kann.*

BEWEIS: Notwendig: G ist gebietstreu auf G' abgebildet. a'_n sei eine konvergente Folge in G', a' ihr Limes. a sei ein Urbild von a'; U_m seien die Umgebungen von a, ihre Bilder sind offen, sie heissen bzw. U'_m. Fast alle a'_n sind in U'_m, d.h. alle von a'_{n_m} an. Von $a'_{n_m}, \cdots, a'_{n_{m+1}-1}$ suchen wir Urbilder in U_m: bzw. $a_{n_m}, \cdots, a_{n_{m+1}-1}$. Die Folge dieser a_n konvergiert gegen a.

Hinreichend: O sei eine offene Menge in G, O' ihr Bild in G', a' ein Punkt von O', a'_n eine gegen a' konvergente Folge und a^*_n eine (nach Voraussetzung existierende) Folge von Urbildern in G, die gegen a^* konvergiere. a sei ein Urbild von a' in O; dann gibt es auch eine gegen a konvergente Folge a_n von Urbildern der a'_n (nämlich etwa $a_n = a^*_n a^{*-1} a$). O enthält fast alle a_n, also O'

in meiner Diss.: *Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*, Math. Zeitschr. 33 (1931), 692–713; siehe Satz 19 auf S. 710. Allerdings finden sich dort einige Versehen.

[9] Bei der Abbildung eines Raumes auf einen andern geht eine kompakte Teilmenge in eine kompakte und ihre abgeschlossene Hülle in die abgeschlossene Hülle über.

[10] Die Existenz ergibt sich aus der Regularität des Raumes (siehe[2]).

[11] Siehe F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin 1927, S. 141, Satz VI.

fast alle a'_n. Das gilt für jede gegen a' konvergente Folge, also ist a' innerer Punkt von O'. Das gilt für jeden Punkt a' von O', also ist O' offen.

9. *Ein Isomorphismus ist dann und nur dann topologisch, wenn er gebietstreu ist.* (Beweis klar nach 8.)

10. *Ein Homomorphismus lässt sich dann und nur dann durch Faktorgruppenbildung nach einem abgeschlossenen Normalteiler erzeugen, wenn er gebietstreu ist. Genauer: Ist G homomorph abgebildet auf G' und ist N der (abgeschlossene) Normalteiler aller in (e) übergehenden Elemente, so ist dann und nur dann*

$$G' \cong G/N,$$

wenn der Homomorphismus gebietstreu ist.

BEWEIS:[12] "Nur dann": Sei O offen in G, O' sein Bild in G', a' ein Punkt aus O', a eines seiner Urbilder in O, U eine in O enthaltene Umgebung von a. UN ist nach Definition eine Umgebung in G/N und enthalten in ON, das sich als O' deuten lässt. O' enthält also zu jedem seiner Punkte a' eine Umgebung.

"Dann": G/N ist isomorph auf G' abgebildet, wenn jedem aN das Bild a' in G' (von a in G) zugeordnet ist. Jede offene Menge in G/N hat zum Urbild eine offene Menge in G (siehe ersten Teil des Beweises), und deren Bild in G' ist nach Voraussetzung offen. Also ist tatsächlich der Isomorphismus von G/N auf G' gebietstreu, also nach 9 topologisch.

11. *Ist $N \subset H \subset G$, H abgeschlossene Untergruppe und N abgeschlossener Normalteiler von G, so ist H/N abgeschlossene Untergruppe von G/N.*

BEWEIS: H/N ist als Menge die Gesamtheit der in $HN=H$ enthaltenen Nebengruppen und wegen der Abgeschlossenheit von H abgeschlossen.

12. *Ist G im Kleinen kompakt und gebietstreu auf G' abgebildet, ist ferner H abgeschlossene Untergruppe von G, so sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:*

a.) *H ist gebietstreu auf H' abgebildet.*

b.) *H' ist abgeschlossen.*

BEWEIS: a $\rightarrow$ b: H ist als abgeschlossene Teilmenge von G im Kleinen kompakt, also ist nach 6 auch H' im Kleinen in sich kompakt. a'_n sei eine in G' konvergente Folge aus H', $a' \subset G'$ ihr Limes. U' sei eine so kleine Umgebung von e in G', dass $H' \vee U'$ kompakt ist (in H'); dann sind auch die $H' \vee a'_n U'$ kompakt. $a'U'$ enthält fast alle a'_n, also ist a' in fast allen $a'_n U'$, z.B. in $a'_m U'$. Somit enthält $a'_m U'$, also auch $H' \vee a'_m U'$ fast alle a'_n Da aber $H' \vee a'_m U'$ kompakt (in H') ist, muss es zu der Folge a'_n in H' einen Häufungspunkt geben: a' liegt in H', H' ist abgeschlossen.

b $\rightarrow$ a: Nach 6 ist G' im Kleinen kompakt, H' als abgeschlossene Teilmenge

[12] Den rein gruppentheoretischen Teil des Beweises lassen wir bei all solchen Sätzen weg.

von G' ist ebenfalls im Kleinen kompakt, also ist es nach 7 gebietstreues Bild von H.[13]

13. In der Gruppentheorie spielen zwei Isomorphiesätze[14] eine wichtige Rolle, die wir hier als A und B topologisch formulieren werden. In 14 und 15 werden wir den Gültigkeitsbereich dieser Sätze abgrenzen.

$$\text{A: } \boxed{HN/N \cong H/H \vee N}$$

(H abgeschlossene Untergruppe, N abgeschlossener Normalteiler.)

$$\text{B: } \boxed{G/H \cong G'/H'.}$$

(G' homomorphes Bild von G, H' abgeschlossener Normalteiler von G' und H sein Urbild.)

14. A *ist für im Kleinen kompakte G dann und nur dann gültig, wenn HN abgeschlossen in G ist.*

BEWEIS: "Dann": HN ist abgeschlossen und enthält N, also ist nach 11 HN/N abgeschlossene Untergruppe von G/N. Bei der homomorphen Abbildung von G auf G/N geht H in HN/N über, und wegen der Abgeschlossenheit von HN/N ist nach 12 diese Abbildung gebietstreu, also nach 10 durch den Normalteiler der in e abgebildeten Elemente von H—das ist $H \vee N$—erzeugbar, d.h. $HN/H = H/H \vee N$.

"Nur dann": Durch den Homomorphismus wird H auf HN/N abgebildet; wegen der Gültigkeit von A ist diese Abbildung gebietstreu, also ist nach 12 HN/N abgeschlossen. HN ist aber das Urbild von HN/N, also auch abgeschlossen.

15. B *ist dann und nur dann für alle H' gültig, wenn G gebietstreu auf G' abgebildet ist.*

BEWEIS: "Dann": Durch die Zuordnung "$aH \to a'H'$" entsteht jedenfalls ein Isomorphismus von G/H auf G'/H'; der ist gebietstreu, denn einer offenen Menge in G/H entspricht eine offene Menge in G, dieser nach Voraussetzung eine offene Menge in G' und dieser endlich nach 10 eine offene Menge in G'/H'. Nach 9 folgt daraus unser Satz.

"Nur dann": Man setze nur $H' = (e)$.

16. Eine andere Form von B ist

$$\text{C: } \boxed{G/H \cong (G/N)/(H/N).}$$

(N ist der den Homomorphismus $G \to G'$ erzeugende Normalteiler.)

[13] Die Voraussetzung der Abgeschlossenheit von H ist bei diesem Teil des Beweises also entbehrlich.

[14] Wir folgen hier B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra I*, Berlin 1930, S. 136.

17. Die nach 10 notwendige und hinreichende Bedingung "HN abgeschlossen" für die Gültigkeit von A ist praktisch gut brauchbar wegen der beiden folgenden Sätze:

a.) *Sind M_1 und M_2 abgeschlossene Teilmengen von G und ist eine von ihnen kompakt, so ist M_1M_2 abgeschlossen.*

b.) *Sind M_1 bzw. M_2 abgeschlossene Teilmengen von G_1 bzw. G_2 und ist $G = G_1 \times G_2$, so ist M_1M_2 abgeschlossen.*

BEWEIS von a: Sei a_n eine in G konvergente Teilfolge von M_1M_2; $a_n = a_n^{(1)} \cdot a_n^{(2)}$. Ist etwa M_1 kompakt, so enthält die Folge $a_n^{(1)}$ eine konvergente Teilfolge $a_{n'}$ mit dem Limes $a^{(1)}$; dann konvergiert aber auch die Folge $a_{n'}^{(2)} = a_{n'}^{(1)-1} \cdot a_{n'}^{(1)} a_{n'}^{(2)}$, ihr Limes sei $a^{(2)}$. Wegen der Abgeschlossenheit von M_1 und M_2 sind $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ in ihnen bzw. enthalten, also ist $a^{(1)}a^{(2)}$ in M_1M_2. Das ist aber der Limes der gegebenen Folge.

BEWEIS von b: Nach der Definition des direkten Produktes ist eine Folge $a_n^{(1)}a_n^{(2)}$ ($a_n^{(1)} \subset G_1$, $a_n^{(2)} \subset G_2$) dann und nur dann konvergent, wenn $a_n^{(1)}$ und $a_n^{(2)}$ einzeln konvergieren. Daraus folgt der Satz.

18. Ist N abgeschlossener Normalteiler von G_2, so ist

$$\text{D: } \boxed{(G_1 \times G_2)/N \cong G_1 \times (G_2/N).}$$

Beweis klar.

19. *Die Komponente der Identität*[15] *eines Normalteilers ist selbst Normalteiler.* (Beweis wie der des—spezielleren—Satzes von O. Schreier[16].)

20. *Das homomorphe Bild einer im Kleinen kompakten nulldimensionalen*[17] *Gruppe ist nulldimensional.*[18]

BEWEIS: G besitzt beliebig kleine kompakte abgeschlossene offene Untergruppen H[19], G ist die Vereinigung abzählbar vieler Nebengruppen von H, G' die Vereinigung ihrer Bilder; diese sind kompakt und haben alle dieselbe Dimension wie H', das Bild von H. Nach dem Summensatz der Dimensionstheorie ist dann dim G' = dim H'. Das in sich kompakte H' ist von zweiter Kategorie (siehe Fussnote[7]), die Abbildung von H auf H' ist also nach 5 gebietstreu. H besitzt wieder beliebig kleine offene Untergruppen H_1, ihre Bilder H_1' sind auch

[15] Komponente = maximale zusammenhängende Teilmenge. Komponente der Identität = *die* Komponente, die e enthält.

[16] Abh. Math. Sem. Hamburg 4 (1926), 15–32, Theorem 1.

[17] Wir verwenden hier—jedoch in recht unwesentlicher Weise—einige Begriffe und Sätze der Dimensionstheorie.

[18] Wahrscheinlich gibt es überhaupt keine dimensionserhöhenden Homomorphismen.

[19] Nach D. van Dantzig, Diss. (siehe[2]), 17–18, besitzt eine im Kleinen kompakte, nulldimensionale Gruppe beliebig kleine offene Untergruppen, während—wovon wir auch gleich Gebrauch machen werden—jede zusammenhängende, im Kleinen kompakte Gruppe, die beliebig kleine offene Untergruppen besitzt, allein aus der Identität besteht.

offen. Ist C' die Komponente der Identität von H', so ist also $H_1' \vee C'$ eine offene Untergruppe von C', und zwar ist $H_1' \vee C'$ beliebig klein (wenn nur H_1 genügend klein ist). Da C' zusammenhängend ist, ist also $C' = (e)$, also dim $H' = 0$, also dim $G' = 0$.

21. *Ist G im Kleinen kompakt und gebietstreu homomorph auf G' abgebildet, ist ferner G' zusammenhängend und im Kleinen zusammonhängend und G_0 die Komponente der Identität von G, so ist bereits das Bild G_0' von G_0 gleich G'.*

BEWEIS: U sei eine abgeschlossene kompakte Umgebung von e in G, U' ihr Bild in G' (wegen der Gebietstreue auch eine abgeschlossene Umgebung); U bzw. U' lassen sich als Keime auffassen; U' erzeugt das zusammenhängende G', und $U \vee G_0 = U_0$ erzeugt G_0. U' darf als zusammenhängend vorausgesetzt werden (wegen des Zusammenhangs im Kleinen von G'). Das Bild U_0' von U_0 ist abgeschlossen im U. Bei dem durch den gegebenen induzierten Homomorphismus von U/U_0 auf U'/U_0' muss nach 20 das Bild des kompakten nulldimensionalen U/U_0 nulldimensional sein; da es zusammenhängend ist, ist es (e). Also $U' = U_0'$. Da U' bzw. $U_0'G'$ bzw. G_0' erzeugen, ist also tatsächlich $G' = G_0'$.

22. *Sind der Normalteiler H und die Faktorgruppe G/H von G in sich kompakt, so ist es auch G.*

BEWEIS: a_n sei eine Folge in G. Wegen der Kompaktheit von G/H lässt sich aus der Folge a_nH eine konvergente Teilfolge aussuchen; für geeignete $h_{n'}$ aus H muss also $a_{n'}h_{n'}$ konvergieren. Wegen der Kompaktheit von H lässt sich aus den $h_{n'}$ eine konvergente Teilfolge $h_{n''}$ aussuchen; da $a_{n''}h_{n''}$ konvergierte, konvergiert dann auch $a_{n''}$.

23. Wir sprechen von einer Darstellung der Gruppe G im "Wirkungsraum" W,[20] wenn jedem a von G eine eineindeutige Abbildung $f_a(x)$ von W in sich zugeordnet ist mit den Eigenschaften:

$$f_{ab}(x) = f_a(f_b(x));$$

aus $$\lim a_n = a, \qquad \lim x_n = x$$

folgt $$\lim f_{a_n}(x_n) = f_a(x).$$

Die Darstellung heisst *transitiv*, wenn zu je zwei Punkten x und y ein a existiert mit $f_a(x) = y$.

Die Darstellung heisst *treu*, wenn aus $a \neq b$ folgt $f_a \neq f_b$.

Unter $f_A(X)$ verstehen wir die Menge aller $f_a(x)$ mit $a \subset A$ und $x \subset X$.

Die Darstellung heisst *asystatisch*,[21] wenn jeder Punkt x charakterisiert ist

[20] Wir folgen hier der Definition a.a.O.[8]

[21] Der Begriff stammt von Lie. Siehe *Theorie der Transformationsgruppen*, Leipzig 1888, Bd. I, Kap. 24.

durch seine "festgelegte" Untergruppe H_x—das ist die grösste Untergruppe von G mit der Eigenschaft $f_{H_x}(x) = x$.

Die Darstellung heisst *gebietstreu*, wenn, falls O offen ist, auch $f_O(x)$ offen ist (für jedes feste x).

Zwei Darstellungen f and f' derselben Gruppe in den Wirkungsräumen W und W' heissen topologisch ähnlich,[22] wenn zwischen W und W' eine topologische Beziehung $(x \leftrightarrow x')$ existiert, bei der für jedes a $f_a(x)$ und $f'_a(x')$ einander entsprechen.

24. *Ist bei einer transitiven Darstellung $f_a(x) = y$, so ist $H_y = aH_xa^{-1}$. Dann und nur dann existiert eine transitive (stetige) treue bzw. asystatische Darstellung von G mit (abgeschlossenem) H als einer festgelegten Untergruppe, wenn H ausser (e) keinen (abgeschlossenen) Normalteiler von G enthält, bzw. wenn H nicht echter Normalteiler einer (abgeschlossenen) Untergruppe von H ist.* (Beweis für "nur dann" klar; für "dann" Folgerung von 25.)

25. *Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G, und nennt man W den Raum der Nebengruppen uH (topologisiert wie der Faktorgruppenraum in* 1), *so erhält man in $f_a(uH) = auH$ eine transitive stetige gebietstreue Darstellung von G in W mit H als einer festgelegten Untergruppe. Alle stetigen transitiven gebietstreuen Darstellungen sind derartigen Darstellungen topologisch ähnlich.* (Beweis wie der von 10.)

26. *Eine stetige transitive Darstellung eines im Kleinen kompakten G ist dann und nur dann gebietstreu, wenn W von zweiter Kategorie ist.* (Beweis wie der von 5.)

Ebenso lassen sich die übrigen Sätze auf Darstellungen übertragen.

Anhang[23]

(Received April 20, 1935)

Verschiedene der vorstehend behandelten Sätze lassen sich noch ausdehnen und übersichtlicher darstellen, wenn man sich mit *vollständigen*[24] statt mit im Kleinen kompakten Gruppen beschäftigt.

27. Die Folge a_n von Elementen der Gruppe G heisse Fundamentalfolge, wenn

$$\lim_{m,n\to\infty} a_m^{-1} a_n = e$$

[22] Natürlich kann man auch homomorphe Abbildungen zwischen Darstellungen einführen und entsprechende Sätze beweisen.

[23] Die Anregung zu diesem Anhang verdanke ich Herrn D. van Dantzig.

[24] Die hier folgende metrikfreie Definition der Vollständigkeit einer Gruppe rührt von D. van Dantzig her (a.a.O.[3]), 6–7, bzw. 612).

ist. Die Gruppe G heisst vollständig, wenn in ihr jede Fundamentalfolge konvergiert.

Die Vollständigkeit von G fällt, wie man ohne Weiteres bemerkt, mit der folgenden Eigenschaft zusammen: Ist U_n eine Folge von Umgebungen der Identität mit der Identität als gemeinsamem Durchschnitt, und haben die Mengen $c_m U_m$ zu je endlich vielen einen nichtleeren Durchschnitt, so haben sie alle zusammen einen nichtleeren Durchschnitt.

28. *Jede vollständige Gruppe ist von zweiter Kategorie.*

BEWEIS: $U_1, U_2, \cdots$ sei eine Folge von Umgebungen von e mit (e) als gemeinsamem Durchschnitt. Sei im Widerspruch zur Behauptung G die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen M_n. Es gibt dann in G ein zu M_1 fremdes $c_1 U_k$. In der offenen Menge $c_1 U_k$ gibt es wieder ein zu M_2 fremdes $c_2 U_{k_2}$. Fährt man so fort, so erhält man eine Folge ineinandergeschachtelter $c_n U_{k_n}$, deren Durchschnitt einerseits (siehe 27) nicht leer, andererseits zu allen M_n fremd ist; da G die Vereinigung der M_n ist, ergibt sich also ein Widerspruch.

29. *Jede im Kleinen kompakte Gruppe ist vollständig.*

BEWEIS: Sei $a_1, a_2, \cdots$ eine Fundamentalfolge und U eine kompakte Umgebung von e. Dann ist für alle $m, n \geqq k$: $a_m^{-1} a_n \subset U$. Also sind fast alle a_n in dem ebenfalls kompakten $a_k U$. Die Fundamentalfolge a_n hat demnach einen Häufungspunkt, ist also konvergent.

Bemerkung: Auf Grund dieses Satzes folgen verschiedene der vorstehenden Sätze aus Sätzen des Anhangs.

30. *Eine homomorphe Abbildung der vollständigen Gruppe G auf die Gruppe G' ist dann und nur dann gebietstreu, wenn G' ebenfalls vollständig ist.*

BEWEIS: „Dann": Nach 28 ist G' von zweiter Kategorie. U sei eine Umgebung in G, U' ihr Bild in G'. G lässt sich als Vereinigung abzählbar vieler $a_n U$ schreiben, also G' als Vereinigung der Bilder $a_n' U'$. Eines der $a_n' U'$, also U' selbst muss irgendwo dicht sein; in der abgeschlossenen Hülle von U' gibt es also eine Umgebung V', der Durchschnitt ihres Urbildes mit U heisse V. Dann ist das Bild von V überall dicht in V'. Nennt man eine Menge in G', die in einer offenen Menge (enthalten und) überall dicht ist, eine Grundmenge, so hat man: In jeder Umgebung U aus G gibt es eine offene Menge V, deren Bild eine Grundmenge ist. Da aber jede offene Menge Vereinigung abzählbar vieler Umgebungen ist, gilt sogar: Das Bild jeder offenen Menge aus G ist eine Grundmenge.

$U_0, U_1, \cdots$ sei eine Folge von Umgebungen in G mit dem Durchschnitt (e) und mit der Eigenschaft

$$\overline{U}_{n+1}^2 \subset U_n.^{25}$$

---

[25] Wegen der Existenz siehe a.a.O.[3], Math. Ann., 611.

Dann ist

$$U_{n+1}U_{n+2}\cdots U_{n+k-1}U_{n+k} \subset U_{n+1}U_{n+2}\cdots U_{n+k-1}^2 \subset U_{n+1}U_{n+2}\cdots U_{n+k-2}^2 \subset \cdots \subset U_{n+1}^2 \subset U_n,$$

also

$$U_{n+1}U_{n+2}\cdots U_{n+k} \subset U_n. \tag{*}$$

Die Bilder der U_n sind Grundmengen, die zugehörigen offenen Mengen mögen U_n' heissen; wir werden zeigen, dass das Bild von U_n sogar gleich U_n' ist.

a' sei ein Punkt aus U_1'. Im Durchschnitt von U_1' und $a'U_2'^{-1}$, der ja offen ist, liegen die Bilder der Punkte von U_1 überall dicht; eines möge b_1' heissen, das Bild von b_1. Dann ist also

$$b_1 \subset U_1, \tag{$\S_1$}$$

$$a_1' = b_1'^{-1}a' \subset U_2'. \tag{$\S\S_1$}$$

$$b_1' = a'a_1'^{-1} \tag{$**_1$}$$

Sei im Durchschnitt von U_n' und $a_{n-1}'U_{n+1}'$ bereits ein Element b_n' als Bild eines Elements b_n von U_n bestimmt, so dass also

$$b_n \subset U_n, \tag{$\S_n$}$$

$$a_n' = b_n'^{-1}a_{n-1}' \subset U_{n+1}' \tag{$\S\S_n$}$$

gilt; sei ferner

$$b_1'b_2'\cdots b_n' = a'a_n'^{-1}, \tag{$**_n$}$$

Dann bestimmen wir im Durchschnitt von U_{n+1}' und $a_n'U_{n+2}'$, der wegen ($\S\S_n$) nichtleer ist und in dem die Bilder der Punkte von U_{n+1} überall dicht liegen, ein Element b_{n+1}, Bild eines Elementes $b_{n+1} \subset U_{n+1}$. Dann ist also

$$b_{n+1} \subset U_{n+1}, \qquad (\S_{n+1})$$

$$a_{n+1}' = b_{n+1}'^{-1}a_n' \subset U_{n+2}'. \qquad (\S\S_{n+1})$$

Ferner ist nach ($**_n$)

$$b_1'b_2'\cdots b_{n+1}' = a'a_n'^{-1}\cdot a_n'a_{n+1}'^{-1} = a'\cdot a_{n+1}'^{-1}. \qquad (**_{n+1})$$

Wir können daher die Formeln ($\S_n$), ($\S\S_n$), ($**_n$) als für alle n gültig annehmen.

Nun ist wegen ($\S_n$) und (*)

$$b_{n+1}b_{n+2}\cdots b_{n+k} \subset U_{n+1}U_{n+2}\cdots U_{n+k} \subset U_n.$$

Die Folge der Produkte $b_1b_2\cdots b_n$ ist demnach eine Fundamentalfolge, ihr Limes heisse a. Die zugehörige Bildfolge ist wegen ($**_n$) identisch mit der Folge $a'a_n'^{-1}$. Wegen ($\S_n$) ist $\lim a_n' = e$, also auch $\lim a_n'^{-1} = e$, also $\lim a'a_n'^{-1} = a'$. Demnach ist a' Bildpunkt von $a = \lim b_1b_2\cdots b_n = b_1 \lim b_2b_3\cdots b_n$. Da die $b_2\cdots b_n$ in U_1 liegen, ist $\lim b_2\cdots b_n$ in $\overline{U}_1$, also a in

U_0. Zu jedem Punkt a' aus U_1' gibt es also ein Urbild in U_0. Das Bild jeder offenen Menge U_0 enthält also eine volle Umgebung U_1', und nach 4 ist der Homomorphismus gebietstreu.

„Nur dann": Sei $a_1', a_2', \cdots$ eine Fundamentalfolge in G', lim $a_k'^{-1}a_l' = e$; es genügt, in ihr eine konvergente Teilfolge zu finden. Wir wählen k_n so, dass für $k, l \geqq k_n$

$$a_k'^{-1}a_l' \subset U_n'$$

ist; die U_n' seien die (nach Voraussetzung offenen) Bilder von Umgebungen U_n; die U_n seien wieder so gewählt, dass der Bedingung (*) Genüge geschieht. Dann ist, wenn wir $b_n' = a_{k_n}'$ setzen,

$$b_n'^{-1}b_{n+1}' \subset U_n'.$$

Jedes $b_n'^{-1}b_{n+1}'$ hat ein Urbild c_n in U_n, c_0 sei ein Urbild von b_1'. Wie oben sieht man, dass die Folge der Produkte $c_0c_1c_2 \cdots c_n$ eine Fundamentalfolge ist, also konvergiert; demnach muss auch die Bildfolge, b_{n+1}', eine Teilfolge von a_n', konvergieren, wzbw.

31. Wir können nun 12 aussprechen in der Form:

Ist G vollständig und G' gebietstreues homomorphes Bild von G, ist ferner H abgeschlossene Untergruppe von G, so ist die Abbildung von H auf sein Bild H' dann und nur dann ebenfalls gebietstreu, wenn H' abgeschlossen ist. (Beweis klar, da eine Untergruppe einer vollständigen Gruppe dann und nur dann vollständig ist, wenn sie abgeschlossen ist.)

32. Wir können nun 14 aussprechen in der Form:

A *ist für vollständige G dann und nur dann gültig, wenn HN abgeschlossen in G ist.*

AMSTERDAM, HOLLAND.

Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen [1936b]

Ann. of Math. (2) 37 (1936), 57–77
[JFM 62.0437.02; Zbl 0013.20202]

(Received January 19, 1935)

S. Bochner[1] und J. v. Neumann[2] haben den Bohrschen[3] Begriff der Fastperiodizität auf Funktionen in beliebigen Gruppen übertragen (zu den Bohrschen fastperiodischen Funktionen gehört in diesem Zusammenhang als Gruppe die der linearen Translationen). Eine auf einer Gruppe G definierte Funktion $f(y)$ wird fastperiodisch genannt, wenn der Raum der zu f "rechts-kongruenten" Funktionen $g_a(y) = f(ya)$ und ebenso der Raum der zu f "links-kongruenten" Funktionen $h_a(y) = f(ay)$ F in seiner vollständigen Hülle kompakt ist.

Von einem wirklichen System fastperiodischer Funktionen auf einer Gruppe G kann man allerdings erst dann sprechen, wenn zu irgend zwei Elementen a und b der Gruppe ($a \neq b$) eine fastperiodische Funktion existiert, die an diesen beiden Stellen verschiedene Werte annimmt: $f(a) \neq f(b)$. Ist G eine topologische Gruppe, so wird man von f ausser der Fastperiodizität noch Stetigkeit im Sinne der Topologie von G verlangen. Existiert in der topologischen Gruppe G also zu a, b eine stetige fastperiodische Funktion f mit $f(a) \neq f(b)$, so wollen wir sagen, dass G genügend viel fastperiodische Funktionen besitzt.[3a]

Dass auf *kompakten* Gruppen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom genügend viel fastperiodische Funktionen existieren, ist klar: auf ihnen ist jede stetige Funktion fastperiodisch.[4] Für die im *Kleinen* kompakten *abelschen* Gruppen wird die Existenz genügend vieler fastperiodischer Funktionen von v. Neumann bewiesen.[4] Wir werden nun zeigen, dass sich (was die zusammenhängenden, im Kleinen kompakten Gruppen betrifft) in diesen beiden Typen die Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen im Wesentlichen erschöpfen. Genauer:

Jede zusammenhängende, im Kleinen kompakte Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom ist direktes Produkt der (abelschen) Gruppe der Translationen des n-dimensionalen euklidischen Raumes ($n = 0, 1, \cdots$) und einer (zusammenhängenden) kompakten Gruppe (mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom).[5]

---

[1] *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen.* Math. Ann. *96* (1927), 119–147.

[2] *Almost periodic functions in a group.* I. Trans. Amer. Math. Soc. *36* (1934), 445–492.

[3] *Zur Theorie der fast periodischen Funktionen.* Acta Math. *45* (1925), 29–127; *46* (1925), 101–214.

[3a] Das ist also der v. Neumannsche Begriff der Maximal-Fastperiodizität einer Gruppe, a.a.O.[2] , S. 481.

[4] a.a.O. [2], Theorem 36.

[5] Man kommt also über die klassischen fastperiodischen Funktionen nur unwesentlich hinaus.—Zusatz bei der Korrektur: Wie mir inzwischen Herr André Weil mündlich mitteilte, ist es auch ihm gelungen, diesen Satz zu beweisen.

Über den ersten Faktor ist weiter nichts zu sagen. Aber auch der zweite Faktor ist einfach zu übersehen. Wir zeigen nämlich:

Jede zusammenhängende kompakte Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom lässt sich G_n-adisch[6] *als Limesgruppe kompakter Liescher Gruppen darstellen.*[7]

Dies Ergebnis ist völlig befriedigend, denn man kann alle kompakten Lieschen Gruppen aufzählen: ihre universellen Überlagerungsgruppen sind direkte Produkte kompakter halbeinfacher Liescher Gruppen (die man sämtlich kennt[8]) und einparametriger abelscher Gruppen, und sie selber ergeben sich aus ihren Überlagerungsgruppen durch Faktorbildung nach diskreten Normalteilern, die auch alle bekannt sind.[9]

Es lassen sich schliesslich Kriterien dafür aufstellen, wann eine Gruppe G mit genügend viel fastperiodischen Funktionen endlich-dimensional und wann sie im Kleinen zusammenhängend ist. Wir erwähnen:

Dann und nur dann ist eine im Kleinen kompakte, zusammenhängende Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, die genügend viel fastperiodische Funktionen besitzt, im Kleinen zusammenhängend und endlich-dimensional, wenn sie Liesch ist.[7] *Dann und nur dann ist sie im Kleinen zusammenziehbar, wenn sie Liesch ist.*

Lässt man nun die Bedingung der Kompaktheit im Kleinen fallen, so kann man noch beweisen:

Jede zusammenhängende Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, die genügend viel stetige fastperiodische Funktionen besitzt, lässt sich stetig isomorph einbetten in eine kompakte Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom.

Auch über nicht zusammenhängende Gruppen liessen sich einige einschneidende Sätze aussprechen; wir gehen auf sie nicht ein, da sie die Frage doch nicht erschöpfend beantworten.

In I bzw. II haben wir einige einfache Hilfssätze über topologische bzw. Liesche Gruppen bewiesen; wo es uns interessant schien, haben wir mehr bewiesen als für die Anwendung in III unmittelbar nötig war.

I

1. Wir übernehmen alle Bezeichnungen und Definitionen vorstehender Arbeit *Einige Sätze über topologische Gruppen* (zitiert als T); siehe insbesondere T1 — 3.

Wir verabreden ferner, dass ein Gruppenkeim stets als so klein angenommen werden soll, wie es im betreffenden Fall nötig ist.

Ein Gruppenkeim heisst $\times$-*Gruppenkeim*, wenn in ihm jeder abgeschlossene Normalteilerkeim direkter Faktor ist. Genauer: Wenn G ein $\times$-Gruppenkeim

---

[6] Das wird in 21 definiert. Historische Daten über diesen Begriff finden sich in [30].

[7] Dieser Satz steht bereits bei L. Pontrjagin, *Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de Hilbert*, C.R. *198* (1934), 170–190. Verf. hat ihn unabhängig gefunden und Mitte 1933 Herrn J. v. Neumann brieflich mitgeteilt im Anschluß an dessen Arbeit in Annals of Math. (2) *34* (1933), 170–190.

[8] E. Cartan, *Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples.* Bulletin Sc. Math. (2) *49* (1925), 130–152 (150 ff.)

[9] E. Cartan, *La géométrie des groupes simples.* Annali di Mat. (4) *4* (1927), 209–256 (227–230).

ist, soll es zu jedem abgeschlossenen Normalteilerkeim H einen abgeschlossenen Normalteilerkeim L geben, derart dass sich ein geeigneter offener Teilkeim von G als direktes Produkt $H \times L$ darstellen lässt.—Eine Gruppe heisst $\times$-*Gruppe*, wenn eine gewisse Umgebung der Identität $\times$-Gruppenkeim ist.

K bezeichne stets eine kompakte Gruppe, V eine Vektorengruppe, d.h. eine Gruppe, die topologisch isomorph der Additionsgruppe der Vektoren eines n-dimensionalen Vektorraums ist.

2. *Eine zusammenhängende Untergruppe eines V ist abgeschlossen, direkter Faktor und wieder ein V. Ein abgeschlossener Untergruppenkeim eines V erzeugt eine abgeschlossene Untergruppe. Die einzige kompakte Untergruppe eines V ist (e) (die Identität). Ist A abgeschlossene Untergruppe eines V, so ist V/A dann und nur dann ein V, wenn A zusammenhängend ist, und dann und nur dann ein K, wenn keine zusammenhängende, A enthaltende, echte Untergruppe von V existiert.* (Beweise klar.)

3. *Ein abgeschlossener Normalteilerkeim eines kompakten $\times$-Gruppenkeimes ist ein $\times$-Gruppenkeim.*

Beweis: H sei ein abgeschlossener Normalteilerkeim von G, dann ist also $G = H \times H_1$. Ist L wieder ein Normalteilerkeim von H, so ist L auch Normalteilerkeim von G. $L \times H_1$ ist erklärt, Normalteilerkeim von G, abgeschlossen wegen T 17a, also direkter Faktor: $G = L \times H_1 \times L_1$. Dann ist nach T 18: $H \cong G/H_1 \cong L \times L_1$. Also ist L in H direkter Faktor.

4. *Ist $G = K \times V$,*[10] *so ist (α) K die (eindeutig bestimmte) maximal kompakte Untergruppe von G, (β) V eine (nicht notwendig eindeutig bestimmte) maximale abgeschlossene V-Untergruppe von G, und so ist (γ) für jede abgeschlossene V-Untergruppe V_1 von G der Durchschnitt mit K gleich (e).*

Beweis: (α) Sei K^* eine kompakte Untergruppe von G. Dann ist KK^* kompakt, wie man analog zu T 17a einsieht. KK^*/K ist eine kompakte Untergruppe von G/K, das nach T 18 eine Vektorengruppe ist. Nach 2 ist also $KK^*/K = (e)$, also $K^* = K$.

(β) Sei $V_1 \supset V$. Dann ist nach 2 V_1/V eine Vektorengruppe; andererseits ist V_1/V nach T 11 abgeschlossene Untergruppe von G/V, das (wegen T 18 $\cong K$, also) kompakt ist, also selber in sich kompakt. Nach 2 ist dann $V_1/V = (e)$, $V_1 = V$.

(γ) $K \vee V_1$ ist als Untergruppe von K (abgeschlossen und) kompakt; andererseits ist es Untergruppe von V_1. Also ist $K \vee V_1 = (e)$.

5. *Sei $G = K \times V$, B ein abgeschlossener zusammenhängender Untergruppenkeim von G mit $K \vee B = (e)$; sei H die von B erzeugte Untergruppe von G. Dann ist $K \vee H = (e)$, H ist eine V-Gruppe und abgeschlossen in G.*

[10] Man beachte im Folgenden, dass die $K \times V$ im Kleinen kompakt, also sicherlich auch von zweiter Kategorie sind.

BEWEIS: Bei der homomorphen Abbildung von G auf G/K geht das kompakte abgeschlossene B in einen abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppenkeim B' von G/K über. Wegen $G/K \cong V$ (siehe T 18) ist die von B' erzeugte Untergruppe H' von G/K abgeschlossen und eine V-Gruppe (siehe 2). H' ist ferner bei dem betrachteten Homomorphismus das Bild von H.

$h' \subset H'$ sei das Bild von $h \subset H$. Von dieser Abbildung lässt sich eine im Kleinen eindeutige stetige Umkehrung erklären: Wegen $K \vee B = (e)$ ist e das einzige Element von B, das in die Identität von B' übergeht; verschiedene Elemente von B gehen also in verschiedene Elemente von B' über. Ist h' irgendein Element von H', so enthält $h'B'$ eine Umgebung von h'. In dieser Umgebung erklären wir die Umkehrung der Abbildung so, dass wir einem $h'b'$(mit $b' \subset B'$)hb zuordnen; dabei ist h ein festes Urbild von h' und b das (eindeutig bestimmte) Urbild von b' innerhalb B.

Die so definierte Umkehrung von $h \to h'$ ist im Kleinen eindeutig und stetig; nach dem Monodromieprinzip[11] ist sie es wegen des einfachen Zusammenhanges von H' auch im Grossen. Die Abbildung $H \to H'$ (die durch die Faktorbildung nach K erklärt war) ist also topologisch, H ist ebenso wie H' eine V-Gruppe und $K \vee H = (e)$.

HK ist als Urbild von H' abgeschlossen in G. Ist $h_1, h_2, \cdots$ eine Folge aus H, die in G konvergiert, so lässt sich ihr Limes schreiben: hk $(h \subset H, k \subset K)$. Die Bildfolge von $h_1h^{-1}, h_2h^{-1}, \cdots$ konvergiert also gegen e, und da die Beziehung zwischen H und H' topologisch ist, konvergiert auch $h_1h^{-1}, h_2h^{-1}, \cdots$ gegen e, also die gegebene Folge tatsächlich gegen ein Element von H. Demnach ist H abgeschlossen.

6. *Sei G eine $\times$-Gruppe der Form $K \times V$ und H ein abgeschlossener, zusammenhängender, im Kleinen zusammenhängender*[12] *Normalteiler von G. Dann lässt sich G derart als $K \times V_1 \times V_2$ schreiben, dass $H = (K \vee H) \times V_1$ ist.*

BEWEIS: $H \vee K$ ist abgeschlossener Normalteiler von G, also nach 3 eine $\times$-Gruppe. Daher gilt die Darstellung:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\text{Keim von } H = H_0 \times H_1 \\ &(H_0 = \text{Keim von } K \vee H). \end{aligned}$$

Dabei darf man den Keim von H, also auch den von H_1 als zusammenhängend voraussetzen. Wegen $K \vee H_1 = (e)$ erzeugt H_1 nach 5 eine abgeschlossene Vektorengruppe V_1, und es ist $K \vee V_1 = (e)$. Da H_1 direkter Faktorkeim in H, also Normalteilerkeim in G war, ist auch das von H_1 erzeugte V_1 Normalteiler in G. Also ist $K \times V_1$ definiert.

---

[11] Das Monodromieprinzip besagt: Ist in einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit eine Abbildung im Kleinen eindeutig (und stetig) definiert, so ist sie es auch im Grossen.

[12] Zusammenhang im Kleinen heisst: Alle Komponenten aller offenen Mengen sind offen.—Nach F. Hausdorff, Mengenlehre (Berlin 1927), 156, Satz X, stimmt diese Definition mit der üblichen überein; für unsere Zwecke ist sie bequemer als die übliche.

Weiter ist wegen (*) H_1, also auch V_1, also auch $(K \vee H) \times V_1$ in H enthalten. Da aber wegen (*) $(K \vee H) \times V_1$ den Keim $H_0 \times H_1$ des zusammenhängenden H enthält, ist andererseits H in $(K \vee H) \times V_1$ enthalten. Daraus folgt ein Teil der Behauptung: $(K \vee H) \times V_1 = H$.

Bei dem Homomorphismus von G auf G/K gehe V in V' und V_1 in V_1' über. Da KV_1 nach T 17a abgeschlossen ist, ist nach T11 V_1' abgeschlossener Normalteiler von V' und obendrein wegen des Zusammenhangs von V_1 zusammenhängend. V_1' ist also tatsächlich Vektorengruppe, und V' ist darstellbar als $V_1' \times V_2'$. Wegen $G = K \times V$ lässt sich das Urbild von V_2' schreiben als $K \times V_2$ mit $V_2 \subset V$. Das Bild von V_2 ist V_2'. $(K \times V_1) \vee V_2$ ist erstens in K enthalten (denn sein Bild ist $V_1' \vee V_2' = (e)$), also kompakt, zweitens (wegen T 17a) abgeschlossen, drittens Untergruppe von V_2. Also ist es $= (e)$: $(K \times V_1) \vee V_2 = (e)$. Ferner ist V_2 Normalteiler. $K \times V_1 \times V_2$ ist demnach definiert, das ist aber $= G$.

7. *Sei G eine $\times$-Gruppe der Form $K \times V$, und sei jeder abgeschlossene zusammenhängende Normalteiler von G im Kleinen zusammenhängend. Sei G homomorph auf $G' = K' \times V'$ abgebildet. Dann lässt sich G derart als $K \times V_1 \times V_2$ schreiben, dass V_1 auf V' abgebildet wird. Ist der Komponentenraum des den Homomorphismus definierenden Normalteilers*[13] *H von G kompakt, so lässt sich obendrein erreichen, dass $V_2 = (e)$ ist und K auf K' abgebildet wird.*

Beweis: W sei das Urbild von V', W_0 die Komponente der Identität von W. Nach 6 hat man

$$(*) \qquad \begin{aligned} G &= K \times V_1 \times V_2, \\ W_0 &= (K \vee W_0) \times V_1, \end{aligned}$$

V_1 und V_2 sind abgeschlossene Vektorengruppen. Nach T 21 erschöpft das Bild von W_0 bereits V'; da der Faktor $K \vee W_0$ in eine kompakte Untergruppe von V', also in (e) übergeht, ist sogar

$$(*_*) \qquad \text{Bild von } V_1 = V'.$$

H_0 sei die Komponente der Identität von H; $H \subset W$, $H_0 \subset W_0$. H/H_0 ist nach Voraussetzung (in sich) kompakt. Also ist auch

$$(\S) \qquad (KH/K)/(KH_0/K)$$

kompakt, denn es lässt sich als Bild von H/H_0 (bei der Faktorgruppenbildung nach K) auffassen. (§) ist aber Untergruppe von

$$(\S\S) \qquad (G/K)/(KH_0/K)$$

---

[13] Nach T 5 und T 10 wird der Homomorphismus tatsächlich durch einen Normalteiler definiert.

und zwar nach T 11 abgeschlossene Untergruppe, weil nach T 17a KH abgeschlossen in G, also nach T 11 auch KH/K abgeschlossen in G/K ist. Nach T 18 ist $G/K \cong V$ und, da KH_0/K als Bild des zusammenhängenden H_0 zusammenhängend ist, auch (§§) eine Vektorengruppe. Das kompakte (§) ist als Untergruppe von (§§) gleich (e), also

$$(^{*}_{**}) \qquad \begin{gathered} KH = KH_0 \\ H \subset KH_0 \subset KW_0 \subset K \times V_1 \end{gathered}$$

(die letzte Inklusion wegen (*)).

Nach T 17b ist V_2H abgeschlossen in G; ferner ist $V_2 \vee H = (e)$ wegen $(^{*}_{**})$; also ist nach T 14 V_2 topologisch isomorph seinem Bild V_2' (bei dem gegebenen Homomorphismus), ausserdem ist V_2' nach T 11 abgeschlossen. Also ist nach 4γ: $V_2' \vee K' = (e)$.

Aus T 15, T 18 und $(^{*}_{*})$ folgt $G/V_1H \cong G'/V' \cong K'$, also kompakt. Nach T 17b ist V_2V_1H abgeschlossen in G, also V_2V_1H/V_1H abgeschlossen in dem kompakten G/V_1H, also in sich kompakt; andererseits ist V_2V_1H/V_1H Vektorengruppe (da $V_1H \subset K \times V_1$ und daher $V_1H \vee V_2 = (e)$ ist). Nach 2 ist dann $V_2 = (e)$.

Das Bild K^* von K ist kompakt, also nach 4α in K'. Andererseits ist G' (als Bild von $G = K \times V_1$) gleich $K^* \times V'$, also nach 4α auch $K' \subset K^*$. Also $K' = K^* =$ Bild von K.

II

8. *Eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe einer Lieschen Gruppe*[14] *ist eine Liesche Untergruppe, und entsprechend für Gruppenkeime.* Beides lässt sich im Wesentlichen genauso beweisen wie bei J. v. Neumann[15] die Analytizität der linearen Gruppen (Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppe); siehe auch E. Cartan,[16] S. 24.

Die Komponenten einer abgeschlossenen Lieschen Untergruppe häufen sich

---

[14] Eine Liesche Gruppe ist eine Gruppe, deren Gruppenraum eine analytische Mannigfaltigkeit ist, und deren Operationen analytisch sind (wir nehmen also in den Begriff der Lieschen Gruppe den Zusammenhang des Gruppenraumes auf).

Soweit es sich mit der Kürze der Darstellung irgendwie vereinbaren liess, haben wir die Verwendung von Sätzen der Lieschen Theorie vermieden. Wir erwähnen nur noch für das Folgende die Tatsache: Ist H eine Liesche Untergruppe der Lieschen Gruppe G, so lässt sich in einer Umgebung von e, ein analytisches Koordinatensystem einführen, in dem sich H als eine lineare Mannigfaltigkeit durch e und die Nebengruppen zu H als die zu ihr parallelen linearen Mannigfaltigkeiten darstellen. Daraus kann man leicht ableiten, dass die Faktorgruppe G/H wieder Liesch ist.—Entsprechendes gilt auch für Gruppenkeime.

Man beachte im Folgenden noch, dass die Lieschen Gruppen im Kleinen kompakt, von zweiter Kategorie, im Kleinen zusammenhängend, endlichdimensional und im Kleinen zusammenziehbar sind.

[15] Sitzungsberichte Akad. Berlin *1927*, 76–90. Math. Zeitschr. *30* (1929), 3–42.

nirgends, der Komponentenraum besitzt keinen Häufungspunkt; siehe E. Cartan[16]), S. 24. *Insbesondere enthält also jede abgeschlossene Untergruppe, die Häufungspunkte besitzt, eine Liesche Untergruppe* $\neq e$.

9. *Eine abelsche Liesche Gruppe ist direktes Produkt von Kreisdrehungsgruppen und eindimensionalen Vektorengruppen, also auch direktes Produkt eines Lieschen* K *und eines* V. (Beweis klar.)

10. *Ist* G *direktes Produkt eines halbeinfachen*[17] *Lieschen Keimes* H *und eines abelschen Lieschen Keimes* A, *so ist* G *eine* $\times$*-Gruppe.*

Beweis: Der Satz ist richtig für $H = (e)$ (siehe 2) und für $A = (e)$ (siehe z.B. E. Cartan, Thèse,[18] S. 53).

Sei N Normalteilerkeim von $A \times H$; jedes seiner Elemente lässt sich in der Form $a \cdot h$ schreiben ($a \subset A$, $h \subset H$). Die bei dieser Darstellung auftretenden Elemente von H bilden einen in H abgeschlossenen Gruppenkeim H_1, einen Normalteilerkeim von H, der nach 3 wieder $\times$-Gruppenkeim ist. Der Kommutatorkeim H_1' von H_1 ist also direkter Faktor: $H_1 = H_1' \times H_1''$. Der Kommutatorkeim von H_1'' ist in dem von H_1, also in H_1' enthalten, also in $H_1' \vee H_1'' = (e)$. H_1'' ist also abelscher Normalteilerkeim von H_1, also auch von H, also $H_1'' = (e)$ und $H_1 = H_1'$. Nun ist aber der Kommutatorkeim von N gleich dem von H_1, also gleich H_1, also $H_1 \subset N$ und $N = A_1 \times H_1$ mit $A_1 \subset A$. Ferner ist $A = A_1 \times A_2$ und $H = H_1 \times H_2$, also tatsächlich $A \times H = N \times (A_1 \times H_2)$.

11. *Eine kompakte Liesche halbeinfache Gruppe ist endlichfach zusammenhängend, ihre universelle Überlagerungsgruppe*[19] *also kompakt.*

Beweis: Die Faktorgruppe nach dem (diskontinuierlichen) Zentrum, die sogen. adjungierte Gruppe, lässt sich nämlich nach der Lieschen Theorie als lineare Gruppe auffassen; wegen der Kompaktheit darf man nach F. Peter und

---

[16] *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*, Mémorial sc. math. XLII.— Cartan setzt allerdings voraus, dass die Untergruppe "continu" (d.h. eine Mannigfaltigkeitsgruppe) ist, macht davon jedoch nirgends Gebrauch. Deutet man "continu" im Sinne von "Kontinuum," so bleibt die Beweisführung wörtlich richtig; man erhält dann den oben von uns angeführten Satz.

[17] Halbeinfach heisst eine Gruppe (ein Gruppenkeim), die (der) keinen zusammenhängenden abelschen Normalteiler ausser (e) besitzt. Man sieht ohne Weiteres, dass der Keim einer halbeinfachen Gruppe halbeinfach ist, und umgekehrt. Wir erwähnen noch aus der Theorie der halbeinfachen Gruppen, dass die halbeinfachen Gruppen im Kleinen direkte Produkte (nichtabelscher) einfacher Liescher Gruppen sind, und umgekehrt.

[18] *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (Paris 1894).

[19] Wir verwenden von jetzt an häufig Begriffe und Sätze von O. Schreier (*Abstrakte kontinuierliche Gruppen*, Abh. Math. Sem. Hamburg *4* (1926), 15–32). Wir erwähnen insbesondere: Ist G^* eine Überlagerungsgruppe von G, so ist $G = G^*/M$, wo M ein abgeschlossener Normalteiler ohne Häufungspunkt ist; und umgekehrt: ist M ein abgeschlossener Normalteiler ohne Häufungspunkt von G^*, so lässt sich G^* als Überlagerungsgruppe von G^*/M deuten.

H. Weyl[20] annehmen, dass sie unitär ist. Daraus folgt nach H. Weyl,[21] S. 380, (siehe auch E. Cartan, a.a.O.[16], S. 38–41) der endlichfache Zusammenhang der adjungierten Gruppe, also erst recht der der gegebenen, die sich als Überlagerungsgruppe der adjungierten auffassen lässt.

12. *Ein vollständig reduzibler linearer Keim ist direktes Produkt einfacher abgeschlossener Untergruppenkeime.*

BEWEIS: Wir folgen E. Cartan.[22] Sei zunächst der gegebene lineare Keim G *irreduzibel.* Sei A ein maximal abelscher (abgeschlossener) Normalteilerkeim von G. A besitzt einen Eigenvektor u: $A(u) = \lambda u$ (λ abhängig vom betreffenden Element von A). Da A Normalteilerkeim ist, ist für jedes $g \subset G$: $Ag(u) = \lambda g(u)$. Da G irreduzibel ist, also die $g(u)$ den ganzen Vektorraum aufspannen, folgt daraus: $A(u) = \lambda u$ für jeden Vektor u. Die Elemente von A sind also Multiplikationen,[23] A ist im Zentrum. Der lineare Gruppenkeim G' entstehe aus G, indem man die Elemente von G so mit Skalaren multipliziert, dass die Determinanten eins werden. In G' gibt es keine Multiplikationen mehr, G' ist aber noch irreduzibel; nach dem soeben für G bewiesenen hat G' keinen abelschen Normalteilerkeim, ist also halbeinfach. Der Kommutatorkeim von G' ist also (siehe Beweis von 10) gleich G'; andererseits haben G und G' denselben Kommutatorkeim. Somit ist G' der Kommutatorkeim von G, und G ist darstellbar als $A \times G'$ (direktes Produkt eines abelschen und eines halbeinfachen Lieschen Gruppenkeimes).

Sei nun G beliebig, aber vollständig reduzibel. Seien $L_1, \cdots, L_n$ invariante lineare Mannigfaltigkeiten, die zusammen den ganzen Vektorraum aufspannen, und in denen G irreduzibel ist. Wir betrachten den linearen (irreduziblen) Gruppenkeim G_k, gemäss dem E_k durch G transformiert wird; G_k ist, wie wir im vorigen Absatz zeigten, direktes Produkt eines Lieschen abelschen und eines Lieschen halbeinfachen Gruppenkeimes. Wir bilden abstrakt das direkte Produkt der G_k; es hat dieselbe Eigenschaft.[24] G lässt sich als homomorphes Bild von $G_1 \times \cdots \times G_n$ auffassen, ist also nach 10 und 3 direkter Faktorkeim

---

[20] *Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.* Math. Ann. *97* (1927), 737–755.

[21] *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen.* III. Math. Zeitschr. *24* (1926), 377–395.

[22] *Les groupes de transformations continus, infinis, simples.* Annales École Norm. (3) *26* (1909), 93–161 (p. 148, théorème XVIII).

[23] Zunächst hat man nämlich für jedes a aus A: $a(u) = \lambda u$ für alle u einer Menge M von Vektoren, die den ganzen l-dimensionalen Vektorraum aufspannt; dabei kann der Wert von λ mit u variieren. Die Transformation a induziert eine projektive Transformation im zugehörigen $(l-1)$-dimensionalen projektiven Raum, bei der l Punkte festbleiben, die keinem niederdimensionalen Teilraum angehören; a induziert also die identische projektive Transformation und muss selber alle Vektoren mit einem Skalar multiplizieren, der, wie man leicht sieht, für alle Vektoren derselbe sein muss. Die Elemente von A sind also tatsächlich Multiplikationen.

[24] Siehe [17].

in $G_1 \times \cdots \times G_n$ und daher auch direktes Produkt eines halbeinfachen Lieschen und eines abelschen Lieschen Gruppenkeimes, also direktes Produkt einfacher Liescher Gruppenkeime.

13. *Ist G ein linearer unitärer halbeinfacher Gruppenkeim, so ist die von G erzeugte lineare Gruppe G^* abgeschlossen im Gebiet aller linearen Transformationen.*[25]

BEWEIS: Die abgeschlossene Hülle $\overline{G^*}$ von G^* ist eine unitäre Gruppe, also vollständig reduzibel und nach 12 eine $\times$-Gruppe. G ist daher direkter Faktorkeim in $\overline{G^*}$: $\overline{G^*} = G \times H$ (im Kleinen). Ist H^* die von H erzeugte lineare Gruppe und $\overline{H^*}$ ihre abgeschlossene Hülle, so kann $G \vee \overline{H^*}$ keinen Häufungspunkt besitzen, weil es sonst nach 8 (zweiter Absatz) einen Lieschen Keim enthielte, der wegen der Vertauschbarkeit von G und H zum Zentrum des halbeinfachen G gehörte und nicht allein aus e bestünde, was nicht möglich ist. $\overline{G^*}/\overline{H^*}$ ist also im Kleinen isomorph mit G. Andererseits ist $\overline{G^*}/\overline{H^*}$ als Bild von $\overline{G^*}$ kompakt und besitzt nach 11 eine kompakte universelle Überlagerung; G als Bild dieser universellen Überlagerung ist auch kompakt (in sich), also abgeschlossen im Gebiete aller linearen Transformationen.

14. *Eine im Kleinen kompakte Gruppe G mit treuer stetiger unitärer Darstellung $D(G)$ ist im Kleinen direktes Produkt einfacher Liescher Normalteilerkeime, also $\times$-Gruppe. Ihre universelle Überlagerungsgruppe ist direktes Produkt einer kompakten halbeinfachen Gruppe K und eines V.*

BEWEIS: U sei eine genügend kleine kompakte abgeschlossene Umgebung von e in G, $D(U)$ ist also abgeschlossen im Gebiet aller linearen Transformationen, also Liesch. Die abgeschlossene Hülle $\overline{D(G)}$ von $D(G)$ ist auch noch unitär, also vollständig reduzibel, also ist auch $D(G)$, also auch $D(U)$ vollständig reduzibel. Daraus folgt nach 12 der erste Teil unseres Satzes.

G lässt sich also im Kleinen als Produkt eines Lieschen linearen abelschen Keimes A und eines Lieschen halbeinfachen unitären Keimes H darstellen. A lässt sich als Keim eines V auffassen, während H nach 13 eine *kompakte* halbeinfache Liesche Gruppe H^* erzeugt. $H^* \times V$ (abstrakt gebildet) ist im Kleinen isomorph G. Die universelle Überlagerung von $H^* \times V$ ist das direkte Produkt von V und der universellen Überlagerung von H^*, also nach 11 auch wieder direktes Produkt einer kompakten halbeinfachen Gruppe K und eines V.

15. *Ist die universelle Überlagerungsgruppe G^* von G von der Form $K^* \times V^*$, so ist auch G selbst von der Form $K \times V$.*

BEWEIS: $G = G^*/M$, M abgeschlossener Normalteiler ohne Häufungspunkt. M_{K^*} bzw. M_{V^*} seien die Mengen von Elementen von K^* bzw. V^*, die bei der Produktdarstellung $(K^* \times V^*)$ der Elemente von M auftreten. V_1^* sei die minimale zusammenhängende, M_{V^*} enthaltende Untergruppe von V^*. Dann

[25] Siehe auch E. Cartan, a.a.O.[16], S. 37–41.

ist $V^* = V_1^* \times V_2^*$. Wir setzen $K = (K^* \times V_1^*)/M, V = V_2^* M/M$. Dann ist in der Tat $G \cong K \times V$ und V eine Vektorengruppe. Dass K tatsächlich kompakt ist, sieht man so ein: $V_1^* K^*$ ist nach T 17a abgeschlossen in G^*, also $V_1^* K^*/K^*M \cong V_1^*/(V_1^* \vee K^*M)$ nach T 14. Nach der Definition von V_1^* und 2 ist diese letzte Gruppe aber kompakt (in sich), also ist auch $V_1^* K^*/K^*M$ kompakt. Nun ist aber nach T 15

$$K^* V_1^*/K^*M \cong (K^* V_1^*/M)/(K^*M/M);$$

die Gruppe links haben wir gerade als kompakt nachgewiesen, der Divisor rechts ist K^* isomorph, also kompakt, also ist nach T22 $K = K^* V_1^*/M$ kompakt.

16. *Eine im Kleinen kompakte Gruppe mit im Kleinen treuer unitärer Darstellung ist eine* $\times$*-Gruppe der Form* $K \times V$. (Beweis folgt unmittelbar aus 14 und 15.)

III

17. Wir betrachten nun die im Kleinen kompakten zusammenhängenden Gruppen G mit genügend vielen stetigen fastperiodischen Funktionen (siehe Einleitung). Sie sind nach J. v. Neumann, a.a.O.[2], S. 480, Theorem 33, dadurch charakterisiert, dass es zu je zwei verschiedenen Elementen a und b eine stetige unitäre Darstellung $D(G)$ gibt mit $D(a) \neq D(b)$. Insbesondere gibt es dann zu jedem $a \neq e$ aus G eine Darstellung mit $D(a) \neq 1$. Bei einer solchen Darstellung gibt es eine ganze Umgebung U_a von a, so dass $D(U_a)$ die identische lineare Transformation nicht enthält. Mit abzählbar vielen solcher U_a lässt sich $G - e$ überdecken. Es gibt also eine Folge stetiger unitärer Darstellungen $D_n(G)$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem a ein n existiert mit $D_n(a) \neq 1$.

G erscheint also (nach 14*) homomorph abgebildet auf gewisse Liesche Gruppen G_n, die alle im Kleinen direkte Produkte einfacher unitärer Liescher Gruppen sind. Die die Homomorphismen definierenden Normalteiler H_n von G haben (wegen der letzten Bemerkung des vorigen Absatzes) den Durchschnitt* (e).

18. Gestatten G/H_m und G/H_n treue stetige unitäre Darstellungen, so gilt dasselbe für $G/(H_m \vee H_n)$; man braucht nur die Darstellungen von G/H_m und G/H_n längs der Hauptdiagonale aneinanderzureihen und sonst Nullen zu setzen, um die gewünschte Darstellung zu erhalten. Daher dürfen wir von nun an voraussetzen, dass die H_n *eine absteigende Folge abgeschlossener Normalteiler von* G sind (andernfalls bilde man einfach die Durchschnitte).

H_n^0 sei die Komponente der Identität von H_n, C_n die Komponentengruppe von H_n, d.h. $C_n = H_n/H_n^0$ (siehe auch T 19). Die Komponenten von C_n sind Punkte, während G/H_n^0 zusammenhängend ist. Also gehört C_n zum Zentrum[26]

---

[26] Wir verwenden hier den Satz von O. Schreier (a.a.O.[19]): Jeder Normalteiler einer zusammenhängenden Gruppe, dessen Komponenten Punkte sind, liegt im Zentrum.

von G/H_n^0, ist also sicherlich abelsch. Dann[27] besitzt C_n eine abgeschlossene offene *kompakte* Untergruppe C_n', die nun auch *Normalteiler* von G/H_n^0 ist. H_n' sei der Normalteiler von G, der bei dem Homomorphismus $H_n \to C_n$ auf C_n' abgebildet wird. $H_n' \subset H_n$; H_n' ist offen in H_n als Urbild von C_n', das offen in C_n ist.

H_n'' sei der Durchschnitt der H_k' $(k = 1, \cdots, n)$. $H_k' \vee H_n$ ist offen in $H_k \vee H_n = H_n$. Dasselbe gilt für den Durchschnitt von 1 bis n: $H_n'' \vee H_n = H_n''$ *ist offen in* H_n. *Die* H_n'' *bilden eine absteigende Folge abgeschlossener Normalteiler von* G *mit* (e) *als Durchschnitt. Ihre Komponentengruppen* C_n'' *sind (als abgeschlossene Untergruppen der* C_n'*) in sich kompakt.*

Wir setzen nun $G_n'' = G/H_n''$. Da H_n'' offen in H_n war, sind G_n'' und G_n im Kleinen isomorph, also gilt nach 16:

Die $G_n'' = G/H_n''$ sind Liesche $\times$-Gruppen der Form $K_n \times V_n$.

19. Sei U eine kompakte Umgebung von (e) in G und $R(U)$ der Rand von U. Der Durchschnitt aller $H_n'' \vee R(U)$ ist leer, und da sie alle in sich kompakt sind, sind fast alle $H_n'' \vee R(U)$ leer. Die Komponente der Identität fast aller H_n'' ist (wegen $e \subset U$) in U enthalten, also kompakt. Da der Komponentenraum der H_n'' kompakt ist (siehe 18), folgt daraus nach T 22, dass *fast alle* H_n'' *kompakt sind.* Wenn wir auf endlich viel H_n'' verzichten und alle Striche weglassen, können wir sagen:

In G *gibt es eine Folge absteigender kompakter abgeschlossener Normalteiler* H_n *mit dem Durchschnitte* (e), *so dass die* $G_n = G/H_n$ *Liesche* $\times$*-Gruppen der Form* $K_n \times V_n$ *sind.*

20. Durch G wird ein Homomorphismus von G_{n+1} auf G_n erzeugt: $G_n \cong G_{n+1}/(H_n/H_{n+1})$. Nach 7 (die Voraussetzungen von 7 sind erfüllt, denn jeder abgeschlossene zusammenhängende Normalteiler von G_{n+1} ist Liesch, also sicher im Kleinen zusammenhängend, und der Normalteiler H_n/H_{n+1} ist kompakt) können wir annehmen, dass die V_n in den G_n so gewählt sind, dass durch *die Homomorphismen stets* K_{n+1} *auf* K_n *und* V_{n+1} *auf* V_n *abgebildet wird.*

Sei a_n *eine Folge von Elementen bzw. aus* G_n *mit der Eigenschaft, dass bei den vorliegenden Homomorphismen stets* a_n *das Bild von* a_{n+1} *ist. Dann gibt es genau ein* a *in* G, *von dem all diese* a_n *die Bilder sind.* Sei nämlich A_n die Urbildmenge von a_n in G. Es ist $A_n = H_n A_{n+1}$. Die A_n bilden also eine absteigende Folge kompakter abgeschlossener Mengen, ihr Durchschnitt ist nicht leer, kann aber auch keine zwei verschiedenen Elemente enthalten, denn deren Quotient wäre ein Element $\neq e$ von G, das allen H_n angehörte.

K_n^* bzw. V_n^* seien die Urbilder von K_n bzw. V_n in G; der Durchschnitt der K_n^* heisse K, der der V_n^* heisse V. Der Durchschnitt von K und V ist gleich dem der H_n, also (e). Sei g ein Element von G; seien g_n seine Bilder bzw. in G_n.

---

[27] Siehe D. van Dantzig, *Studiën over topologische algebra*, Diss. Amsterdam 1931, S. 18, TG 37.—Derselbe, *Zur topologischen Algebra* III, erscheint in Compositio mathematica.

g_n lässt sich schreiben als $b_n c_n$ mit $b_n \subset K_n$, $c_n \subset V_n$. Der erste Absatz dieser Nummer lehrt uns, dass wir annehmen dürfen, dass bei den vorliegenden Homomorphismen stets b_{n+1} auf b_n und c_{n+1} auf c_n abgebildet ist. Der zweite Absatz dieser Nummer zeigt dann, dass zu den b_n *ein* b in K und zu den c_n *ein* c in V gehört, von denen die b_n bzw. c_n die Bilder sind. bc hat dann als Bilder in den G_n die $b_n c_n = g_n$. Also ist $g = bc$, $b \subset K$, $c \subset V$. Schliesslich sind K und V abgeschlossene Normalteiler von G. Rein gruppentheoretisch ist also G *direktes Produkt* von K und V. Nun ist aber $K \times V$ (stetig) isomorph abgebildet auf G, da bc stetig von b und c abhängt. Nach T 5 und T 9 wissen wir, dass diese Beziehung eine *topologische Isomorphie* ist, sobald wir wissen, dass $K \times V$ im Kleinen kompakt ist. Das wird sich bei den folgenden Überlegungen mit ergeben.

Wir haben nämlich noch die Bezeichnungen K und V für die erklärten Normalteiler von G zu rechtfertigen, d.h. zu zeigen, dass K kompakt und V eine Vektorengruppe ist.

Zunächst V: Da die Normalteiler H_n/H_{n+1} der G_{n+1}, die die Homomorphismen auf G_n erzeugen, kompakt sind, sind alle V_n *isomorph* aufeinander abgebildet. Zu jedem c_n gibt es also *ein* c_{n+1}, von dem es Bild ist, also auch *ein* $c \subset V$, von dem es Bild ist; umgekehrt gibt es auch zu jedem $c \subset V$ *ein* Bild c_n in V_n, und diese letzte Beziehung ist stetig. Nach T 5 und T 9 sind V und V_n also topologisch isomorph. *V ist Vektorengruppe derselben Dimension wie die V_n.*

Nun die Kompaktheit von K: Ist O_n offen in G_n und O_n^* das Urbild von O_n in G, so ist O_n^* offen in G und beliebig klein (da der Durchschnitt der H_n gleich (e) war), falls nur O_n genügend klein und n genügend gross gewählt war. Die O_n^* sind also als Umgebungssystem in G brauchbar. Daraus folgt, dass die *Konvergenz einer Folge in G äquivalent ist mit der Konvergenz der Folge ihrer n-ten Bilder (für alle n) in G_n.* Nach dem Diagonalverfahren schliesst man daraus aus der Kompaktheit der K_n auf die *Kompaktheit von K.*

Wir haben also den

HAUPTSATZ I: *Jede zusammenhängende, im Kleinen kompakte Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, die genügend viel stetige fastperiodische Funktionen besitzt, ist direktes Produkt der (abelschen) Gruppe der Translationen des n-dimensionalen euklidischen Raumes ($n = 0, 1, \cdots$) und einer (zusammenhängenden) kompakten Gruppe (mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom).*

Dass diese Gruppen auch wirklich genügend viel stetige fastperiodische Funktionen besitzen, ist evident; man nehme etwa Funktionen, die für jedes feste Element von K periodisch auf V sind.[28]

21. Sei A_n irgendeine Folge irgendwelcher Gruppen (nicht einmal topologisch brauchen sie zu sein), von denen jede homomorphes Bild der folgenden ist. Die A_n erzeugen eine "Limesgruppe" A. Die Elemente von A sind die Folgen

[28] Ferner ist auch klar, dass in diesen Gruppen die durch die fastperiodischen Funktionen induzierte Topologie mit der gegebenen übereinstimmt (siehe J. v. Neumann, a.a.O. [2], Theorem 36).

von Elementen $a_n \subset A_n$, bei denen jedes Element Bild des folgenden ist; a_n heisst die n-te Koordinate des Elementes $(a_1, a_2, \cdots)$ von A. Unter dem Produkt der Elemente a und b von A versteht man das Element von A, dessen n-te Koordinate das Produkt der n-ten Koordinaten von a und b ist. Es ist klar, dass A eine Gruppe ist. Ordnet man jedem Element von A seine n-te Koordinate zu, so erhält man einen Homomorphismus.

Sind die A_n topologische Gruppen und ist die zwischen ihnen bestehende Beziehung gebietstreu, so topologisiere man A wie folgt: Ist U_n eine Umgebung in A_n, so nenne man die Menge aller Elemente von A, deren n-te Koordinaten in U_n liegen, eine Umgebung in A.[29] Dass die topologischen Axiome usw. in A erfüllt sind, ist klar, ebenso, dass A auf die A_n gebietstreu abgebildet ist, falls die gegebenen Homomorphismen der A_n gebietstreu waren. Erfüllen die A_n das zweite Abzählbarkeitsaxiom, bzw. sind sie kompakt, so gilt dasselbe bzw. für A.

Ist eine Gruppe A topologisch isomorph der von der Folge A_n erzeugten Limesgruppe, so sprechen wir von einer *G_n-adischen Erzeugung*[30] *der Gruppe A mit Hilfe der A_n.*

Wenden wir das auf die zwischen den K_n und K bestehende Beziehung an (siehe 20), so können wir sagen:

HAUPTSATZ II$'$: *Jede zusammenhängende kompakte Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom lässt sich G_n-adisch mit Hilfe kompakter Liescher Gruppen erzeugen.*[31]

Die kompakten Lieschen Gruppen sind alle bekannt (siehe E. Cartan, a.a.O.[16]), S. 37–42). Ihre universellen Überlagerungen sind (siehe 12) direkte Produkte

---

[29] Eine Punktfolge in A ist also dann und nur dann konvergent, wenn ihre n-ten Koordinaten (für jedes n) konvergieren.

[30] Das erste Beispiel G_n-adisch erzeugter topologischer Gruppen findet sich in einer unbeachtet gebliebenen Arbeit von L. E. J. Brouwer: *On the structure of perfect sets of points*, Proceedings Amsterdam *12* (1910), 784–795, §4–5.

Das Prinzip tritt dort schon trotz des speziellen Charakters des Beispiels in seiner vollen Allgemeinheit hervor. L. E. J. Brouwer erhält in seinem Beispiel die Cantorschen Gruppen.

Ohne Kenntnis der Brouwerschen Note hat D. van Dantzig (*Über topologisch homogene Kontinua*, Fundamenta *15* (1930), 102–125) mit der G_n-adischen Methode die Solenoide definiert (siehe Nr. 25 unserer Arbeit). Derselbe hat ein der G_n-adischen Erzeugung nahe verwandtes Prinzip a.a.O.[27], S. 20, entwickelt. Hier findet sich auch die Bezeichnung "G_n-adisch", die an die ganz ähnliche Erzeugung der p-adischen Zahlen erinnern soll.

Für endliche abelsche G_n finden sich ferner G_n-adische Folgen bei L. Pontrjagin (*Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze*, Math. Ann. *105* (1931), 165–205 (195) jedoch mit der irreführenden Bemerkung, dass diese Folgen keine Limesgruppe definierten.

Die G_n-adische Erzeugung findet sich auch definiert und angewandt bei H. Freudenthal: *Die Hopfsche Gruppe, eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe*, Compositio mathematica *2* (1935), 134–162.

Auf demselben Prinzip wie die G_n-adische Erzeugung topologischer Gruppen beruht die Alexandroffsche Spektraldarstellung kompakter Räume (a.a.O. [33]), S. 107–108).

Zusatz bei der Korrektur: Eine systematische Entwicklung dieser Begriffe findet sich bei Hans Freudenthal, *Die R_n-adische Entwicklung von Räumen und Gruppen*, Proceedings Amsterdam *38* (1935), 414–418.

[31] Siehe [7].

von Vektorengruppen und kompakten halbeinfachen Lieschen Gruppen. Die kompakten, einfach zusammenhängenden, halbeinfachen Lieschen Gruppen hat E. Cartan[8]) aufgestellt. Man braucht sie nur noch mit Vektorengruppen zu multiplizieren und nach einem (im Zentrum enthaltenen) diskreten Normalteiler zu reduzieren, um alle kompakten Lieschen Gruppen zu erhalten; die diskreten Normalteiler ergeben sich alle aus den Untersuchungen von E. Cartan[9]).

Nach dem Hauptsatz II ist damit das Problem der Aufstellung aller kompakten Gruppen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom vollständig gelöst.

22. Ist irgend eine topologische Gruppe G homomorph auf $G' = G/H$ abgebildet, so können wir die Abbildung in zwei Schritten vollziehen, indem wir eine Gruppe G^* einschalten: $G^* = G/H_0$ (H_0 = Komponente der Identität von H; siehe T 19), $G' = G^*/(H/H_0)$. Beim ersten Schritt wird die Faktorgruppe nach einer Lieschen Untergruppe gebildet; die Dimension sinkt (wenn der Schritt überhaupt wesentlich ist). Beim zweiten wird nach einem diskreten Normalteiler reduziert; die Gruppe bleibt sich im Kleinen isomorph. Wenn wir von G' zu G übergehen, wollen wir den Schritt von G' nach G^* den "überlagernden," den von G^* nach G den "dimensionserhöhenden" nennen.

Ist die kompakte zusammenhängende Gruppe K von einer Folge Liescher kompakter Gruppen K_n G_n-adisch erzeugt, so dürfen wir also voraussetzen, dass jeder Schritt von K_n zu K_{n+1} rein überlagernd oder rein dimensionserhöhend ist (die unwesentlichen Schritte lassen wir weg).

U_1 sei eine genügend kleine abgeschlossene Umgebung von e und zwar eine Vollkugel[32] in K_1. Wenn U_n schon erklärt ist als abgeschlossene Umgebung von e in K_n und zwar als Vollkugel, erklären wir U_{n+1} wie folgt: Ist der Schritt von K_n nach K_{n+1} überlagernd, so setzen wir U_{n+1} gleich der Komponente der Identität des Urbildes von U_n in K_{n+1}; U_{n+1} ist dann mit U_n homöomorph. Ist dagegen der Schritt von K_n nach K_{n+1} dimensionserhöhend, so nehmen wir U_{n+1} (nachdem wir K_{n+1} im Kleinen als direktes Produkt von H_n/H_{n+1} und $K_{n+1}/(H_n/H_{n+1})$ dargestellt haben) als Produkt einer genügend kleinen Vollkugel aus H_n/H_{n+1}, die e als inneren Punkt enthält, und einer Vollkugel aus $K_{n+1}/(H_n/H_{n+1})$ an; die zweite Vollkugel muss dabei (bei dem Isomorphismus $K_n \cong K_{n+1}/(H_n/H_{n+1})$) Bild von U_n sein.

Die Folge U_n definiert dann eine Teilmenge M in G. M ist entweder einem endlichdimensionalen Quader homöomorph oder dem (unendlichdimensionalen) Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes. $\dim M = \lim \dim U_n$ (dabei ist unter dem Limes einer über alle Grenzen wachsenden Folge ∞ zu verstehen). Da U_n eine Umgebung in K_n war, ist $\dim U_n = \dim K_n$; da M Teilmenge von K ist, ist $\dim M \leqq \dim K$. Also

$$\dim K \geqq \lim \dim K_n.$$

[32] *Vollkugel* ist stets topologisch zu verstehen; wir haben das Wort *Element* vermieden, weil auch von Gruppenelementen die Rede ist.

Nun lässt sich das kompakte K durch beliebig kleine Transformationen in fast alle K_n überführen (d.h. die Urbildmenge jedes Punktes, eine Nebenklasse von H_n, ist für genügend grosses n beliebig klein). Daraus folgt nach dem P. Alexandroffschen Überführungssatz[33]

$$\dim K \leqq \lim \dim K_n.$$

HAUPTSATZ III: *Ist die kompakte Gruppe K mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom G_n-adisch erzeugt mit Hilfe der kompakten Lieschen Gruppen K_n, so ist* $\dim K = \lim \dim K_n$, *und K ist dann und nur dann endlichdimensional, wenn bei der G_n-adischen Erzeugung von K nur endlich viel dimensionserhöhende Schritte vorkommen.*

23. Wir nehmen nun dim K als endlich an und fragen, was geschieht, wenn K obendrein im Kleinen zusammenhängend ist. Indem wir endlich viel K_n aus der G_n-adischen Erzeugung von K weglassen, erreichen wir, dass in der Folge K_n keine dimensionserhöhenden Schritte vorkommen; alle Schritte sind überlagernd. U_1 sei eine offene einfach zusammenhängende Menge in K_1, U_n ihr Urbild in K_n. Die Komponenten von U_n bezeichnen wir mit $U_n^{k_1 \cdots k_n}$ und zwar so, dass das Urbild von $U_n^{k_1 \cdots k_n}$ in G_{n+1} aus den $U_n^{k_1 \cdots k_n k_{n+1}}$ besteht. (k_1 ist stets $= 1$.)

Ich behaupte, dass der Index k_{n+1} sovieler Werte fähig ist (unabhängig von der Wahl der vorangehenden Indizes), wie H_n/H_{n+1} Komponenten, d.h. Elemente) besitzt, und dass die Komponenten sämtlicher U_n (also auch für verschiedene n) einander homöomorph sind. Der Beweis[34] wird induktiv geführt:

Wir schreiben W statt $U_n^{k_1 \cdots k_n}$ und W^k statt $U_n^{k_1 \cdots k_n k_{n+1}}$. Statt H_n/H_{n+1} schreiben wir H, das lässt sich dann auffassen als der Normalteiler, der den Homomorphismus von K_{n+1} auf K_n erzeugt. H ist diskret. Man beachte, dass die Abbildung von K_{n+1} auf K_n unverzweigt, d.h. im Kleinen umkehrbar, ist.

Ein W^k kann keine zwei Punkte enthalten, die zur selben Nebengruppe von H in K_{n+1} gehören; denn zwei derartige Punkte liessen sich in W^k durch einen Weg verbinden, dessen Bild in W geschlossen, also zusammenziehbar wäre; eine solche Zusammenziehung liesse sich aber auf das Urbild in K_{n+1} übertragen, was nicht möglich ist.

Andererseits enthält jedes W^k von einem Punkt von W mindestens ein Urbild, wie man aus der Gebietstreue der Abbildung leicht entnimmt.

W^k und W sind also wirklich topologisch aufeinander abgebildet, und es gibt soviel W^k, wie eine Nebengruppe von H Elemente hat, also soviel, wie H selbst Elemente hat, w. z. b. w.

---

[33] *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Annals of Math. *30* (1929), 101–187 (120).—Erst hier beginnen wir, wesentlich dimensionstheoretische Begriffe zu verwenden, während wir bis jetzt mit dem elementaren Dimensionsbegriff auskamen.

[34] Wir skizzieren den Beweis nur; er beruht auf geläufigen Tatsachen über die Beziehung zwischen einer Mannigfaltigkeit und ihren Überlagerungen.

Die Komponenten des Urbildes von U^k in K sind die von den Folgen $U_1^{k_1}$, $U_2^{k_1 k_2}$, $U_3^{k_1 k_2 k_3}$, $\cdots$ erzeugten Mengen von K. Der so entstehende Komponentenraum ist entweder eine endliche oder eine Cantorsche Menge; im zweiten Fall können die Komponenten keine offenen Mengen sein. Ist K im Kleinen zusammenhängend, so sind aber die Komponenten jeder offenen Menge offen; es kann also nur endlich viel verschiedene Folgen $U_1^{k_1}$, $U_2^{k_1 k_2}$, $\cdots$ geben, von einem gewissen n an findet keine Aufspaltung mehr statt, fast alle H_n/H_{n+1} bestehen allein aus e, also auch fast alle H_n. Fast alle K_n sind dann topologisch isomorph untereinander und mit K. Daraus folgt:

HAUPTSATZ IVa[7]: *Dann und nur dann ist eine im Kleinen kompakte Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom Liesch, wenn sie endlichdimensional und im Kleinen zusammenhängend ist.*

HAUPTSATZ IVb: *Dann und nur dann ist eine im Kleinen kompakte, zusammenhängende Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, die genügend viel stetige fastperiodische Funktionen besitzt, endlichdimensional und im Kleinen zusammenhängend, wenn sie Liesch ist.*

IVb folgt aus IVa unmittelbar, wenn man berücksichtigt, dass nach Hauptsatz I nur eine Vektorengruppe als Faktor hinzukommen kann, die ja selber endlichdimensional und im Kleinen zusammenhängend ist.

24. Wir untersuchen weiter, wie die im Kleinen zusammenziehbaren[35] K aussehen.[36]

Entsprechend den Überlegungen von 23 darf man annehmen, daß alle H_n zusammenhängend sind. U sei eine Umgebung von e in K in sich zusammenziehbar. Man darf annehmen, daß alle H_n in U liegen. U_n sei das Bild von K in $K_n = K/H_n$; $U_{n+1} \supset H_n/H_{n+1}$. H_n/H_{n+1} ist als kompakte Liesche Gruppe, wie man leicht sieht, Träger eines höchstdimensionalen, in K_{n+1} nicht berandenden Zyklus, der also in U_{n+1} liegt. Zu ihm gibt es als Urbild in U einen in K nicht berandenden ϵ_n-Zyklus ($\epsilon_n \to 0$) derselben Dimension. Da U zusammenziehbar war, geht das nur, wenn dim $H_n/H_{n+1} = 0$, also $H_n = H_{n+1}$, also $K = K_n$ ist für fast alle n. Dann ist aber K Liesch. Daraus folgt:

HAUPTSATZ Va: *Dann und nur dann ist eine kompakte zusammenhängende Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom Liesch, wenn sie im Kleinen zusammenziehbar ist.*

HAUPTSATZ Vb: analog zu IVb.

25. Ohne Beweis erwähnen wir noch.

---

[35] *Im Kleinen zusammenziehbar* soll heissen: es gibt zu jedem Punkt beliebig kleine, ihn enthaltende, offene Mengen, die sich in sich auf diesen Punkt stetig zusammenziehen lassen.

[36] Die hier folgende Vorbereitung von Hauptsatz V hat erst in der Korrektur ihre gegenwärtige vereinfachte Gestalt erhalten. Auch die Beweise der Hauptsätze III und IV ließen sich durch solche Homologiebetrachtungen vereinfachen.

HAUPTSATZ VIa: *Zu jeder kompakten zusammenhängenden Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom gibt es eine nulldimensionalblättrige kompakte Überlagerungsgruppe, die direktes Produkt eines abelschen Solenoids und endlich oder unendlich vieler einfacher nichtabelscher Liescher Gruppen ist.*

Dabei nennen wir K^* nulldimensionalblättrige Überlagerung von K, wenn K Faktorgruppe von K^* nach einem nulldimensionalen Normalteiler ist.

Ein abelsches Solenoid[37] wird so definiert: Sei V^∞ die ∞-dimensionale Vektorengruppe, d.h. die Gruppe, deren Elemente die unendlichen Folgen reeller Zahlen $(r_1, r_2, \cdots)$ sind mit der Addition der r_n als Gruppenoperation und der folgenden Topologie: n-te Umgebung von $(r_1, r_2, \cdots)$ ist die Menge aller $(s_1, s_2, \cdots)$ mit $|r_k - s_k| < \frac{1}{n}$ für $k \leqq n$. Sei A_n eine absteigende Folge abgeschlossener Untergruppen; A_n sei enthalten in der Untergruppe von V^∞ die entsteht, wenn man alle Koordinaten von der $(n+1)$-ten an null setzt. Die G_n-adische Folge V^∞/A_n definiert dann ein *abelsches Solenoid.*

Schliesslich ist in Hauptsatz VI das direkte Produkt unendlich vieler Gruppen F_n als Limesgruppe der G_n-adischen Folge F_1, $F_1 \times F_2$, $F_1 \times F_2 \times F_3$, $\cdots$ zu verstehen.

HAUPTSATZ VIb: analog zu IVb.

26. Wir lassen nun die Voraussetzung der Kompaktheit im Kleinen fallen und beschäftigen uns mit zusammenhängenden Gruppen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, die genügend viel stetige fastperiodische Funktionen besitzen. Wir gehen dazu von den Ergebnissen von 18 aus. Dann gibt es also in G eine absteigende Folge von abgeschlossenen Normalteilern H_n mit e als Durchschnitt und kompakten Komponentenräumen, derart dass $G_n = G/H_n = K_n \times V_n$ ist (K_n Liesch; die Dimensionen der V_n dürfen jetzt über alle Grenzen wachsen). Ebenso wie im ersten Absatz von 20 haben wir wieder einen Homomorphismus von G_{n+1} auf G_n: $G_n = G_{n+1}/(H_n/H_{n+1})$. Ebenso wie in 20 dürfen wir wegen 7 annehmen, dass dabei K_{n+1} auf K_n und V_{n+1} auf V_n abgebildet wird. (Die Voraussetzungen sind erfüllt, da H_n/H_{n+1} als Bild von H_n einen kompakten Komponentenraum hat.)

Die G_n-adische Folge $K_n \times V_n$ besitzt eine Limesgruppe $G^* = K \times V$ (hier darf V auch ein V^∞ sein; in dem Falle ist das Produkt nicht mehr im Kleinen kompakt, doch gilt noch das zweite Abzählbarkeitsaxiom). Einem Element a von G, dessen Bild in G_n a_n ist, ordnen wir das Element $(a_1, a_2, \cdots)$ von G^* zu. Die Abbildung ist (stetig) isomorph; es liesse sich sogar zeigen, dass das Bild von G in G^* überall dicht ist, man beachte jedoch, dass die Abbildung nicht notwendig topologisch isomorph ist.

V^∞ (also auch jedes endlichdimensionale V) lässt sich stetig isomorph in eine kompakte zusammenhängende Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom einbetten, nämlich in das direkte Produkt unendlich vieler Kreisdrehungsgruppen.

---

[37] Siehe auch [30]

Man ordne nämlich einem Element $(r_1, r_2, \cdots)$ von V^∞ die Folge $(\eta_1, \eta_2, \cdots)$ zu, wobei gesetzt ist

$$\text{für gerades } n \quad : \eta_n = e^{i(r_{n-1}+r_n)},$$

$$\text{für ungerades } n\text{: } \eta_n = e^{i(r_n+r_{n+1})\rho}, \ (\rho \text{ reell irrational}).$$

Daraus ergibt sich für das in $K \times V$ eingebettete G:

HAUPTSATZ VII: *Jede zusammenhängende Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom, die genügend viel fastperiodische stetige Funktionen besitzt, lässt sich stetig isomorph einbetten in eine zusammenhängende kompakte Gruppe mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom.*

Anhang

(Received April 20, 1935)

27. In diesem Anhang zeigen wir erstens, dass *jede einseitig fastperiodische Funktion (beiderseits) fastperiodisch* ist (auch in nichtkommutativen Gruppen und ohne alle topologischen Voraussetzungen). Zweitens beweisen wir:

HAUPTSATZ VIII: *Bei den zusammenhängenden, im Kleinen kompakten Gruppen mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom sind folgende vier Eigenschaften miteinander äquivalent:*

1) *G besitzt genügend viele stetige fastperiodische Funktionen,*

2) *G ist von der Form $K \times V$ (K zusammenhängend),*

3) *G transformiert e-Folgen in e-Folgen, d.h. ist* $\lim a_n = e$, *so ist auch* $\lim s_n a_n s_n^{-1} = e$.

4) *G ist invariant metrisierbar, d.h. es gibt eine Funktion $\rho(a, b)$ mit den üblichen Eigenschaften der Abstandsfunktion und der Invarianzeigenschaft $\rho(a, b) = \rho(as, bs) = \rho(sa, sb)$.*

Dabei ist die Äquivalenz von 1 und 2 aus Hauptsatz I und einem Satz von J. v. Neumann[4] bekannt; die Äquivalenz von 3 und 4 (ohne topologische Voraussetzungen ausser dem Abzählbarkeitsaxiom) ist von D. van Dantzig bewiesen[38]; dass 3 aus 1 folgt wird sich leicht ergeben, das Umgekehrte nur unter Verwendung der Äquivalenz von 1 mit 2 und von 3 mit 4.[39]

28. *G sei eine Gruppe (ohne alle topologischen Voraussetzungen). $f(x)$ sei eine auf G rechtsfastperiodische Funktion, d.h. der Raum der Funktionen $f(xa)$ sei totalbeschränkt.*[40] *Wir beweisen, dass f dann auch linksfastperiodisch ist, dass also der Raum der Funktionen $f(ax)$ totalbeschränkt ist.*

---

[38] *Zur topologischen Algebra* I, Math. Ann. *107* (1932), 587–626, §5.

[39] Die Äquivalenz von 2 und 3 ist zuerst von Herrn L. Pontrjagin erkannt worden, der sie mir (ohne Angabe des Beweises) vor einiger Zeit brieflich mitteilte.

[40] Totalbeschränktheit eines metrischen Raumes nennt man die folgende Eigenschaft: zu jedem $\epsilon > 0$ lassen sich endlich viel Punkte derart finden, dass jeder Punkt von einem dieser endlich vielen einen Abstand $< \epsilon$ hat. Sie ist äquivalent mit der folgenden Eigenschaft: aus jeder unendlichen Teilmenge des Raumes lässt sich eine Fundamentalfolge auswählen. (Siehe F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin-Leipzig 1927, §21, 4.)

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es endlich viel Elemente $y_1, \cdots, y_p$, so dass zu jedem $y \subset G$ ein y_k $(k = 1, \cdots, p)$ existiert mit

$$| f(xy) - f(xy_k) | < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (*)$$

Insbesondere ist f also beschränkt. Sei irgendeine Teilmenge von G gegeben. Aus ihr können wir eine Folge $a_1, a_2, \cdots$ so auswählen, dass $f(a_n y)$ konvergiert in den endlich vielen Punkten $y = y_1, \cdots, y = y_p$. Es gibt also ein q, so dass

$$| f(a_m y_k) - f(a_n y_k) | < \frac{\epsilon}{3} \text{ für } m \geqq q, n \geqq q, k = 1, \cdots, p.$$

Ersetzt man in (*) x durch a_m bzw. durch a_n, so erhält man zusammen mit der letzten Ungleichung für alle y

$$| f(a_m y) - f(a_n y) | < \epsilon \text{ für } m \geqq q, n \geqq q.$$

Lässt man nun ϵ eine Nullfolge durchlaufen, und wendet man dabei in bekannter Weise das Diagonalverfahren an, so erhält man tatsächlich aus der gegebenen Menge eine Teilfolge a_n, für die $f(a_n y)$ gleichmässig konvergiert; der Raum der (ay) ist also totalbeschränkt, f ist linksfastperiodisch.

29. *Sei G eine topologische Gruppe und f eine stetige fastperiodische Funktion. Ist e Häufungspunkt der zu $a \subset G$ konjugierten Elemente, so ist notwendig $f(a) = f(e)$.*

Beweis: Sei $\lim s_n a s_n^{-1} = e$. Die Folge $f(s_n^{-1} x s_n)$ besitzt eine (gegen $g(x)$) gleichmässig konvergente Teilfolge.[41] Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es also unendlich viel n mit

$$| f(s_n^{-1} x s_n) - g(x) | < \epsilon;$$

für diese n gilt dann auch

$$| f(x) - g(s_n x s_n^{-1}) | < \epsilon.$$

Setzt man hier $x = e$, so erhält man $f(e) = g(e)$; setzt man $x = a$, so erhält man (wegen $\lim s_n a s_n^{-1} = e$) $f(a) = g(e)$; zusammen also $f(a) = f(e)$, w. z. b. w.

30. Aus 29 folgt unmittelbar, dass, wenn G genügend viel fastperiodische Funktionen besitzt, e-Folgen in e-Folgen transformiert werden. Aus Eigenschaft 1 folgt also Eigenschaft 3.

31. G sei nun im Kleinen kompakt und erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom G besitze ferner die Eigenschaft 3 aus 27. G lässt sich dann invariant metrisieren.[42] In dieser Metrik sei U eine genügend kleine, d.h. kompakte Vollkugel

---

[41] Siehe J. v. Neumann, a.a.O. [4], Theorem 9.

[42] D. van Dantzig, *Studiën over topologische algebra*, Diss. Amsterdam 1931, TG 32. *Zur topologischen Algebra* III, erscheint in Compositio Math.

um e. Die Transformationen, die x auf sxs^{-1} abbilden, sind dann isometrische Abbildungen von U auf sich; ihre Gesamtheit ist gleichartig gleichmässig stetig. Fügt man zu ihr alle Limesabbildungen hinzu, so entsteht also eine kompakte Gruppe, in die G/Z isomorph abgebildet ist; dabei ist Z die Gesamtheit aller s mit $sx = xs$ für alle x aus U. Ist G obendrein zusammenhängend, so erzeugt U ganz G[42], dann ist Z also das Zentrum.

Von jetzt an setzen wir G stets als *im Kleinen kompakt, zusammenhängend und dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügend* voraus; ferner nehmen wir an, dass G *die Bedingung* 3 erfüllt. Dann hat sich also gezeigt, dass G/Z in eine kompakte Gruppe (Z = Zentrum von G) isomorph einbettbar ist; G/Z besitzt also genügend viel stetige fastperiodische Funktionen und ist nach Hauptsatz I von der Form $K \times V$. Wir müssen zeigen, dass G selbst von der Form $K \times V$ ist.

32. Im Folgenden beachte man:

a) *Eine Untergruppe oder Faktorgruppe einer Gruppe mit der Eigenschaft* 3 *hat auch die Eigenschaft* 3 (siehe 27).

b) *Das direkte Produkt zweier Gruppen der Form* $K \times V$ *hat dieselbe Form.*

c) *Eine Faktorgruppe einer Gruppe von der Form* $K \times V$ *hat dieselbe Form.* (Beweis analog dem von 6 und 7.)

d) *Besitzt G eine Folge von Normalteilern H mit* (e) *als Durchschnitt, für die die G/H genügend viel stetige fastperiodische Funktionen besitzen, so besitzt G selbst genügend viel fastperiodische Funktionen* (fastperiodische Funktionen auf G/H lassen sich nämlich als fastperiodische Funktionen auf G auffassen). Oder: *Sind die G/H von der Form $K \times V$, so ist es auch G selbst.*

e) *Ist G/N von der Form $K \times V$ und N nulldimensional, so ist G selbst von der Form $K \times V$.* (Folgt aus Hauptsatz II, wenn man berücksichtigt, dass der Übergang von G/N zu G für die erzeugenden Lieschen Gruppen den Übergang zu Überlagerungsgruppen nach sich zieht.)

33. Die Komponente von e in Z heisse Z_0. Dann ist Z/Z_0 nulldimensional. $G/Z \cong (G/Z_0)/(Z/Z_0)$ (siehe T 16 und 19). Da G/Z von der Form $K \times V$ ist, hat G/Z_0 nach 32e dieselbe Eigenschaft. Nach Hauptsatz I und II hat Z_0 beliebig kleine Normalteiler N, für die Z_0/N Liesch ist. $G/Z_0 \cong (G/N)/(Z_0/N)$. Nach 32d genügt es hier, zu beweisen, dass all diese G/N von der Form $K \times V$ sind. Wenn wir wieder G statt G/N und Z statt Z_0/N schreiben, brauchen wir also wegen 32a nur zu zeigen: Besitzt G die Eigenschaft 3, ist Z eine Untergruppe des Zentrums von G, ist Z Liesch und G/Z von der Form $K \times V$, so ist auch G von der Form $K \times V$. Wenn wir das bewiesen haben, sind wir fertig.

Es ist $G/Z = K \times V$. Bei der Faktorbildung nach Z sei L das Urbild von K und W das Urbild von V. Da sich G als eine Faktorgruppe von $L \times W$ auffassen lässt, genügt es nach 32c, zu beweisen, dass L und W von der Form $K \times V$ sind. Das soll in 34 bzw. 35 geschehen.

34. Z ist abelsch und Liesch, besitzt also einen diskreten Normalteiler N, so dass Z/N kompakt ist. $L/Z = (L/N)/(Z/N) \cong K$; nach T 22 ist also L/N kompakt und nach 32e ist L selbst von der Form $K \times V$.

35. $W/Z = V$; die Kommutatorgruppe von W ist also, da V abelsch ist, in Z enthalten. a und x seien Elemente von W; wir setzen $\varphi(x) = axa^{-1}x^{-1}$ (für ein festes a). Dann ist also $\varphi(x) \subset Z$ und $axa^{-1} = \varphi(x) \cdot x$, also $a^n x a^{-n} = \varphi(x)^n \cdot x$, da Z zum Zentrum gehört. Gäbe es eine Folge x_n, mit $\lim x_n = e$ und $\varphi(x_n) \neq e$ so könnten wir, da Z Liesch ist, also nicht beliebig kleine Untergruppen (ausser (e)) besitzt, Exponenten k_n so bestimmen, dass $\varphi(x_n)^{k_n}$ nicht nach e konvergiert. Dann würde auch $\varphi(x_n)^n x_n$ nicht nach e konvergieren, während andererseits die Eigenschaft 3 besagt, dass $a^n x_n a^{-n} = \varphi(x_n)^n x_n$ wohl nach e konvergiert. Es kann also keine Folge x_n geben mit $\lim x_n = e$ und $\varphi(x_n) \neq e$, d.h. es gibt eine Umgebung von e, in der überall $\varphi(x) = e$ ist. Für alle x aus dieser Umgebung ist dann $ax = xa$; W war aber zusammenhängend (denn V und Z sind es), also ist für alle x aus W überhaupt $ax = xa$. Diese Überlegung lässt sich für jedes a aus W durchführen, also ist W abelsch und nach Hauptsatz I von der Form $K \times V$.

AMSTERDAM, HOLLAND.

Teilweise geordnete Moduln [1936d]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 39 (1936), 641–651
[JFM 62.0437.02; Zbl 0014.31302]

(Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of April 25, 1936.)

1. (1 . 1) (+) [1] $\mathfrak{R}$ sei ein *Modul* (Elemente: kleine lateinische Buchstaben auszer k, l, m, n, die natürliche Zahlen bedeuten) in bezug auf den Körper der reellen Zahlen (kleine griechische Buchstaben), d. h. eine abelsche Gruppe mit den reellen Zahlen als Operatoren.

(1 . 2 . 1) (+) $\mathfrak{R}$ sei *teilweise geordnet* [2] (Ordnungsrelation $>$), und es gelte wie üblich:

(1 . 2 . 2) (+) Zu je zwei Elementen a, b gibt es ein Element $c = a \vee b$, $c \geqq a$, $c \geqq b$, $c \leqq$ jedes x, das $\geqq a$ und $\geqq b$ ist.

(1 . 2 . 2′) (+) Zu je zwei Elementen a, b gibt es ein Element $d = a \wedge b$, $d \leqq a$, $d \leqq b$, $d \geqq$ jedes x, das $\leqq a$ und $\leqq b$ ist. [2a]

Weiter gelte:

(1 . 3 . 1) (+) Ist $a > 0$, so ist $0 > -a$.

(1 . 3 . 2) (+) Ist $a > b$, so ist $a + c > b + c$.

(1 . 4) (+) Ist $a > 0$, $\alpha > 0$, so ist $\alpha a > 0$.

2. Man beweist ohne Mühe:

(2 . 1 . 1) Ist $a > b$, so ist $-b < -a$.

(2 . 1 . 2) $(a \vee b) + (-a \wedge -b) = 0$

(das zeigt, dasz 1 . 2 . 1′ aus den vorgehenden folgt).

(2 . 1. 3)
$$(a \vee b) + x = (a + x) \vee (b + x)$$
$$(a \wedge b) + x = (a + x) \wedge (b + x).$$

Die Operation + wirkt also distributiv in bezug auf $\vee$ und $\wedge$. Dasselbe gilt hinsichtlich der Multiplikation mit $\gamma \geqq 0$:

(2 . 1 . 4)
$$\gamma (a \vee b) = \gamma a \vee \gamma b$$
$$\gamma (a \wedge b) = \gamma a \wedge \gamma b \quad \text{für } \gamma \geqq 0.$$

---

1) Axiome sind durch ein (+) hinter der Nummer gekennzeichnet.

2) Teilweise geordnete Mengen sind in der letzten Zeit von mehreren Verf. betrachtet worden. Teilweise geordnete Moduln (lineare Räume) hat eigentlich bereits F. RIESZ (Kongresz Bologna 1928 III, 143—148) untersucht. Explizit eingeführt hat sie L. KANTOROWITSCH (C. R. **202**, 813—816 (1936)), mit dessen Sätzen sich ein Teil unserer eng berührt. Zusatz bei der Korrektur: Siehe auch seine zweite Note (C. R. **202**, 1251—1253 (1936)).

2a) Die hier verwendeten Zeichen scheinen mir am praktischsten; die gebogenen Zeichen reserviert man am besten für die konkrete Vereinigungs- und Durchschnittsbildung.

Addiert man im zweiten Summand der linken und auf der rechten Seite von 2.1.2 (unter Berücksichtigung von 2.1.3) $a+b$, so hat man:

(2.2) $$(a \vee b)+(a \wedge b)=a+b.$$

Das kann man so deuten: Die Funktion, die jedes Element von $\mathfrak{R}$ sich selbst zuordnet, benimmt sich formal wie das Masz (oder die lineare Dimension).

(2.3) Für $a \wedge b=0$ ist $a+b=a \vee b$.

Wir schreiben auch

(2.4.1) $$a \vee 0=a_+ \ , \ a \wedge 0=a_-.$$

Aus (2.2) wird dann mit $b=0$:

(2.4.2) $$a_+ + a_- = a.$$

3. Die Operationen $\vee$ und $\wedge$ befolgen nicht nur (wie evident)

(3.1) *die kommutativen und assoziativen Gesetze,*

sondern auch

(3.2) *die distributiven Gesetze* [3]).

Wir beweisen also [4])

(3.2.1) $$(a \vee b) \wedge c=(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

(3.2.2) $$(a \wedge b) \vee c=(a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Ohne weiteres gelten:

(3.2.3) $$[(a \wedge b) \vee c] \vee b=[(a \wedge b) \vee b] \vee c=(b \vee c) \vee b \geqq [a \wedge (b \vee c)] \vee b$$

(3.2.4) $$[(a \wedge b) \vee c] \wedge b \geqq (a \wedge b) \wedge b=(a \wedge b) \wedge (b \vee c)= \\ =[a \wedge (b \vee c)] \wedge b.$$

Addiert man das erste (letzte) Glied von 3.2.3 zum ersten (letzten) von 3.2.4, berücksichtigt man 2.2 und subtrahiert man auf beiden Seiten b, so erhält man

(3.2.5) $$(a \wedge b) \vee c \geqq a \wedge (b \vee c).$$

Vertauschung von a und b liefert

$$(a \wedge b) \vee c \geqq b \wedge (a \vee c),$$

also auch

$$(a \wedge b) \vee c \geqq [b \wedge (a \vee c)] \vee c \geqq (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

(wegen 3.2.5 mit $a \vee c$ statt a).

---

[3]) Man weisz, dasz das eine bedeutende Einschränkung gegenüber beliebigen teilweise geordneten Mengen bedeutet.

[4]) Wir dürften uns hier etwa auf O. ORE (Annals of Math. (2) **36**, 406—437 (1935)), δ_2, S. 414, berufen, doch scheint mir unser Beweis von Interesse, besonders wegen 3.2.5, einer wesentlichen *Un*gleichheit, die sich als dem distributiven Gesetz äquivalent erweist.

Andererseits ist

$$(a \wedge b) \vee c \leqq \begin{cases} a \vee c \\ b \vee c \end{cases}$$

also gilt 3.2.2. Analog oder als Folge hiervon beweist man 3.2.1.

4. Wir brauchen später die Ungleichung

(4.1) $$(a + c) \vee (b + c) \geqq (a \vee c) + (b \wedge c),$$

die für $c = 0$ spezialisiert lautet:

(4.2) $$a \vee b \geqq a_+ + b_-.$$

Sie ergibt sich so:

$$a + c \geqq a + (b \wedge c)\ ,\ a + c - (b \wedge c) \geqq a,$$
$$[a + c - (b \wedge c)] \vee (b \vee c) \geqq a \vee c.$$

Addition von $b \wedge c$ unter Berücksichtigung von 2.1.3 und 2.2 liefert 4.1.

5. (5.1) (+) Es gebe in $\mathfrak{R}$ ein positives Element, 1 genannt, mit der Eigenschaft: $a \wedge 1 > 0$ für jedes $a > 0$.

Statt $\alpha\, 1$ schreiben wir kurz α, da das zu keinem Miszverständnis führen kann.

(5.2) $e \in \mathfrak{E}$ bedeute: $0 \leqq e \leqq 1$, $e \wedge (1 - e) = 0$ (oder, was nach 2.2 dasselbe ist, $e \vee (1 - e) = 1$).

(5.3) $0 \in \mathfrak{E}$, $1 \in \mathfrak{E}$.

(5.4) Sind e_1 und e_2 in $\mathfrak{E}$, so sind es auch $e_1 \vee e_2$, $e_1 \wedge e_2$ und, falls $e_1 \leqq e_2$, auch $e_2 - e_1$.

Dabei ist 5.3 und der letzte Teil von 5.4 trivial: das Uebrige ergibt sich so: $(e_1 \vee e_2) \wedge [1 - (e_1 \vee e_2)] = [e_1 \wedge (1 - (e_1 \vee e_2))] \vee [(e_2 \wedge (1 - (e_1 \vee e_2))] \leqq$ $\leqq [e_1 \wedge (1 - e_1)] \vee [e_2 \wedge (1 - e_2)] \leqq 0$, andererseits $\geqq 0$, also $= 0$. Analog ergibt sich die andere Beziehung unter Verwendung der Paranthese von 5.2.

(5.5) $e \in \mathfrak{E}$ dann und nur dann, wenn für jedes $\alpha \geqq 1$ gilt $\alpha e \wedge 1 = e$. „Dann" ist trivial, denn für $\alpha = 2$ erhält man $2e \wedge 1 = e$, also wegen 2.1.3 wirklich $e \wedge (1 - e) = 0$. Umgekehrt schliesst man aus $e \in \mathfrak{E}$ auf $2e \wedge 1 = e$; für ganzzahliges $\alpha = n$ folgt aus der Induktionsannahme $ne \wedge 1 = e$:

$$(n + 1)\, e \wedge 1 \leqq (n + 1)\, e \wedge (1 + e) = e + (ne \wedge 1) = 2e$$

und weiter wegen $(n + 1)\, e \wedge 1 \leqq 1$:

$$(n + 1)\, e \wedge 1 \leqq 2e \wedge 1 = e,$$

während doch

$$(n + 1)\, e \wedge 1 \geqq e \wedge 1 = e$$

ist, so dasz für alle n

$$ne \wedge 1 = e.$$

gilt. Für beliebiges $\alpha \geqq 1$ hat man $n \leqq \alpha \leqq n+1$ (mit geeignetem n), also

$$e = ne \curvearrowright 1 \leqq \alpha e \curvearrowright 1 \leqq (n+1)e \curvearrowright 1 = e.$$

6. (6.1) Die Menge $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{R}$ heiszt nach oben (unten) ordnungsbeschränkt [kurz: o. o. b. bzw. u. o. b., und, wenn beides erfüllt ist, einfach o. b.], wenn ein c existiert, so dasz $a \leqq c$ für alle $a \in \mathfrak{M}$ gilt. c heiszt obere (untere) Schranke [kurz: o. S. (u. S.)] von $\mathfrak{M}$.

(6.2) Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge aus $\mathfrak{R}$, so bedeute

$$\bigvee_{a \in \mathfrak{M}} a \quad \text{bzw.} \quad \bigwedge_{a \in \mathfrak{M}} a \quad [4a])$$

die kleinste o. S. bzw. gröszte u. S. von $\mathfrak{M}$ (falls sie existiert).

(6.3) (+) Für jede steigende o. o. b. (sinkende u. o. b.) Folge[5]) a_n existiere $\bigvee_n a_n$ $(\bigwedge_n a_n)$.

(6.4) Für jede o. o. b. (u. o. b.) Folge a_n existiert $\bigvee_n a_n$ $(\bigwedge_n a_n)$. Das ergibt sich, wenn 6.3 auf die Folge $b_n = \bigvee_{k=1}^{n} a_k$ $(\bigwedge_{k=1}^{n} a_k)$ anwendet.

(6.5) Sei $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots < a$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots < b$ und $\alpha \geqq 0$. Dann ist

$$\bigvee_n (a_n + b_n) = \bigvee_n a_n + \bigvee_n b_n \;, \quad \bigvee_n \alpha a_n = \alpha \bigvee_n a_n .$$

Entsprechendes gilt für sinkende u. o. b. Folgen.

Man hat nämlich: $\bigvee_n (a_n + b_n) \geqq a_k + b_k \geqq a_k + b_l$ (für $k \geqq l$), also $\bigvee_n (a_n + b_n) \geqq \bigvee_n a_n + b_l$, also auch $\geqq \bigvee_n a_n + \bigvee_n b_n$. Dies ist aber wieder $\geqq a_k + b_k$, also $\geqq \bigvee_n (a_n + b_n)$, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Der Rest ist evident.

(6.6) $\bigvee_n a_n \curvearrowright \bigvee_n b_n = \bigvee_n (a_n \curvearrowright b_n)$, $\bigvee_n a_n \curvearrowleft \bigvee_n b_n = \bigvee_n (a_n \curvearrowleft b_n)$ usw. (wenn die linken Seiten existieren, dann existieren auch die rechten).

Die erste Aussage ist klar. Man darf weiter annehmen, dasz a_n, b_n den Voraussetzungen von 6.5 genügen.

Wegen 2.2 hat man:

$$\bigvee_n a_n \curvearrowleft \bigvee_n b_n = \bigvee_n a_n + \bigvee_n b_n - (\bigvee_n a_n \curvearrowright \bigvee_n b_n) =$$

$$= \bigvee_n (a_n + b_n) - \bigvee_n (a_n \curvearrowright b_n) =$$

$$\bigvee_n (a_n \curvearrowright b_n) + \bigvee_n (a_n \curvearrowleft b_n) - \bigvee_n (a_n \curvearrowleft b_n) = \bigvee_n (a_n \curvearrowleft b_n).$$

[4a]) Diese Zeichen, mit denen ähnlich wie mit Σ und Π operiert wird, scheinen mir besonders zweckmäszig zu sein; analog kann man gebogene Zeichen einführen.

[5]) Es ist wohl bemerkenswert, dasz für unsere Betrachtungen diese Voraussetzung, die nur *abzählbare* Folgen betrifft, ausreicht.

7. (7 . 1) Mit e_n liegt auch $\bigvee_n e_n$ und $\bigwedge_n e_n$ in $\mathfrak{E}$. (Klar nach 6 . 6 .)

(7 . 2) Zu jedem a existiert die kleinste o. S. der $e \in \mathfrak{E}$ mit $e \geqq 1 \wedge a$. Sie berechnet sich zu $e(a) = \bigvee_{n=1}^{\infty} [(na)_+ \wedge 1]$.

(7 . 2′) Zu jedem a existiert die grösste u. S. der $e \in \mathfrak{E}$ mit $e \leqq a \vee 0$. Sie berechnet sich zu $e'(a) = 1 - e(1-a)$.

Wir beweisen 7 . 2 (daraus folgt 7 . 2′ ohneweiteres):

$$2e(a) \wedge 1 = \bigvee_n [(2na)_+ \wedge 1] = \bigvee_n [(na)_+ \wedge 1] = e(a),$$

also wegen 5 . 5: $e(a) \in \mathfrak{E}$. $e(a) \geqq a \wedge 1$ ist evident. Sei $e \in \mathfrak{E}$, $e \geqq a \wedge 1$; dann ist $\bigvee_n (ne \wedge 1) \geqq \bigvee_n [(na)_+ \wedge 1]$, also wegen 5 . 5 auch $e \geqq e(a)$.

(7 . 3) $e(a) + e(-a) \leqq 1$. (Klar.)

(7 . 4 . 1) Wir setzen $[(c \vee \alpha) \wedge \beta] - \alpha = [(c \wedge \beta) \vee \alpha] - \alpha = c_{\alpha,\beta}$ für $\alpha < \beta$. Ferner: $d_{\alpha,\beta} = \frac{c_{\alpha,\beta}}{\beta - \alpha}$. Schliesslich: $e(c-\alpha) = e_\alpha$.[6])

(7 . 4 . 2) $c_{\alpha,\beta} + c_{\beta,\gamma} = c_{\alpha,\gamma}$. (Leicht zu beweisen).

(7 . 4 . 3) Für $0 \leqq \beta - \alpha \leqq 1$ ist $e_\alpha \geqq d_{\alpha,\beta} \geqq e_\beta$.

Nach der Formel aus 7 . 2 ist nämlich $e_\alpha = e(c-\alpha) \geqq \frac{c-\alpha}{\beta-\alpha} \wedge 1 =$

$= \frac{1}{\beta-\alpha} [(c-\alpha) \wedge (\beta-\alpha)]$ (wegen 2 . 1 . 4). $(\beta-\alpha)\, e_\alpha$ ist also einerseits $\geqq (c-\alpha) \wedge (\beta-\alpha) = (c \wedge \beta) - \alpha$ (wegen 2 . 1 . 3), andererseits $\geqq 0$, also auch $\geqq [(c \wedge \beta) - \alpha] \vee 0 = c_{\alpha,\beta}$ (wegen 2 . 1 . 3). Daraus folgt die erste Ungleichheit. Die zweite entsteht aus der ersten, wenn man α, β, c bzw. durch $-\beta, -\alpha, -c$ ersetzt. Dann geht nämlich $d_{\alpha,\beta}$ in $1 - d_{\alpha,\beta}$ über und e_α in $e(-c+\beta)$, was (nach 7 . 4 . 2) $\leqq 1 - e_\beta$ ist.

(7 . 4 . 4) Zu jedem positiven c gibt es positive γ und $e \in \mathfrak{E}$ mit $\gamma e \leqq c$. (Man wähle einfach $\gamma > 0$ so, dasz $c - \gamma$ nicht $\leqq 0$ ist; dann ist $e_\gamma = e(c-\gamma)$ auch positiv; nach 7 . 4 . 3 ist aber $c \geqq c_{0,\gamma} \geqq \gamma\, e_\gamma$.)

(7 . 4 . 5) $$\bigwedge_{m=1}^{\infty} \bigvee_{n=1}^{\infty} \{[c \vee (-m)] \wedge n\} = c.$$ [7])

Zum Beweise setzen wir bequemlichkeitshalber $c \geqq 0$ voraus. Sei $e \in \mathfrak{E}$, $\gamma \geqq 0$ und $c \geqq c' + \gamma e$, wobei $c' = \bigvee_n (c \wedge n)$ gesetzt sei. Dann ist

$$\bigvee_n (c' \wedge ne) = \bigvee_n (c \wedge ne) \geqq \bigvee_n [(c' + \gamma e) \wedge ne] =$$

$$= \gamma e + \bigvee_n [c' \wedge (n-\gamma) e] = \gamma e + \bigvee_n (c' \wedge ne)$$

also $\gamma e = 0$, also nach 7 . 4 . 4, wie wir beweisen wollten, $c' = c$.

---

[6]) Die Abhängigkeit des $d_{\alpha,\beta}$ und des e_α von c bringen wir bequemlichkeitshalber nicht zum Ausdruck.

[7]) Die beiden „Grenzübergänge" sind sogar ganz unabhängig voneinander, was wir nicht explizit zum Ausdruck bringen.

(7 . 5) Sei γ_n für alle ganzen n erklärt, $0 \leqq \gamma_{n+1} - \gamma_n \leqq \delta > 0$, $\lim_{n \to \pm\infty} \gamma_n = \pm\infty$. Dann ist (wie sich aus 7 . 4 . 2,3,5 ohneweiteres ergibt):

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\, e_{\gamma_{n+1}} \leqq c \leqq \bigvee_{-\infty}^{\infty} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\, e_{\gamma_n}.$$

Linkes und rechtes Glied unterscheiden sich dabei um höchstens δ. (Ist $-m \leqq c \leqq m$ für ein geeignetes m, durchläuft also n de facto nur endlich viel Nummern, so kann man $\vee$ durch Σ ersetzen; im allgemeinen geht das noch nicht, da unendliche Summen nicht erklärt sind.)

8. (8 . 1) $\mathfrak{R}_e^+$ sei die Gesamtheit der $a \geqq 0$ mit $a \wedge (1 - e) = 0$. $\mathfrak{R}_e$ sei die von $\mathfrak{R}_e^+$ erzeugte lineare Mannigfaltigkeit.

(8 . 2 . 1) Sind $a, b \in \mathfrak{R}_e^+$, $\alpha \geqq 0$, so gehören ebenfalls zu $\mathfrak{R}_e^+$: $a \vee b$ (wegen 3 . 2 . 1), αa (klar), jedes positive $c \leqq a$ (klar), $a + b$ (weil $\leqq 2(a \vee b)$).

(8 . 2 . 2) Jedes Element von $\mathfrak{R}_e$ läszt sich als Differenz zweier Elemente von $\mathfrak{R}_e^+$ schreiben. (Klar wegen der zweiten und vierten Aussage von 8 . 2 . 1.)

(8 . 2 . 3) Jedes positive Element von $\mathfrak{R}_e$ liegt in $\mathfrak{R}_e^+$. Mehr noch: Ist $c \in \mathfrak{R}_e$, so ist $c_+ \in \mathfrak{R}_e^+$ (also auch $\in \mathfrak{R}_e$), ebenso $-c_-$.

Denn nach 8 . 2 . 2 ist $c = a - b$, $a \in \mathfrak{R}_e^+$, $b \in \mathfrak{R}_e^+$. Also $c_+ = (a-b) \vee 0 = (a \vee b) - b \leqq a \vee b$, also nach der ersten und dritten Aussage von 8 . 2 . 1: $c_+ \in \mathfrak{R}_e^+$. Analog ergibt sich der Rest.

(8 . 2 . 4) Für eine wachsende o. o. b. (abnehmende u. o. b.) Folge $a_n \in \mathfrak{R}_e^+$, ist auch $\vee a_n\ (\wedge a_n) \in \mathfrak{R}_e$. (Klar nach 8 . 2 . 3 und 6 . 6 .)

(8 . 3) $a \in \mathfrak{R}_e$ ist äquivalent mit $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{n=1}^{\infty} [(a \vee -ne) \wedge ne] = a$.

(8 . 4) $\mathfrak{R}$ ist direkte Summe[7a]) von $\mathfrak{R}_e$ und $\mathfrak{R}_{1-e}$.

Wir beweisen beides zusammen: Bequemlichkeitshalber setzen wir $a \geqq 0$ voraus. Für $a \in \mathfrak{R}_e$, $a \in \mathfrak{R}_{1-e}$ hat man $a \wedge e = a \wedge (1-e) = 0$, also (nach 3 . 2 . 1) $a \wedge 1 = 0$, also (nach (5 . 1) $a = 0$. Für irgendein $a \geqq 0$ setze man $\bigvee_n (a \wedge ne) = a'$ und $\bigvee_n [a \wedge n(1-e)] = a''$, nach 6 . 6 ist $a' \in \mathfrak{R}_e$, $a'' \in \mathfrak{R}_{1-e}$ und weiter $a' + a'' = \bigvee_n (a \wedge n)$, das ist aber (nach 7 . 4 . 5) $= a$, womit 8 . 4 bewiesen ist. Ist $a \in \mathfrak{R}_e$, so ist $a'' = 0$, also $a = a'$, womit 8 . 3 bewiesen ist.

(8 . 5 . 1) P_e sei die (lineare) Abbildung, die a überführt in a' (seine Komponente in $\mathfrak{R}_e$).

(8 . 5 . 2) Für $a \geqq b$ ist $P_e a \geqq P_e b$. Für $a \geqq 0$ ist $P_e a \leqq a$. (Klar.)

9. (9 . 1)(+) In $\mathfrak{R}$ gebe es einen eindeutigen Limesbegriff mit den Eigenschaften:

(9 . 1 . 1) $\lim a = a$.

[7a]) Mit Inbegriff der Ordnungsbeziehungen.

(9 . 1 . 2) $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$; $\lim \alpha_n a_n = \lim \alpha_n \lim a_n$ [8]).

(9 . 1 . 3) Für $a_n \geqq 0$ ist $\lim a_n \geqq 0$ (falls existent).

(9 . 1 . 4) Für $\lim b_n = 0$ und $0 \leqq a_n \leqq b_n$ existiert $\lim a_n = 0$.

(9 . 1 . 5) Für eine wachsende o.o.b. (abnehmende u.o.b.) Folge a_n existiert $\lim a_n = \bigvee_n a_n$ ($\bigwedge_n a_n$).

(9 . 1 . 6) Für $\lim a_n = 0$ existiert $\lim (a_n)_+ = 0$ (also auch $\lim (a_n)_- = 0$).

Folgende zwei Sätze sind evident:

(9 . 2 . 3) Für $a_n \geqq b_n$ ist $\lim a_n \geqq \lim b_n$ (falls existent).

(9 . 2 . 4) Für $\lim a_n = \lim b_n = c$ und $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ existiert $\lim c_n = c$.

(9 . 2 . 6) Für $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ existiert $\lim (a_n \vee b_n) = a \vee b$ also auch $\lim (a_n \wedge b_n) = a \wedge b$.

Wir dürfen nämlich $a = 0$ (wegen 9 . 1 . 2) voraussetzen. Aus 4 . 2 schliesen wir

$$(a_n \wedge 0) + (b_n \vee 0) \leqq a_n \vee b_n \leqq (a_n \vee 0) \vee (b_n \vee 0) \leqq (a_n \vee 0) + (b_n \vee 0).$$

Nach 9 . 2 . 4 ist unser Behauptung bewiesen, sobald wir wissen, dasz $\lim (b_n)_+ = b_+$ ist, denn dann konvergiert (wegen 9 . 1 . 2 und 9 . 2 . 4) linkes und rechtes Glied unserer Ungleichung nach b_+. Dasz $\lim (b_n)_+ = b_+$ ist, steht aber auch in unserer Ungleichung, sobald wir dort a_n durch $b_n - b$ und b_n durch $-b$ ersetzen und 9 . 1 . 6 sowie $(b_n \vee 0) - b = (b_n - b) \vee (-b)$ berücksichtigen.

10. Mit den Begriffen von 9 (doch ohne Verwendung von 9 . 1 . 6 und 9 . 2 . 6) läszt sich 7 . 5 so deuten:

Zu jedem Modul $\mathfrak{R}$, *der den Axiomen* (1), (5 . 1), (6 . 3), (9 . 1 . 1–5) *genügt, läszt sich eine Boolesche Algebra* $\mathfrak{E}$ *und zu jedem* $c \in \mathfrak{R}$ *eine Schar* $e_\gamma \in \mathfrak{E}$ *finden* ($e_\alpha \leqq e_\beta$ für $\alpha \leqq \beta$), *so dasz für* c *die Lebesgue-Stieltjes-Integraldarstellung*

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma \, de_\gamma$$

gilt. Dann und nur dann ist $c \geqq 0$, *wenn das Integral de facto nur von* 0 *bis* ∞ *zu erstrecken ist. Jedes Integral zwischen endlichen Grenzen stellt ein Element von* $\mathfrak{R}$ *dar. Umgekehrt kann man zu jeder Booleschen Algebra* $\mathfrak{E}$ *einen solchen Modul* $\mathfrak{R}$ *konstruieren.*

Man beachte aber, dasz $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{E}$ nicht eindeutig festgelegt ist, da über die Zugehörigkeit der uneigentlichen Integrale und über zusätzliche Limesbeziehungen nichts bekannt ist. Immerhin kann man sagen, dasz der kleinste von $\mathfrak{E}$ erzeugte Modul in jedem andern überall dicht liegt.

Wir wollen uns auf diese Angaben beschränken, da wir sonst die ganze Theorie des hier verwendeten Integralbegriffs aufrollen müszten.

[8]) d.h.: wenn die rechten Seiten existieren, so auch die linken.

11. (Alle Axiome werden verwendet).

(11 . 1) $\mathfrak{R}_e$ ist abgeschlossen. (Siehe 8 . 1.)

(11 . 2) P_e ist stetig. (Siehe 8 . 5.)

Sei nämlich $a_n \in \mathfrak{R}_e$, $\lim a_n = a$. Nach 8 . 2 . 3 ist $(a_n)_+ \in \mathfrak{R}_e$ und nach 9 . 2 . 6 ist $\lim (a_n)_+ = a_+$. Da $(a_n)_+ \wedge (1-e) = 0$ (wegen 8 . 2 . 3) ist, ist (wegen 9 . 2 . 6) auch $a_+ \wedge (1-e) = 0$, also $a_+ \in \mathfrak{R}_e$; analog schlieszt man für a_-; daraus folgt dann $a \in \mathfrak{R}_e$.

Sei a_n beliebig, $\lim a_n = a$. Wir beweisen $\lim P_e\, a_n = P_e\, a$. Ueberlegungen wie im vorigen Absatz gestatten, $a_n \geqq 0$ vorauszusetzen. Weiter dürfen wir uns wegen der Linearität von P_e und wegen 9 . 1 . 2 auf $a = 0$ beschränken. Nun ist aber $0 \leqq P_e\, a_n \leqq a_n$ (wegen 8 . 5 . 2), und daraus folgt (wegen 9 . 1 . 4) der Satz.

12. Die Betrachtungen von 7, 8, 10 lassen sich mit einigen Änderungen ausdehnen auf den Fall, dasz man auf die Existenz der 1 verzichtet (5 . 1). Wir führen das hier nicht aus, beweisen aber doch etwas, was in dieser Richtung wichtig ist.

(12 . 1) Sei $a_n > 0$, $a_k \wedge a_l = 0$ für $k \neq l$. Dann gibt es auszer der trivialen keine Relation $\sum_1^m \gamma_n\, a_n = 0$.

Denn seien $\gamma_n \geqq 0$ für $n \leqq m'$ und $\geqq 0$ für $n > m'$, also $\sum_1^{m'} \gamma_n\, a_n = -\sum_{m'+1}^{m} \gamma_n\, a_n$, also $\bigvee_1^{m'} \gamma_n\, a_n = \bigvee_{m'+1}^{m} (-\gamma_n)\, a_n$. Fügt man auf beiden Seiten $\wedge\, a_k$ zu, so erhält man $\gamma_k = 0$.

(12 . 2) Unter Benutzung von 9 . 2 . 6 läszt sich das auf unendliche Summen ausdehnen.

(12.3) *In separablen Riesz-Banachschen Räumen ist die Existenz der* 1 *beweisbar.* Allgemeiner in allen metrischen separablen $\mathfrak{R}$, in denen mit irgendeiner Folge jede Teilfolge konvergiert und zu jeder Folge a_n eine Folge positiver α_n existiert mit konvergentem $\Sigma\, \alpha_n\, a_n$.

Beweis: $\mathfrak{A}$ sei eine maximale Menge positiver Elemente, die zu je zweien $a \wedge b = 0$ liefern (für $a \neq b$). a_n sei eine in $\mathfrak{A}$ überall dichte Teilfolge. Käme $a \in \mathfrak{A}$ nicht unter den a_n vor, so gäbe es eine Teilfolge a'_n von a_n mit $a'_k \neq a'_l$ für $k \neq l$ und mit $\lim a'_n = a$. Wegen 9 . 2 . 6 wäre $a \wedge a = \lim (a'_n \wedge a'_{n+1}) = 0$, also $a = 0$, was nicht geht. $\mathfrak{A}$ fällt also mit der Folge a_n zusammen. Wir setzen $1 = \sum_1^\infty \alpha_n\, a_n$, $\alpha_n > 0$. Sei $c > 0$, also $1 \wedge c = c \wedge \Sigma\, \alpha_n\, a_n$. Wegen der Maximalität von $\mathfrak{A}$ ist mindestens ein Summand positiv, also auch $1 \wedge c$, w. z. b. w.

13. Von $\mathfrak{R}$ werden nur die Axiome 1 vorausgesetzt (eigentlich noch weniger), von dem Modul $\mathfrak{S}$ alle (auszer 5 . 1), jedoch 6 . 3 in der schärferen Fassung:

(13 . 1) (+)[9] Für *jede* o. o. b. (u. o. b.) Menge $\mathfrak{M}$ existiert $\bigvee_{a \in \mathfrak{M}} a$ ($\bigwedge_{a \in \mathfrak{M}} a$).

(13 . 2) Die lineare Abbildung $T\mathfrak{R} < \mathfrak{S}$ heisze o. b., wenn sie jede o. b. Menge in eine ebensolche überführt.

(13 . 3) Die Menge $\mathfrak{T}$ der o. b. T wird wieder ein teilweise geordneter Modul, sobald man $T \geqq 0$ dann und nur dann setzt, wenn $Ta \geqq 0$ für alle $a \geqq 0$ gilt.

(13 . 4) $T_1 \vee T_2$ existiert in $\mathfrak{T}$.

Beim Beweise folgen wir einer Methode von F. RIESZ[10]: Wir bilden $Ta = \bigvee (T_1 a_1 + T_2 a_2)$ für alle $a \geqq 0$, wobei $\bigvee$ zu erstrecken ist über alle Paare a_1, a_2 mit $a_1 + a_2 = a$, $a_n \geqq 0$. Ta existiert, denn die Menge der $T_1 a_1$ ist o. b. wegen $0 \leqq a_1 \leqq a$, ebenso die Menge der $T_2 a_2$, also auch die der $T_1 a_1 + T_2 a_2$. Die Linearität des auf ganz $\mathfrak{R}$ fortgesetzten T und die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{T}$ sind klar.

Analog beweist man:

(13 . 5) In $\mathfrak{T}$ gilt 13 . 1.

(13 . 6) Ist speziell $\mathfrak{R}$ ein vollständiger euklidischer Raum (endlichdimensional, Hilbertsch oder nichtseparabel) und $\mathfrak{S}$ der Additionsmodul der reellen Zahlen, so wird $\mathfrak{T}$, der Modul der linearen Funktionale von $\mathfrak{R}$, im Wesentlichen mit $\mathfrak{R}$ identisch. Es ist nun natürlich, zu fordern, dasz dann die teilweise Ordnung von $\mathfrak{R}$ mit der von $\mathfrak{T}$ übereinstimmt. Diese Bemerkung legt untenstehendes Axiom 14 . 2 nahe.

14. Wir stellen jetzt alle teilweisen Ordnungen der endlichdimensionalen euklidischen und des Hilbertschen Raumes auf.

Wir setzen alle Axiome auszer 5 . 1 und 13 . 1 voraus. Auszerdem:

(14 . 1 . 1) (+) $\mathfrak{R}$ ist separabel und vollständig[10a].

(14 . 1 . 2) (+) in $\mathfrak{R}$ gibt es ein reelles inneres Produkt (a, b) mit den üblichen Eigenschaften und die auf $|a|^2 = (a, a)$ gegründete Topologie.

(14 . 2) (+) $(a, b) \geqq 0$ dann und nur dann für alle $b \geqq 0$, wenn $a \geqq 0$.

(14 . 2 . 1) Ist $a' \geqq 0$, so ist $(a, b) \geqq (a', b')$ dann und nur dann für alle $b \geqq b'$, wenn $a \geqq a'$. (Klar.)

(14 . 3) In $\mathfrak{R}$ gilt 5 . 1, d. h. die 1 existiert. (Folgt aus 12.)

(14 . 4) Dann und nur dann ist (für Elemente von $\mathfrak{E}$ mit $e_1 \leqq e_2$) $|e_1| < |e_2|$, wenn $e_1 < e_2$ ist.

„Dann" ist klar. „Nur dann": Mit $e_3 = e_2 - e_1$ ist $|e_2|^2 = |e_1|^2 + |e_3|^2 + 2(e_1, e_3)$; hier ist (wegen 14 . 2 . 1) $(e_1, e_3) \geqq 0$, während $|e_3|^2 > 0$ ist; daraus folgt die Behauptung.

(14 . 5) In $\mathfrak{E}$ gilt 13 . 1. (Denn wegen der Separabilität läszt sich 13.1 auf 6 . 3 zurückführen, wenn man die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{E}$ durch eine überall dichte Teilmenge ersetzt).

(14 . 6) Für $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $(a, b) = 0$ ist $a \wedge b = 0$.

---

[9]) Dies Axiom wird nur in 13 verwendet.

[10]) a. a. O. [2]).

[10a]) Die Vollständigkeit ist *nicht* wesentlich.

Denn mit $c = a \wedge b$ ist $(c, c) \leqq (a, b)$ (wegen 14 . 2 . 1), also $c = 0$.

Schwieriger ist die Umkehrung:

(14 . 7) Für $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a \wedge b = 0$ ist $(a, b) = 0$. (Beweis später.)

(14 . 8 . 1) Wir setzen $(a, b)' = (P_e a, P_e b) + (P_{1-e} a, P_{1-e} b)$. Dann ist $(a, b)'$ linear in a und b (wegen 8 . 5 . 1) und stetig (wegen 11 . 2). Bekanntlich gibt es dann einen beschränkten linearen (Hermiteschen) Operator H mit

$$(a, b)' = (a, Hb) \quad (a, b \text{ beliebig}). \quad {}^{10b})$$

(14 . 8 . 2) Für $b \geqq 0$ ist $Hb \geqq 0$.

Denn ist noch $a \geqq 0$, so hat man (wegen 8 . 5 . 2) $P_e a \geqq 0$, $P_e b \geqq 0$ usw., also $(a, b)' \geqq 0$ (wegen 14 . 2), also $(a, Hb) \geqq 0$ für alle $a \geqq 0$, also (wegen 14 . 2) $Hb \geqq 0$.

(14 . 8 . 3) Ist $e \in \mathfrak{E}$ und $(e, a) > 0$ für alle $a > 0$, so ist $e = 1$.

Wählen wir nämlich a irgendwie in $\mathfrak{R}^+_{1-e}$, so ist $(e, Ha) = (e, a)' = 0$; andererseits ist (14 . 8 . 2) $Ha \geqq 0$, also nach Voraussetzung $Ha = 0$. Also $(a, Ha) = 0$, $(a, a)' = 0$, $P_e a = P_{1-e} a = 0$, $a = 0$. Also $\mathfrak{R}^+_{1-e} = (0)$, also $1 - e = 0$, w. z. b.w.

(14 . 9) Für $e \in \mathfrak{E}$ ist $(e, 1-e) = 0$.

Denn zu e gibt es (nach 14 . 5) ein maximales $e' \in \mathfrak{E}$ mit $(e, e') = 0$. Dann besitzt $(e + e', e'') = 0$ nur die Lösung $e'' = 0$ ($e'' \in \mathfrak{E}$). Sei $a > 0$; nach 7 . 4 . 4 gibt es positive α und $e''' \in \mathfrak{E}$ mit $a \geqq \alpha e'''$, und es ist $(e + e', a) \geqq (e + e', \alpha e''') > 0$ (für alle $a > 0$), also (nach 14 . 8 . 3) $e + e' = 1$, $e' = 1 - e$, $(e, 1-e) = 0$.

(14 . 10) Beweis von 14 . 7: Man bilde (laut 10) $a = \int \alpha \, de_\alpha$, $b = \int \beta \, df_\beta$. Dann sieht man ohneweiteres, dasz $e_\alpha \wedge f_\beta = 0$, also (nach 14 . 9) $(e_\alpha, f_\beta) = 0$, also unter Berücksichtigung der Linearität und Stetigkeit des inneren Produktes: $(a, b) = 0$.

(14 . 11) $\mathfrak{V}$ heisze ein teilweise geordneter linearer Raum, der entsteht, wenn man in einem endlichdimensionalen euklidischen oder im Hilbertschen Raum ein vollständiges Orthogonal-Koordinatensystem einführt und ein Element dann und nur dann $\geqq 0$ nennt, wenn alle seine Koordinaten $\geqq 0$ sind. $\mathfrak{W}$ heisze der teilweise geordnete lineare Raum, der entsteht, wenn man im Raum der (im Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$) L-quadratintegrablen Funktionen ein Element dann und nur dann $\geqq 0$ nennt, wenn es (als Funktion) in $(0 \leqq \xi \leqq 1) \geqq 0$ ist (bis auf eine Nullmenge). $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ genügen unseren Axiomen.

(14 . 12) *Ein gemäsz* (1), (5 . 1), (6 . 3), (9 . 1) [11]), (14 . 1,2) *teilweise geordneter endlichdimensionaler euklidischer oder Hilbertscher Raum ist im Wesentlichen ein* $\mathfrak{V}$ *oder* $\mathfrak{W}$ *oder direkte Summe von* $\mathfrak{W}$ *und einem* $\mathfrak{V}$.

[10b]) H hängt natürlich von e ab.

[11]) Es wäre sehr erfreulich, wenn sich 9. 1. 6 entbehren liesze; es ist das einzige Axiom, das etwas künstlich wirkt.

Beweis: (14.12.1) Ein positives Element von $\mathfrak{E}$ heisze minimal, wenn zwischen ihm und 0 kein weiteres Element von $\mathfrak{E}$ liegt. Man bestimme in $\mathfrak{E}$ ein maximales Orthogonalsystem $e_1, e_2, \ldots$, bestehend aus lauter minimalen Elementen, und setze $e = \sum_n e_n = \bigvee_n e_n$. $\mathfrak{R}_e$ ist dann im Wesentlichen ein auf die Achsen $e_1, e_2, \ldots$ bezogener Raum $\mathfrak{V}$. Nach 8.4 ist $\mathfrak{R}$ direkte Summe von $\mathfrak{R}_e$ und $\mathfrak{R}_{1-e}$. Wir schreiben also statt $\mathfrak{R}_{1-e}$ wieder $\mathfrak{R}$, d.h. wir setzen voraus, dasz $\mathfrak{R}$ keine minimalen Elemente mehr besitzt. Wir dürfen ferner $(1, 1) = 1$ normieren.

(14.12.2) Sei $e < e'$.[12]) Dann gibt es ein e'', $e < e'' < e'$, $|e'' - e| < \varepsilon$ (ε beliebig positiv). Wir dürfen zum Beweise $e = 0$ voraussetzen. Wir setzen $e'_0 = e'$ und nehmen an, dasz ein positives $e'_n < e'$ mit $|e'_n| \leqq 2^{-n}|e'|$ bereits bestimmt sei. Dann bestimmen wir ein positives $e_{n+1} < e'_n$ und nennen e'_{n+1} dasjenige unter den Elementen e_{n+1} und $e'_n - e_{n+1}$, dessen absoluter Betrag am kleinsten ist (evtl. hat man die Wahl zwischen beiden). Dann ist $0 < e'_{n+1} < e'_n < e'$ und $|e'_{n+1}| \leqq \frac{1}{2}|e'_n| \leqq 2^{-n}|e'|$, womit die Behauptung bewiesen ist.

(14.12.3) Sei $e < e'$. Dann gibt es ein e'', $e < e'' < e'$, $|e'' - e| = \frac{1}{2}|e' - e|$. Denn man wähle zu jeder Ordinalzahl n ein e_n mit $e < e_n < e'$, $|e_n - e| \leqq \frac{1}{2}|e' - e|$, und zwar folgendermaszen: Ist n nicht Limeszahl, so soll $e_{n-1} < e_n$ gelten (was sich nach 14.12.2 erreichen läszt). Ist n Limeszahl, so setze man $e_n = \bigvee_{m<n} e_m$ (wegen der Separabilität braucht man m in $\bigvee$ nur eine abzählbare Menge (m') durchlaufen zu lassen, und wegen 9.1.5 hat man $e_n = \lim_{m'} e_{m'}$, so dasz wegen der Stetigkeit des inneren Produktes immer noch $|e_n - e| \leqq \frac{1}{2}|e' - e|$ gilt). Das Verfahren bricht für ein gewisses $e'' = e_{n_0}$ ab, und dann hat man (nach 14.12.2) $|e'' - e| = \frac{1}{2}|e' - e|$.

(14.12.4) Nach 14.12.3 bestimme man $e_1 + e_2 = 1$, $|e_1| = \frac{1}{2}$, und allgemein, wenn $e_{k_1,\ldots,k_n}$ bereits bestimmt ist, $e_{k_1,\ldots,k_n,0} + e_{k_1,\ldots,k_n,1} = e_{k_1,\ldots,k_n}$, $|e_{k_1,\ldots,k_n,0}| = 2^{-n-1}$. Man ordne $e_{k_1,\ldots,k_n}$ die Funktion zu, die überall in $(0 \leqq \xi \leqq 1)$ verschwindet, auszer in $(\alpha \leqq \xi < \alpha + 2^{-n})$, wo sie eins ist; dabei sei $\alpha = \sum_{m=1}^{n} k_m 2^{-m}$. Man sieht leicht, dasz damit die gesuchte Identifizierung von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{W}$ entsteht.

---

[12]) Alle Elemente, von denen jetzt die Rede ist, gehören zu $\mathfrak{E}$

Ueber die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren [1936h]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 39 (1936), 832–833
[JFM 62.0452.01; Zbl 0015.25904]

(Communicated by Prof. L. E. Brouwer)

1. Wir geben eine kurze Ableitung der K. FRIEDRICHSschen [1]) selbstadjungierten Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren.

$\mathfrak{R}$ sei ein vollständiger unitärer Raum (Hilbertscher Raum ohne Dimensions- und Mächtigkeitsaxiome). H sei ein Hermitescher nach unten beschränkter linearer Operator in ihm (als Schranke nehmen wir etwa 1), H^* sei seine Adjungierte, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$ seien die bzw. Definitionsmengen.

$(Hx, y) = (x, y)'$ ist ein in $\mathfrak{D}$ definiertes „neues" inneres Produkt; für die auf diesem inneren Produkt beruhende „neue" Metrik gilt $|x|' \geqq |x|$; die „neue" Topologie ist also schwächer als die alte. In der neuen Topologie läszt sich $\mathfrak{D}$ vervollständigen zu einem vollständigen unitären Raum $\mathfrak{R}'$. $\mathfrak{R}'$ läszt sich als Teilraum von $\mathfrak{R}$ (mit einer andern Topologie) auffassen, da eine Fundamentalfolge der neuen Topologie aus $\mathfrak{D}$ a fortiori Fundamentalfolge der alten Topologie ist.

Die Formel $(x, y)' = (Hx, y)$ galt definitionsgemäsz für $x, y \in \mathfrak{D}$; aus Stetigkeitsgründen gilt sie aber weiter für $x \in \mathfrak{D}$, $y \in \mathfrak{R}'$.

Wir definieren $\widetilde{\mathfrak{D}}$ als Durchschnitt von $\mathfrak{D}^*$ und $\mathfrak{R}'$ (das ist ein linearer Raum zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}^*$) und $\widetilde{H}$ als das auf $\widetilde{\mathfrak{D}}$ eingeschränkte H^*.

Satz: $\widetilde{H}$ ist selbstadjungiert.

Beweis: 1. Sei $x, y \in \widetilde{\mathfrak{D}}$. Dann gibt es Folgen x_m bzw. y_n aus $\mathfrak{D}$, die in der neuen Topologie nach x bzw. y konvergieren. Es konvergiert dann auch $(x_m, y_n)' = (Hx_m, y_n) = (x_m, Hy_n)$. Der Limes davon ist einerseits gleich

$$\lim_m \lim_n (Hx_m, y_n) = \lim_m (Hx_m, y) = \lim_m (x_m, \widetilde{H}y) = (x, \widetilde{H}y),$$

andererseits gleich

$$\lim_n \lim_m (x_m, Hy_n) = \lim_n (x, Hy_n) = \lim_n (\widetilde{H}x, y_n) = (\widetilde{H}x, y).$$

$\widetilde{H}$ ist also Hermitesch.

2. Sei $x \in \mathfrak{D}$, $y \in \mathfrak{R}$. $|(x, y)| \leqq |y| \cdot |x| \leqq |y| \cdot |x|'$; (x, y) ist also ein überall dicht in $\mathfrak{R}'$ definiertes, im Sinne von $\mathfrak{R}'$ beschränktes lineares Funktional von x, also mit einem geeignetem $y' \in \mathfrak{R}'$ darstellbar in der Form

$$(x, y) = (x, y')' = (Hx, y').$$

[1]) Math. Ann. **109**, 465—487 (1934). Insbesondere §§ 2—5.

Liest man diese Gleichung in umgekehrter Richtung, so sieht man, dasz (Hx, y') ein für $x \in \mathfrak{D}$ beschränktes Funktional (im Sinne von $\mathfrak{R}$) ist. Also ist y' in $\mathfrak{D}^*$, also auch im Durchschnitt von $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{D}^*$, also $y' \in \widetilde{\mathfrak{D}}$ und $\widetilde{H}y' = y$. Da y willkürlich in $\mathfrak{R}$ war, bedeutet das $H\widetilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{R}$. Nach J. v. NEUMANN [2]) ist also $\widetilde{H}$ selbstadjungiert.

2. $\widetilde{H}$ hat dieselbe untere Grenze wie H. K. FRIEDRICHS [3]) hat gefragt, ob $\widetilde{H}$ als selbstadjungierte Fortsetzung von H durch diese Eigenschaft charakterisiert sei. Wir verneinen die Frage:

$\mathfrak{R}$ sei direkte Summe der Hilbertschen Räume $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$; H_1 sei in $\mathfrak{R}_1$ definiert als der identische Operator, H_2 in $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{R}_2$ als halbbeschränkter Hermitescher Operator mit der unteren Schranke $\gamma > 1$; H sei die direkte Summe von H_1 und H_2. H_2' sei irgendeine selbstadjungierte Fortsetzung von H_2 in R_2 mit einer zwischen 1 und γ liegenden unteren Schranke. H_2' wird im allgemeinen von $\widetilde{H}_2$ verschieden sein (z. B. wenn $\mathfrak{R}_2$ der Raum der im Einheitsintervall zweimal stetig differenzierbaren Funktionen ist, die in den Endpunkten mit samt ihren ersten Ableitungen verschwinden, und H_2 die Bildung der negativen zweiten Ableitung). H', die direkte Summe von H_1 und H_2', wird dann auch von $\widetilde{H}$ verschieden sein, aber doch dieselbe Schranke wie H (nämlich 1) besitzen und selbstadjungiert sein.

---

[2]) Math. Ann. **102**, 49—131 (1929). Insbesondere Satz 41.

[3]) a a. O., Fusznote 14.

Zum intuitionistischen Raumbegriff [1936i]

Compositio Math. 4 (1936), 82–111
[Zbl 0015.24103]

Im intuitionistischen Aufbau der Topologie scheinen wesentliche Schwierigkeiten nur bei den Grundlagen aufzutauchen: man muß den Raumbegriff erklären, und man muß in natürlicher Weise *die* Teilspezies des Raumes auslesen, deren intuitionistische Untersuchung möglich und nötig ist. In § 1 seiner Note „Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffes" [1]), die im Übrigen der intuitionistischen Formulierung seiner dimensionstheoretischen Untersuchungen [2]) gewidmet ist, hat L. E. J. Brouwer diese Schwierigkeiten überwunden; er hat dort den Begriff der katalogisiert-kompakten Spezies [3]) (des intuitionistischen Analogons des kompakten separablen metrischen Raumes) eingeführt und den besonders geistvollen und tiefliegenden, aber doch natürlichen Begriff der katalogisierten Teilspezies [4]).

Die katalogisiert-kompakten Spezies werden erklärt durch Vervollständigung metrisierter Folgen, die gewissen Bedingungen genügen. Daß der grundlegende *topologische* Begriff *metrisch* eingeführt wird, kann als Schönheitsfehler empfunden werden. Darüber hinaus ist aber wohl prinzipiell interessant, zu wissen, ob man die intuitionistische Topologie ebenso wie die klassische metriklos aufbauen kann [5]). Allerdings kann man nicht erwarten, daß sich die Hausdorffschen Axiome [6]) — sei es auch stark modifiziert — ins Intuitionistische übersetzen lassen. Nun kennt man

---

[1]) Proc. Akad. Amsterdam **29** (1926), 855—863.

[2]) Journal f. r. u. angew. Math. **142** (1913), 146—152; siehe auch Proc. Akad. Amsterdam **26** (1923), 795—800. **26** (1924), 635—638.

[3]) von uns wiedergegeben in **7**, 1.

[4]) siehe [34]). Für Teilspezies der Ebene findet sich der Begriff bereits früher: L. E. J. Brouwer [Verhandelingen Akad. Amsterdam (Eerste sectie) **12**, No. 7 (S. 13)].

[5]) Zu Unrecht zweifelt A. Heyting [Ergebnisse **3** (1934), 404, letzte und vorletzte Zeile] an dieser Möglichkeit.

[6]) siehe F. Hausdorff, Mengenlehre [2. Aufl., Berlin & Leipzig 1927], § 40.

aber durch Alexandroff [7]) eine metriklose Definition kompakter Räume mit Hilfe von Folgen elementarer Gebilde (Projektionsspektren). Tatsächlich hat man die Alexandroffsche Spektraldarstellung nicht einmal nötig, um kompakte separable Räume zu erzeugen; man braucht nur die endlichen Inzidenzrelationen in einer immer feiner werdenden Folge abgeschlossener Teilmengen A_n zu kennen (d.h. zu wissen, welche Durchschnitte je endlich vieler der A_n leer und welche nicht leer sind), um den ganzen Raum zu kennen.

Diese letzte Bemerkung rührt von Herrn W. Hurewicz her, der sie mir vor längerer Zeit gesprächsweise mitteilte und dabei die Vermutung äußerte, daß sie sich zur intuitionistischen Raumdefinition auswerten lasse. Wir werden im Folgenden zeigen, daß sich wirklich so das intuitionistische Analogon des kompakten separablen Raumes erzeugen läßt. Wir gehen von einer unendlichen Folge von Dingen A_n aus, in der je endlich vielen der A_n ganz formal einer der Ausdrücke $=0$ und $\neq 0$ zugeordnet ist, wobei gewissen Bedingungen Genüge geschehen sein soll. Unendliche Teilfolgen der A_n heißen — um es klassisch zu formulieren — Punkte, wenn ihren A_n zu je endlich vielen der Ausdruck $\neq 0$ zugeordnet ist (intuitionistisch muß man — es liegt hier eine *typische* Schwierigkeit vor — den Punktbegriff etwas weiter fassen). Was man dann unter zusammenfallenden Punkten und unter Punktkernen zu verstehen hat, liegt auf der Hand; die Spezies der Punktkerne wird der zu definierende „Raum".

Über die so erklärten Räume lassen sich die wichtigsten Sätze beweisen, die man zum intuitionistischen Aufbau der Topologie braucht; insbesondere läßt sich der Urysohnsche Metrisationssatz [8]) übertragen, und es läßt sich sogar zeigen, daß die betrachteten Räume zusammenfallen mit den von L. E. J. Brouwer eingeführten katalogisiert-kompakten Spezies [9]), die also damit metriklos definiert sind. Auch der Begriff der katalogisierten Teilspezies [10]), der ein tiefergehendes topologisches Studium erst ermöglicht, läßt sich nun metriklos erfassen; es ergibt sich dabei ferner seine topologische Invarianz. Besonders hingewiesen sei noch auf den Begriff der ausgeprägten Lage (7, 11) zweier katalogisierter Teilspezies, der für allerlei intuitionistische Untersuchungen nützlich ist.

---

[7]) Siehe etwa Annals of Math. **30** (1928), 1—87.

[8]) Math. Ann.

[9]) siehe [3]).

[10]) siehe [4]).

Auch vom nicht-intuitionistischen Standpunkt aus dürften die folgenden Ausführungen von Interesse sein; typisch intuitionistische Schwierigkeiten tauchen, wenn man von dem rein intuitionistischen Begriff der katalogisierten Teilspezies absieht, nur an zwei Stellen [11]) auf.

1. Die Axiome.

Eine Folge [11a]) von Dingen A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ heißt katalogisiert, wenn jedem A_n der Ausdruck $\neq 0$ und jedem $A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k}$ der Ausdruck $= 0$ oder der Ausdruck $\neq 0$ zugeordnet ist (niemals aber beide Ausdrücke); Schreibweise

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} = 0$$

oder $$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} \neq 0.$$

Dabei müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

D (*Durchschnittsbildung*): Ist

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} \neq 0$$

und $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ eine Variation von $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ mit oder ohne Wiederholung, so ist auch

$$A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_l} \neq 0.$$

(Aus $$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} = 0$$

folgt also insbesondere $A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} A_{\mu_{k+1}} = 0$.)

F (*Fortsetzbarkeit*): Ist

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} \neq 0,$$

so läßt sich ein $m \neq \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ angegeben mit

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} A_m \neq 0.$$

T (*Trennbarkeit*): Ist

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} \neq 0, \quad A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_l} \neq 0,$$

aber $$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_l} = 0,$$

so läßt sich ein $t_0(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$ angeben, derart daß für alle $t \geqq t_0$ aus

---

[11]) siehe [20]) und [41]).

[11a]) Diese Folge braucht nicht gesetzmäßig festgelegt zu sein, sondern kann mehr oder minder frei *werden*.

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} A_t \neq 0$$

folgt

$$A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_l} A_t = 0.$$

K (*Kompaktheit*): Zu jedem k läßt sich ein l angeben, derart daß für jedes ν mindestens einem der Ausdrücke

$$A_k A_\nu,\ A_{k+1} A_\nu,\ \ldots,\ A_{k+l} A_\nu$$

$\neq 0$ zugeordnet ist.

Bemerkung: D sagt aus, daß sich die Bildung von $A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k}$ hinsichtlich der Zuordnung von $= 0$ und $\neq 0$ wie die mengentheoretische Durchschnittsbildung verhält, wenn man $= 0$ als „leer" und $\neq 0$ als „nicht leer" deutet. Wir werden daher derartige Ausdrücke auch Produkte nennen und, wo es nötig ist, sie mittels Multiplikationspunkten abteilen. — Die Bezeichnung des Axioms F ist wohl ohne Weiteres verständlich; die von T und K werden später einleuchten.

Bemerkung: Daß der Begriff der katalogisierten Folge sinnvoll ist, zeigt das Beispiel der abgeschlossenen Intervalle mit rationalen Endpunkten zwischen 0 und 1, wenn man die Produktbildung als Durchschnitt usw. deutet. Allgemeiner kann man sich unter den A_n (nichtintuitionistisch formuliert) ein immer feiner werdendes Überdeckungssystem abgeschlossener Mengen eines kompakten Raumes vorstellen.

2. Inklusionen.

1. Wir bilden rein formal mit Hilfe der Addition und Multiplikation alle möglichen endlichen Verbindungen der A_n (die im Folgenden stets als katalogisierte Folge vorausgesetzt werden), Polynome genannt und mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet (dazu gehört auch die Summe, die aus null Summanden besteht). Einem Polynom soll dann und nur dann der Ausdruck $\neq 0$ zugeordnet werden, wenn es sich unter Benutzung der kommutativen, assoziativen und distributiven „Gesetze" umformen läßt [12]) in eine Summe, unter deren Summanden mindestens einer vorkommt, dem $\neq 0$ zugeordnet ist.

2. Satz: Die Axiome DFTK bleiben richtig, wenn man in ihnen die A durch P ersetzt, ausgenommen das A_m in F, das A_t in T und die $A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{k+l}$ in K. (Beweis klar.)

[12]) Zwei ineinander umformbare Ausdrücke setzen wir also nicht einander gleich, sondern ordnen ihnen nur denselben Ausdruck $= 0$ oder $\neq 0$ zu, was aber prinzipiell auf dasselbe hinauskommt.

3. Satz: Axiom F läßt sich in der Weise verschärfen, daß, wenn $P_1 P_2 \ldots P_k \neq 0$ ist, sich eine *unendliche Folge* von Zahlen m angeben läßt, für die stets $P_1 P_2 \ldots P_k A_m \neq 0$ ist.

Beweis: Wegen F kann man ein m_1 bestimmen und, wenn $m_1, \ldots, m_l$ bereits (paarweise verschieden) bestimmt sind, ein (von ihnen allen verschiedenes) m_{l+1} bestimmen, so daß $P_1 P_2 \ldots P_k A_{m_1} \ldots A_{m_{l+1}} \neq 0$ ist; nach D ist dann $P_1 P_2 \ldots P_k A_m \neq 0$ für die unendlich vielen $m = m_\lambda$.

4. Satz: Ist für unendlich viele m zugleich

$$P_1 A_m \neq 0 \text{ und } P_2 A_m \neq 0,$$

so ist auch

$$P_1 P_2 \neq 0.$$

Beweis: Wäre $P_1 P_2 = 0$, so folgte aus T in der Form von Satz 2 ein Widerspruch.

5. Definition: Wir sagen, daß P^* aus P vermöge eines elementaren Prozesses hervorgeht, wenn es aus ihm hervorgeht durch Anwendung der kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetze oder durch Ersetzung eines Ausdruckes PQQ durch PQ oder eines Ausdruckes PQ durch PQQ oder durch Kombination aller dieser Operationen.

6. Definition: $P_1 \subset P_2$ (enthalten in) heißt: aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu P_2 \neq 0$ für alle ν. $P_1 \Subset P_2$ heißt [12a]): aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu \subset P_2$ für fast alle [13]) ν.

Bemerkung: Man beachte, daß die Frage nach der Gültigkeit von $P_1 \subset P_2$ (oder $P_1 \Subset P_2$) nicht notwendig mehr beantwortbar sein muß.

7. Satz: Die Beziehungen $P_1 \subset P_2$ bzw. $P_1 \Subset P_2$ bleiben gültig, wenn man in ihnen P_1 und P_2 vermöge eines elementaren Prozesses durch andere Ausdrücke ersetzt. (Beweis klar.)

8. Satz: (α) $P \subset P$. (β) Aus $P_1 \subset P_2$ und $P_2 \subset P_3$ folgt $P_1 \subset P_3$. (γ) β bleibt richtig, wenn man eines der beiden ersten und das dritte $\subset$ durch $\Subset$ ersetzt. (Beweis klar.)

9. Satz: Wenn aus $A_\nu P_1 \neq 0$ für fast alle ν $A_\nu P_2 \neq 0$ folgt, so folgt es für *alle* ν; es ist also dann $P_1 \subset P_2$.

[12a]) $P_1 \Subset P_2$ und $P_1 = P_2$ können dabei durchaus miteinander verträglich sein.

[13]) Gültig für fast alle n, gültig für genügend (hinreichend) großes n — das bedeutet stets die Existenz, d.h. Angebbarkeit eines n, von dem an die betreffende Aussage gilt. Ebenso ist ein geeignetes n stets ein angebbares n und eine unbegrenzte Folge eine, die sich beliebig weit angeben läßt.

Beweis: Wäre für ein gewisses A zugleich $AP_1 \neq 0$ und $AP_2 = 0$, so hätte man

$$AP_1 \neq 0, \quad P_2 \neq 0,$$

aber

$$AP_1 \cdot P_2 = 0,$$

also gälte nach T (in der Form von 2) für fast alle ϱ:

$$\text{aus } A_\varrho AP_1 \neq 0 \text{ folgt } A_\varrho P_2 = 0;$$

dann gälte nach 3 für unendlich viele ϱ gleichzeitig:

$$A_\varrho P_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad A_\varrho P_2 = 0;$$

das wäre aber im Widerspruch zur Voraussetzung.

10. Satz: (α) Aus $P_1 \subset P_2$ und $P_2 = 0$ folgt $P_1 = 0$. (β) Aus $P_1 \subset P_2$ und $P_1 \neq 0$ folgt $P_1 P_2 \neq 0$. (γ) Aus $P_1 \Subset P_2$ folgt $P_1 \subset P_2$.

Beweis: (α) klar. (β) Aus $P_1 \neq 0$ folgt wegen 3 die Existenz unendlich vieler m mit $P_1 A_m \neq 0$, für diese m gilt nach Definition auch $P_2 A_m \neq 0$; beides zusammen ergibt nach 4 die Behauptung.

(γ) Für fast alle ν folgt aus $P_1 A_\nu \neq 0$ die Relation $A_\nu \subset P_2$ und daraus nach β $P_2 A_\nu \neq 0$; nach 9 folgt dann für *alle* ν aus $P_1 A_\nu \neq 0$ auch $P_2 A_\nu \neq 0$.

11. Satz: Aus $P_1 \subset P_2$ folgt $P_1 Q \subset P_2 Q$.

Beweis: Sei $AP_1 Q \neq 0$. Wir bestimmen nach 3 eine unendliche Folge von ϱ, für die

$$(\alpha) \qquad A_\varrho A P_1 Q \neq 0$$

gilt. Aus (α) folgt einerseits $A_\varrho P_1 \neq 0$ und daraus nach Voraussetzung

$$(\beta) \qquad A_\varrho P_2 \neq 0;$$

andererseits folgt aus (α)

$$(\gamma) \qquad A_\varrho A Q \neq 0.$$

Aus (β) und (γ), die für unendlich viele ϱ gelten, folgt nach 4

$$AP_2 Q \neq 0.$$

Bemerkung: Man kann also die Definition von $\subset$ auch so aussprechen: $P_1 \subset P_2$ heißt: aus $QP_1 \neq 0$ folgt $QP_2 \neq 0$ für alle Q.

12. Satz: (α) Aus $P_1 \subset P_2$ folgt $P_1 P_3 \subset P_2$. (β) Aus $P_1 \subset P_2$ und $P_1 \subset P_3$ folgt $P_1 \subset P_2 P_3$. (γ) Aus $P_1 \subset P_2$ folgt $P_1 \subset P_2 + P_3$. (δ) Aus $P_1 \subset P_3$ und $P_2 \subset P_3$ folgt $P_1 + P_2 \subset P_3$. Ferner die Formeln (α'), (β'), (γ'), (δ'), die man erhält, wenn man bzw. $\subset$ durch $\Subset$ ersetzt.

Beweis: (β) folgt aus 11, (β') folgt aus (β), alle übrigen sind trivial.

13. Satz: (α) Aus $P_1 \subset P_2 + P_3$ und $P_1 P_3 = 0$ folgt $P_1 \subset P_2$. (β) Dasselbe mit $\Subset$ statt $\subset$.

Beweis: (α) Ist $P_1 = 0$, so folgt der Satz aus 10. Ist $P_3 = 0$, so folgt für alle ν aus $A_\nu P_1 \neq 0$ nicht allein $A_\nu(P_2 + P_3) \neq 0$ (nach Voraussetzung), sondern sogar $A_\nu P_2 \neq 0$, w.z.b.w. Ist endlich

$$P_1 \neq 0, \qquad P_3 \neq 0,$$

aber (nach Voraussetzung)

$$P_1 P_3 = 0,$$

so folgt wegen T aus $A_\nu P_1 \neq 0$ für fast alle ν $\quad A_\nu P_3 = 0$, also nach Voraussetzung für fast alle ν $\quad A_\nu P_2 \neq 0$, also nach 9 unser Satz.

(β) ergibt sich in derselben Weise unter Verwendung von (α).

3. Überdeckungen, Umgebungen.

1. Definition: A_ν heißt von n-ter Stufe, wenn $\nu \geqq n$ ist. Ein Produkt von A_ν heißt von n-ter Stufe, wenn mindestens ein Faktor von n-ter Stufe ist. [14])

2. Definition: $P_1, \ldots, P_k$ heißt eine Überdeckung, wenn $A_n(P_1 + \ldots + P_k) \neq 0$ für alle n gilt. $P_1, \ldots, P_k$ heißt eine $\subset$-Überdeckung bzw. $\Subset$-Überdeckung, wenn es zu fast jedem A_ν ein $\varkappa$ gibt ($1 \leqq \varkappa \leqq k$), derart daß $A_\nu \subset P_\varkappa$ bzw. $A_\nu \Subset P_\varkappa$ gilt. Eine Überdeckung heißt von n-ter Stufe, wenn jedes ihrer $P_\varkappa$ von n-ter Stufe ist.

3. Definition: $P_1 + \ldots + P_k$ heißt Umgebung [15]) n-ter Stufe von P, wenn $P \Subset P_1 + \ldots + P_k$, $PP_\varkappa \neq 0$ ($1 \leqq \varkappa \leqq k$) und jedes der $P_\varkappa$ von n-ter Stufe ist. Unter einem Stück n-ter Stufe verstehen wir eine Umgebung n-ter Stufe eines Produkts (von A_ν) n-ter Stufe. Eine $\subset$ (bzw. $\Subset$)-Überdeckung heißt von n-ter Stufe, wenn sie aus Stücken n-ter Stufe besteht.

4. Satz: Es gibt Überdeckungen beliebiger Stufe. (Beweis folgt aus K [16]).)

---

[14]) wird also vorläufig nur für Produkte definiert.

[15]) Als Spezies betrachtet (siehe 4, 8) sind unsere „Umgebungen" (anders als die üblichen) abgeschlossen, was aber nicht viel ausmacht.

[16]) K wird hier zum ersten Mal verwendet und spielt von nun an eine tief eingreifende Rolle.

5. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine Überdeckung, so ist für jedes P: $P \Subset P_1 + \ldots + P_k$. (Beweis klar.)

6. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine Überdeckung und P^* die Summe derjenigen unter den $P_\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, für die $PP_\varkappa \neq 0$ gilt, so ist $P \Subset P^*$.

Beweis: Sei P^{**} die Summe derjenigen unter den $P_\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, für die $PP_\varkappa = 0$ gilt. Dann ist P^*, P^{**} eine Überdeckung. Wir können ohne Weiteres annehmen

$$P \neq 0, \quad P^{**} \neq 0,$$

dagegen ist

$$PP^{**} = 0.$$

Also folgt für fast alle ν aus $A_\nu P \neq 0$ (nach T in der Form von **2**, 2) $A_\nu P^{**} = 0$. Andererseits ist nach 5: $A_\nu \subset P^* + P^{**}$. Also ist nach **2**, 13: $A_\nu \subset P^*$ (und zwar für fast alle ν, für die $A_\nu P \neq 0$ ist).

7. Satz: Es gibt zu jedem P Umgebungen beliebiger Stufe.

Beweis: Folgt aus 6, wenn man die Ausgangsüberdeckung wie gewünscht wählt.

8. Satz: Ist $P_1 P_2 = 0$, so gibt es P_1^*, P_2^* mit $P_1 \Subset P_1^*$, $P_2 \Subset P_2^*$ und $P_1^* P_2^* = 0$.

Beweis: Man wähle n so groß, daß (T in der Form von **2**, 2) für jedes A_ν n-ter Stufe $A_\nu P_1 \neq 0$ zur Folge hat: $A_\nu P_2 = 0$. Nach K erzeuge man eine Überdeckung n-ter Stufe aus den A_ν. Dann wende man 6 an, um ein P_1^* mit $P_1 \Subset P_1^*$ und $P_1^* P_2 = 0$ zu erhalten. Entsprechend verfahre man nun mit P_2.

9. Satz: Ist $P_1 \Subset P_2$, so gibt es ein P mit $P_1 \Subset P \Subset P_2$.

Beweis: Man wähle n so groß, daß für jedes A_ν n-ter Stufe aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu \subset P_2$. Es sei $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$ eine Überdeckung n-ter Stufe, und es sei P_3 die Summe derjenigen unter den $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$, deren Produkt mit P_1 null liefert, also $P_1 P_3 = 0$. Nach 8 gibt es ein P mit $P_1 \Subset P$, $PP_3 = 0$. $P_2 + P_3$ ist eine Überdeckung, also nach 5: $P \Subset P_2 + P_3$. Nach **2**, 13 erhält man $P \Subset P_2$.

10. Satz: Ist $P_1 \Subset P_2$, so gilt für fast alle ν: aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu \Subset P_2$.[17])

Beweis: Man bestimme ein P gemäß 9. Dann gilt für fast alle ν: aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu \subset P$. Demnach ist $A_\nu \Subset P_2$ (**2**, 8γ).

11. Satz: Versteht man unter einer Kette j-ter Ordnung n-ter Stufe ein System $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_j}$ (sämtlich von n-ter Stufe), in dem

[17]) Man sieht daraus, daß es überflüssig wäre, wollte man höhere Inklusionen als die einfache und doppelte einführen.

$A_{\nu_i} A_{\nu_{i+1}} \neq 0$ gilt, so folgt aus $P_1 \Subset P_2$ für festes j und fast alle n, daß jede Kette j-ter Ordnung n-ter Stufe, deren erstes Glied mit P_1 das Produkt $\neq 0$ liefert, vollständig $\Subset P_2$ ist. (Beweis klar nach 9 und 10.)

12. Satz: Ist $P_1 P_2 = 0$, so folgt für je zwei Ketten j-ter Ordnung K_1 und K_2 genügend hoher Stufe aus $P_1 K_1 \neq 0$ und $P_2 K_2 \neq 0$: $K_1 K_2 = 0$. (Beweis klar nach 11.)

13. Satz: Ersetzt man in DFTK (also in allen Folgerungen ebenfalls) die A_n durch sie enthaltende Ketten j-ter Ordnung n-ter Stufe (j fest), so bleibt alles richtig. (Beweis klar.)

14. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine Überdeckung n-ter Stufe und sind $P_1^*, \ldots, P_k^*$ bzw. Umgebungen n-ter Stufe, so ist $P_1^*, \ldots, P_k^*$ eine $\Subset$-Überdeckung n-ter Stufe. Es gibt also $\Subset$-Überdeckungen beliebiger Stufe. (Beweis klar nach 10.)

15. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine $\Subset$-Überdeckung, so gibt es zu jeder Kette K j-ter Ordnung und genügend hoher Stufe ein $\varkappa$ ($1 \leqq \varkappa \leqq k$) mit $K \Subset P_\varkappa$. (Beweis klar.)

4. Punkte, Punktkerne.

1. Definition: Das unendliche Produkt $P_1 P_2 \ldots$ [18]) heißt Punkt, wenn $P_1 P_2 \ldots P_k \neq 0$ für jedes k gilt und es zu jedem P_ν ein Stück S_ν n_ν-ter Stufe gibt, derart daß $P_\nu \subset S_\nu$ ist und die n_ν über alle Grenzen wachsen [19]). [20])

2. Definition: $P_1 P_2 \ldots$ sei ein Punkt. $P_1 P_2 \ldots \subset Q$ heißt dann: $P_1 P_2 \ldots P_k \cdot Q \neq 0$ für alle k. $P_1 P_2 \ldots \Subset Q$ heißt: $P_1 P_2 \ldots P_k \Subset Q$ für ein geeignetes, also nach 3, 12 für fast alle k. $P_1 P_2 \ldots$ entfernt von Q heißt: $P_1 P_2 \ldots P_k \cdot Q = 0$ für ein geeignetes, also nach 3, 12 für fast alle k.

3. Definition: Die Punkte $P_1 P_2 \ldots$ und $P_1' P_2' \ldots$ heißen zusammenfallend, wenn $P_1 P_2 \ldots P_k \cdot P_1' P_2' \ldots P_k' \neq 0$ für jedes k gilt. Sie heißen voneinander entfernt, wenn $P_1 P_2 \ldots P_k \cdot P_1' P_2' \ldots P_k' = 0$. für ein geeignetes, also nach 3, 12 für fast alle k gilt.

---

[18]) Wie üblich in der intuitionistischen Mathematik braucht ein solcher Punkt nicht gesetzmäßig festgelegt zu sein; er kann auch durch mehr oder minder freie Wahl entstehen.

[19]) „über alle Grenzen wachsen" ist auch wieder positiv zu verstehen, es läßt sich also wirklich die Nummer angeben, von der an die Elemente der Folge eine gegebene Grenze übertreffen.

[20]) Wollte man nur die unendlichen Produkte der A als Punkte ansehen, so könnte man die Vollständigkeit des Raumes nicht beweisen (siehe 4, 14). Nichtintuitionistisch tritt diese Schwierigkeit natürlich nicht auf.

4. Satz: (α) Ist der Punkt $P_1P_2\ldots \subset Q_1$, so ist er auch $\subset Q_1+Q_2$, und ist er $\subset Q_1$ und $\subset Q_2$, so ist er auch $\subset Q_1Q_2$. (β) Dasselbe mit $\Subset$ statt $\subset$.

Beweis: (α) Für den ersten Teil klar. — Man hat weiter

$$P_1P_2\ldots P_kQ_1 \neq 0, \qquad P_1P_2\ldots P_kQ_2 \neq 0;$$

wäre nun

$$P_1P_2\ldots P_kQ_1Q_2 = 0,$$

so folgte wegen **T** (in der Form von **3, 13**) für die Stücke S fast aller Stufen aus

$$P_1P_2\ldots P_kQ_1S \neq 0 : P_1P_2\ldots P_kQ_2S = 0.$$

Im Widerspruch dazu gibt es aber nach Voraussetzung P_l, die in Stücken beliebiger Stufen enthalten sind, mit

$$P_1P_2\ldots P_kQ_1P_l \neq 0, \qquad P_1P_2\ldots P_kQ_2P_l \neq 0.$$

(β) ergibt sich unter Berücksichtigung von **2, 12** β.

5. Satz: $P_1P_2\ldots$ und $P_1'P_2'\ldots$ seien zusammenfallende Punkte. (α) Aus $P_1P_2\ldots \subset Q$ folgt dann $P_1'P_2'\ldots \subset Q$, (β) aus $P_1P_2\ldots \Subset Q$ folgt $P_1'P_2'\ldots Q$, (γ) aus „$P_1P_2\ldots$ entfernt von Q" folgt „$P_1'P_2'\ldots$ entfernt von Q".

Beweis: (α) Es ist $P_1P_2\ldots \subset Q$ und $P_1P_2\ldots \subset P_1'P_2'\ldots P_k'$, also nach 4 auch $P_1P_2\ldots \subset P_1'P_2'\ldots P_k'Q$, also $P_1'P_2'\ldots P_k'Q \neq 0$. ($\beta$) Für ein geeignetes k ist $P_1P_2\ldots P_k \Subset Q$, also sind wegen **3,11** die Stücke fast aller Stufen, die mit $P_1P_2\ldots P_k \neq 0$ liefern, also wegen **2,8** auch fast alle $P' \Subset Q$; daraus folgt nach **2,12** α' der zu beweisende Satz. — (γ) ergibt sich ganz analog.

6. Satz: (α) Fallen $P_1'P_2'\ldots$ und $P_1''P_2''\ldots$ mit $P_1P_2\ldots$ zusammen, so fallen sie untereinander zusammen. (β) Fallen $P_1'P_2'\ldots$ und $P_1''P_2''\ldots$ zusammen und ist $P_1P_2\ldots$ entfernt von $P_1'P_2'\ldots$, so ist es auch entfernt von $P_1''P_2''\ldots$.

Beweis: (α) Es ist $P_1P_2\ldots \subset P_1''P_2''\ldots P_k''$, also nach 5 auch $P_1'P_2'\ldots \subset P_1''P_2''\ldots P_k''$ und das gilt für alle k. (β) ganz analog.

7. Definition: Die aus (allen mit einem Punkt) zusammenfallenden Punkten bestehende Spezies heißt Punktkern (mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet). Zwei Punktkerne heißen zusammenfallend bzw. voneinander entfernt, wenn ein Punkt des einen mit einem Punkt des andern zusammenfällt bzw. von ihm entfernt ist.

Die Spezies aller Punktkerne heißt DFTK-Raum, die A_ν heißen seine Erzeugenden; außerdem wird die leere Spezies als DFTK-

Raum angesehen [21]). Unter einer Teilspezies (große deutsche Buchstaben) verstehen wir jede Spezies von Punktkernen des DFTK-Raumes. Zwei Teilspezies heißen zusammenfallend, wenn jeder Punktkern der einen mit einem geeigneten der andern zusammenfällt. Ein Punktkern bzw. eine Teilspezies heißt $\subset P$ (enthalten in P), wenn (einer seiner Punkte, also) alle seine Punkte bzw. alle ihre Punktkerne $\subset P$ sind. Ein Punktkern heißt $\Subset P$, wenn (einer seiner Punkte, also) alle seine Punkte $\Subset P$ sind.

Bemerkung: Die Definitionen sind möglich auf grund von 5 und 6.

8. Definition: Die Spezies der in P enthaltenen Punkte werde (P) genannt.

9. Satz: $P = 0$ und „(P) ist leer" sind äquivalent. $P_1 \subset P_2$, $(P_1) \subset P_2$ und $(P_1) \subset (P_2)$ sind äquivalent. $(P_1 P_2)$ fällt mit dem Durchschnitt $(P_1)(P_2)$ von (P_1) und (P_2) zusammen. (Beweis klar.)

Bemerkung: Keineswegs aber braucht die Spezies $(P_1 + P_2)$ mit der Vereinigung $(P_1) + (P_2)$ von (P_1) und (P_2) zusammenzufallen. Wenn man sich etwa das Einheitskontinuum erzeugt denkt durch Dualintervalle (als die A_ν) und für P_1 bzw. P_2 die Intervalle $(0, \frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}, 1)$ nimmt, erhält man für $(P_1 + P_2)$ die Spezies der Zahlen des Intervalls $(0, 1)$, für $(P_1) + (P_2)$ dagegen die Vereinigung der Spezies der Zahlen der Intervalle $(0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1)$. — Ferner braucht, wenn die A_ν nicht abstrakte Dinge sondern Teilspezies eines schon definierten DFTK-Raumes waren (wobei man $A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_k} = 0$ oder $\neq 0$ in naheliegender Weise definiert hatte), selbst von nichtintuitionistischem Standpunkt aus keineswegs (P) mit P zusammenzufallen. Man definiere nämlich das Einheitskontinuum durch *offene* Dualintervalle und sorge nur dafür, daß die abgeschlossenen Hüllen zweier dieser Intervalle niemals aneinanderstoßen (sondern entweder voneinander entfernt sind oder einander ganz oder teilweise überdecken).

10. Definition: Umgebung n-ter Stufe von p heißt ein Stück S n-ter Stufe mit $p \Subset S$.

11. Satz: Ist $p \Subset Q$, so gilt dasselbe für die Umgebungen fast aller Stufen von p. Ist p entfernt von q bzw. Q, so gilt dasselbe für die Umgebungen fast aller Stufen. (Beweis folgt aus 3, 11, 12.)

12. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine $\Subset$-Überdeckung und p ein Punktkern, so gilt für mindestens ein $\varkappa$: $p \subset P_\varkappa$. (Beweis folgt aus 3, 15.)

---

[21]) Bei allen Beweisen werden wir den (trivialen) Fall des leeren DFTK-Raumes stillschweigend übergehen.

13. Definition: Eine Folge p_ν von Punktkernen heißt konvergent (zum Limes p), wenn Stücke jeder Stufe existieren, die fast alle p_ν (und p) enthalten. Eine Teilspezies heißt abgeschlossen, wenn sie mit jeder zu einem Limes konvergenten Folge auch den Limes enthält. Eine Teilspezies heißt stark abgeschlossen, wenn sie jeden Punktkern p mit der folgenden Eigenschaft enthält: es kann unmöglich eine Umgebung U von p geben, in der sich unmöglich ein Punktkern der Teilspezies nachweisen ließe.

14. Satz: Jede konvergente Punktkernfolge besitzt einen Limes [22]). (Beweis klar.)

15. Satz: Ist $\lim p_\nu = p$ und $p \in P$, so ist $p_\nu \in P$ für fast alle ν. (Beweis klar.)

16. Satz: Jedes (P) ist stark abgeschlossen. (Beweis klar, weil es für ein (P) stets feststeht, ob sein Durchschnitt mit einem (U) leer ist oder einen Punktkern enthält.)

5. Finite Punktmengen. DFTK-katalogisierte Spezies.

1. Definition: Finite Punktmenge heißt eine Menge [23]) $\mathfrak{M}$ von Punkten (siehe **4**, 1) $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots$ des DFTK-Raumes, wenn beim n-ten Wahlakt *endlich* viel P, nämlich $P^n_1, \ldots, P^n_{k_n}$, wählbar sind; Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ sind die Punkte $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots$; die bei dieser Erzeugung der Elemente von $\mathfrak{M}$ mitwirkenden P heißen die Erzeugenden von $\mathfrak{M}$.

Bemerkung: Aus der allgemeinen Mengendefinition folgt: Hat man in $\mathfrak{M}$ nach n Wahlakten $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots P^n_{\varkappa_n}$ erhalten, so gibt es ein $P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}}$ derart, daß $P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}}$ im $(n+1)$-ten Wahlakt eine zulässige Fortsetzung ist. — Kommt bereits beim ersten Wahlakt nichts zur Wahl, so ist $\mathfrak{M}$ leer. — Hat man in $\mathfrak{M}$ nach n Wahlakten $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots P^n_{\varkappa_n}$ erhalten, so ist $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots P^n_{\varkappa_n} \neq 0$.

2. Satz: Zu einer finiten Punktmenge $\mathfrak{M}$ gibt es eine über alle Grenzen wachsende Zahlenfolge ν_n, derart daß jedes erzeugende P^n von $\mathfrak{M} \subset$ einem geeigneten Stück ν_n-ter Stufe ist.

Beweis: $P^n_{\varkappa_n} \subset$ geeignetem Stück $\nu(n, \varkappa_n)$-ter Stufe (siehe **4**, 1); ist die Folge $\varkappa_n$ fest gewählt, so wachsen die $\nu(n, \varkappa_n)$ über alle Grenzen, es ist dann $\nu(n, \varkappa_n) \geqq m$ für $n \geqq n(m)$. Die Funktion

---

[22]) Das ist die „Vollständigkeit" (F. Hausdorff, Mengenlehre [2. Aufl., Berlin & Leipzig 1927], 103) des Raumes.

[23]) Definition: siehe L. E. J. Brouwer [Math. Ann. **93** (1925), 244—257. Verhandelingen Akad. Amsterdam (Eerste sectie) **12**, No. 5 (1918)]. Der Begriff der finiten Menge findet sich an den in [24]) angegebenen Stellen.

$n(m)$ ist zunächst vom Punkte $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots$ abhängig, bei festem m gibt es nach dem Hauptsatz der finiten Mengen [24]) unter ihren Werten einen größten $n^*(m)$. $\nu_n = \text{Min } \nu(n, \varkappa_n)$ (genommen bei festem n) ist also $\geqq m$ für $n \geqq n^*(m)$.

3. Satz: Der DFTK-Raum fällt zusammen mit einer finiten Punktmenge (erzeugt von Stücken, die Summen von A_ν sind [25])); die beim n-ten Wahlakt auftretenden Stücke bilden eine $\Subset$-Überdeckung.

Beweis: $P^n_1, \ldots, P^n_{k_n}$ seien Stücke (Summen von A), die eine $\Subset$-Überdeckung n-ter Stufe bilden (siehe **3**, **14**). Nach Wahl von $P^1_{\varkappa_1} \ldots P^n_{\varkappa_n}$ sei im $(n+1)$-ten Wahlakt die Wahl von $P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}}$ dann und nur dann zulässig, wenn $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}} \neq 0$ ist. Die so entstehende Menge $\mathfrak{M}$ fällt mit dem DFTK-Raum zusammen, denn sei p ein Punktkern, so gibt es nach **4**, **12** zu jedem n ein $P^n_{\varkappa_n}$, derart daß $p \subset P^n_{\varkappa_n}$ ist; der Punkt $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots$ fällt mit p zusammen.

4. Satz: Jede finite Punktmenge $\mathfrak{N}$ fällt mit einer Teilmenge von $\mathfrak{M}$ aus **3** zusammen.

Beweis: Die Erzeugenden von $\mathfrak{N}$ mögen Q heißen. Zu jedem n gibt es nach **3**, **15** unter Berücksichtigung von **2** ein n^*, derart daß sich jedem $Q^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ ein $P^n_{\lambda_n}$ zuordnen läßt mit $Q^{n^*}_{\varkappa_{n^*}} \Subset P^n_{\lambda_n}$. Die als Zugeordnete zu allen möglichen Q^{n^*} bestimmten P^n sind die Erzeugenden der gesuchten Teilmenge; und zwar ist die endliche Wahlfolge $P^1_{\lambda_1} \ldots P^n_{\lambda_n}$ dann und nur dann zulässig, wenn die $P^1_{\lambda_1}, \ldots, P^n_{\lambda_n}$ Zugeordnete gewisser $Q^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}, \ldots, Q^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ sind, die sämtlich bei einer endlichen Wahlfolge von $\mathfrak{N}$ mitwirken. Es ist klar, daß diese Teilmenge mit $\mathfrak{N}$ zusammenfällt.

5. Definition [26]): Eine finite Punktmenge heißt finite $\Subset$-Punktmenge, wenn folgende zusätzliche Bedingung erfüllt ist: nach Wahl von $P^n_{\varkappa_n}$ genügen die im $(n+1)$-ten Wahlakt zulässigen $P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}}$ der Bedingung $P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}} \Subset P^n_{\varkappa_n}$.

6. Satz: Jede finite Punktmenge fällt mit einer $\Subset$-Punktmenge zusammen. (Ohne Beweis.)

7. Definition: Zwei Spezies heißen abschließungsgleich, wenn ihre Abschließungen zusammenfallen.

8. Satz: Eine Teilspezies $\mathfrak{S}$ und eine finite Punktmenge $\mathfrak{M}$

---

[24]) Siehe L. E. J. Brouwer [Verhandelingen Akad. Amsterdam (eerste sectie) **13** (1923), No. 2; Math. Ann. **97** (1926), 60—75 (63)].

[25]) Diese Verschärfung ist nicht sehr wesentlich; für **17** wird sie gebraucht.

[26]) **5** und **6** werden später nicht verwendet, sind aber wohl an und für sich von Interesse.

sind dann und nur dann abschließungsgleich, wenn es eine finite Punktmenge $\mathfrak{M}'$ gibt (Erzeugende P^m), so daß in jeder Erzeugenden von $\mathfrak{M}'$ ein Punktkern von $\mathfrak{S}$ liegt und für jedes m jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ in einer Erzeugenden P^m von $\mathfrak{M}$ liegt. (Beweis klar.)

9. Satz: Sei $\mathfrak{S}$ eine mit einer Menge $\mathfrak{M}$ (Erzeugende P) zusammenfallende Teilspezies des DFTK-Raumes $\mathfrak{R}$ und sei $\mathfrak{S}$ eindeutig abgebildet in den DFTK-Raum $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{S}'$ das Bild von $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathfrak{S}'$ abschließungsgleich einer finiten Punktmenge $\mathfrak{M}'$ (Erzeugende P'), und es gilt für jedes n: für fast alle m ist das Bild jedes $(P^1_{\varkappa_1} \dots P^m_{\varkappa_m})$ (Beginnabschnitt eines Punktes von $\mathfrak{M}$) enthalten in einem geeignetem $(P'^1_{\varkappa'_1} \dots P'^n_{\varkappa'_n})$ (Beginnabschnitt eines Punktes von $\mathfrak{M}'$).

Bemerkung: Im zweiten Teil des Satzes wird die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung ausgesprochen; sie wird genauso bewiesen wie die gleichmäßige Stetigkeit der vollen Funktion [27]).

Beweis: Jedem Punktkern p von $\mathfrak{S}$ ist ein Punktkern p' von $\mathfrak{S}'$ zugeordnet. Es läßt sich also zu jedem n ein $n^* = n^*(n, \pi)$ angeben, so daß, wenn die Entwicklung eines zu p gehörigen Punktes π bis $P^1_{\varkappa_1} \dots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ gediehen ist, die Entwicklung eines zu p' gehörigen Punktes bis $P'^1_{\varkappa'_1} \dots P'^n_{\varkappa'_n}$ gediehen ist (die P' entnehme man dabei einer mit $\mathfrak{R}'$ zusammenfallenden finiten Punktmenge). Alle in $(P^1_{\varkappa_1} \dots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}})$ enthaltenen Punktkerne werden dann in Punktkerne von $P'^1_{\varkappa'_1} \dots P'^n_{\varkappa'_n}$ abgebildet. Nach dem Hauptsatz der finiten Mengen besitzt $n^*(n, \pi)$ ein Maximum. Damit ist der zweite Teil des Satzes bewiesen. Jedem Beginnabschnitt $P^1_{\varkappa_1} \dots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ ist auf diese Weise ein Beginnabschnitt $P'^1_{\varkappa'_1} \dots P'^1_{\varkappa'_n}$ zugeordnet. Die gesuchte finite Punktmenge $\mathfrak{M}'$ besitzt als Erzeugende die so entstehenden $P'^n_{\varkappa'_n}$ und als zulässige endliche Wahlfolgen die so entstehenden Beginnabschnitte $P'^1_{\varkappa'_1} \dots P'^n_{\varkappa'_n}$. In der Tat liegt eine Menge vor, denn die Abbildung bestimmt ja zu jeder Fortsetzung $P^1_{\varkappa_1} \dots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}} \dots P^{(n+1)^*}_{\varkappa_{(n+1)^*}}$ von $P^1_{\varkappa_1} \dots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ eine Fortsetzung $P'^1_{\varkappa'_1} \dots P'^n_{\varkappa'_n} P'^{n+1}_{\varkappa'_{n+1}}$ von $P'^1_{\varkappa'_n} \dots P'^n_{\varkappa'_n}$. Daß die Menge finit ist, ist klar. Daß sie mit $\mathfrak{S}'$ abschließungsgleich ist, folgt aus 8.

10. Satz: Bei der Abbildung von 9 geht jede konvergente

---

[27]) L. E. J. Brouwer [a. a. O. [24])].

Punktkernfolge in eine konvergente Punktkernfolge über. (Beweis klar nach 9.)

11. Definition: Eine eineindeutige Abbildung heißt topologisch.

12. Satz: Das topologische Bild einer abgeschlossenen Teilspezies ist abgeschlossen. (Beweis klar nach 10.)

13. Satz: Besteht zwischen den A_ν und A'_ν zweier DFTK-Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ die Beziehung, daß A'_ν ein A_ν enthaltendes und in einer Umgebung k_ν-ter Stufe (siehe **3, 3**) von A_ν enthaltenes P_ν ist (wobei die k_ν über alle Grenzen wachsen), so sind beide Räume zueinander topologisch, sobald man jedem Punkt von $\mathfrak{R}$ denjenigen von $\mathfrak{R}'$ zuordnet, der aus ihm entsteht, wenn man jedes A_ν durch das zugehörige A'_ν ersetzt. (Beweis klar.)

14. Definition: Die Teilspezies $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ heißt DFTK-katalogisiert [28]), wenn ein zu $\mathfrak{R}$ topologischer Raum $\mathfrak{R}'$ existiert, in dem für jedes A'_ν feststeht, ob es einen Punktkern von $\mathfrak{S}'$ (dem Bild von $\mathfrak{S}$) enthält oder nicht.

Bemerkung: DFTK-Katalogisiertheit ist also ein topologisch invarianter Begriff.

15. Satz: Jedes (P) ist DFTK-katalogisiert. (Beweis klar.)

16. Satz: Ist $\mathfrak{S}$ eine Teilspezies, und ist für endlich viele P_ν bekannt, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten oder nicht, so ist dasselbe für ihre Summe bekannt.

Bemerkung: Für das Produkt braucht das keineswegs zu gelten.

Beweis: Der Satz ist klar, wenn eines der P_ν einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthält. Sei nun in keinem der P_ν ein Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten. Enthielte die Summe der P_ν einen Punktkern von $\mathfrak{S}$, etwa den Punktkern, zu dem der Punkt $Q_1 Q_2 \ldots$ gehört, so wäre gleichzeitig $Q_1 \ldots Q_k P_\nu = 0$ und $Q_1 \ldots Q_k (P_1 + \ldots + P_l) \neq 0$, was nicht möglich ist; die Summe der P_ν enthält dann also keinen zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Punktkern.

17. Satz: Notwendig und hinreichend für DFTK-Katalogisiertheit einer Teilspezies $\mathfrak{S}$ ist Abschließungsgleichheit mit einer finiten Punktmenge $\mathfrak{M}$.

Beweis: Notwendig: Es gibt einen zu $\mathfrak{R}$ topologischen DFTK-Raum $\mathfrak{R}'$, für dessen A'_ν feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}'$ (dem Bilde von $\mathfrak{S}$) enthalten oder nicht. $\mathfrak{R}'$ fällt nach 3 mit einer finiten Punktmenge zusammen (Erzeugende P'), für deren P' nach 16 feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}'$ enthalten

---

[28]) Wir zeigen später, daß unser Begriff der Katalogisiertheit mit dem Brouwerschen [34]) zusammenfällt.

oder nicht. Aus dieser finiten Punktmenge erhalten wir eine finite Teilmenge $\mathfrak{M}'$, indem wir nur solche P' zulassen, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}'$ enthalten. $\mathfrak{M}'$ ist abschließungsgleich mit $\mathfrak{S}'$. Nach 9 und 12 ist dann $\mathfrak{S}$ abschließungsgleich mit einer finiten Punktmenge $\mathfrak{M}$.

Hinreichend: $\mathfrak{S}$ ist abschließungsgleich mit der finiten Punktmenge $\mathfrak{M}$, die wir als das $\mathfrak{M}'$ aus 8 wählen (Erzeugende P^n; jedes P^n ist $\subset$ einem Stück ν_n-ter Stufe). Wir bestimmen zu jedem A_n eine Umgebung n-ter Stufe (siehe **3, 3**) U_n und ein n', derart daß jedes Stück n'-ter Stufe, das mit $A_n \neq 0$ liefert, $\subseteq U_n$ ist. m sei die kleinste Zahl, so daß $\nu_m \geqq n'$ ist (siehe 2). Sobald es ein erzeugendes P^m von $\mathfrak{M}$ gibt, das mit $A_n \neq 0$ liefert, setzen wir $A'_n = U_n$; sonst setzen wir $A'_n = A_n$. Der von den A'_n erzeugte DFTK-Raum ist nach 13 dem gegebenen topologisch. Ist $A'_n = A_n$, so enthält A'_n keinen Punktkern von $\mathfrak{S}$, weil jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ in einem der P^m enthalten ist und jedes P^m mit $A_n = 0$ liefert. Ist andererseits $A'_n = U_n$, so enthält nach Konstruktion A'_n ein P^m, also einen Punktkern von $\mathfrak{S}$.

18. Satz: Notwendig und hinreichend für die DFTK-Katalogisiertheit einer Teilspezies $\mathfrak{S}$ ist es, daß zu jedem A_ν Umgebungen beliebiger Stufe existieren, für die feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten oder nicht. (Beweis in dem von 17 enthalten.)

19. Satz: Ist die DFTK-katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{S}$ mitsamt ihrer Abschließung eindeutig abgebildet, so ist das Bild von $\mathfrak{S}$ DFTK-katalogisiert. (Beweis klar nach 9 und 17.)

20. Definition: Obere (untere) Grenze einer Spezies von reellen Zahlen heißt eine obere (untere) Schranke, die durch Elemente der Spezies beliebig gut approximiert wird.

21. Satz: Jede eine Zahl enthaltende beschränkte DFTK-katalogisierte Zahlenspezies[29]) besitzt eine obere (untere) Grenze.

Beweis: Nach 17 genügt es, zu beweisen, daß jede nichtleere finite Zahlenmenge eine obere (untere) Grenze besitzt. Man kann die Menge in der Form annehmen, daß beim n-ten Wahlakt Intervalle der Form $(k \cdot 4^{-n}, (k+2) \cdot 4^{-n})$ zu wählen sind. Von allen beim n-ten Wahlakt auftretenden k nehme man das größte (kleinste). Die Intervallfolge $((k-2) \cdot 4^{-n}, (k+2) \cdot 4^{-n})$ erzeugt eine Zahl, die obere (untere) Grenze der gegebenen Spezies.

---

[29]) Damit ist eine Teilspezies desjenigen DFTK-Raumes gemeint, der entsteht, wenn man ein beschränktes Zahlenintervall durch eine geeignete Intervallfolge (als die Folge der A_ν) erzeugt.

22. Satz: Eine auf einer abgeschlossenen nichtleeren DFTK-katalogisierten Teilspezies definierte Funktion f ist beschränkt.

Beweis: Einem Punkt π, der zu einem Punktkern p der Teilspezies gehört, läßt sich ein ganzzahliges $n(\pi)$ zuordnen, so daß $|f(p)| \leqq n(\pi)$. Nach **5, 17** und dem Hauptsatz der finiten Mengen besitzt $n(\pi)$ ein Maximum, die gesuchte Schranke.

23. Satz: Eine auf einer abgeschlossenen nichtleeren DFTK-katalogisierten Teilspezies definierte Funktion besitzt eine obere, (untere) Grenze. (Beweis klar nach **19, 21, 22.**)

24. Definition: Ist $\mathfrak{S}_1$ eine DFTK-katalogisierte Teilspezies, so bedeutet $\mathfrak{S}_1 \Subset \mathfrak{S}_2$: für die Stücke S fast aller Stufen, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ enthalten, gilt $(S) \subset \mathfrak{S}_2$. Die Teilspezies $\mathfrak{S}_2$ heißt Speziesumgebung n-ter Stufe der katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}_1$, wenn $\mathfrak{S}_1 \Subset \mathfrak{S}_2 \subset (P)$ ist und P eine Summe von Stücken n-ter Stufe darstellt, von denen jedes einen Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ enthält. Die katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{S}_1$ heißt von der DFTK-katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}_2$ entfernt, wenn die Stücke fast aller Stufen, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ enthalten, keinen Punktkern von $\mathfrak{S}_2$ enthalten.

Die folgenden Sätze lassen sich auf Grund von **17** aus Sätzen von **3** und **4** leicht ableiten:

25. Satz: Zu jeder DFTK-katalogisierten Teilspezies gibt es Speziesumgebungen beliebiger Stufen.

26. Satz: Ist $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}_2$ entfernt, so ist auch $\mathfrak{S}_2$ von $\mathfrak{S}_1$ entfernt, und es gibt Speziesumgebungen beliebiger Stufen von beiden, die auch noch voneinander entfernt sind.

27. Satz: Ist $\mathfrak{U}$ eine Speziesumgebung von $\mathfrak{S}$, so gibt es Speziesumgebungen beliebiger Stufen von $\mathfrak{S}$, die in $\mathfrak{U}$ enthalten sind.

6. Metrische DFTK-Räume.

1. Definition: Ein metrischer DFTK-Raum ist ein DFTK-Raum, in dem je zwei Punktkernen p und q eine nichtnegative [30]) reelle Zahl $\varrho(p, q) = \varrho(q, p)$ (der Abstand) zugeordnet ist, die für zusammenfallende Punktkerne verschwindet, für voneinander

---

[30]) Im Folgenden bedeutet positiv ($\circ > 0$): in der Entwicklung der Zahl (als Intervallfolge) läßt sich eine Stelle angeben, von der ab sie von 0 nach oben abweicht. Nichtpositiv ($\leqq 0$) ist die Absurdität von positiv. Ferner hat man die doppelte Absurdität von positiv (> 0). Analog sind die Bezeichnungen „negativ", „größer", „kleiner" zu verstehen. (Siehe L. E. J. Brouwer [Math. Ann. **95** (1925), 453—472 (467)].)

entfernte Punktkerne (siehe **4, 10**) positiv ist und der Dreiecksungleichung genügt.

In 2—12 werden wir es stets mit einem metrischen DFTK-Raum zu tun haben (nicht dagegen in **13, 14**).

Bemerkung: Verschiedene Punktkerne haben einen von null verschiedenen Abstand.

2. Definition: Abstand zweier Teilspezies $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ heißt die untere Grenze von $\varrho(p_1, p_2)$, $p_1 \subset \mathfrak{S}_1$, $p_2 \subset \mathfrak{S}_2$ [31]). Durchmesser einer Teilspezies $\mathfrak{S}$ heißt die obere Grenze von $\varrho(p, q)$, $p \subset \mathfrak{S}$, $q \subset \mathfrak{S}$.

3. Satz: Die Zahlenspezies $\varrho(p_1, p_2)$ ist beschränkt. (Beweis klar nach **5, 22.**)

4. Satz: Für zwei nichtleere DFTK-katalogisierte Teilspezies existiert der Abstand. Für eine nichtleere DFTK-katalogisierte Teilspezies existiert der Durchmesser.

Beweis: Man darf die Spezies als abgeschlossen voraussetzen. Nach **5, 23** existiert die obere (untere) Grenze $\sigma(q)$ von $\varrho(p, q)$, $p \subset \mathfrak{S}$ (katalogisiert). Ebenso besitzt nach **5, 23** $\sigma(q)$ eine obere (untere) Grenze, wenn q eine weitere DFTK-katalogisierte Teilspezies durchläuft. Daraus folgt der Satz.

5. Satz: Die Durchmesser der (A_ν) konvergieren mit wachsendem ν gegen 0.

Beweis: Der DFTK-Raum fällt nach **5, 3** mit einer finiten Punktmenge zusammen (Erzeugende P). Zu jedem positiven ε gibt es nach **5, 9** ein n, derart daß bei festem Punktkern q durch die Abbildung $\varrho(p, q)$ jedes $(P^1_{\varkappa_1} \ldots P^n_{\varkappa_n})$ in ein Zahlenintervall der Länge $\frac{\varepsilon}{3}$ abgebildet wird; nach dem Hauptsatz der finiten Mengen kann man n von q unabhängig wählen. Nimmt man q insbesondere als Punktkern von $P^1_{\varkappa_1} \ldots P^n_{\varkappa_n}$ an, so sieht man, daß der Durchmesser von $(P^1_{\varkappa_1} \ldots P^n_{\varkappa_n}) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Die Beginnabschnitte $P^1_{\varkappa_1} \ldots P^n_{\varkappa_n}$ bilden (bei festem n) eine Überdeckung. Nach **3, 3** und **3, 13** erhält man aus ihr eine $\mathfrak{C}$-Überdeckung, wenn man jeden dieser Beginnabschnitte durch die Summe derer ersetzt, die mit ihm $\neq 0$ liefern. Die Elemente dieser $\mathfrak{C}$-Überdeckung haben einen Durchmesser $\leqq \varepsilon$. Fast alle (A_ν) sind in Elementen dieser $\mathfrak{C}$-Überdeckung enthalten (siehe **3, 2**), haben also einen Durchmesser $\leqq \varepsilon$.

6. Satz: Fallen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ mit finiten Punktmengen zusammen

---

[31]) Natürlich läßt sich auch ein Abstandsbegriff wie bei F. HAUSDORFF, Mengenlehre [2. Aufl., Berlin & Leipzig 1927], 146 erklären.

und hat jeder Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ einen positiven Abstand von jedem Punktkern von $\mathfrak{S}_2$, so haben $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ einen positiven Abstand.

Beweis: Ist $\mathfrak{S}_1$ ein Punktkern, so folgt der Satz unmittelbar aus dem Hauptsatz der finiten Mengen. Ist $\mathfrak{S}_1$ beliebig, so erhält man für jeden Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ einen positiven Abstand von $\mathfrak{S}_2$ und durch Anwendung des Hauptsatzes der finiten Mengen auf $\mathfrak{S}_2$ den gewünschten Satz.

7. Satz: Von einander entfernte DFTK-katalogisierte Teilspezies (siehe **5**, 24) haben einen positiven Abstand.

Beweis: Sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ voneinander entfernt, so sind es auch die Abschließungen, weil es nach **5**, 26 Speziesumgebungen gibt, die voneinander entfernt sind, und weil diese Speziesumgebungen die Abschließungen enthalten. $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ sind daher abschließungsgleich mit Teilspezies $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2'$, die mit finiten Punktmengen zusammenfallen und die auch noch voneinander entfernt sind. Da nach 6 zu $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2'$ ein positiver Abstand gehört, haben auch $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ einen positiven Abstand.

8. Satz: Sind $P \neq 0$, $Q \neq 0$, $PQ = 0$, so haben (P), (Q) einen positiven Abstand. (Beweis klar nach 7 und **5**, 15.)

9. Satz: Ist $\mathfrak{U}$ eine Speziesumgebung der DFTK-katalogisierten Spezies $\mathfrak{S}$, so gibt es ein positives a derart, daß jeder Punktkern im Abstand $\leqq a$ von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{U}$ gehört.

Beweis: Wir können annehmen, daß für die erzeugenden A_ν des DFTK-Raumes feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten oder nicht. $P_1, \ldots, P_k$ sei eine $\Subset$-Überdeckung mit Stücken n-ter Stufe (die Summen von A_ν sind), und zwar sei n so gewählt, daß für jedes Stück S n-ter Stufe, das einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthält, $(S) \subset \mathfrak{U}$ gilt. Die Summe derjenigen unter den $P_1, \ldots, P_k$, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten, heiße U, die der übrigen V. Weiter bestimmen wir ein $n' > n$ und eine $\Subset$-Überdeckung n'-ter Stufe $P_1', \ldots, P_{k'}'$, derart daß jedes P' $\Subset$ geeignetem P ist (siehe **3**, 15). Die Summe derjenigen unter den $P_1', \ldots, P_{k'}'$, denen auf diese Art ein P aus V zugeordnet wird ($P' \Subset P$), heiße V'. Dann ist U, V' eine $\Subset$-Überdeckung und (V') entfernt von $\mathfrak{S}$, weil $V' \Subset V$ ist, also eine zu $\mathfrak{S}$ fremde Speziesumgebung von (V') existiert. Der Abstand von (V') und $\mathfrak{S}$ heiße a; a ist nach 7 positiv. Da jeder Punktkern entweder in U oder in V' liegt, enthält U, also auch $\mathfrak{U}$ alle Punktkerne, die von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq a$ haben.

10. Satz: Zu einer DFTK-katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}$ und einem positiven a gibt es eine Speziesumgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$, deren sämtliche Punktkerne von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq a$ haben.

Beweis: Wir können wieder annehmen, daß für die erzeugenden A_ν des DFTK-Raumes feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten oder nicht. Man bestimme n nach 5 so, daß jedes Stück n-ter Stufe einen Durchmesser $\leqq a$ hat, und bilde eine $\mathfrak{C}$-Überdeckung aus Stücken n-ter Stufe, die Summen von A_ν sind; U sei die Summe derjenigen unter diesen Stücken, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten. $\mathfrak{U} = (U)$ hat dann die gewünschten Eigenschaften.

11. Satz: Nennt man eine Folge p_ν von Punktkernen metrisch konvergent, wenn $\varrho(p_\mu, p_\nu) \to 0$ gilt, und p ihren metrischen Limes, wenn $\varrho(p, p_\nu) \to 0$ gilt, so fällt der Begriff der metrischen Konvergenz mit dem der Konvergenz und der des metrischen Limes mit dem des Limes zusammen. (Beweis folgt aus 9 und 10.)

12. Satz: Notwendig und hinreichend für die DFTK-Katalosiertheit der nichtleeren Teilspezies $\mathfrak{S}$ ist die Existenz ihres Abstandes von jedem Punktkern p.

Beweis: Notwendig: folgt aus 4, wenn man eine der beiden Spezies dort auf einen Punktkern spezialisiert. Hinreichend: a_ν sei positiv und größer als der Durchmesser von A_ν, $\lim a_\nu = 0$ (siehe 5). $p_\nu \subset A_\nu$ sei ein Punktkern, nach Voraussetzung existiert sein Abstand von $\mathfrak{S}$. Ist dieser Abstand $\leqq 2a_\nu$, so setzen wir A'_ν = Summe gewisser A einer Überdeckung ν-ter Stufe; und zwar nehmen wir in die Summe alle diejenigen auf, die von p_ν einen Abstand $\leqq 3a_\nu$ haben, und keines, das von p_ν einen Abstand $\geqq 4a_\nu$ hat. Hat dagegen p_ν von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\geqq \frac{5}{2} a_\nu$, so setzen wir $A'_\nu = A_\nu$. Für alle übrigen A_ν entscheiden wir uns von Fall zu Fall für eine der beiden Vorschriften. Immer, wenn wir der ersten Vorschrift gefolgt sind, enthält A'_ν einen Punktkern von $\mathfrak{S}$, immer, wenn wir der zweiten Vorschrift gefolgt sind, enthält A'_ν keinen Punktkern von $\mathfrak{S}$. Nach 5, 13 erzeugen die A'_ν einen zum gegebenen topologischen DFTK-Raum.

13. Satz: Zu zwei voneinander entfernten DFTK-katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$ kann man eine im ganzen DFTK-Raum definierte nichtnegative Funktion f finden, die auf $\mathfrak{S}_0$ null, auf $\mathfrak{S}_1$ eins und überall $\leqq$ eins ist.

Beweis: Wir bestimmen U_0 so, daß $\mathfrak{S}_0$ in (U_0) enthalten und $\mathfrak{S}_1$ von (U_0) entfernt ist (siehe 5, 24). U_1 falle mit dem DFTK-Raum zusammen. U^* sei so bestimmt, daß $\mathfrak{S}_1 \subset (U^*)$ und $U_0 U^* = 0$ gilt (siehe 5, 24).

Weiter bestimmen wir zu jedem $\mu = m \cdot 2^{-n}$ (m, n positiv ganz, $m \leqq 2^n$) ein U_μ mit $U_\mu U^* = 0$ für $\mu < 1$ und $U_\mu \subset U_\nu$ für $\mu < \nu$.

Und zwar bestimmen wir, wenn für ein gewisses n alle U_μ mit $\mu = m \cdot 2^{-n}$ bereits bestimmt sind, das U_μ mit $\mu = (2m+1) \cdot 2^{-n-1}$ nach **3**, 9 so, daß $U_{\mu-2^{-n-1}} \subseteq U_\mu \subseteq U_{\mu+2^{-n-1}}$ gilt.[31a])

Sei $P_1 P_2 \ldots$ ein Punkt des Punktkernes p. Aus $P_k U_{m \cdot 2^{-n}} \neq 0$ folgt nach **3**, 11 für genügend großes k und für $m < 2^{-n} : P_k \subseteq U_{(m+1) \cdot 2^{-n}}$. Das kleinste μ $(= m \cdot 2^{-n})$ bei festem n mit der Eigenschaft $P_k U_\mu \neq 0$ heiße $\varphi_n(k)$ (es gibt sicherlich ein solches, da mindestens für $\mu = 1$ ja $P_k U_1 \neq 0$ gilt). Da $P_k P_l \neq 0$ und für genügend großes k $P_k \subseteq U_{\mu+2^{-n}}$ ist, ist auch $P_l U_{\mu+2^{-n}} \neq 0$, also für genügend großes $k : \varphi_n(l) \leqq \varphi_n(k) + 2^{-n}$. Ebenso ist für genügend großes l: $\varphi_n(k) \leqq \varphi_n(l) + 2^{-n}$. Also

$$(*) \qquad \left| \varphi_n(k) - \varphi_n(l) \right| \leqq 2^{-n} \text{ für } k, l \geqq t(n).$$

Man kann von $t(n)$ übrigens verlangen, daß es eine nichtabnehmende Funktion von n ist. — Weiter ist wegen der Einschachtelungsbedingung für die U_μ

$$\binom{*}{*} \qquad \varphi_n(k) \geqq \varphi_{n'}(k) \geqq \varphi_n(k) - 2^{-n} \text{ für } n' > n.$$

Daraus folgt die Existenz des $\lim \varphi_n(t(n))$, denn es ist

$$\left| \varphi_n(t(n)) - \varphi_{n'}(t(n')) \right| \leqq \left| \varphi_n(t(n)) - \varphi_n(t(n')) \right| + \left| \varphi_n(t(n')) - \varphi_{n'}(t(n')) \right|,$$

und hier ist (wenn wir etwa $n < n'$ nehmen) der erste Summand $\leqq 2^{-n}$ wegen $(*)$ und der zweite Summand $\leqq 2^{-n}$ wegen $\binom{*}{*}$.

Der Wert von $\lim \varphi_n(t(n))$ scheint noch abhängig zu sein von der Wahl der Funktion $t(n)$. Ist aber $t'(n)$ eine andere Funktion, die ebenso wie $t(n)$ der Bedingung $(*)$ genügt, so ist nach $(*)$

$$\left| \varphi_n(t(n)) - \varphi_n(t'(n)) \right| \leqq 2^{-n},$$

also

$$\lim \varphi_n(t(n)) = \lim \varphi_n(t'(n)).$$

$\lim \varphi_n(t(n))$ hängt also nur von dem gegebenen Punkt ab. Man sieht ferner ohne weiteres, daß für einen Punkt, den man aus dem Punkte $P_1 P_2 \ldots$ erzeugt, indem man aus den P_k eine unbegrenzte Auswahl trifft, $\lim \varphi_n(t(n))$ denselben Wert hat. Dasselbe gilt für zwei zusammenfallende Punkte $P_1 P_2 \ldots$ und $Q_1 Q_2 \ldots$, wie man nun durch Betrachtung von $P_1 Q_1 P_2 Q_2 \ldots$ sieht. $\lim \varphi_n(t(n))$ hat also für alle Punkte $P_1 P_2 \ldots$ desselben Punktkernes p denselben Wert, $f(p)$, die gesuchte Funktion (daß f auf $\mathfrak{S}_0$ null und auf $\mathfrak{S}_1$ eins ist, ist klar).

[31a]) Keineswegs brauchen U_μ und $U_{\mu+2^{-n-1}}$ voneinander verschieden zu sein. Siehe auch [12a]).

14. Satz: Jeder DFTK-Raum läßt sich metrisieren (so daß die Bedingungen von 1 erfüllt sind).

Beweis: Man bestimme nach 13 zu A_m und A_n mit $A_m A_n = 0$ eine im ganzen DFTK-Raum definierte nichtnegative Funktion $f_{m,n}$, die auf A_m null, auf A_n eins und überall $\leqq 1$ ist, setze $f_{m,n} \equiv 0$ für $A_m A_n \neq 0$ und

$$\varrho(p, q) = \sum_{m,n} 2^{-m-n} |f_{m,n}(p) - f_{m,n}(q)|.$$

Man sieht ohne weiteres, daß die Bedingungen von 1 erfüllt sind.

Dabei beachte man: Die $f_{m,n}(p)$ sind „unfertig" gegeben; sie lassen sich mit vorgegebener Genauigkeit berechnen, wenn p mit genügender Genauigkeit bekannt ist. Wünscht man nun $\varrho(p, q)$ mit einer gewissen Genauigkeit zu kennen, so darf man in obiger unendlicher Summe fast alle Glieder vernachlässigen und braucht nur die übrig bleibenden endlich vielen mit einer gewissen Genauigkeit zu berechnen; die Funktion $\varrho(p, q)$ ist also auch „unfertig".

7. Die metrisch katalogisiertkompakten Spezies.

In 1 geben wir die Definition und Haupteigenschaften der katalogisiertkompakten Spezies und der katalogisierten Teilspezies wieder, da die Originalstelle[32]) vielleicht nicht jedem Leser zugänglich ist; wir übernehmen den Brouwerschen Text wörtlich, wir haben nur einige Buchstaben abgeändert.

1. Unter einer *katalogisierten Folge* verstehen wir eine unbegrenzte Folge $p_1, p_2, \ldots$[33]), in welcher zu je zwei Elementen p_{ν_1} und p_{ν_2} ein Abstand $\varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_2}) \geqq 0$ (aber nicht notwendig entweder > 0 oder $= 0$) definiert wird, der folgenden Bedingungen genügt: Es ist stets $\varrho(p_\nu, p_\nu) = 0$ und $\varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_2}) \leqq \leqq \varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_3}) + \varrho(p_{\nu_2}, p_{\nu_3})$. Weiter existiert zu jedem n ein μ_n und ein ν_n, so daß für $\nu > \nu_n$ jedes p_ν in einer Entfernung $\leqq a <_\circ 4^{-n}$ von $s_{\mu_n} =$ Vereinigung $(p_1, p_2, \ldots, p_{\mu_n})$ gelegen ist. Schließlich ist jedes Element p_{η_n} von s_{μ_n} entweder ein *β_n-Element* oder ein *α_n-Element* (niemals aber beides gleichzeitig); im ersteren Falle ist für $\nu > m(\eta_n)$ jedes p_ν in einer Entfernung $\geqq \frac{5}{4} \cdot 4^{-n}$ von p_{η_n} gelegen, im letzteren Falle gibt es eine un-

[32]) a. a. O.[1]).

[33]) Die kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen hier natürlich nicht mehr Punktkerne eines DFTK-Raumes; ein solcher liegt in 7 (außer bei 17—19) überhaupt nicht vor. Mit großen deutschen Buchstaben werden wir in 7 die Teilspezies des zu definierenden Σ bezeichnen. (Verf.)

begrenzte Folge von verschiedenen p_ν in einer Entfernung $\leqq b <\circ \frac{3}{2} \cdot 4^{-n}$ $\left(b \circ> \frac{5}{4} \cdot 4^{-n}\right)$ von p_{η_n}. (Demzufolge besitzt dann auch ein beliebiges p_ν entweder die für die α_n oder die für die β_n charakteristische Eigenschaft.)

Was wir auf dieser Grundlage unter einer *positiv-konvergenten unbegrenzten Folge* (bzw. unter *zusammengehörigen positiv-konvergenten unbegrenzten Folgen*) von verschiedenen Elementen einer katalogisierten Folge zu verstehen haben, ist ohne weiteres klar.

Die Spezies Σ der *Spezies zusammengehöriger positiv-konvergenter Folgen von verschiedenen Elementen* einer katalogisierten Folge F ist *kompakt*, d.h. wenn wir in auf der Hand liegender Weise die Entfernung je zweier Elemente von Σ definieren, so konvergiert jede positiv konvergente Folge von Elementen von Σ positiv gegen ein Element von Σ. Weiter ist Σ *in bezug auf* F „*katalogisiert*", d.h. die Entfernung zwischen Σ und einem beliebigen Element p_ν von F läßt sich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximieren (ohne daß jedoch stets ein Element q von S angegeben werden kann so daß $\varrho(q, p_\nu) = \varrho(\Sigma, p_\nu)$) [34]. Die Spezies Σ „*fällt zusammen*" mit einer kompakten finiten Menge $\mathfrak{M}$ von positiv-konvergenten unbegrenzten Folgen von (eventuell teilweise identischen) Elementen von F, welche erhalten werden, indem in solcher Weise der Reihe nach ein α_1-Element, ein α_2-Element, usw. gewählt werden, daß nach der Wahl eines bestimmten α_n-Elementes α_n^0 jedes α_{n+1}-Element in einer Entfernung $\leqq 2 \cdot 4^{-n}$ von α_n^0 wählbar und jedes α_{n+1}-Element in einer Entfernung $\geqq 3 \cdot 4^{-n}$ von α_n^0 unwählbar ist. Jede in derselben Weise wie Σ mittels einer katalogisierten Folge definierte Spezies, und überdies die leere Spezies, heißt eine *katalogisiert-kompakte Spezies*.

2. Satz: Zu jedem α_n-Element p_ν gibt es einen Punktkern [35] p_ν^* aus Σ mit $\varrho(p_\nu, p_\nu^*) \leqq 2 \cdot 4^{-n}$. Zu jedem Punktkern p^* aus Σ gibt es ein α_n-Element p_ν mit $\varrho(p^*, p_\nu) \leqq 4^{-n}$. (Beweis klar.)

3. Satz: Jedes Σ fällt zusammen mit einem Σ^*, das erzeugt wird von einer metrisch katalogisierten [35a] Folge von Punktkernen p_ν^* aus Σ.

---

[34]) Eine Teilspezies heißt also metrisch katalogisiert in bezug auf die p_ν, wenn sie entweder leer ist oder ihr Abstand von jedem p_ν existiert. (Verf.)

[35]) Punkte nennen wir die oben eingeführten positiv-konvergenten Teilfolgen der p_ν, Punktkern jede Spezies zusammengehöriger positiv-konvergenter Teilfolgen.

[35a]) Um allen Mißverständnissen vorzubeugen, geben wir dem Brouwerschen Begriff der Katalogisiertheit noch das Attribut „metrisch".

Beweis: Zu einem α_n-Element p_ν suchen wir nach 2 ein p_ν^* aus Σ mit $\varrho(p_\nu, p_\nu^*) \leqq 2 \cdot 4^{-n}$. Die Abstände der p_ν^* setzen wir so fest, wie sie durch Σ gegeben sind. Die p_ν^* bilden eine metrisch katalogisierte Folge ohne β_n-Elemente: Tritt p_ν in s_{μ_n} $(n \geqq 2)$ auf, so tritt p_ν^* in $s_{\mu_n^*}$ auf, $\mu_{n-1}^* = \mu_n$. Ist p_ν ein α_n-Element, so ist p_ν^* ein α_{n-1}-Element. Ordnet man einer Folge der p_ν die entsprechende Folge der p_ν^* zu, so erhält man das gewünschte Zusammenfallen von Σ und Σ^*.

4. Satz: Die Abschließung einer in bezug auf die p_ν metrisch katalogisierten Teilspezies ist in bezug auf die p_ν metrisch katalogisiert, ebenso die Vereinigung endlich vieler in bezug auf die p_ν metrisch katalogisierter Teilspezies. (Beweis klar.)

5. Satz: Eine in bezug auf die p_ν metrisch katalogisierte Teilspezies ist abschließungsgleich einer finiten Punktmenge[36]). (Beweis findet sich bei Brouwer[37]).)

6. Satz: Eine auf der Abschließung einer in bezug auf die p_ν metrisch katalogisierten nichtleeren Teilspezies überall definierte Funktion besitzt eine obere (untere) Grenze. (Beweis genau wie der von **5, 23.**)

7. Satz: Eine mit einer finiten Punktmenge abschließungsgleiche Teilspezies ist in bezug auf die p_ν metrisch katalogisiert. (Beweis verläuft unter Verwendung von 6 wie der von **6, 4.**)

8. Satz: Für die metrische Katalogisiertheit einer Teilspezies in bezug auf die p_ν ist notwendig und hinreichend die Existenz ihres Abstandes von jedem Punktkern aus Σ.

Beweis: Notwendig: Die metrische Katalogisiertheit der Teilspezies besagt, daß ihr Abstand von jedem p_ν der erzeugenden metrisch katalogisierten Folge existiert; für eine konvergente[38]) Teilfolge existiert dann aber auch der Limes der Abstände, und mittels solcher Teilfolgen werden ja die Punktkerne definiert; jeder Punktkern besitzt also einen Abstand von der Teilspezies. Hinreichend: Die gegebene Teilspezies besitzt insbesondere einen Abstand von jedem p_ν^* aus 3, sie fällt also mit einer katalogisierten Teilspezies von Σ^* zusammen. Nach 5 ist sie abschließungsgleich einer von den p_ν^* erzeugten finiten Punktmenge; die Funktion, die den Abstand eines festen p_ν von einem Punktkern von Σ^* darstellt, besitzt also auf der gegebenen Teilspezies eine

---

[36]) natürlich von Σ, nicht von einem DFTK-Raum.

[37]) a. a. O. [1]).

[38]) „konvergent" soll stets „positiv konvergent" bedeuten.

obere Grenze, den gesuchten Abstand; die gegebene Teilspezies ist also auch in bezug auf die p_ν metrisch katalogisiert.

9. Satz: In der Abschließung einer metrisch katalogisierten [39]) Teilspezies $\mathfrak{S}$ gibt es eine endliche Teilspezies, von der jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq a$ hat (a gegeben, positiv). (Beweis klar nach 1 und 2.)

10. Satz: Zu jeder metrisch katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}$ und zu je zwei reellen Zahlen a, b mit $b \circ> a$ gibt es eine metrisch katalogisierte Teilspezies, $\mathfrak{S}_{a,b}$ genannt, die alle Punktkerne im Abstand $\leqq a$ von $\mathfrak{S}$ und keinen Punktkern im Abstand $> b$ von $\mathfrak{S}$ enthält.

Beweis: Man wähle alle p_ν aus, die von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq a$ haben, jedoch keines, das von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $> b$ hat; diese metrisch katalogisierte Teilfolge der p_ν erzeugt eine Teilspezies mit den gewünschten Eigenschaften.

11. Definition: Zwei metrisch katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ heißen in ausgeprägter Lage befindlich, wenn zwei nach null konvergente Folgen positiver Zahlen δ_ν, ε_ν existieren, derart daß es zu je zwei Punktkernen q, r mit $q \subset \mathfrak{Q}$, $r \subset \mathfrak{R}$, $\varrho(q, r) \leqq \delta_\nu$ ein dritter Punktkern $s \subset \mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ mit $\varrho(q, s) \leqq \varepsilon_\nu$ existiert.

12. Satz: Der Durchschnitt zweier abgeschlossener metrisch katalogisierter Teilspezies $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, die sich in ausgeprägter Lage befinden, ist wieder eine metrisch katalogisierte Teilspezies.

Beweis: Sei nach 9 in $\mathfrak{Q}$ eine endliche Teilspezies $q_1^\nu, \ldots, q_{k_\nu}^\nu$ gegeben, von der jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq \frac{1}{3}\delta_\nu$ hat; entsprechend in $\mathfrak{R}$ eine endliche Teilspezies $r_1^\nu, \ldots, r_{l_\nu}^\nu$. Zu allen Paaren $q_\varkappa^\nu$, r_λ^ν mit $\varrho(q_k^\nu, r_\lambda^\nu) \leqq \frac{3}{4}\delta_\nu$ (wir dürfen annehmen, daß solche Paare existieren, da sonst $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ leer, also katalogisiert ist), aber zu keinem mit $\varrho(q_\varkappa^\nu, r_\lambda^\nu) > \delta_\nu$ bilden wir die Zahl $\varrho(p, q_\varkappa^\nu)$ (für einen festen Punktkern p aus Σ); die untere Grenze dieser endlich vielen Zahlen bei festem ν heiße ϱ_ν. Wegen der ausgeprägten Lage gibt es dann einen Punktkern von $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, dessen Abstand von p zwischen $\varrho_\nu - 2\varepsilon_\nu$ [40]) und $\varrho_\nu + 2\varepsilon_\nu$ liegt.

---

[39]) Nachdem sich in 8 der Begriff der metrisch katalogisierten Teilspezies als eine innere Eigenschaft von Σ erwiesen hat, lassen wir in Zukunft den Zusatz „in bezug auf die p_ν" weg.

[40]) Hier und an einigen anderen Stellen möchte es vielleicht so aussehen, als ob Abschätzungen nicht voll ausgenutzt würden. Diese scheinbare „Verschwendung" bei Abschätzungen ist aber dadurch bedingt, daß eine stetige Funktion selbst auf einer abgeschlossenen katalogisierten Teilspezies ihre obere Grenze nicht anzunehmen braucht.

Andererseits gibt es zu jedem Punktkern von $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ im Abstand $\leqq \frac{3}{8}\delta_\nu$ ein $q_\varkappa^\nu \subset \mathfrak{Q}$ und ein $r_\lambda^\nu \subset \mathfrak{R}$, die untereinander einen Abstand $\leqq \frac{3}{4}\delta_\nu$ haben. Mithin hat jeder Punktkern von $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ einen Abstand $> \varrho_\nu - \delta_\nu$ von p.

Also existiert $\lim \varrho_\nu$ und stellt den Abstand zwischen p und $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ dar; nach 8 ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ katalogisiert.

13. Satz: $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_k$ seien metrisch katalogisierte Teilspezies; ε sei eine gegebene positive Zahl. Dann lassen sich ein $\mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$ (siehe 10) und ein positives δ mit den folgenden Eigenschaften bestimmen: zu je zwei Punktkernen $q_1 \subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\varkappa$ mit $\varrho(q_1, q_2) \leqq \delta$ gibt es ein $q_3 \subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}\mathfrak{P}_\varkappa$ mit $\varrho(q_1, q_3) \leqq \varepsilon$.

Beweis: In der Abschließung von $\mathfrak{S}$ bestimmen wir nach 9 die Teilspezies $r_1, \ldots, r_l$ so, daß jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq \frac{\varepsilon}{4}$ von ihr hat. Dann bestimmen wir σ und Δ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\frac{\varepsilon}{4} <_\circ \sigma \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$0 <_\circ \Delta \leqq \frac{\varepsilon}{6}$$

$$(*) \quad \left|\varrho(r_\lambda, \mathfrak{P}_\varkappa) - \sigma\right| \geqq \Delta \quad \text{für alle } \varkappa, \lambda.$$

Nach 10 bestimmen wir zu jedem r_λ eine metrisch katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{V}_\lambda$, die alle Punktkerne im Abstand $\leqq \sigma$ und keinen im Abstand $> \sigma + \frac{\Delta}{2}$ von r_λ enthält.

Ein Punktkern $q \subset \mathfrak{P}_\varkappa$, der von $\mathfrak{V}_\lambda$ einen Abstand $\leqq \frac{\Delta}{4}$ hat, hat von r_λ einen Abstand $\leqq \sigma + \frac{3}{4}\Delta$; gibt es solch ein q, so ist $\varrho(r_\lambda, \mathfrak{P}_\varkappa) \leqq \sigma + \frac{3}{4}\Delta$, also nach (*) sogar $\leqq \sigma - \frac{3}{4}\Delta$; da $\mathfrak{V}_\lambda$ alle Punktkerne im Abstand $\leqq \sigma$ von r_λ enthält, gibt es dann also in $\mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{V}_\lambda$ einen Punktkern.

Wir setzen nun die Vereinigung der $\mathfrak{V}_\lambda$ gleich $\mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$. In der Tat: Ist $q_1 \subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\varkappa$, $\varrho(q_1, q_2) \leqq \delta = \frac{\Delta}{5}$, so gibt es ein q_1^* und ein λ mit $q_1^* \subset \mathfrak{V}_\lambda$, $\varrho(q_1^*, q_2) \leqq \frac{\Delta}{4}$; es gibt also in $\mathfrak{P}_\varkappa$ einen Punktkern, der von $\mathfrak{V}_\lambda$ einen Abstand $\leqq \frac{\Delta}{4}$ hat, und nach dem Inhalt des vorigen Absatzes einen Punktkern $q_3 \subset \mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{V}_\lambda$ mit $\varrho(q_1, q_3) \leqq 2\left(\sigma + \frac{\Delta}{2}\right) \leqq \varepsilon$.

14. Satz: $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ seien metrisch katalogisiert; ε sei eine gegebene positive reelle Zahl. Dann gibt es ein $\mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$, das sich zu jedem $\mathfrak{P}_\varkappa$ in ausgeprägter Lage befindet.

Beweis: Unter $\mathfrak{S}^0$ verstehen wir die gegebene Teilspezies $\mathfrak{S}$; unter $\mathfrak{S}^{\nu+1}$ verstehen wir ein nach 13 konstruiertes $\mathfrak{S}^{\nu}_{0,\frac{1}{3}\varepsilon_\nu}$ mit der Eigenschaft: es gibt ein positives δ_ν derart, daß aus $q_1 \subset \mathfrak{S}^{\nu+1}$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\varkappa$, $\varrho(q_1, q_2) \leqq 2\delta_\nu$ die Existenz eines $q_3 \subset \mathfrak{S}^{\nu+1}\mathfrak{P}_\varkappa$ mit $\varrho(q_1, q_3) \leqq \frac{1}{3}\varepsilon_\nu$ folgt. Dabei wählen wir $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $0 < 2\varepsilon_{\nu+2} \leqq \varepsilon_{\nu+1} \leqq \frac{3}{4}\delta_\nu$. Die Vereinigung des $\mathfrak{S}^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ist metrisch katalogisiert; wir nennen sie $\mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$. In der Tat: Ist $q_1 \subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\varkappa$, $\varrho(q_1, q_2) \leqq \delta_\nu$, so gibt es ein n mit $q_1 \subset \mathfrak{S}^n$, ferner ein $q_1^* \subset \mathfrak{S}^{\nu+1}$ mit $\varrho(q_1, q_1^*) \leqq \frac{2}{3}(\varepsilon_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+2} + \ldots + \varepsilon_{n-1}) \leqq \frac{4}{3}\varepsilon_{\nu+1}$ für $\nu + 1 \leqq n - 1$ und mit $\varrho(q_1, q_1^*) = 0$ für $\nu + 1 > n - 1$. Dann ist $\varrho(q_1^*, q_2) \leqq \frac{4}{3}\varepsilon_{\nu+1} + \delta_\nu \leqq 2\delta_\nu$, und es gibt nach Konstruktion ein $q_3 \subset \mathfrak{S}^{\nu+1}\mathfrak{P}_\varkappa$, also auch $\subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}\mathfrak{P}_\varkappa$, mit $\varrho(q_1^*, q_3) \leqq \frac{\varepsilon_\nu}{3}$, also auch mit $\varrho(q_1, q_3) \leqq \frac{\varepsilon_\nu}{3} + \frac{4\varepsilon_{\nu+1}}{3} \leqq \varepsilon_\nu$.

15. Satz: Sind $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ abgeschlossene metrisch katalogisierte Teilspezies, die sich zu je zweien in ausgeprägter Lage befinden, und kommt der Durchschnitt je zweier der $\mathfrak{P}_\varkappa$ unter den $\mathfrak{P}_\varkappa$ vor, so befinden sich alle aus den $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ zu bildenden Durchschnitte zu je zweien in ausgeprägter Lage.

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß wir mit denselben Folgen $\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ bei allen Paaren der $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ auskommen. Wir bestimmen zu jedem ν ein ν', so daß $\varepsilon_{\nu'} \leqq \delta_\nu$ ist. Seien $q_1 \subset \mathfrak{S}\mathfrak{P}_\varkappa$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_\lambda$, $\varrho(q_1, q_2) \leqq \delta_{\nu'}$; da q_1 auch $\subset \mathfrak{P}_\varkappa$ ist, gibt es ein $q_3 \subset \mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{P}_\lambda$, $\varrho(q_1, q_3) \leqq \varepsilon_{\nu'} \leqq \delta_\nu$; da q_1 auch $\subset \mathfrak{S}$ und $q_3 \subset \mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{P}_\lambda$ ist, $\varrho(q_1, q_3) \leqq \delta_\nu$, gibt es ein $q_4 \subset \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{P}_\lambda$ $(= \mathfrak{S}\mathfrak{P}_\varkappa \cdot \mathfrak{P}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_\varkappa \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{P}_\lambda)$ mit $\varrho(q_1, q_4) \leqq \varepsilon_\nu$.

16. Satz: Jede metrisch katalogisiert kompakte Spezies Σ fällt mit einem geeigneten metrischen DFTK-Raum zusammen.

Beweis: Die den DFTK-Raum erzeugenden A_n bestimmen wir als metrisch katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{A}_n$ von Σ; wir setzen dabei $A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_k} = 0$ bzw. $\neq 0$, wenn $\mathfrak{A}_{\nu_1} \mathfrak{A}_{\nu_2} \ldots \mathfrak{A}_{\nu_k}$ leer ist bzw. einen Punktkern enthält. Wir müssen dafür sorgen, daß die A_n die Axiome erfüllen, insbesondere daß feststeht, ob der Durchschnitt endlich vieler $\mathfrak{A}_n$ leer ist oder einen Punktkern enthält [41]):

---

[41]) Um das zu erreichen — hier liegt eine recht wesentliche Schwierigkeit vom intuitionistischen Standpunkt vor — haben wir den Begriff der ausgeprägten Lage eingeführt.

$p_1, p_2, \ldots$ sei die Σ erzeugende metrisch katalogisierte Folge; nach 3 können wir annehmen, daß jedes p_ν mit einem Punktkern von Σ zusammenfällt. Zu jedem α_n-Element p_ν bestimmen wir das n als die kleinste Zahl derart, daß p_ν in s_{μ_n} (siehe 1) auftritt, und nach 10 eine metrisch katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{V}_\nu^m$, die alle Punktkerne von Σ im Abstande $\leqq 4^{-m}$ von p_ν, aber keinen im Abstand $> 2 \cdot 4^{-m}$ von p_ν enthält $(m \geqq n)$; für jedes feste n ist dann jeder Punktkern von Σ in mindestens einem der $\mathfrak{V}_1^n, \ldots, \mathfrak{V}_{\mu_n}^n$ enthalten.

Die $\mathfrak{V}_\nu^m$ zählen wir irgendwie ab und nennen sie dann $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2, \ldots$; $\mathfrak{A}_\nu$ wird bestimmt als eine $\mathfrak{W}_\nu$ enthaltende metrisch katalogisierte Teilspezies von Σ, die, wenn $\mathfrak{W}_\nu$ ein $\mathfrak{V}^m$ war, keine Punktkerne im Abstand $> 4^{-m}$ von $\mathfrak{W}$ enthält. Wir setzen $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{W}_1$. Wir nehmen an, daß wir $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$ bereits so bestimmt haben, daß alle aus ihnen gebildeten Produkte metrisch katalogisiert und zu je zweien in ausgeprägter Lage sind. Dann bestimmen wir nach 14 zu $\mathfrak{W}_{\nu+1}$ (dort $\mathfrak{S}$ genannt) ein $\mathfrak{A}_{\nu+1}$, das sich zu jedem Produkt $\mathfrak{P}_\varkappa$ der $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$ in ausgeprägter Lage befindet; wir können ohne weiteres annehmen, daß die $\mathfrak{A}$ abgeschlossen sind, da sich mit je zwei Teilspezies auch die Abschließungen in ausgeprägter Lage befinden. Jedes Produkt der $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{\nu+1}$ hat dann die Form $\mathfrak{P}_\varkappa$ oder $\mathfrak{P}_\varkappa \mathfrak{A}_{\nu+1}$, ist also metrisch katalogisiert und daher entweder leer, oder es enthält einen Punktkern. Ferner befinden sich nach 15 wiederum je zwei Produkte der $A_1, \ldots, A_{\nu+1}$ in ausgeprägter Lage, so daß auch die Induktionsvoraussetzung erfüllt ist. Wir bemerken noch, daß je zwei endliche Produkte der A_n, da sie sich in ausgeprägter Lage befinden, also entweder einen positiven Abstand voneinander besitzen oder einen gemeinsamen Punktkern enthalten.

Für die nun definierten $A_n = \mathfrak{A}_n$ ist D trivial erfüllt, F, weil es zu jedem α_n-Element p_ν (und jedem m) im Abstande $\leqq \frac{3}{2} \cdot 4^{-m}$ eine unbegrenzte Folge von α_n-Elementen p_ν gibt, also zu jedem $\mathfrak{W}_\nu$ eine unbegrenzte Folge von $\mathfrak{W}$, die mit $\mathfrak{W}_\nu$ einen nichtleeren Durchschnitt liefern; T ist auf Grund der letzten Bemerkung des vorigen Absatzes erfüllt (man berücksichtige, daß die Durchmesser der A_n gegen null konvergieren) und K, weil für jedes feste n jeder Punktkern von Σ in mindestens einem der $\mathfrak{V}_1^n, \ldots, \mathfrak{V}_{\mu_n}^n$ enthalten war, jedes $\mathfrak{A}_\nu$ also mit mindestens einem der $\mathfrak{V}_1^n, \ldots, \mathfrak{V}_{\mu_n}^n$ (n fest) und daher auch mit mindestens einem der zu ihnen gehörenden $\mathfrak{A}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Ordnet man nun ein Polynom P der A und die Abschließung

der entsprechend gebildeten Teilspezies $\mathfrak{P}$ von Σ einander zu, ferner den zum Punkte $P_1 P_2 \ldots$ gehörigen Punktkern des DFTK-Raumes und den als Durchschnitt $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots$ bestimmten Punktkern von Σ (die Existenz dieses Punktkernes leuchtet ohne weiteres ein), metrisiert man schließlich den DFTK-Raum entsprechend Σ, so sieht man, daß der konstruierte DFTK-Raum mit Σ zusammenfällt.

17. Satz: Zu jedem metrischen DFTK-Raum gibt es eine mit ihm zusammenfallende metrisch katalogisiert-kompakte Spezies Σ.

Beweis: In jedem A_n bestimmen wir eine unbegrenzte Folge von Punktkernen des DFTK-Raumes; wir zählen diese Punktkerne irgendwie ab, $p_1, p_2, \ldots$. Die p_ν bilden eine metrisch katalogisierte Folge, wenn die Abstandsfunktion aus dem DFTK-Raum übernommen wird. In der Tat: Bestimmen wir $m = m(n)$ so, daß der Durchmesser jedes $(A_\nu) \leqq \frac{1}{3}\, a <_\circ \frac{1}{3} 4^{-n}$ ist für $\nu \geqq m$, und wählen wir $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$ als eine Überdeckung (siehe 3, 4) m-ter Stufe! Suchen wir weiter in jedem der $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$ ein p_ν der ausgewählten Folge auf, und nennen wir das mit dem größten Index p_{μ_n}! Aus $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$ läßt sich nach 3, 14 eine $\mathfrak{C}$-Überdeckung m-ter Stufe bilden, die besteht aus Stücken mit dem Durchmesser $\leqq a <_\circ 4^{-n}$. Nach 4, 14 ist jeder Punktkern des DFTK-Raumes, also insbesondere jedes p_ν unserer Folge in einem dieser Stücke enthalten, besitzt also von s_{μ_n} einen Abstand $\leqq a <_\circ 4^{-n}$; damit ist die erste an die katalogisierten Folgen gestellte Forderung erfüllt. Daß auch die zweite Forderung erfüllt ist, ist evident; es ist sogar jedes p_ν von s_{μ_n} ein α_n-Element.

18. Satz: Die Begriffe „DFTK-Raum" und „metrisch katalogisiert-kompakte Spezies" fallen zusammen. (Beweis klar nach 16, 17; 6, 14.)

19. Satz: Die Begriffe „DFTK-katalogisiert" und „in bezug auf die p_ν metrisch katalogisiert" fallen zusammen. (Beweis klar nach 17, 8; 6, 12.)

Anhang.

Auch der Hilbertsche Raum (der mit keinem DFTK-Raum zusammenfällt) läßt sich intuitionistisch definieren:

Man betrachte eine unbegrenzte Folge kartesischer Räume E_1, $E_2, \ldots$, von denen jeder aus dem folgenden durch Nullsetzen der letzten Koordinate entsteht. Man erzeuge dann die folgende Menge $\mathfrak{M}$:

Beim ersten Wahlakt ist irgend eine natürliche Zahl k_1 wählbar, beim $(n+1)$-ten Wahlakt erstens ein rationaler Punkt r_n des E_{k_n} (d.h. mit rationalen Koordinaten), dessen Abstand von r_{n-1} (für $n > 1$) $\leqq 2^{-n}$ ist, zweitens irgend eine natürliche Zahl $k_{n+1} > k_n$.

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ heißen Punkte des Hilbertschen Raumes. Man beweist leicht die Vollständigkeit dieses Raumes. **6, 14** läßt sich dann auch in bekannter Weise als Einbettungssatz deuten.

(Eingegangen den 10. Dezember 1934.)

Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln [1936j]

Compositio Math. 4 (1936), 112–116
[JFM 62.1045.05; Zbl 0015.24201]

Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, in welcher Weise eine intuitionistische Deutung logischer Formeln möglich sein könnte, ohne jedoch darauf einzugehen, ob eine solche Deutung notwendig, sinngemäß oder zweckmäßig ist.

Wir überlegen uns zunächst, was man intuitionistisch unter einem *Satz* (über seine Eigenschaft als Mitteilung hinaus) zu verstehen hat. Denn eine intuitionistische Deutung logischer Formeln muß ja darin bestehen, ihnen den Charakter eines Satzes (oder etwas Ähnlichen) zu verleihen. Am nächsten liegt es, einen Satz zu erklären als die Feststellung einer Tatsache, von deren Feststehen man sich durch einen *Beweis*, d.h. durch die Herstellung der im Satze ausgesprochenen Beziehung überzeugt hat. Diese Erklärung kann aber nur mit Vorsicht abgegeben werden, denn ist einmal ein Satz die Festellung einer Tatsache, so ist die Trennung von Satz und Beweis nicht mehr zu rechtfertigen. Wenn ich z.B. sage, die Folge a_ν konvergiere positiv gegen a, so ist das doch nur eine abkürzende Sprechweise für die Tatsache: zu jedem n läßt sich ein N bestimmen, so daß $|a - a_\nu| \leqq \frac{1}{n}$ wird für $\nu \geqq N$. Daß sich zu jedem n ein N mit dieser Eigenschaft bestimmen läßt, ist eine Aussage, die nur dann einen intuitionistischen Sinn hat, wenn ein Rechenverfahren vorliegt, das aus jedem n das N erzeugt, ein Rechenverfahren, das sich etwa als eine Formel darstellen läßt, in die die a_ν und a irgendwie eingehen. Dies Beispiel zeigt, daß jeder Satz, wenn man ihn erst einmal intuitionistisch einwandfrei formuliert, automatisch seinen ganzen Beweis enthält. Intuitionistisch gesprochen ist also der Satz nur eine kurze vorläufige Orientierung, eine Art Überschrift, während erst der Beweis der eigentliche Satz ist (dabei kann es sehr wohl möglich sein — es ist sogar die Regel —, daß auch die Mitteilung des Beweises noch provisorische Elemente enthält, etwa

Hinweise auf andere Sätze, wie ja überhaupt die sprachliche Mitteilung prinzipiell unvollkommen ist).

Scheinbar machen von unserer Feststellung, jeder Satz falle notwendig mit seinem Beweis zusammen, die negativen Sätze eine Ausnahme. Überlegen wir uns darum, was ein negativer Satz aussagt (in diesem Punkte herrscht eine weitgehende Verwirrung: man findet die Behauptung, ein negativer Satz ziele ab auf die Konstruktion eines Widerspruches; dabei ist es völlig unklar, wie irgendwelche Dinge, die man wirklich hergestellt hat, einen Widerspruch enthalten können, überhaupt was *Widerspruch* hier bedeuten soll). Ein negativer Satz wie $2 \neq 3$ bedeutet, daß in keiner Weise je eine eineindeutige Abbildung der Menge 2 auf die Menge 3 gelingen kann; zum Beweis führt man alle (neun) Abbildungen der Menge 2 in die Menge 3 aus und überzeugt sich bei jeder einzelnen davon, daß sie nicht zum Ziele führt. Dies Beispiel enthält vollständig den Mechanismus der negativen Sätze; daß im Allgemeinen die *vollständige Induktion* als Konstruktionsmittel hinzutritt, bedeutet nichts wesentlich Neues. Ein negativer Satz sagt also, daß alle Konstruktionsversuche mit einer bestimmten Zielsetzung scheitern. Auch ein negativer Satz bedeutet also seinen Beweis; und wenn sich auch vielleicht bei den negativen Sätzen diese Deutung vermeiden ließe, liegt doch, nachdem man sie bei den positiven als notwendig erkannt hat, kein Grund vor, sie für die negativen abzulehnen [1]).

Nun haben A. Heyting [2]) und A. Kolmogoroff [3]) versucht,

---

[1]) Positive und negative Sätze verhalten sich hinsichtlich ihrer Beweise wie *es-gibt-* und *alle*-Sätze. Wenn man nun als präzisen Sinn des *es gibt* die *Angabe* nimmt, liegt es auf der Hand, in eine *alle*-Aussage die Durchlaufung der betreffenden Gesamtheit nicht nur implizit, sondern ganz explizit aufzunehmen.

Unsere Analyse der Negation zeigt übrigens unmittelbar, daß es keine Sätze geben kann, die weder wahr noch absurd sind. Denn daß ein Satz niemals zu beweisen sein wird, ist nichts Anderes als das Scheitern aller Beweisführungen, also die Falschheit des Satzes.

[2]) Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik [Erkenntnis **2** (1931), 106—115 (113—115)]. — Wie das System logischer Formeln, um dessen Deutung es sich handelt, im Einzelnen aussieht, spielt für all diese Deutungsversuche natürlich keine Rolle, wenn es nur gewissen elementaren intuitionistischen Anforderungen genügt. Siehe dazu das System A. Heytings: Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik [Sitzungsberichte Akad. Berlin **1930**; 57—71, 158—169].

[3]) Zur Deutung der intuitionistischen Logik [Math. Zeitschr. **35** (1932), 58—65]. — „Die intuitionistische Logik" ist eine Bezeichnung, die sich leider immer mehr einbürgert; sie vermittelt einen ganz falschen Blick auf die intuitionistische Mathematik.

logische Formeln intuitionistisch zu deuten, indem sie Satz und Beweis voneinander schieden, Heyting, indem er Sätze als Intentionen auf Konstruktionen, Kolmogoroff, indem er sie als Aufgaben auffaßte (was kein wesentlicher Unterschied ist). Beidemal ergeben sich Deutungen, aber, wie wir sehen werden, nichtintuitionistische Deutungen logischer Formeln. Die eigentliche Schwierigkeit der Deutung logischer Formeln liegt in der Deutung der Implikation. Bei Heyting ist $a \supset b$ die Intention auf ein Beweisverfahren, daß aus jedem Beweis von a einen Beweis von b ableitet, bei Kolmogoroff die Aufgabe, die Lösung von b auf die von a zurückzuführen. Vergessen wir für einen Augenblick, was wir über das Verhältnis *Satz—Beweis* soeben festgestellt haben! Dann ist jedenfalls noch soviel klar: Da jeder mathematische Beweis (intuitionistisch) eine Konstruktion entweder ab ovo oder auf vorgelegtem Konstruktionsmaterial ist (und dann letzten Endes doch auch ab ovo, da das Konstruktionsmaterial nur wieder in der Form einer Konstruktionsvorschrift vorliegen kann), muß *die Ableitung eines Beweises von b aus einem Beweise von a* oder *die Zurückführung der Lösung von b auf die von a* einen Beweis von b bedeuten, bei dem unterwegs ein Beweis von a mitgeliefert wird. Eine *Annahme*, etwa die, daß a bewiesen sei, ist kein Konstruktionsmaterial, sei ihr heuristischer Wert noch so groß. Konstruiert werden kann auf vorliegenden Konstruktionen, nicht aber auf Unterstellungen, auch wenn das zu Konstruierende von der Art einer Unterstellung sein soll.

Die eigentliche Schwierigkeit liegt aber tiefer. Heyting und Kolmogoroff sagen nichts darüber, in welcher Form der intendierte Satz oder die gestellte Aufgabe gegeben ist. Erinnern wir uns nun daran, daß die einwandfreie Formulierung eines Satzes sein Beweis ist, so sehen wir unmittelbar, daß die Ableitung eines Beweises von b aus einem Beweis von a oder die Zurückführung der Lösung von b auf die Lösung von a nur dann möglich ist, wenn a als richtig erwiesen ist — und damit entfällt der ganze Wert der Implikation. Kolmogoroff hat als Beispiele eine Reihe von Aufgaben angeführt; aber alle sind von einem Typus, der diese Schwierigkeit verschleiert. Nehmen wir dagegen die Aufgabe: aus der Rationalität der Eulerschen Konstanten folgt die ihrer Quadratwurzel. Die Voraussetzung, exakt formuliert, besagt die Existenz zweier natürlicher Zahlen m und n, deren Quotient gleich der Eulerschen Konstanten ist. In die Voraussetzung geht der numerische Wert von m und n ein, es läßt sich sofort nachprüfen, ob sie erfüllt ist, und nur in diesem Falle kann man weiter

rechnen. So wird es allgemein sein: um die Folgerung zu formulieren oder zu beweisen, wird man die durch die Voraussetzung vermittelten Daten explizit kennen müssen, und darin steckt gleich der Beweis der Voraussetzung. Bei der Heyting-Kolmogoroffschen Deutung wird der Wert der Implikation illusorisch, weil sich die Voraussetzung in ihrer Eigenschaft als Voraussetzung sofort selbst eliminiert. Auch in der klassischen Aussagenlogik existiert diese Schwierigkeit; man umgeht sie, indem man $a \supset b$ als $\sim a \vee b$ umdeutet. Das ist intuitionistisch nicht zulässig.

Die hier geschilderte Schwierigkeit ist schon da, ehe man sich überhaupt mit logischen Formeln beschäftigt. Zwar gibt es eine Reihe von Sätzen, die sich voraussetzungsfrei, ab ovo, formulieren lassen. Wie steht es aber mit Sätzen der Art: Eine in (0, 1) volle Funktion ist gleichmäßig stetig [4]), eine ganzzahlige Funktion auf einer finiten Menge besitzt ein Maximum (Hauptsatz der finiten Mengen [4])), die Zahlen einer gewissen Menge sind positiv, usw.? Was ist das Subjekt solch eines Satzes? Eine spezielle Funktion, ein spezielles Mengenelement? Das dürfte kaum die Absicht sein! Jede spezielle Funktion, jedes spezielle Mengenelement? Wie soll ein so schwammiges Subjekt als Konstruktionsmaterial dienen können, wenn das Konstruktionsmaterial selbst als Konstruktion vorliegen soll? Nein, das Subjekt ist die vollständig im freien Werden begriffene Funktion, finite Menge, Zahl (als Mengenelement). Nicht von speziellen oder allen speziellen Elementen einer Gesamtheit ist die Rede, sondern von *der* Funktion, *der* finiten Menge, *dem* Mengenelement, von einem Individuum also, einem merkwürdigen Individuum zwar, einem rechten Proteus, besonders merkwürdig dadurch, daß man in die Lage kommen kann, zwei verschiedene Exemplare dieses Individuums zu betrachten. Unsere Sätze nun sprechen über Eigenschaften dieser Dinge, die ebenso in der Entwicklung begriffen sind wie diese Dinge selbst.

Es ist klar, wie wir nun die Implikation deuten müssen, denn eine Implikation ist ja gerade so ein *Satz mit Voraussetzung*. $a \supset b$ ist ein Satz, der von zwei Prädikaten a und b desselben Subjekts handelt, zwei Prädikaten, deren Inhalt die Einschränkung des freien Werdens des Subjekts ist (z.B. wird die frei werdende Menge einerseits zu einer finiten eingeschränkt, andererseits zu einer, in der der Hauptsatz der finiten Mengen gilt). Für die Deutung der Implikation kommen also nur „allgemeine"

[4]) L. E. J. Brouwer, Über Definitionsbereiche von Funktionen [Math. Ann. 97 (1926), 60—75].

Sätze in Frage, und die Deutung geschieht etwa im Sinne des Prädikatenkalküls. Auch in der klassischen Logik ist ja eine sinngemäße Deutung der Implikation nur im Prädikatenkalkül möglich. Man kann natürlich die Implikation kurzweg als eine Inhaltsbeziehung zwischen Spezies auffassen, aber intuitionistisch sympatischer ist wohl der Begriff des frei werdenden Dinges — sozusagen eine Katalogisierung der Spezies.

Wie gewinnt man nun aus den „allgemeinen" Sätzen, wenn man sich *so* zu ihnen einstellt, die speziellen? Ich glaube, das ist eine müßige Frage. Wenn man im Laufe eines Beweises hundertmal den Hauptsatz der finiten Mengen „anzuwenden" hat, muß man ihn ja doch hundertmal von neuem beweisen, denn das Maximum der ganzzahligen Funktion, das uns der Hauptsatz der finiten Mengen vermittelt, brauchen wir ja wirklich in unserm Beweis, und der Algorithmus, dem wir es verdanken, ist mit dem ganzen Beweis des Hauptsatzes identisch [5]). Immer wieder müssen wir den ganzen Beweis des Hauptsatzes durchlaufen, und der einmal gelieferte allgemeine Beweis dient uns nicht mehr als eine Landkarte, die uns die Bergbesteigung zwar erleichtert, aber nicht erspart.

Im Großen und Ganzen ist nun klar, wie man intuitionistisch logische Formeln im Sinne des Prädikatenkalküls zu verstehen hat. Ob und wie sich das Programm im Einzelnen durchführen läßt, bleibe ganz dahingestellt. Mir scheint es aber der einzige Standpunkt zu sein, auf dem einem die logischen Formeln mehr als die grammatische Struktur intuitionistischer Sätze widerspiegeln können.

(Eingegangen den 27. Dezember 1934.)

[5]) Man könnte meinen, daß dies Immer-wieder-von-neuem-Beweisen nicht nötig ist bei Hilfssätzen, die sich als explizite Formel darstellen, wie $m+n=n+m$. In Wirklichkeit bleibt einem aber weiter nichts übrig, als die Umordnung, von der diese Formel handelt, immer wieder, wenn sie nötig ist, von neuem vorzunehmen. Natürlich wird man in der sprachlichen Darstellung des Beweises das nicht tun, aber das sagt nichts gegen unsere Feststellung und alles gegen die sprachliche Darstellung.

Entwicklungen von Räumen und Gruppen [1936k]

Rec. Math. Moscou, N. Sér. 1 (1936), 677–681, 682
[JFM 62.0669.03; Zbl 0016.28101]

Eine Folge R_n von Räumen, deren jeder $(n > 1)$ in den vorangehenden stetig abgebildet ist, $f_n^{n+1} R_{n+1} \subset R_n$, heisst eine R_n-adische Folge[1]. Sie definiert einen Limesraum R, den R_n-adischen Limes der Folge R_n; als Punkte von R werden die Punktbildfolgen a_n $(\subset R_n)$, $f_n^{n+1} a_{n+1} = a_n$, erklärt. a_n heisst dabei auch die n-te Koordinate des Punktes von R; die Topologie in R entsteht dadurch, dass wenn O_n eine offene Menge in R_n ist, die Menge aller Punkte von R, deren n-te Koordinate in O_n liegt, zu einer offenen Menge in R ernannt wird. Ein Spezialfall der R_n-adischen sind die absteigenden Folgen.

Eine Folge R_n von Räumen, deren jeder in den folgenden stetig abgebildet ist, $f_{n+1}^n R_n \subset R_{n+1}$, heisst eine R_n-ale Folge. Sie definiert einen Limesraum R, den R_n-alen Limes der Folge; als Punkte von R werden die Klassen konfinaler (d. h. in fast allen Elementen miteinander übereinstimmender) Punktbildfolgen $a_n (\subset R_n)$[2], ${}_{n+1}^{n} a_n = a_{n+1}$, erklärt. a_n heisst dabei die (nicht uotwendig eindeutig und nicht notwendig für alle n bestimmte) n-te Koordinate des Punktes von R; die Topologie in R entsteht dadurch, dass wenn O_n eine offene Menge in R_n und $f_{n+1}^n O_n \subset O_{n+1}$ ist, die Menge aller Punkte von R, die (für fast alle n) in O_n eine n-te Koordinate besitzen, zu einer offenen Menge in R ernannt wird. Ein Spezialfall der R_n-alen sind die aufsteigenden Folgen.

Sind die R_n topologische Gruppen und die zwischen ihnen gegebenen Abbildungen stetige Homomorphismen, so sprechen wir von G_n-adischen und G_n-alen Entwicklungen. Die Limites, die dann G_n-adischer und G_n-aler Limes genannt werden, sind auch wieder topologische Gruppen.

Ist R_n eine R_n-adische Folge, $f_n^m R_m \subset R_n$[3], und g^n eine Folge stetiger Abbildungen (definiert für fast alle n), $g^n R_n \subset Q$, der R_n in den Raum Q, so sprechen wir von

---

[1] Die in diesem Vortrag behandelten Dinge finden sich teilweise in meiner Note, «Proc. Amsterdam», **38**, (1935), 414—418. Verschiedene unserer Begriffsbildungen waren aber bereits früher bekannt; unsere Angaben (l. c.) darüber sind nicht ganz vollständig.

[2] a_n braucht nur für fast alle n definiert zu sein.

[3] f_n^m ist für alle $m > n$ induktiv durch $f_n^{m+1} = f_n^m f_m^{m+1}$ definiert.

einer Abbildung der Folge R_n in den Raum Q, sobald

$$g^n f_n^m = g^m$$

gilt (soweit definiert).

Ist g_n eine Folge stetiger Abbildungen (definiert für fast alle n),

$$g_n Q \subset R_n,$$

so sprechen wir von einer Abbildung des Raumes Q in die Folge R_n sobald

$$f_n^m g_m = g_n$$

gilt (soweit definiert).

Sind R_n und S_n zwei R_n-adische Folgen, $f_n^m R_m \subset R_n$, $g_n^m S_m \subset S_n$, und ist bei jedem festen n für fast alle m eine stetige Abbildung

$$\varphi_n^m R_m \subset S_n$$

definiert, so sprechen wir von einer stetigen Abbildung der einen Folge in die andere, sobald

$$\varphi_n^p f_p^m = g_n^q \varphi_q^m = \varphi_n^m$$

gilt (soweit definiert).

Eine stetige Abbildung einer R_n-adischen Folge in einen Raum Q bzw. eines Raumes Q in eine R_n-adische Folge bzw. einer R_n-adischen Folge in eine andere induziert eine stetige Abbildung des Limesraumes in den Raum Q bzw. des Raumes Q in den Limesraum bzw. des einen Limesraumes in den andern.

Ist die R_n-adische Folge R_n in die R_n-adische Folge S_n durch (φ_n^m) stetig abgebildet und umgekehrt die Folge S_n in die Folge R_n durch (ψ_n^m), so sprechen wir von einer Homöomorphie beider Folgen, sobald

$$\psi_n^p \varphi_p^m = f_n^m, \quad \varphi_n^p \psi_p^m = g_n^m$$

gilt (soweit definiert).

Zu homöomorphen R_n-adischen Folgen gehören homöomorphe Limesräume (aber nicht notwendig umgekehrt).

Die Klasse aller R_n-adischen Folgen, die einer gewissen homöomorph sind, bezeichnen wir als den Typus dieser Folge. Ein Typus heisst Auftypus, wenn er sich durch eine R_n-adische Folge repräsentieren lässt, in der die erzeugenden Abbildungen „Abbildungen auf" sind. Ein Typus heisst Isotypus, wenn er sich durch eine Folge repräsentieren lässt, in der die erzeugenden Abbildungen „Homöomorphien in" sind. Es lassen sich einfache Kriterien dafür angeben, ob eine gegebene Folge zum Auftypus bzw. zum Isotypus gehört.

Wichtig für die Anwendungen ist der

Doppelfolgensatz. *Sei $R_{n_1 n_2}$ eine R_n-adische Doppelfolge,*

$$f_{n_1 n_2}^{m_1 m_2} R_{m_1 m_2} \subset R_{n_1 n_2}, \quad m_1 + m_2 > n_1 + n_2,$$
$$f_{m_1 m_2}^{l_1 l_2} f_{n_1 n_2}^{m_1 m_2} = f_{n_1 n_2}^{l_1 l_2};$$

für jeden festen ersten Index n_1 erzeugt sie R_n-adisch einen Limesraum R_{n_1}; diese R_n bilden wieder eine R_n-adische Folge mit einem Limesraum R. Weiter erzeugt sie

für jeden festen zweiten Index n_2 einen Limesraum $R_{.n_2}$; die $R_{.n_2}$ besitzen wieder einen Limesraum $R_.$. Die beiden Räume R und $R_.$ sind dann in wohlbestimmter Weise miteinander und mit dem Limesraum der Diagonalfolge R_{nn} homöomorph. Man darf also die Grenzübergänge vertauschen.

Alle Begriffsbildungen und Sätze, die wir bisher bei R_n-adischen Folgen behandelt haben, lassen sich fast wörtlich auf R_n-ale Folgen übertragen. Wir verzichten auf die explizite Formulierung.

Sie lassen sich aber auch auf die Entwicklungen topologischer Gruppen ausdehnen. Dabei tritt an die Stelle der R_n-adischen die G_n-adische und an die Stelle der R_n-alen die G_n-ale Entwicklung, und überall, wo wir in Definitionen oder Sätzen von stetigen bzw. homöomorphen Abbildungen sprachen, haben wir nun dafür stetige Homomorphismen bzw. topologische Isomorphismen einzusetzen. So sagt, z. B., der G_n-adische oder der G_n-ale Doppelfolgensatz aus, dass die drei fraglichen Limesgruppen einander topologisch isomorph sind.

Bei Gruppenentwicklungen ist noch der folgende Begriff von Interesse: unter dem Rang einer Gruppe verstehe man die Minimalmächtigkeit eines Erzeugendensystems (evtl. unter Berücksichtigung eines gewissen Koeffizientenbereichs), unter dem Rang einer G_n-adischen oder G_n-alen Folge den lim sup der Ränge der einzelnen G_n. Unter dem Rang eines Typus verstehen wir dann den kleinsten Rang, den eine den Typus repräsentierende Folge haben kann.

II

Die in I auseinandergesetzten Begriffe sind der Anwendungen wegen aufgestellt worden. Bei der Definition Bettischer Gruppen kompakter Räume, lokaler Bettischer Gruppen usw. nimmt man immer gewisse Grenzprozesse vor. Diese Grenzprozesse lassen sich vereinfachen und ihr logischer Aufbau lässt sich leichter übersehen, wenn man sie als G_n-adische und G_n-ale Entwicklungen auffasst, die — vielfach — R_n-adischen und R_n-alen Entwicklungen parallel laufen.

Wenn man, z. B., die Bettische Gruppe (irgendeiner Dimension) eines kompakten Raumes R (einschliesslich ihrer Topologie) aufstellen will, kann man so verfahren: man bildet die Gruppe $B_{\varepsilon\eta}$, die Faktorgruppe der Gruppe der ε-Zyklen nach der Untergruppe der η-nullhomologen Zyklen; dann ist (für $\varepsilon > \varepsilon'$, $\eta > \eta'$) $B_{\varepsilon'\eta'}$ in natürlicher Weise homomorph abgebildet in $B_{\varepsilon\eta}$, dadurch nämlich, dass sich jeder ε'-Zyklus auch als ε-Zyklus deuten lässt und jeder η'-nullhomologe Zyklus auch als η-nullhomologe Zyklus. Lässt man nun ε und η positive monotone Nullfolgen durchlaufen, so erhält man eine G_n-adische Folge: ihre Limesgruppe ist nichts Anderes als die Bettische Gruppe von R, ihren Typus nennen wir auch die Zyklose von R, ihren Typusrang die Alexandroffsche Zahl[4] von R. Hier lässt sich bereits eine interessante Anwendung vom Doppelfolgensatz machen: man darf bei der Bildung der Bettischen Gruppe ε und η unabhängig voneinander nach Null konvergieren lassen.

Für die weiteren Anwendungen von I empfiehlt es sich die Definition der Bettischen Gruppe etwas weiter als üblich zu fassen. Man lege zwei topologische Abelsche Grup-

[4] Diese Bezeichnung lässt sich hier nicht unmittelbar rechtfertigen; bei einer Reihe anderer Anwendungen stimmt der Typusrang mit der Zahl überein, die P. Alexandroff Bettische Zahl nennt. Die Bezeichnung „Bettische Zahl" will ich immer für den Rang der Limesgruppe reservieren.

pen $\Gamma \subset \Delta$ als Koeffizientenbereiche zugrunde, ferner vier Räume R, S, M, N, die in den Beziehungen $R \subset S$, $M \subset N$, $M \subset R$, $N \subset S$ stehen [5]. Unter einem Komplex verstehe man eine Linearform aus Simplexen, deren Ecken in R liegen, mit Koeffizienten aus Γ. Ein Komplex heisst Zyklus, wenn sein Rand in M liegt. Ein Zyklus heisst nullhomolog, wenn er bis auf etwas, was in N liegt, Rand eines Komplexes (mit Δ als Koeffizientenbereich) aus S ist. In üblicher Weise erklärt man nun $B_{\varepsilon\eta}$ [6]; bei der Bildung von B kann man aber die weitere nützliche Verallgemeinerung anwenden, nicht nur ε und η nach Null konvergieren, sondern auch R, S, M, N variieren zu lassen. Das ist so zu verstehen: an die Stelle des Systems R, S, M, N tritt eine R_n-adische Folge R_n, S_n, M_n, N_n; die in dieser Folge vorliegenden Abbildungen induzieren dann tatsächlich Abbildungen zwischen den Bettischen Gruppen, die eine G_n-adische Folge zuwegebringen. Speziell interessant ist dabei der Fall, dass die Räume absteigende Folgen bilden. Weiter kann man auch Γ und Δ variieren lassen, natürlich auch wieder als G_n-adische Folge. Ein wichtiges Ergebnis ist, dass die Variation der Räume, falls sie kompakt sind, nichts Neues liefert: die Bettische Gruppe hängt nur von den R_n-adischen Limites der Räume ab. Dagegen braucht die Bettische Gruppe bei variablen Koeffizientenbereichen keineswegs mit der zu den Limeskoeffizientenbereichen gehörigen übereinzustimmen (oder auch nur durch sie bestimmt zu sein).

G_n-ale Entwicklungen kann man verwenden, wenn man die Bettischen Gruppen im Kleinen kompakter Räume definieren will. Man fasse den im Kleinen kompakten Raum als aufsteigende (also R_n-ale) Folge kompakter Räume auf, deren Bettische Gruppen dann eine G_n-ale Folge bilden; ihre Limesgruppe ist die Bettische Gruppe des gegebenen Raumes, ihr Typus die Zyklose, ihr Typusrang die Alexandroffsche Zahl. Man kann auch hier vier Räume in Betracht ziehen, die Koeffizientenbereiche variieren lassen usw.

Ein G_n-ales Verfahren hat man weiter bei der Bildung lokaler Bettischer Gruppen eines Raumes R vor sich: man lasse $R = S$ fest und lasse M und N variieren und zwar als Komplemente von Umgebungen eines festen Punktes a, die auf diesen Punkt zusammenschrumpfen. M und N bilden dann aufsteigende (also R_n-ale) Folgen, die zugehörigen Bettischen Gruppen also eine G_n-ale Folge, deren Limesgruppe die lokale Bettische Gruppe in a definiert — lokale Zyklose und Alexandroffsche Zahl [7] sind natürlich auch, ganz wie bei den früheren Beispielen, zu erklären. Ein G_n-adisches Verfahren stellt dagegen die Definition der äusseren lokalen Bettischen Gruppen dar, dessen Auseinandersetzung wir uns ersparen wollen.

In allen diesen Beispielen (deren Zahl sich noch stark vermehren liesse) kann man dauernd nützliche Anwendungen der Sätze aus I, insbesondere des Doppelfolgensatzes, machen. Zwar liegen die Ergebnisse, die man so erhält, nicht tief; was mir wichtiger scheint, ist, dass die allgemeinen Betrachtungen aus I einen allgemeinen Mechanismus in den Beweisen blosslegen.

---

[5] Die Heranziehung von M und N — d. h. die „Relativierung" des Zyklen- und Homologiebegriffs rührt von Lefschetz, der doppelte Koeffizientenbereich in voller Allgemeinheit von Alexandroff und Hopf her. Vgl. Lefschetz, Topology, Ch. I, bzw. Alexandroff-Hopf, Topologie. I, Kap. V.

[6] Wie $B_{\varepsilon\eta}$ zu topologisieren ist, wollen wir hier nicht auseinandersetzen.

[7] An dieser Stelle lässt sich die Bezeichnung „Alexandroffsche Zahl" rechtfertigen.

III

Auch die Dualitätssätze sind mit unsern Methoden einer übersichtlicheren Behandlung zugänglich. Zunächst kann man Dualitätssätze für G_n-adische und G_n-ale Folgen aufstellen; die Folge der Charakteregruppen einer G_n-adischen Folge ist nämlich eine G_n-ale, und umgekehrt. Kennt man Dualitätssätze für Polyeder in einer Mannigfaltigkeit [8], so kommt man auf Grund dieser allgemeinen Dualitätstatsachen leicht zu Dualitätssätzen für beliebige abgeschlossene Teilmengen; solche Teilmengen kann man nämlich durch eine absteigende (also R_n-adische) Polyederfolge ausdrücken, die Komplementärmenge wird dann durch aufsteigende (also R_n-ale) Polyederfolge ausgedrückt, und die zugehörigen (G_n-adischen und G_n-alen) Folgen, die die Bettischen Gruppen definieren, werden einander dual. Nach demselben Prinzip ergeben sich Dualitätssätze für die lokalen Bettischen Gruppen.

Die Eigenschaften eines Entwicklungstypus, die wir in I als Auftypus und Isotypus bezeichnet haben, interessieren hauptsächlich bei den lokalen Zyklosen; sie haben dort die anschauliche Bedeutung der lokalen Erreichbarkeit und der lokalen Kondensationsfreiheit [9]. Dass diese Begriffe dual zueinander sind, ist wieder die unmittelbare Folge einer allgemeinen Dualitätstatsache, nämlich der Dualität zwischen Auf- und Isotypus bei G_n-adischen und G_n-alen Folgen.

Speziell interessant sind die Räume, deren innere bzw. äussere lokale Zyklosen gleichmässig [10] vom Auf- und Isotypus sind. In diesen Räumen kann man nämlich die lokalen Bettischen Gruppen in wohlbestimmter Weise von Punkt zu Punkt übertragen; die Übertragung ist im Kleinen eindeutig, im Grossen erzeugt sie eine Gruppe von Isomorphismen der lokalen Bettischen Gruppe. Diese Gruppe von Isomorphismen charakterisiert das, was man anschaulich Nichtorientierbarkeit bzw. einseitige Lage des Raumes nennen könnte (zwei Begriffe, die natürlich auch wieder dual zueinander sind).

IV

Eine R_n-adische Folge heisse auf-R_n-adisch, wenn die ihr zugrundeliegenden Abbildungen „Abbildungen auf" sind. Man kann nun zeigen:

Jeder kompakte Raum lässt sich in eine auf-R_n-adische Polyederfolge entwickeln.

Eine solche Entwicklung lässt sich übrigens leicht in eine Alexandroffsche Spektralentwicklung verwandeln (aber nicht umgekehrt). Sätze, die wir in II erwähnt haben, zeigen in diesem Zusammenhang die bekannte Tatsache, dass die Vietorissche Definition der Bettischen Gruppen mit der auf Grund von Spektralentwicklungen äquivalent ist.

Von den auf-R_n-adischen Polyederfolgen her kann man schliesslich noch die Dimensionstheorie der kompakten Räume aufbauen, wenn man die Alexandroffsche Überführungsdefinition der Brouwerschen Dimension zugrundelegt.

---

[8] Es empfiehlt sich übrigens, den Dualitätssatz unter Berücksichtigung aller vier Räume R, S, M, N zu formulieren.

[9] P. Alexandroff, „Annals of Math.", **36**, (1935), 1—35.

[10] Das ist natürlich zu präzisieren.

Разложения пространств и групп

Х. Фрейденталь (Амстердам)

(Резюме)

Обзор исследований автора о последовательностях пространств (топологических групп), связанных между собою непрерывными (гомоморфными) отображениями. Эта теория, связанная, с одной стороны, с теорией проекционных спектров, с другой стороны,— с теорией прямых и обратных рядов гомоморфизмов, позволяет дать новое систематическое изложение целого ряда топологических и тополого-алгебраических построений.

Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie
[1937f]

Ann. of Math. (2) 38 (1937), 647–655
[JFM 63.0558.03; Zbl 0017.23104]

(Received November 10, 1936)

J. W. Alexander [3] hat eine Produktbildung für die Elemente der von ihm selbst [1, 2, 3] und von A. Kolmogoroff [1, 2, 3] entdeckten *oberen* Bettischen Gruppen[1] konstruiert; je ein Element der oberen Bettischen Gruppe ρ-ter und σ-ter Dimension liefern als Produkt ein Element der oberen Bettischen Gruppe $(\rho + \sigma)$-ter Dimension. I. Gordon [1] hat im Außenraum eines in der d-dimensionalen Sphäre liegenden Polytops P eine Multiplikation der *unteren* d.h. gewöhnlichen) Bettischen Gruppen definiert, bei der je einem Element der Bettischen Gruppe ρ-ter and σ-ter Dimension des Außenraumes ein Element der Bettischen Gruppe $(\rho + \sigma - d)$-ter Dimension des Außenraumes als Produkt zugeordnet wird. Nun weiß man aber durch J. W. Alexander [1, 2] und A. Kolmogoroff [1, 4, 5], daß die ρ-te obere Bettische Gruppe von P isomorph der $(d - \rho)$-ten unteren Bettischen Gruppe des Außenraumes von P ist. Das Verhalten der Dimensionszahlen läßt vermuten, daß sich diese Isomorphie auch auf die Produktibildungen erstreckt, daß also die Alexandersche Multiplikation in P und die Gordonsche im Außenraum von P im Wesentlichen miteinander identisch sind. Diese Vermutung werden wir bestätigen (allgemein für beliebige abgeschlossene Teilmengen P der Sphäre und beliebige Koeffizientenbereiche). Unser Isomorphiesatz verhält sich zu den Dualitätssätzen Jordanscher Richtung etwa wie der letzte Teil der Čechschen Untersuchungen [1], der die Isomorphie zwischen Schnittbildung und Produktbildung in Mannigfaltigkeiten feststellt, zu den Dualitätssätzen Poincarés cher Richtung. Unsere Methode ähnelt der Čechschen.

Der größte Teil unserer Arbeit[1a] dient der Einführung einer zweckmäßigen Symbolik.

1. Ein *Simplexgitter* ist ein System von „Ecken", in dem für gewisse endliche Eckenmengen ein alternierendes „Produkt" $[a_0 a_1 \cdots a_\rho]$, ρ-dimensionales *Simplex* genannt, derart erklärt ist, daß jede echte Teilmenge der Ecken eines Simplexes wieder ein Simplex erzeugt. Die Eckenmenge wird im Folgenden stets als endlich vorausgesetzt.

Unterer (oberer) ρ-dimensionaler Komplex $k_\rho(k^\rho)$ heißt vorläufig jede Linear-

[1] Bei J. W. Alexander „duale Bettische Gruppen" genannt. Wir folgen A. Kolmogoroff in unsern Bezeichnungen.

[1a] Eine vorläufige Mitteilung der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit findet sich in der Note: *Über Mannigfaltigkeiten und ihre Abbildungen*, Proceed. Akad. Amsterdam *40* (1937), 54–60.

form in den ρ-dimensionalen Simplexen mit Koeffizienten aus der kompakten (abzählbaren diskreten) additiven abelschen Gruppe $\Gamma(\Delta)$; dabei seien Γ und Δ Charakteregruppen [Pontrjagin 1] mod 1[2] voneinander. Die $k_\rho(k^\rho)$ bilden eine kompakte (abzählbare diskrete) Gruppe $K_\rho(K^\rho)$. Das Simplexgitter wird, wo es nötig ist, in Klammern angedeutet. Bei den Simplexen wird die Dimension, je nachdem in was für einem Komplex sie gerade auftreten, ebenfalls durch einen unteren oder oberen Index angedeutet.

$t^\rho t_\rho$ soll dann und nur dann $+1(-1)$ sein, wenn beide „Faktoren" dasselbe (entgegengesetzte) Simplex darstellen, sonst 0. Bei Verwendung von Kommutativitäts- und Distributivitätsvorschriften ist dann das Produkt $k^\rho k_\rho$ allgemein als reelle Zahl mod 1 erklärt. Auf die Art werden K^ρ und K_ρ dual zueinander (d.h. Charakteregruppen voneinander).

2. R und S seien zwei Simplexgitter und $\mathfrak{f}$ ein stetiger Homomorphismus

$$\mathfrak{f}K_\rho(R) \subset K_\sigma(S);$$

die Gleichung

$$k^\sigma(S)(\mathfrak{f}k_\rho(R)) = (k^\sigma(S)\mathfrak{f})k_\rho(R)$$

(identisch in k^σ and k_ρ) definiert dann einen Homomorphismus

$$k^\sigma(S)\mathfrak{f} \subset k^\rho(R)$$

(also in umgekehrter Richtung; es ist zweckmäßig, hier das Funktionszeichen *hinter* das Argument zu schreiben). Unsere Bemerkung läßt sich natürlich umkehren.

Hin und wieder werden wir einen Komplex durch die ihm zugehörige (alternierende) Koeffizientenfunktion φ andeuten;[3] das Zeichen $\mathfrak{f}$ tritt dann auch vor oder hinter die Koeffizientenfunktion.

Beispiele für Homomorphismen $\mathfrak{f}$:

a) $\rho = \sigma$.— $\mathfrak{s}$ sei eine *simpliziale Abbildung* von R in S. $\mathfrak{s}$ induziert einen stetigen Homomorphismus von $K_\rho(R)$ in $K_\rho(S)$, der auch $\mathfrak{s}$ genannt wird, $\mathfrak{s}[a_0 \cdots a_\rho] = [\mathfrak{s}a_0 \cdots \mathfrak{s}a_\rho]$, also auch einen Homomorphismus von $K^\rho(S)$ in $K^\rho(R)$; dabei ist $\varphi\mathfrak{s}[a_0 \cdots a_\rho] = \varphi[\mathfrak{s}a_0 \cdots \mathfrak{s}a_\rho]$, also jedes Simplex geht in die Summe seiner Urbilder über.

b) $\rho = \sigma$.— S sei eine *Zerschlagung* von R, d. h. es gebe eine Zuordnung $\mathfrak{z}$ (mit noch besonderen Eigenschaften), die jedem Simplex t_ρ von R eine Summe Σu_ρ verschiedener Simplexe u von S zuordnet (wobei jedes absolute u_ρ in genau einer Summe auftritt). $\mathfrak{z}$ induziert einen stetigen Homomorphismus $\mathfrak{z}K_\rho(R) \subset K_\rho(S)$, also auch einen Homomorphismus $K^\rho(S)\mathfrak{z} \subset K^\rho(R)$. Dabei ist $\varphi\mathfrak{z}(u^\rho) = \psi(t^\rho) = \Sigma\varphi(u^\rho)$, welche Summe zu erstrecken ist über die u^ρ von $t^\rho = \Sigma u^\rho$.

---

[2] Als Bereich der Produkte kann man auch allerlei andere Gruppen wählen [H. Freudenthal 2, Nr. 16, 47].

[3] Nur hin und wieder. Meistens führt die Verwendung von Funktionen statt Komplexen zu großen Komplikationen.

c) $\rho = \sigma + 1$, $R = S$.— $\mathfrak{r}$ ordne jedem k_ρ seinen „*unteren*" *Rand* $\mathfrak{r}k_\rho$ zu, also

$$\mathfrak{r}[a_0 \cdots a_\rho] = \Sigma_i(-1)^i[a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_\rho].$$

(Wegzulassende Ecken sind mit einem Zirkumflex versehen.) $k^\rho\mathfrak{r}$ ist dann der *obere Rand* [Kolmogoroff 1, 2] oder die „Ableitung" [Alexander 1, 2, 3] von k^ρ. Man hat

$$\varphi\mathfrak{r}[a_0 \cdots a_{\rho+1}] = \Sigma_i(-1)^i\varphi[a_0 \cdots \hat{a}_i \cdots a_{\rho+1}].$$

Man bemerkt, daß $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ miteinander *vertauschbar* sind; zu den nicht explicit genannten Eigenschaften der Zerschlagung gehört auch die Vertauschbarkeit von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{z}$.

3. Ein *unterer (oberer) Zyklus* $z_\rho(z^\rho)$ ist ein $k_\rho(k^\rho)$ mit $\mathfrak{r}k_\rho = 0$ ($k^\rho\mathfrak{r} = 0$); ein *unterer (oberer) Rand* $h_\rho(h^\rho)$ ist ein Element von $\mathfrak{r}K_\rho(K^\rho\mathfrak{r})$. (Bei Alexander heißen die z^ρ „exakt" und die h^ρ „abgeleitet"). Die $z_\rho(z^\rho)$ bilden eine abgeschlossene Untergruppe $Z_\rho(Z^\rho)$ von $K_\rho(K^\rho)$ und die $h_\rho(h^\rho)$ eine abgeschlossene Untergruppe $H_\rho(H^\rho)$ von $Z_\rho(Z^\rho)$. Die *untere (obere) Bettische* $B_\rho(B^\rho)$ ist die Faktorgruppe $Z_\rho/H_\rho(Z^\rho/H^\rho)$. Aus Pontrjaginschen Sätzen [1] folgt, daß B_ρ und B^ρ dual zueinander sind [Alexander 1, Kolmogoroff 1, 3].

Das Simplexgitter, auf das sich die Gruppen beziehen, deuten wir, wo es nötig ist, in Klammern an.

Wegen der letzten Bemerkung von 3 gilt: $\mathfrak{s}$ induziert einen stetigen Homomorphismus $\mathfrak{s}B_\rho(R) \subset B_\rho(S)$ und einen Homomorphismus von $B^\rho(S)\mathfrak{s} \subset B^\rho(R)$. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{z}$. (Daß bei den oberen Bettischen Gruppen der Homomorphismus gerade in umgekehrter Richtung induziert wird, macht sie in manchen Fällen weniger handlich als die unteren.)

4. R sei ein *kompakter metrischer Raum*, ϑ_n eine monotone positive Nullfolge, R_n eine endliche Teilmenge von R, von der jeder Punkt von R einen Abstand $<\vartheta_n$ habe, weiter sei $R_n \subset R_{n+1}$. R_n wird ein Simplexgitter durch die Festsetzung: $[a_0 \cdots a_\rho]$ ist für jede Teilmenge $a_0, \cdots, a_\rho$ von R_n definiert, deren Durchmesser $<\epsilon_n$ ist; dabei sei ϵ_n eine positive monotone Nullfolge mit $\epsilon_n \geqq \epsilon_{n+1} + 2\vartheta_n$. Zu jedem n gibt es eine simpliziale Abbildung $\mathfrak{s}_nR_{n+1} \subset R_n$, die jeden Punkt um höchstens ϑ_n verrückt. Nach der letzten Bemerkung von 4 bilden also die Bettischen Gruppen $B_\rho(R_n)$ bzw. $B^\rho(R_n)$ eine G_n-adische bzw. G_n-ale Folge [H. Freudenthal 1; 2, Nr. 2, 11] mit den Abbildungen $\mathfrak{s}_nB_\rho(R_{n+1}) \subset R_n$ bzw. $B^\rho(R_n)\mathfrak{s}_n \subset B(R_{n+1})$. Der G_n-adische bzw. G_n-ale Limes der Folge heiße *untere bzw. obere Bettische Gruppe* $B_\rho(R)$ *bzw.* $B^\rho(R)$ des kompakten Raumes R. Aus allgemeinen Sätzen [Freudenthal 2, Nr. 8, 13, 39] folgt die Unabhängigkeit dieser Gruppen von der speziellen Wahl der ϑ_n usw. Aus allgemeinen Dualitätssätzen über Gruppenfolgen [Freudenthal 2, Nr. 20, 21] folgt die Dualität von $B_\rho(R)$ und $B^\rho(R)$.

5. Eine stetige Abbildung $\mathfrak{f}$ eines kompakten Raumes R in einen kompakten Raum S induziert einen stetigen Homomorphismus der G_n-adischen Folge

$B_\rho(R_n)$ in die G_n-adische $B_\rho(S_n)$ [Freudenthal 2, Nr. 19] und damit auch der Limesgruppe $B_\rho(R)$ in die Limesgruppe $B_\rho(S)$; ebenso einen stetigen Homomorphismus der G_n-alen Folge $B^\rho(S_n)$ in die G_n-ale Folge $B^\rho(R_n)$ und damit auch der Limesgruppe $B^\rho(S)$ in die Limesgruppe $B^\rho(R)$.

6. Sei jetzt R ein *im Kleinen kompakter Raum*, also Vereinigung einer aufsteigenden Folge kompakter Räume R_n. Wendet man 5 an auf die eineindeutige Abbildung von R_n in R_{n+1} (für alle n), so kann man die Bettischen Gruppen $B^\rho(R)$ bzw. $B_\rho(R)$ als G_n-adischen bzw. G_n-alen Limes der $B^\rho(R_n)$ bzw. $B_\rho(R_n)$ definieren.

7. Die Bettischen Gruppen eines *endlichen Polytops* P darf man in der Weise berechnen, daß man die Polytopecken zu Ecken eines Simplexgitters R macht und die Eckenmengen, die konkrete Simplexe erzeugen, Simplexe von R erzeugen läßt; die Bettischen Gruppen des Gitters R stimmen mit denen von P überein.

Aus Dualitätsgründen genügt es, diese Tatsache für die unteren *oder* die oberen Bettischen Gruppen zu beweisen; für die unteren ist sie wohlbekannt [z. B. Freudenthal 2, Nr. 41]. Trotzdem wollen wir einen selbständigen Beweis für die oberen Bettischen Gruppen skizzieren:

Die durch ein abstraktes Simplex in P definierte Punktmenge „konkretes Simplex" soll durch ein vorgesetztes $\mathfrak{m}$ angedeutet werden.

Wir metrisieren P so, daß die und nur die Punktmengen von R, die Simplexe erzeugen, einen Durchmesser <1 haben. Von der endlichen Menge S, $R \subset S \subset P$ habe jeder Punkt von P einen Abstand $<\epsilon$; Simplexe u^ρ von S seien dadurch charakterisiert, daß sie einen Durchmesser $<\epsilon$ haben. Man darf annehmen, daß eine Zerschlagung $\mathfrak{z}t_\rho = \Sigma u_\rho$ existiert, bei der die in $\mathfrak{z}t_\rho$ auftretenden $\mathfrak{m}u_\rho$ das zugehörige $\mathfrak{m}t_\rho$ doppelpunktfrei überdecken. Ferner darf man die Existenz einer simplizialen Abbildung $\mathfrak{s}S \subset R$ voraussetzen, bei der jedes $\mathfrak{m}t$ auf sich selbst abgebildet wird; $\mathfrak{s}$ wird als Produkt $\mathfrak{p}^{(1)}\mathfrak{p}^{(2)} \cdots \mathfrak{p}^{(d)}$ genommen, in dem $\mathfrak{p}^{(\rho)}$ innerhalb jedes $\mathfrak{m}t_\rho$ eine Projektion von einem geeigneten Punkt im Innern auf den Rand darstellt. Daß $\mathfrak{s}\mathfrak{z}$ in $B^\rho(R)$ den identischen Automorphismus erzeugt, ist (bei geeigneter Wahl der Projektionszentren) klar. Wir haben nur noch zu zeigen, daß auch $\mathfrak{z}\mathfrak{s}$ in $B^\rho(S)$ den identischen Automorphismus induziert, also daß in S aus $\varphi^\rho \mathfrak{z}\mathfrak{s} \sim 0$ folgt: $\varphi^\rho \sim 0$. Für jedes t^ρ setzen wir $\varphi_{t^\rho}(u^\rho) = \varphi(u^\rho)$, wenn $\mathfrak{m}u^\rho \subset \mathfrak{m}t^\rho$, sonst $= 0$. φ_{t^ρ} hat die Koeffizientensumme 0, berandet in $\mathfrak{m}t^\rho$ also ein $\chi_{t^\rho}^{\rho-1}$; $\varphi^\rho_{(1)} = \varphi^\rho - \Sigma_{t^\rho}\chi_{t^\rho}^{\rho-1}\mathfrak{r}$ verschwindet für alle u^ρ mit $\mathfrak{m}u^\rho$ in geeignetem $\mathfrak{m}t^\rho$. Wir setzen weiter $\varphi_{(1)t^{\rho+1}}(u^\rho) = \varphi_{(1)}(u^\rho)$ für $\mathfrak{m}u^\rho \subset \mathfrak{m}t^\rho$, sonst $= 0 \cdot \varphi_{(1)t^{\rho+1}}$ ist in $\mathfrak{m}t^{\rho+1}$ ein oberer ϵ-Zyklus, berandet dort also ein $\chi_{(1)t^{\rho+1}}(u^{\rho-1})$; $\varphi_i(u^\rho) = \varphi_i(u^\rho) - \Sigma\chi^{\rho-1}_{(1)t^{\rho+1}}\mathfrak{r}$ verschwindet für alle u^ρ mit $\mathfrak{m}u^\rho$ in geeignetem $\mathfrak{m}t^{\rho+1}$. So fährt man durch alle Dimensionen fort.

8. R sei ein Simplexgitter (Simplexe t), S seine *baryzentrische* Zerschlagung, d.h. Ecken von S sind die Punktmengen $a_0, \cdots, a_\rho$ (auch $a_{0\ldots\rho}$ genannt), für die $[a_0 \cdots a_\rho]$ erklärt ist und nicht verschwindet, Simplexe u_ρ von S sind die

Ausdrücke, die sich nach evtl. Umordnung schreiben lassen als $[a_{n_0}a_{n_1}\cdots a_{n_p}]$, so daß die Indexmengen $n_0, n_1, \cdots, n_p$ eine aufsteigende Folge bilden.

$\mathfrak{z}[a_0a_1\cdots a_p] = \Sigma \mp [a_{\nu_0}a_{\nu_0\nu_1}\cdots a_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_p}]$; die Summe ist über alle Permutationen der 0, 1, $\cdots$, p zu erstrecken, das Vorzeichen $\mp$ ist das der betreffenden Permutation.

R sei eine d-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit; alle z_d sind von der Form $\alpha\Sigma \mp t_d$; das Vorzeichen, mit dem ein t_d in dieser Summe auftritt, heiße $\pi(t_d)$.

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathfrak{d}[a_0\cdots a_p] = \Sigma\pi(a_0\cdots a_d)[a_0\ldots_p a_0\ldots_{p,p+1}\cdots a_0\ldots_{p,p+1,\ldots d}];$$

hier steht also rechts die zu $[a_0\cdots a_p]$ gehörige Dualzelle. Wir beweisen nun[4]

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{d}k) = (-1)^{p+1}\mathfrak{d}(k\mathfrak{r}). \tag{1}$$

Wir brauchen den Beweis bloß für $k = t = [a_0\cdots a_p]$ zu führen. In

$$\mathfrak{r}\Sigma \mp [a_0\ldots_p\cdots a_0\ldots_p\ldots_i\cdots a_0\ldots_p\ldots_i\ldots_d]$$

tritt jedes $[a_0\ldots_p\cdots\hat{a}_0\ldots_p\ldots_i\cdots a_0\ldots_p\ldots_i\ldots_d]$ für $i \leqq d$ zweimal und zwar mit entgegengesetztem Zeichen auf; das folgt für $i < d$ durch Vertauschung von i und $i+1$, für $i = d$ aus der Tatsache, daß R eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Wir haben also einerseits

$$\mathfrak{r}\mathfrak{d}[a_0\cdots a_p] = \Sigma \mp [a_0\ldots_{p,p+1}\cdots a_0\ldots_{p,p+1\ldots d}],$$

andererseits

$$\mathfrak{d}([a_0\cdots a_p]\mathfrak{r}) = (-1)^{p+1}\mathfrak{d}\Sigma[a_0\cdots a_pa_{p+1}]$$
$$= (-1)^{p+1}\Sigma \mp [a_0\ldots_{p,p+1}\cdots a_0\ldots_{p,p+1\ldots d}],$$

woraus die zu beweisende Formel folgt.

$\mathfrak{d}$ bildet also Z^p homomorph in Z_p (mit dem Koeffizientenbereich Δ) ab, ebenso B^p in B_p.

9. Von nun an seien die a_i von R in einer *festen Reihenfolge* angeordnet);[5] ein Simplex heißt *normal*, wenn seine Ecken in der gegebenen Reihenfolge aufgeschrieben sind.

---

[4] Wir behandeln k also sowohl als oberen als auch als unteren Komplex. D.h. wir verlangen von den Koeffizientengruppen von jetzt an nicht mehr, daß sie dual, sondern daß sie identisch sind. Ganz exakt wäre es, hier einen Operator einzuführen, der einen Koeffizientenbereich mit seinem dualen vertauscht, und einen Operator, der einen unteren durch den zugehörigen oberen Komplex ersetzt (und umgekehrt). Wir verzichten darauf.

[5] Die Verwendung einer festen Reihenfolge rührt von E. Čech und H. Whitney her. Daß die wesentlichen Begriffsbildungen von dieser Willkür unabhängig sind, ergibt sich bei uns als Nebenresultat. Was eigentlich hinter dieser festen Reihenfolge steckt, zeigt die simpliziale Abbildung $\mathfrak{o}$ aus Nr. 9 der vorliegenden Arbeit; unter Verwendung von $\mathfrak{o}$ könnte man übrigens auch den Unabhängigkeitsbeweis direkt führen. Zusatz bei der Korrektur: Den Gedanken, daß hinter der festen Anordnung der Ecken die simpliziale Abbildung $\mathfrak{o}$ steckt, hat (unabhängig von der vorliegenden Arbeit) auch Herr S. Lefschetz gehabt; siehe seinen Vortrag *The Role of Algebra in Topology*, Bull. Am. Math. Soc. (1937), pp. 345–359, den ich inzwischen im Manuskript kennen lernte.—Bemerkt sei noch, daß man mittels $\mathfrak{o}$ das Alexandersche auch auf das Cartesische Produkt zurückführen kann.

$\mathfrak{o}$ sei die simpliziale Abbildung, die jedes $a_{\mathfrak{n}_0\mathfrak{n}_1\dots\mathfrak{n}_\rho}$ ($\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_\rho$) in *das* a_σ überführt, das in der gegebenen Reihenfolge das höchste ist unter allen a_τ mit $\tau \in \mathfrak{n}_\rho$. In nicht verschwindende t_ρ gehen die und nur die u_ρ über, die sich schreiben lassen als $[a_{0\dots\lambda}\, a_{0\dots\lambda,\lambda+1} \cdots a_{0\dots\lambda,\lambda+1,\dots\lambda+\rho}]$, wobei (in der gegebenen Reihenfolge) a_ν höher steht als a_μ, sobald $\lambda \leqq \mu < \nu$.

$$\mathfrak{o}\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_\rho] = \Sigma \mp [a_\rho \cdots a_d], \tag{2}$$

wo nur über normale Simplexe summiert wird und das Vorzeichen $\pi(a_0 \cdots a_d)$ ist.

10. Für normale Simplexe $t^\rho = [a_0 \cdots a_\rho]$, $t^\sigma = [b_\rho \cdots b_{\rho+\sigma}]$ wird $t^\rho \cdot t^\sigma$ definiert als $[a_0 \cdots a_\rho b_{\rho+1} \cdots b_{\rho+\sigma}]$, falls $a_\rho = b_\rho$ ist, sonst $= 0$ (also auch $= 0$, wenn $a_0, \cdots a_\rho, b_{\rho+1}, \cdots, b_{\rho+\sigma}$ kein Simplex erzeugen); das ist die Alexandersche *Produktbildung* [3]. In naheliegender Weise ist dann $k^\rho \cdot l^\sigma$ erklärt, falls die Koeffizienten von k^ρ bzw. l^σ Koeffizientenbereichen entnommen sind, zwischen denen eine Multiplikation besteht; k^ρ und l^σ sind dabei als lineare Kombination *normaler* Simplexe anzusetzen.

Von Alexander übernehmen wir, daß damit eine Multiplikation zwischen den Elementen von B^ρ und B^σ definiert ist (die Produkte sind Elemente von $B^{\rho+\sigma}$).

Bei simplizialen Abbildungen, die die Reihenfolge nicht zerstören, geht das Produkt zweier Bildsimplexe (Komplexe, Elemente der Bettischen Gruppen) eines Simplexgitters in das Produkt der Urbildsimplexe (-komplexe usw.) des Urbildgitters über (für Zerschlagungen gilt das Entsprechende nicht). Die Betrachtungen von 4–6 lassen sich also dahin ausdehnen, daß die Produktbildung auch für die B^ρ beliebiger kompakter und im Kleinen kompakter Räume definiert (und bei Berücksichtigung der Topologie der B^ρ) stetig ist. Ebenso zeigen die Betrachtungen von 7, daß die Multiplikation der B^ρ eines Polytops als die im zugehörigen Simplexgitter zu berechnen ist.

11. P sei ein Polytop in der d-dimensionalen Homologiesphäre E; die Teilung von E sei so gewählt, daß P aus konkreten Simplexen, mt, dieser Teilung bestehe; die Ecken von E seien so angeordnet, daß erst die von P und dann die übrigen kommen; ferner soll P jedes Simplex von E enthalten, von dem es alle Eckpunkte enthält. Die Ecken der baryzentrischen Unterteilung (Simplexe: u), die *nicht* in P liegen, und die aus ihnen erzeugten baryzentrischen Simplexe bilden ein Polytop Q. Von einem t, das nicht ganz in P liegt, sagen wir, es liege in $E \setminus P$. Von einem k, dessen sämtliche t bzw. u in $E \setminus P$ bzw. Q liegen, sagen wir, es liege selbst in $E \setminus P$ bzw. Q. Ist $t \subset E \setminus P$, so ist $\mathfrak{b}t \subset Q$, und umgekehrt. Wir definieren

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}\mathfrak{d}.$$

z^ρ sei ein oberer Zyklus in P. Dann ist $z^\rho \mathfrak{r} \subset E \setminus P$, also $\mathfrak{b}(z^\rho \mathfrak{r}) \subset Q$, also nach (1) auch $\mathfrak{a} z^\rho = \mathfrak{r}\mathfrak{d} z^\rho \subset Q$.

z^ρ sei obendrein ~ 0 in P. Dann ist $z^\rho = k^{\rho-1}\mathfrak{r} + k^\rho$ mit $k^{\rho-1} \subset P$, $k^\rho \subset E \setminus P$.

Also $\mathfrak{a}z^\rho = \mathfrak{r}\mathfrak{d}(k^{\rho-1}\mathfrak{r}) + \mathfrak{r}\mathfrak{d}k^\rho$. Da wegen (1) der erste Summand verschwindet, ist $\mathfrak{a}z^\rho$ unterer Rand von $\mathfrak{d}k^\rho$, d.h. eines Komplexes aus Q.

Beides zusammen ergibt: $\mathfrak{a}$ erzeugt einen Homomorphismus $\mathfrak{a}B^\rho(P) \subset B_{d-\rho-1}(Q)$, von dem wir zeigen werden, daß er ein "Isomorphismus auf" ist (mit der üblichen Modification im Falle $d - \rho - 1 = 0$):

$z_{d-\rho-1}$ sei ein unterer Zyklus in Q, den wir, da E eine Homologiemannigfaltigkeit ist, in der Form $\mathfrak{d}z^{\rho+1}$, $z^{\rho+1} \subset E \setminus P$ ansetzen dürfen. In E berandet $\mathfrak{d}z^{\rho+1}$ ein $\mathfrak{d}k^\rho$; läßt man aus k^ρ alle Simplexe von $E \setminus P$ weg, so entsteht z^ρ, ein oberer Zyklus in P, und es ist $\mathfrak{a}z^\rho \sim z_{d-\rho-1}$ in Q.

Sei $\mathfrak{a}z^\rho \sim 0$ in Q. Dann ist $\mathfrak{r}\mathfrak{d}z^\rho \sim 0$ in Q, und es gibt ein $k^\rho \subset E \setminus P$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{d}z^\rho = \mathfrak{r}\mathfrak{d}k^\rho$. Wegen (1) ist dann $\mathfrak{d}((z^\rho - k^\rho)\mathfrak{r}) = 0$, also $(z^\rho - k^\rho)\mathfrak{r} = 0$, also $z^\rho - k^\rho = k^{\rho-1}\mathfrak{r}$. Läßt man in dieser Gleichung alle Simplexe von $E \setminus P$ weg, so heißt das: $z^\rho \sim 0$ in P.

$\mathfrak{a}$ vermittelt also einen Isomorphismus zwischen $B^\rho(P)$ und $B_{d-\rho-1}(Q)$ (Alexander-Pontrjaginscher Dualitätssatz).

12. Von zwei Komplexen in einer Homologiemannigfaltigkeit, deren Schnitt man zu bilden hat, setzt man voraus, daß der eine in Dualzellen, der andere in ursprünglichen Simplexen gegeben ist; der Schnittkomplex ergibt sich dann in Simplexen der baryzentrischen Unterteilung. Die Koeffizienten entstammen Bereichen zwischen denen eine Multiplikation erklärt ist.

k_ρ, l_σ seien zwei Komplexe in E, $\rho + \sigma \geqq d$,[6] und sei $k_\rho = \mathfrak{d}k^{d-\rho}$. Der *Schnitt* $\mathfrak{d}k^{d-\rho} \times l_\sigma$ beider drückt sich durch die $u_{\rho+\sigma-d}$ aus. Wir brauchen ihn nur für Dualzellen und Simplexe zu erklären:[7]

$$(\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_{d-\rho}]) \times [a_0 \cdots a_{d-\rho} \cdots a_\sigma] = \Sigma \mp [a_{0\ldots d-\rho}\, a_{0\ldots d-\rho,\nu_1} \cdots a_{0\ldots d-\rho,\nu_1\cdots\nu_{\sigma+\rho-d}}], \tag{3}$$

wo über alle Permutationen $\nu_1, \cdots, \nu_{\sigma+\rho-d}$ der $d - \rho + 1, \cdots, \sigma$ zu summieren und für $\mp$ das Vorzeichen der betreffenden Permutation zu nehmen ist,

$$(\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_{d-\rho}]) \times [b_0 \cdots b_\sigma] \qquad \text{sonst} = 0.$$

Nimmt man $t^{d-\rho}$ und t_σ normal an, so ist

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{d}t^{d-\rho} \times t_\sigma) = [a_{d-\rho}\, a_{d-\rho+1} \cdots a_\sigma] \tag{4}$$

im ersten Fall, sonst 0.

13. Die Gordonsche Operation, $\otimes$ genannt, ist so definiert: je einem Element von $B_{d-\sigma-1}(Q)$ und $B_{d-\rho-1}(Q)$, bzw. repräsentiert durch die Zyklen $z_{d-\sigma-1}$ und $z_{d-\rho-1}$ in Q, ist zugeordnet das Element von $B_{d-\rho-\sigma-1}(Q)$, das repräsentiert wird durch $\mathfrak{r}(k_{d-\sigma} \times k_{d-\rho})$, wo $\mathfrak{r}k_{d-\sigma} = z_{d-\sigma-1}$ und $\mathfrak{r}k_{d-\rho} = z_{d-\rho-1}$ ist. Nach 11

[6] Für $\rho + \sigma < d$ setzt man den Schnitt bekanntlich 0. Im Folgenden lassen wir diesen (trivialen) Fall stets unberücksichtigt.

[7] Siehe J. H. C. Whitehead, Annals of Math. (2) *33* (1932), 521–524.

dürfen wir $z_{d-\sigma-1}$ bzw. $z_{d-\rho-1}$ in der Gestalt $\mathfrak{a}z^\sigma$ bzw. $\mathfrak{a}z^\rho$ annehmen, z^σ, $z^\rho \subset P$. $z_{d-\sigma-1} \otimes z_{d-\rho-1}$ läst sich also berechnen als $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}z^\sigma \times \mathfrak{b}z^\rho)$. Da $\mathfrak{o}$ (wegen der Voraussetzung über die Anordnung der Ecken) eine simpliziale Abbildung von Q in sich darstellt, können wir hier auch schreiben

$$\mathfrak{a}z^\sigma \otimes \mathfrak{a}z^\rho \sim \mathfrak{r}\mathfrak{o}(\mathfrak{b}z^\sigma \times \mathfrak{o}\mathfrak{b}z^\rho). \tag{5}$$

und auf diese Form die Regel (4) enwenden.

Seien $t^\rho = [a_0 \cdots a_\rho]$, $t^\sigma = [a_\rho \cdots a_{\rho+\sigma}]$ normale Simplexe. Dann ist wegen (2)

$$\mathfrak{o}\mathfrak{b}t^\rho = \Sigma\pi(a_0 \cdots a_d)[a_\rho \cdots a_d]$$

(nur über normale Simplexe zu summieren), also wegen (4)

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{b}t^\sigma \times \mathfrak{o}\mathfrak{b}t^\rho) = \Sigma\pi(a_0 \cdots a_d)[a_{\rho+\sigma} \cdots a_d].$$

Andererseits ist wegen (2)

$$\mathfrak{o}\mathfrak{b}(t^\rho \cdot t^\sigma) = \Sigma\pi(a_0 \cdots a_d)[a_{\rho+\sigma} \cdots a_d],$$

während für andersartige Simplexe beide Ausdrücke verschwinden. Also

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{b}t^\sigma \times \mathfrak{o}\mathfrak{b}t^\rho) = \mathfrak{o}\mathfrak{b}(t^\rho \cdot t^\sigma).$$

Diese Gleichung bleibt gültig, wenn man die t durch Komplexe ersetzt; unter Berücksichtigung von (5) erhält man also

$$\mathfrak{a}z^\sigma \otimes \mathfrak{a}z^\rho \sim \mathfrak{a}(z^\rho \cdot z^\sigma),$$

die zu beweisende Isomorphie zwischen Gordonscher und Alexanderscher Operation.

14. Die Beziehung $\mathfrak{a}$ war von der vorgelegten Reihenfolge der Ecken unabhängig; dasselbe gilt von der Gordonschen Operation. Also liefert auch die Alexandersche Operation bei jeder Anordnung der Ecken dasselbe Resultat für die Produkte von Elementen aus $B^\rho(P)$ und $B^\sigma(P)$.

Sei nun P eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von E. Nach 10 hat die Alexandersche Operation für die $B^\rho(P)$ einen Sinn; P ist dabei aufzufassen als R_n-adischer Limes einer absteigenden Folge von Polytopen P_n und $B^\rho(P)$ als G_n-aler Limes der $B^\rho(P_n)$, zwischen denen (für jedes n) die Operation erklärt ist. Die zugehörigen Q_n erzeugen R_n-al (als ihre Vereinigung) Q, die Komplementärmenge von P, und dabei erzeugen die $B_{d-\rho-1}(Q)$ R_n-al $B_{d-\rho-1}(Q)$ (siehe 6); die für jedes n existierende Gordonsche Operation erzeugt dabei eine "Gordonsche Operation" zwischen den $B_{d-\rho-1}(Q)$. Wegen der Isomorphie beider Operationen für jedes n erhält man so die gewünschte Isomorphie beider Operationen hinsichtlich $B^\rho(P)$ bzw. $B_{d-\rho-1}(Q)$, die wir beweisen wollten.

LITERATUR

J. W. Alexander: 1. *On the chains of a complex and their duals.* Proc. Nat. Acad. USA *21* (1935), 509–511.

2. *On the ring of a compact metric space.* Proc. Nat. Acad. USA *21* (1935), 511–512.

3. *On the connectivity ring of an abstract space.* Annals of Math. (2) *37* (1936), 698–708.

E. ČECH: 1. *Multiplications on a complex.* Annals of Math. (2) *37* (1936), 681–697.

HANS FREUDENTHAL: 1. *Die R_n-adische Entwicklung von Räumen und Gruppen.* Proc. Akad. Amsterdam *38* (1935), 414–418.

2. *Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen.* Compositio Math. *4* (1936), 145–238.

I. GORDON: 1. *On iniersection invariants of a complex and its complementary space.* Annals of Math. (2) *37* (1936), 519–525.

A. KOLMOGOROFF: 1. *Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie.* Rec. Math. Moscou *43* (1936), 97–102.

2. *Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts.* C. R. Paris *202* (1936), 1144–1147.

3. *Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts.* C. R. Paris *202* (1936), 1325–1327.

4. *Les groupes de Betti des espaces métriques.* C. R. Paris *202* (1936), 1558–1560.

5. *Cycles relatifs.* C. R. Paris *202* (1936), 1641–1643.

L. PONTRJAGIN: 1. *Topological commutative groups.* Annals of Math. (2) *35* (1934), 361–388.

AMSTERDAM (HOLLAND).

Zum Hopfschen Umkehrhomomorphismus [1937g]

Ann. of Math. (2) 38 (1937), 847–853
[JFM 63.0558.04; Zbl 0018.09005]

(Received January 11, 1937)

Eine Abbildung einer Mannigfaltigkeit auf eine andere induziert einen Homomorphismus zwar der Bettischen Gruppen der einen in die der andern, nicht aber im Allgemeinen auch des einen Schnittringes in den andern. Vor längerer Zeit hat aber H. Hopf [1] mit der Lefschetzschen Produktmethode "Umkehrungen" von Mannigfaltigkeitsabbildungen angegeben; eine solche Umkehrung besitzt unter anderen wichtigen Eigenschaften die, ein Schnittringhomomorphismus zu sein; aus diesen Eigenschaften hat H. Hopf eine Reihe bedeutsamer Folgerungen gezogen. Später hat H. Hopf [2] zur Untersuchung der Abbildungen der S_3 auf die S_2 wiederum derartige Umkehrungen definiert (für Abbildungen verschieden-dimensionaler Mannigfaltigkeiten). Auch Verf. [4] hat sich mit derartigen Umkehrungen beschäftigt, und zwar im Außenraum abgeschlossener Teilmengen von Sphären.

Hier soll gezeigt werden,[1] wie sich diese Umkehrhomomorphismen sehr einfach im Rahmen der neueren Homologietheorie ergeben; übrigens wird sich ihr Gültigkeitsbereich einigermaßen erweitern. Alle diese "Umkehrungen" kommen übrigens auf dasselbe hinaus; die Art, wie sie hier eingeführt werden, erinnert wohl sehr an die Methode von H. Hopf [2] und Verf. [4], ist aber vielleicht noch etwas einfacher. Die Haupteigenschaft der "Umkehrungen" ergibt sich aber sicher viel einfacher als bisher.

Eine frühere Arbeit des Verfassers[1a] wird als bekannt vorausgesetzt und mit AG zitiert.

1. Wir übernehmen die Bezeichungen von AG. Insbesondere sei also $\mathfrak{d}$ der Dualitätsoperator, der (in d-dimensionalen Homomlogiemannigfaltigkeiten) B^p topologisch isomorph auf B_{d-p} abbildet. Wir nehmen immer eine bestimmte Eckenordnung an und können dann praktischer mit $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ arbeiten. Wir hatten (AG(2)):

$$\mathfrak{o}\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_p] = \sum \pi(a_0 \cdots a_p \cdots a_d)[a_p \cdots a_d]$$

(in allen derartigen Formeln seien nur *normale* Simplexe zugelassen).

---

[1] Zusatz bei der Korrektur: Unsere Ergebnisse überschneiden sich mit denen von H. Whitney in einer inzwischen erschienenen Note: On products in a complex, Proc. Nat. Acad. USA *23* (1937), 285–291.

[1a] *Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie*, Ann. of Math. *36* (1937), 647–655.

Da für die Bettischen Gruppen $\mathfrak{d}$ ein Isomorphismus ist, so ist auch das durch

$$(z^{d-\rho}\mathfrak{d})z^{\rho} = z^{d-\rho}(\mathfrak{d}z^{\rho})$$ [2]

definierte hintere $\mathfrak{d}$ ein Isomorphismus und zwar, wie sich zeigen wird, im Wesentlichen derselbe. Dagegen wird natürlich keineswegs auch für die Gruppe der Komplexe vorderes und hinteres $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ identisch sein. Man hat vielmehr

$$[b_\rho \cdots b_d](\mathfrak{o}\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_\rho]) = \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho b_{\rho+1} \cdots b_d),$$

falls diese Ecken ein Simplex erzeugen und $a_\rho = b_\rho$ ist, sonst 0; die rechte Seite ist aber auch gleich

$$\sum \pi(b_0 \cdots b_d)[b_0 \cdots b_\rho][a_0 \cdots a_\rho]$$

(bei festem $[b_\rho \cdots b_d]$ zu summieren) bzw. 0. Also

$$[b_\rho \cdots b_d]\,\mathfrak{o}\mathfrak{d} = \sum \pi(b_0 \cdots b_d)[b_0 \cdots b_\rho].$$

Hinteres $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ liefert also für die Komplexe dasselbe wie vorderes $\mathfrak{o}'\mathfrak{d}$ (wenn $\mathfrak{o}'$ die simpliziale Verschiebung ist, die auf der umgekehrten Anordnung der Ecken beruht); für die Bettischen Gruppen unterscheiden vorderes und hinteres $\mathfrak{d}$ sich also in der Tat nicht:

(D) $$\mathfrak{d}z^{\rho} \sim z^{\rho}\mathfrak{d}$$

2. Wir hatten weiter das *Alexandersche Produkt* (für normale obere Simplexe) $[a_0 \cdots a_\rho]\cdot[a_\rho \cdots a_{\rho+\sigma}] = [a_0 \cdots a_\rho \cdots a_{\rho+\sigma}]$, sonst 0, ferner in d-dimensionalen Homologiemannigfaltigkeiten den *Schnitt* (AG(4)) $\mathfrak{d}t^{\rho} \times t_\sigma$ oder praktischer $\mathfrak{o}(\mathfrak{d}t^{\rho} \times t_\sigma)$:

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{d}[a_0 \cdots a_\rho] \times [a_0 \cdots a_\sigma]) = [a_\rho \cdots a_\sigma];$$ [3]

schließlich im Außenraum $S\backslash A$ eines Teilpolytops A der d-dimensionalen Homologiesphäre das *Gordonsche Produkt*

$$z_\rho \otimes z_\sigma = \mathfrak{r}(k_{\rho+1} \times k_{\sigma+1}) \text{ mit } z_\rho = \mathfrak{r}k_{\rho+1},\ z_\sigma = \mathfrak{r}k_{\sigma+1} \text{ (in } S).$$

Wir hatten den Isomorphismus $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}\mathfrak{d}$ oder, praktischer,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}\mathfrak{o}\mathfrak{d}$$

von $B^{\rho}(A)$ auf $B_{d-\rho-1}(S\backslash A)$ und (AG (5)) für $z^{\rho}, z^{\sigma} \subset A$:

$$\mathfrak{a}(z^{\rho}\cdot z^{\sigma}) \sim \mathfrak{a}z^{\sigma} \otimes \mathfrak{a}z^{\rho} \text{ in } S\backslash A.$$

---

[2] Die hier gebrauchte Produktbildung zwischen oberen und unteren Komplexen usw. gleicher Dimension (siehe AG 1) setzt immer duale Koeffizientenbereiche voraus. Man verwechsle sie nicht mit der Alexanderschen (AG 10), die immer mit einem Multiplikationspunkt geschrieben wird (der *hier* fehlt).

[3] Wir haben leider in AG bei der Schnittdefinition beide Faktoren vertauscht, was nur einen Vorzeichenunterschied gegen die übliche Definition ergibt, aber sonst kaum etwas ausmacht. Trotz der kleinen Unsymmetrien, die entstehen, behalten wir die Definition bei. Die Formeln (U'), (A'), (V') usw. werden nach der Vertauschungsformel für den Schnitt von dieser Abweirhung übrigens nicht beeinflußt.

Endlich hat man nach E. Čech [1] (in beliebigen d-dimensionalen Homologiemannigfaltigkeiten) die Isomorphie

$$\mathfrak{d}(z^p \cdot z^\sigma) \sim \mathfrak{d}z^\sigma \times \mathfrak{d}z^p,$$

die sich bei uns so ergibt: Es genügt,

$$\mathfrak{o}\mathfrak{d}(z^p \cdot z^\sigma) \sim \mathfrak{o}(\mathfrak{d}z^\sigma \times \mathfrak{o}\mathfrak{d}z^p)$$

zu beweisen. Das ergibt sich wiederum aus

$$\mathfrak{o}\mathfrak{d}(t^p \cdot t^\sigma) = \mathfrak{o}(\mathfrak{d}t^\sigma \times \mathfrak{o}\mathfrak{d}t^p),$$

was wir folgendermaßen verifizieren: Sei $t^p = [a_0 \cdots a_p]$; dann ist die linke Seite gleich $\sum \pi(a_0 \cdots a_p \cdots a_{p+\sigma} \cdots a_d)[a_{p+\sigma} \cdots a_d]$, falls $t^\sigma = [a_p \cdots a_{p+\sigma}]$ ist, sonst 0. Rechts hat man für solche Wahl von t^p und t^σ: $\mathfrak{o}\mathfrak{d}t^p = \sum \pi(a_0 \cdots a_p \cdots a_d)[a_p \cdots a_d]$. Beide Seiten stimmen also überein.

Damit hat sich die Isomorphie beider Produktbildungen ergeben.

3. Wir betrachten jetzt eine stetige Abbildung $\mathfrak{f}$ einer μ-dimensionalen Homologiemannigfaltigkeit M in eine ν-dimensionale, N. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, daß $\mathfrak{f}$ simplizial ist und die Reihenfolge der Ecken nicht stört (also $\mathfrak{o}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{o}$).

Bei den Operationen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{d}$ müssen wir im Folgenden unterscheiden, ob sie in M oder in N genommen sind; da im Allgemeinen keine Mißverständnisse möglich sind, wollen wir diesen Unterschied nicht explizit ausdrücken; nur wo es unbedingt nötig ist, hängen wir den Index M oder N an.

Gemäß AG 2 induziert $\mathfrak{f}$ Homomorphismen

$$\mathfrak{f}K_p(M) \subset K_p(N),\ \mathfrak{f}B_p(M) \subset B_p(N),$$
$$K^p(N)\mathfrak{f} \subset K^p(M),\ B^p(N)\mathfrak{f} \subset B^p(M).$$

Bei Homologiemannigfaltigkeiten ist aber auch

$$\mathfrak{f}^* = \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{f}\mathfrak{d}$$

ein Homomorphismus

$$\mathfrak{f}^*B^p(M) \subset B^{p-\mu+\nu}(N),$$
$$B_p(N)\mathfrak{f}^* \subset B_{p+\mu-\nu}(M).$$

$\mathfrak{f}^*$ wirkt also gerade in umgekehrter Richtung wie $\mathfrak{f}$.

Man hat die Relationen

(R)
$$\mathfrak{d}\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}\mathfrak{d}, \quad \text{oder praktischer}$$
$$\mathfrak{o}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}\mathfrak{o}\mathfrak{d},$$

was auch für Komplexe sinnvoll ist.

Es ist für die Anwendungen sehr wichtig, daß $\mathfrak{f}^*$ nicht einfach abstrakt definiert ist, sondern daß es etwa zu einem unteren Zyklus in N ganz konkret ein $\mathfrak{f}^*$-Bild liefert. In Worten ausgedrückt lautet die Konstruktion z. B. so:

Man nehme den Zyklus als Linearform von Dualzellen an; von einer Dualzelle erhält man das $\mathfrak{f}^*$ -Bild, indem man vom zugehörigen Simplex der ursprünglichen Teilung die (gleichdimensionalen) Urbilder sucht und deren Dualzellen addiert.

Das hintere $\mathfrak{f}^*$ ist damit für untere Komplexe aus Dualzellen ($\mathfrak{d}k^{\nu-\rho}$) erklärt und bildet $\mathfrak{d}K^{\nu-\rho}(N)$ homomorph in $\mathfrak{d}K^{\nu-\rho}(M)$ ab. Nach AG (1) geht dabei der Rand eines Komplexes in den Rand des Bildes über, also ein Zyklus in einen Zyklus, usw., so daß diese konkrete Definition (unter Berücksichtigung von (D)) dasselbe liefert wie die obige abstrakte (für die Elemente der Bettischen Gruppen).

Man bemerkt, daß die zu $\mathfrak{f}\mathfrak{f}^* z_\rho$ gehörige Punktmenge in der zu z_ρ gehörigen Punktmenge enthalten ist oder wenigstens in denselben ν-dimensionalen Simplexen wie die von z_ρ liegt. Das ist für Anwendungen (H. Hopf [2]) sehr wichtig und würde bereits die Auffassung von $\mathfrak{f}^*$ als "Umkehrung" von $\mathfrak{f}$ rechtfertigen.

Es gilt aber noch mehr: Wir werden beweisen:

$$\text{(U)} \qquad \mathfrak{f}^*(z^\rho \mathfrak{f}) \sim \gamma z^\rho \text{ für } \mu \geqq \nu,$$

(γ = Abbildungsgrad von $\mathfrak{f}$).

Weiter wissen wir (AG, 10), daß das hintere $\mathfrak{f}$ ein Ringhomomorphismus ist,

$$\text{(A)} \qquad (z^\rho \cdot z^\sigma)\mathfrak{f} \sim z^\rho \mathfrak{f} \cdot z^\sigma \mathfrak{f};$$

etwas Derartiges können wir von seiner "Umkehrung", dem vorderen $\mathfrak{f}^*$, natürlich nicht erwarten, wohl aber erhält man, wenn man in (U) z^ρ durch $z^\rho \cdot z^\sigma$ ersetzt und (A) berücksichtigt,

$$\mathfrak{f}^*(z^\rho \mathfrak{f} \cdot z^\sigma \mathfrak{f}) \sim z^\rho \cdot \gamma z^\sigma \sim z^\rho \cdot \mathfrak{f}^*(z^\sigma \mathfrak{f}).$$

Wir werden aber viel mehr beweisen: ganz allgemein (für beliebige μ, ν) gilt

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{f}^*(z^\rho \cdot z^\sigma \mathfrak{f}) \sim \mathfrak{f}^* z^\rho \cdot z^\sigma$$

(hier ist natürlich $z^\rho \subset M$, $z^\sigma \subset N$).

(U) ist (wenigstens für $\mu = \nu$) ein Spezialfall von (V), den man erhält, wenn man in (V) für z^ρ den 0-dimensionalen oberen Grundzyklus von M (die Summe der Ecken), also für $\mathfrak{f}^* z^\rho$ den γ-fachen 0-dimensionalen Grundzyklus von N einsetzt.

Nehmen wir vorläufig (U) und (V) als bewiesen an! Ersetzen wir in (U), (A), (V) bzw. z^ρ und z^σ durch $z_{\rho'}\mathfrak{d}$ und $z_{\sigma'}\mathfrak{d}$ (was wir bis auf Homologien dürfen), berücksichtigen wir (R), (D) und die Beziehung, die nach 2 zwischen Produkt- und Schnittbildung besteht, und schreiben wir zum Schluß wieder ρ und σ für ρ' und σ', so erhalten wir

$$\text{(U')} \qquad \mathfrak{f}(z_\rho \mathfrak{f}^*) \sim \gamma z_\rho \quad \text{für } \mu \geqq \nu,$$

$$\text{(A')} \qquad (z_\rho \times z_\sigma)\mathfrak{f}^* \sim z_\rho \mathfrak{f}^* \times z_\sigma \mathfrak{f}^*,$$

$$\text{(V')} \qquad \mathfrak{f}(z_\rho \mathfrak{f}^* \times z_\sigma) \sim z_\rho \times \mathfrak{f} z_\sigma.$$

Umgekehrt kann man natürlich aus (U'), (A'), (V') wieder (U), (A), (V) ableiten.

(U′), (A′), (V′) sind dieselben Formeln, die bei der Hopfschen Umkehrung [1] auftreten. Man darf daher vermuten, daß das hintere $\mathfrak{f}^*$ selbst mit der Hopfschen Umkehrung übereinstimmt; in 7 werden wir das auch beweisen. Dann haben wir für die Hopfsche Umkehrung eine neue (einfachere) Definition gegeben und ihre Haupteigenschaften von neuem (einfacher) abgeleitet.

Seien nun die Mannigfaltigkeiten M und N Homologiesphären R und S, und sei $\mathfrak{f}R \subset S$, $\mathfrak{f}A \subset B$ (A und B abgeschlossene Teilmengen von R und S). Eine einfache Überlegung wird aus (U′), (A′), (V′) die Formeln (U″), (A″), (V″) ergeben:

(U″) $$\mathfrak{f}(z_\rho \mathfrak{f}^*) \sim \gamma z_\rho \quad \text{in } S \backslash B^\mu \text{ für } \mu \geqq \nu,$$

(A″) $$(z_\rho \otimes z_\sigma)\mathfrak{f}^* \sim z_\rho \mathfrak{f}^* \otimes z_\sigma \mathfrak{f}^* \quad \text{in } R \backslash A,$$

(V″) $$\mathfrak{f}(z_\rho \mathfrak{f}^* \otimes z_\sigma) \sim z_\rho \otimes \mathfrak{f} z_\sigma \quad \text{in } S \backslash B.$$

4. Wir beweisen nun (U′) und (V′) (statt (U) und (V)). Wir nehmen in (U′) $z^{\nu-\rho} \mathfrak{o} \mathfrak{d}$ statt z_ρ und haben dann (wegen (R))

$$\mathfrak{f}(z^{\nu-\rho} \mathfrak{o} \mathfrak{f} \mathfrak{d}) \sim \gamma z^{\nu-\rho} \mathfrak{o} \mathfrak{d} \text{ für } \mu \geqq \nu$$

zu beweisen. Wir werden sogar

$$\mathfrak{f}(z^{\nu-\rho} \mathfrak{f} \mathfrak{o} \mathfrak{d}) = \gamma z^{\nu-\rho} \mathfrak{o} \mathfrak{d}$$

beweisen,[4] und das ergibt sich aus

$$\mathfrak{f}(t^{\nu-\rho} \mathfrak{f} \mathfrak{o} \mathfrak{d}) = \gamma t^{\nu-\rho} \mathfrak{o} \mathfrak{d},$$

was wir jetzt verifizieren: Sei $t^{\nu-\rho} = [b_\rho \cdots b_\nu]$. Dann ist $t^{\nu-\rho}\mathfrak{f} = \sum [a_\rho \cdots a_\nu]$ mit $b_\rho = \mathfrak{f}a_\rho, \cdots, b_\nu = \mathfrak{f}a_\nu$, also $t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}\mathfrak{o}\mathfrak{d} = \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_\nu)\,[a_0 \cdots a_\rho]$ erstreckt über alle $[a_0 \cdots a_\rho \cdots a_\nu]$ mit $b_\rho = \mathfrak{f}a_\rho, \cdots, b_\nu = \mathfrak{f}a_\nu$. Links haben wir demnach

$$\mathfrak{f}(t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}\mathfrak{o}\mathfrak{d}) = \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_\nu)[b_0 \cdots b_\rho] = \sum [b_0 \cdots b_\rho] \sum \pi(a_0 \cdots a_\rho \cdots a_\nu),$$

wo $b_0 = \mathfrak{f}a_0, \cdots, b_\rho = \mathfrak{f}a_\rho$ gesetzt ist und die innere Summe sich auf festes $[b_0 \cdots b_\rho]$ bezieht, während die äußere über alle $[b_0 \cdots b_\rho]$ zu erstrecken ist, die mit $[b_\rho \cdots b_\nu]$ ein ν-dimensionales Simplex bilden. Die innere Summe ist aber gleich $\gamma\pi(b_0 \cdots b_\rho \cdots b_\nu)$, also stimmen linke und rechte Seite tatsächlich überein.

Führen wir in (V′) die Substitution $z_\rho = z^{\nu-\rho}\mathfrak{d}$ aus, so haben wir nur (unter Berücksichtigung von (D))

$$\mathfrak{f}\mathfrak{o}(\mathfrak{d}(t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}) \times t_\sigma) = \mathfrak{o}(\mathfrak{d}t^{\nu-\rho} \times \mathfrak{f}t_\sigma)$$

zu beweisen. Nehmen wir $t_\sigma = [a_0 \cdots a_\sigma]$, $\mathfrak{f}t_\sigma = [b_0 \cdots b_\sigma]$, so verschwindet gemäß 2 die rechte Seite dann und nur dann nicht, wenn $t^{\nu-\rho} = [b_0 \cdots b_{\nu-\rho}]$ ist; sie wird dann $[b_{\nu-\rho} \cdots b_\sigma]$. Links erhält man dann und nur dann etwas Nicht-

[4] Man beachte $\mathfrak{o}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{o}$.

verschwindendes—und zwar auch wieder $[b_{\nu-\rho} \cdots b_\sigma]$—, wenn in $t^{\nu-\rho}\mathfrak{f}$ $[a_0 \cdots a_{\nu-\rho}]$ auftritt, also auch wieder für $t^{\nu-\rho} = [b_0 \cdots b_{\nu-\rho}]$.

Um (U''), (A''), (V'') zu erhalten, müssen wir etwas genauer verfahren. Wir brauchen uns nur um Polytope A und B zu kümmern. Die Ecken von S dürfen wir so anordnen, daß die von B hinter allen andern kommen. Ist nun z_ρ ein Zyklus aus $S\backslash B$, so kann man $z^{\nu-\rho}\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ innerhalb $S\backslash B$ wählen, so daß es in $S\backslash B$ mit z_ρ homolog ist. Analog darf man mit einem etwaigen $k_{\rho+1}$ aus $S\backslash B$ verfahren, dessen Rand $z_{\rho+1}$ ist. Wendet man darauf hinten $\mathfrak{f}^*$ an, so kommt man in die Urbildmenge von $S\backslash B$, also sicherlich in $R\backslash A$, woran die weitere Anwendung von $\mathfrak{o}\mathfrak{d}$ nichts ändert. $\mathfrak{f}^*$ ist damit als Homomorphismus

$$B_\rho(S\backslash B)\mathfrak{f}^* \subset B_{\rho+\mu-\nu}(R\backslash A)$$

definiert. Die Gleichheit, die wir oben im Beweise von (U') erhalten haben, zeigt aber unmittelbar, daß die durch (U'') ausgedrückte Homologie wirklich in $S\backslash B$ gilt. (A'') ist ohne weiteres klar, und (V'') ergibt sich analog aus (U'') bei genauerer Betrachtung des Beweises von (U').

5. Die folgenden Sätze beziehen sich wieder auf beliebige Homologiemannigfaltigkeiten.

a. $(\mathfrak{f}\mathfrak{g}) = \mathfrak{f}^*\mathfrak{g}^*$. (Beweis klar.)

b. Ist die Homologiemannigfaltigkeit M Teilmenge von N und $\mathfrak{g}$ die Abbildung, die M punktweise auf sich selbst abbildet, so ist $z_\rho\mathfrak{g}^* \sim z_\rho \times M$ (wo M auch den μ-dimensionalen Grundzyklus von M bezeichne).—Denn wenn wir in (U') z_σ durch M, also $\mathfrak{g}z_\sigma$ auch durch M ersetzen, können wir links den Faktor M weglassen und erhalten die gewünschte Beziehung.

c. Ist $\mathfrak{f}M \subset N$, $\mathfrak{h}M' \subset N$, ist weiter M' Teilmannigfaltigkeit von M und stimmen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{h}$ auf M' überein, so ist $z_\rho\mathfrak{h}^* \sim z_\rho\mathfrak{f}^* \times M'$.—Das folgt aus a und b, wenn man noch die Abbildung $\mathfrak{g}$ $M' \subset M$ einführt, die auf M' die Identität ist.

d. Ist $M \subset N$, so ist es gleichgültig, ob man den Schnitt zweier Zyklen aus M in M oder in N bildet.—Folgt aus (A').

e. (;) bedeute die Bildung des Cartesischen Produktes. $\mathfrak{p}$ sei die Projektion von $(M; N)$ auf N. Dann ist (für $z_\rho \subset N$):

$$(M; z_\rho) \sim z_\rho\mathfrak{p}^*.$$

Beim Beweise machen wir von einer anderwärts von Verf. [5] abgeleiteten Simplizialzerlegung des Cartesischen Produktes zweier Simplexe t_μ und t_ν Gebrauch. Die Ecken von t_μ werden mit $0, \cdots, \mu$, die von t_ν mit $0, \cdots, \nu$ numeriert. Ecken von $(t_\mu; t_\nu)$ sind die Paare $(\alpha\beta$ aus den Ecken von t_μ und t_ν; man kann sie sich in der Matrix

$\mathfrak{M}$:

$$\begin{array}{cccc} 00 & 01 & \cdots & 0\nu \\ 10 & 11 & \cdots & 1\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu 0 & \mu 1 & \cdots & \mu\nu \end{array}$$

aufschreiben Die $(\mu + \nu)$-dimensionalen Simplexe $u_{\mu+\nu}$ von $(t_\mu; t_\nu)$ werden so definiert: Jedes $u_{\mu+\nu}$ besteht aus einer Folge von Elementen von $\mathfrak{M}$, die mit 00 beginnt, mit $\mu\nu$ endet, und in der jedes Element rechter oder unterer Nachbar seines Vorgängers ist. $1 + \psi_\rho(u_{\mu+\nu})$ sei die Zahl der Elemente von $u_{\mu+\nu}$ in der β-ten Spalte; $\eta(u_{\mu+\nu}) = \sum \beta\psi_\beta(u_{\mu+\nu})$. Addiert man diese $u_{\mu+\nu}$ mit dem Koeffizienten $(-1)^{\eta(u_{\mu+\nu})}$, so erhält man die gewünschte Simplizialzerlegung von $(t_\mu; t_\nu)$.

Um

$$(M; z_\rho) \sim z_\rho \mathfrak{p}^*$$

zu beweisen, nehmen wir uns je ein willkürliches Simplex t_μ aus M und t_ν aus N und berechnen auf beiden Seiten den in $(t_\mu; t_\nu)$ liegenden Anteil. Wir können das auch so ausdrücken: Wir ersetzen M durch t_μ und N durch t_ν und beweisen

$$(t_\mu; t_\rho) = t^{\nu-\rho}\mathfrak{p}\mathfrak{d} \text{ mit } t_\rho = t^{\nu-\rho}\mathfrak{o}\mathfrak{d}_N .$$

Sind die Ecken von t_μ und t_ν wie oben numeriert, so verschwindet die linke Seite dann nur dann nicht, wenn $t_\rho = [0 \cdots \rho]$, also $t^{\nu-\rho} = [\rho \cdots \nu]$ ist; sie wird dann gleich der algebraischen Simplexsumme, gebildet aus der Matrix $\mathfrak{M}'$, die nur die 0-te bis ρ-te Spalte von $\mathfrak{M}$ umfaßt. Rechts hat man $t^{\nu-\rho}\mathfrak{p} = \sum [\alpha_\rho \rho \cdots \alpha_\nu \nu]$; zu $t^{\nu-\rho}\mathfrak{p}\mathfrak{d}$ liefert aber nur $[\mu\rho \cdots \mu\nu]$ einen Beitrag, und zwar gerade das, was wir links ausgerechnet haben. Für andere Wahlen von t_ρ verschwindet auch die rechte Seite, so daß unsere Gleichung bewiesen ist.

6. Wir zeigen nun, daß die Hopfsche Umkehrung [1] von Mannigfaltigkeitsabbildungen mit unserer übereinstimmt.

Die Hopfsche Umkehrung war so erklärt: Man bilde in $(M; N)$ das Lefschetzsche "Bild" von $\mathfrak{f}$, d.h. die Mannigfaltigkeit M', die aus den Punkten $(a; \mathfrak{f}a)$ zusammengesetzt ist. $(M; z_\rho) \times M'$ ist ein Zyklus in M' (wenn z_ρ einer in N ist); seine Projektion auf M ist das Umkehrungsbild von z_ρ. Wenn man M' als einen Repräsentanten von M auffaßt und $\mathfrak{f}$ durch die Projektion von M' auf N ersetzt, kann man sich die letzte Projektion übrigens sparen.

Nun ist nach 5e: $(M; z_\rho) \sim z_\rho \mathfrak{p}^*$, also $(M; z_\rho) \times M' \sim z_\rho \mathfrak{p}^* \times M'$. Das ist aber nach 5c und der letzten Bemerkung des vorigen Absatzes wesentlich nichts Anderes als $z_\rho \mathfrak{f}^*$. Damit ist die Äquivalenz bewiesen.

LITERATUR

siehe AG, außerdem:

H. FREUDENTHAL: 4. *Über die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Außenraumes abgeschlossener Mengen.* Compositio Math. *2* (1935), 163–176.

5. *Eine Simplizialzerlegung des Cartesichen Produktes zweier Simplexe.* Fundamenta Math. *29* (1937), 138–144.

H. HOPF: 1. *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.* Journ. f. d. r. u. angew. Math. *163* (1930), 71–88.

2. *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.* Math. Ann. *104* (1931), 637–665.

AMSTERDAM, HOLLAND.

Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Große Dimensionen [1937h]

Compositio Math. 5 (1937), 299–314
[JFM 63.1161.02; Zbl 0018.17705]

Mit dieser Arbeit soll eine Reihe von Untersuchungen über die Klassen der Sphärenabbildungen beginnen. Unsere Ergebnisse handeln von den Hurewiczschen Homotopiegruppen [1]); aber die Elemente der e-ten Homotopiegruppe $\pi_e(S^d)$ der d-dimensionalen Sphäre ($d>0$) sind ja im Wesentlichen die Klassen der Abbildungen der S^e in die S^d. Für $\pi_e(S^d)$ sagen wir kürzer auch (d^e). Wir dürfen $e-d=k>0$ voraussetzen und wollen Sphärenpaare mit demselben k zu einem „k-Stamm" zusammenfassen.

Um *zwei* Homomorphismen dreht sich unsere Untersuchung. Der erste wird erzeugt von der Hopfschen Klasseninvariante [2]) $\mathfrak{c}(f)$ von Abbildungen $f(S^e)\subset S^d$ mit $d=k+1$. Nichts hindert uns, $\mathfrak{c}(f)$ für alle $d\geqq k+1$ als definiert anzusehen; für $d>k+1$ hat man dann $\mathfrak{c}(f)\equiv 0$. (Für $d<k+1$ hätte man die Hopfschen Invarianten ganz neu zu definieren; wir gehen hier darauf nicht ein.) $\mathfrak{c}$ kann man auch auffassen als einen Homomorphismus

$$\mathfrak{c}(d^e)\subset(d^{k+1}) \quad (d\geqq k+1),$$

d.h. für $d=k+1$ in die Additionsgruppe der ganzen Zahlen und für $d>k+1$ in die Nullgruppe. Die durch $\mathfrak{c}(f)=0$ definierte Untergruppe von (d^e) heiße $(d^e)_0$; sie fällt für $d>k+1$ und bei ungeradem d auch für $d=k+1$ [3]) mit (d^e) zusammen. Die Faktorgruppe $(d^e)/(d^e)_0$ heiße auch $(d^e)^*$.

---

[1]) W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen, I—IV [Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), 112—119, 521—528; **39** (1936), 117—125, 215—224], insbesondere I.

[2]) H. Hopf, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche [Math. Ann. **104** (1931), 637—665], Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension [Fund. Math. **25** (1935), 427—440]. — Zitiert bzw. mit Hopf I, II.

[3]) Hopf II, Satz I.

Der andere Homomorphismus, die „Einhängung" ($\mathfrak{E}$ genannt), ist viel einfacherer Art, aber noch nirgends behandelt worden. $\mathfrak{E}$ ordnet einer Abbildung $f(S^e) \subset S^d$ zu eine Abbildung $\mathfrak{E}f(S^{e+1}) \subset S^{d+1}$ und zwar so: Man fasse S^d bzw. S^e als Äquatorsphäre von S^{d+1} bzw. S^{e+1} auf und setze f so fort, daß nördliche in nördliche und südliche in südliche Halbkugel übergehen. Man hat

$$\mathfrak{E}(d^e) \subset (d+1^{e+1}).$$

Es ist klar, daß für $d \geqq k$

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{E}(d^e)) = 0$$

ist. Wir werden aber beweisen:

Satz I: $\mathfrak{E}(d^e) = (d+1^{e+1})_0$ für $d \geqq k$.

Oder: dann und nur dann läßt sich eine Abbildungsklasse der S^e in die S^d $(d \geqq k+1)$ durch Einhängung erzeugen, wenn ihre Invariante verschwindet. — Für $d > k+1$ und für ungerades $d = k+1$ lassen sich also *alle* Klassen durch Einhängung erzeugen.

In zwei Richtungen läßt sich der Homomorphismus $\mathfrak{E}$ weiter untersuchen: erstens fragen wir „was geschieht bei Anwendung von $\mathfrak{E}$ mit $(d^e)_0$?", zweitens „was geschieht mit $(d^e)^*$?". Satz II und III antworten auf diese Fragen ziemlich vollständig.

Satz II: $\mathfrak{E}$ bildet $(d^e)_0$ *isomorph* ab (d.h. aus $\mathfrak{E}g = 0$ und $\mathfrak{c}(g) = 0$ folgt $g = 0$)

1.) für $d > k+1$,

2.) für *gerades* $d = k+1$,

3a.) für *ungerades* $d = k+1$, falls $(d+1^{e+2})$ ein Element mit der Invariante 1 enthält. — Im Falle

3b.) eines *ungeraden* $d = k+1$, für das $(d+1^{e+2})$ *kein* Element mit der Invariante 1 enthält, führt $\mathfrak{E}$ jedenfalls höchstens *die* Elemente von $(d^e)_0$ in die Null über, die die Ordnung zwei besitzen.

Bei der Anwendung dieses Satzes beachte man, daß in den Fällen 1 und 3 $(d^e) = (d^e)_0$ ist. — Der Fall 3a liegt sicher vor für $d = 1, 3, 7$.[4]) Ob Fall 3b überhaupt möglich ist, ist nicht bekannt.

Aus Satz I und II kann man die Folgerung ziehen:
In jedem k-Stamm bleiben von $d = k+2$ *an die Homotopie-*

[4]) Hopf II, Satz II'.

gruppen konstant. Der Schritt von $d = k + 1$ nach $d = k + 2$ (und für gerades k auch der Schritt von $d = k$ nach $d = k + 1$) zieht bei den Homotopiegruppen höchstens eine „Verkleinerung" nach sich.

SATZ III: Für gerades $d=k+1$ gilt:

Ist $g \in (d^e)$ und $\mathfrak{c}(g)$ *ungerade*, so ist $\mathfrak{E}g \neq 0$. Dagegen gibt es zu jedem $c \in \mathfrak{c}(d^e)$ ein $h \in (d^e)$ mit $\mathfrak{c}(h) = 2c$ und $\mathfrak{E}h = 0$. Oder:

a.) Wenn (d^e) ein Element mit der Invariante 1 besitzt, so enthalten die und nur die Restklassen von $(d^e)_0$ in (d^e), deren Invariante *gerade* ist, ein Element, das durch $\mathfrak{E}$ in die Null abgebildet wird.

b.) Sonst enthält jedenfalls mindestens jede Restklasse mit durch 4 teilbarer Invariante ein Element, das durch $\mathfrak{E}$ in die Null abgebildet wird.

Die Äquivalenz beider Formulierungen folgt daraus, daß alle geraden Werte der Invariante sicher auftreten (Hopf II, 431, Satz II').

Unsere Ergebnisse sind — im Gegensatz zu dem, was sonst über Sphärenabbildungen bekannt geworden ist [5]) — sehr allgemeiner Natur. Die speziellen Folgerungen, die man *ganz unmittelbar* aus ihnen ziehen kann, sind nicht sehr zahlreich. Wir erwähnen:

(3^4) enthält genau zwei Elemente. (Folgt aus IIIa, da $(2^3)_0$ nach I nur aus der 0 besteht [6]).)

(d^{d+1}) besteht für $d \geqq 3$ aus genau zwei Elementen. (Folgt nun aus I, II, 1.)

(2^4) enthält genau zwei Elemente. (Folgt nach Hurewicz [7]) aus dem Ergebnis für (3^4).)

(d^{d+2}) enthält höchstens zwei Elemente. [8])

(5^8) und (9^{16}) enthalten mindestens zwei Elemente. (Folgt aus IIIa.)

(d^{d+3}) für $d \geqq 4$ und (d^{d+7}) für $d \geqq 8$ enthalten mindestens zwei Elemente.

---

[5]) Das sind 1.) die Resultate von H. HOPF (a.a.O. [2])), 2.) ein Resultat von W. HUREWICZ (a.a.O. [7])) und 3.) das von L. PONTRJAGIN ohne Beweisskizze angekündigte vollständige Resultat [Kongreß Oslo 1936, II, 140] über den 1-Stamm und den 2-Stamm.

[6]) Dies Ergebnis hinsichtlich $(2^3)_0$ ist zuerst von W. Hurewicz bewiesen worden (I, 119).

[7]) I, 119, Zeile 4.

[8]) Das vollständige Resultat für den 2-Stamm (siehe [5])) scheint aus den hier entwickelten Sätzen nicht unmittelbar zu folgen; es ergibt sich aber auf einem Umweg aus den Sätzen, die ich für „kleine" Dimension zu begründen beabsichtige.

Ich hoffe aber, in weiteren Arbeiten mehr spezielle Ergebnisse begründen zu können. Unter anderm dadurch, daß ich für die „kleinen" Dimensionen der k-Stämme ($d \leqq k$) analoge Sätze beweisen werde, die allerdings eine Neudefinition der Hopfschen Invariante voraussetzen.

Satz I für $d > k$ (statt $d \geqq k$), Satz II für $d > k+1$ (statt $d > k$), Satz IIIa, wenn man sich auf „mindestens jede Restklasse . . ." beschränkt, und Satz IIIb darf man ganz elementar, ja fast trivial nennen. Wo aber die Hopfsche Invariante aktiv mitspielt, braucht man als tiefliegendes Hilfsmittel einen Hopfschen Überführungssatz. (Siehe [20].) Bei Satz I für $d > k$ und Satz II für $d > k+1$ kann man sogar alle kombinatorischen Methoden entbehren. Ich habe die leichteren Fälle nicht besonders behandelt, weise aber darauf hin, daß für diese Fälle die Betrachtungen aus 4—6 überflüssig sind und die aus 7—9 stark vereinfacht werden können.

1. *Homotopiegruppen.*

Für die e-te Homotopiegruppe $\pi_e(R)$ eines zusammenhängenden, im Kleinen zusammenziehbaren, separablen metrischen Raumes R hat man nach W. Hurewicz [9]) zwei Definitionen, die sich aber eigentlich nur dem Wortlaut nach voneinander unterscheiden:

1.) $\pi_e(R)$ ist die Wegegruppe (gleichgültig welcher Komponente) des Raumes derjenigen Abbildungen der S^{e-1} [10]) in R, bei denen ein fester Punkt in einen festen Punkt übergeht.

2.) Die Elemente von $\pi_e(R)$ sind die Klassen von Abbildungen der S^e in R, bei denen ein fester Punkt p in einen festen Punkt p' übergeht; die Gruppenoperation (Addition) zwischen zwei Abbildungsklassen, die durch $f_1(S^e) \subset R$ und $f_2(S^e) \subset R$ definiert seien, ist so erklärt: eine S^{e-1} mit $p \in S^{e-1}$ teile die S^e in zwei zueinander symmetrische Halbkugeln V_1^e und V_2^e; φ_ν bilde V_ν^e mit dem Grad 1 auf S^e ab ($\nu = 1, 2$), und es sei $\varphi_\nu(S^{e-1}) = p$; die Abbildung h, die auf V_ν^e ($\nu = 1, 2$) als $f_\nu \varphi_\nu$ erklärt ist, bestimmt die Summenklasse der Klassen von f_1 und f_2.

Die Äquivalenz beider Definitionen folgt unmittelbar daraus, daß man einen geschlossenen Weg von unwesentlichen Abbildungen der S^{e-1} in R mit der konstanten Abbildung anfangen und endigen lassen und daher als eine Abbildung der S^e in R auffassen kann.

[9]) I, 113—114.

[10]) Mit S werden immer Sphären, mit V Vollkugeln bezeichnet; obere Indices geben Dimensionen an.

Die Homotopiegruppen sind von der zweiten an abelsch [11]); für die Sphären ist übrigens auch die erste abelsch (sie besteht allein aus der Null).

2. *Homotopiegruppen von Sphären.*

Die e-te Homotopiegruppe $\pi_e(S^d)$ der Sphäre S^d nennen wir auch (d^e).

2.1. Bei der Feststellung der Wesentlichkeit oder Unwesentlichkeit einer Abbildung $f(S^e) \subset S^d$ übt die Forderung $f(p)=p'$ keinen Einfluß aus. Für $d > 1$ folgt das daraus, daß bei einer Überführung das Bild von p (nach simplizialer Approximation) einen eindimensionalen, also zusammenziehbaren Weg zurücklegt; für $d = 1$, $e > 1$ folgt es aus der Unwesentlichkeit aller derartigen Abbildungen und für $d = e = 1$ daraus, daß der Grad die Abbildungsklassen charakterisiert.

Wir werden daher — wo kein Mißverständnis möglich ist — mit f, g, h nicht nur Sphärenabbildungen, sondern auch zugehörige Abbildungsklassen und Elemente von Homotopiegruppen (d^e) bezeichnen. Die Mächtigkeit von (d^e) ist natürlich dieselbe wie die der Menge der Abbildungsklassen $f(S^e) \subset S^d$.

2.2. Sei $f_\nu \in (d^e)$ $(\nu=1, 2)$, $g \in (c^d)$. Dann gilt das distributive Gesetz

$$g(f_1 \pm f_2) = gf_1 \pm gf_2,$$

das aus der zweiten Definition der Homotopiegruppen unmittelbar folgt.

Dagegen braucht mit $f_\nu \in (c^d)$, $g \in (d^e)$ das *rechtsseitige* distributive Gesetz keineswegs zu gelten (siehe den Fall $c = d = 2$, $e = 3$).

3. *Einhängung.*

3.1. Aus einer Abbildung $f(S^e) \subset S^d$ konstruieren wir eine Abbildung $\mathfrak{E}f$, $\mathfrak{E}f(S^{e+1}) \subset S^{d+1}$, vermöge eines Prozesses, den wir „Einhängung" ($\mathfrak{E}$) nennen: Wir fassen S^d bzw. S^e als Äquatorsphäre von S^{d+1} bzw. S^{e+1} auf und setzen f so fort, daß nördliche in nördliche und südliche in südliche Halbkugel übergeht.

3.2. Will man — was nicht unbedingt nötig ist — $\mathfrak{E}f$ genauer festlegen, so verfahre man so: Man beschreibe einen Punkt der S^{d+1} bzw. S^{e+1} durch ein Paar (p', β) bzw. (p, β), in dem $p' \in S^d$, $p \in S^e$ und (die „geographische Breite") β reell und $|\beta| \leqq 1$ ist; dabei sollen alle Paare $(p', 1)$ bzw. $(p, 1)$ denselben Punkt (Nordpol

[11]) Hurewicz I, 114.

der S^{d+1} bzw. S^{e+1}) beschreiben, ebenso alle Paare $(p', -1)$ bzw. $(p, -1)$ (Südpol). Dann setze man $\mathfrak{E}f(p, \beta)=(f(p), \beta)$. [12])

3.3. Die „Breitensphäre" $\beta = \beta_0$ von S^{d+1} nennen wir $S^d_{\beta_0}$; die „Kappe" $\beta \geqq \beta_0$ bzw. $\beta \leqq \beta_0$ heiße auch $V^{d+1}_{\geqq\, 0}$ bzw. $V^{d+1}_{\leqq \beta_0}$; die „Zone" zwischen $S^d_{\beta_1}$ und $S^d_{\beta_2}$ heiße $V^d_{\beta_1,\beta_2}$. Analoges gelte bei S^{e+1}.

3.4. Gehören f und g zur gleichen Abbildungsklasse, so gilt das auch für $\mathfrak{E}f$ und $\mathfrak{E}g$. $\mathfrak{E}$ läßt sich also als ein zwischen Abbildungsklassen wirkender Operator auffassen. Aus der ersten Definition der Homotopiegruppen folgt unmittelbar, daß für $f, g \in (d^e)$ gilt

$$\mathfrak{E}(f \pm g) = \mathfrak{E}f \pm \mathfrak{E}g.$$

$\mathfrak{E}$ ist also ein *Homomorphismus*

$$\mathfrak{E}(d^e) \subset (d+1^{e+1}).$$

3.5. Sei $f \in (d^e)$, $g \in (c^d)$. Dann ist

$$\mathfrak{E}(gf) = \mathfrak{E}g \cdot \mathfrak{E}f.$$

3.6. Für alle Dimensionen bezeichne (-1) die Abbildungsklasse mit dem Grad -1 einer Sphäre auf sich. Man hat

$$\mathfrak{E}(-1)=(-1).$$

3.7. Sei f von der Form $\mathfrak{E}g$, $g \in (d^e)$. Dann ist $(-1)f = -f$. Deutet man nämlich (-1) als Spiegelung am Äquator der S^{e+1} bzw. S^{d+1} und wählt man für $\mathfrak{E}g$ speziell die Gestalt aus 3.2, so bemerkt man: $(-1)f = f \cdot (-1)$. Nach 2.2 ist $f \cdot (-1) = -f$, und daraus folgt die Behauptung.

3.8. $\mathfrak{E}((-1)g)=\mathfrak{E}(-g)$. — Das folgt aus 3.7, wenn man berücksichtigt, daß wegen 3.5 und 3.6 $\mathfrak{E}((-1)g)=\mathfrak{E}(-1) \cdot \mathfrak{E}g = (-1)\mathfrak{E}g$ ist.

3.9. Wir setzen $e - d = k$ und fassen Sphärenpaare mit denselben k zu einem „k-Stamm" zusammen. Durch die Einhängung kommen wir aus einem k-Stamm nicht heraus.

Von jetzt an soll immer $k > 0$ sein.

4. *Die Hopfsche Invariante.*

4.1. Alle kombinatorischen Begriffe beziehen sich, wo nichts Anderes bemerkt wird, auf die Additionsgruppe der ganzen

[12]) Die Einhängung wird so ein Spezialfall der „Verbindung" (siehe Verf. [Fund. Math. 29 (1937), 145—150]), nämlich Verbindung mit einer nulldimensionalen Sphäre.

Zahlen als Koeffizientenbereich. $\mathfrak{r}$ bezeichne die kombinatorische Randbildung. $\mathfrak{m}$ vor einem (algebraischen) Komplex bezeichne die diesem Komplex zugrundeliegende Menge (wir führen diese Bezeichnungsweise allerdings nicht ganz streng durch). S^d und S^e sollen immer mit einer bestimmten Orientierung gegeben sein. Bei der Einhängung seien dann S^{d+1}, S^d_β, $V^{d+1}_{\geqq\beta}$, $V^d_{\leqq\beta}$ stets so orientiert, daß $S^{d+1} = V^{d+1}_{\geqq\beta} + V^d_{\leqq\beta}$, $\mathfrak{r}V^{d+1}_{\geqq\beta} = -\mathfrak{r}V^{d+1}_{\leqq\beta} = S^d$ und Analoges für S^{e+1} usw. gelte.

4.2. Es sei K^{k+1} ein Komplex $\subset S^e$, $\mathfrak{r}K^{k+1} = Z^k$, $f(S^e) \subset S^d$, $f(\mathfrak{m}Z^k) = p'$, $e - d = k$, $d \geqq k+1$. Der Grad der Abbildung von K^{k+1} in S^d hat dann einen Sinn; er hängt nur von f und Z^k ab und werde mit $\mathfrak{c}_{Z^k}(f)$ bezeichnet.

4.3. $f(S^e) \subset S^d$ sei simplizial; p' sei innerer Punkt des Simplexes t'^d von S^d. Nach H. Hopf [13]) gibt es einen „Urbildzyklus" Z^k, dessen $\mathfrak{m}Z^k$ mit der Urbildmenge von p' identisch ist. Für $d \geqq k+1$ sei $\mathfrak{c}(f)$ erklärt als $\mathfrak{c}_{Z^k}(f)$ (das unabhängig von p' ist [13])). $\mathfrak{c}(f)$ ist die Hopfsche Klasseninvariante [13]). Für $d > k+1$ ist $\mathfrak{c}(f) \equiv 0$.

4.4. Für $d \geqq k+1$ und f, $g \in (d^e)$ gilt

$$\mathfrak{c}(f \pm g) = \mathfrak{c}(f) \pm \mathfrak{c}(g).$$

Das ergibt sich ohne weiteres aus der zweiten Definition der Homotopiegruppe, wenn man in 4.3 den Punkt p' so wählt, daß er verschieden von dem Punkt p' aus 1, 2 ist, und ferner in 4.3 K^{k+1} so, daß es den Punkt p aus 1, 2 nicht enthält.

Deutet man $\mathfrak{c}(f)$ und $\mathfrak{c}(g)$ als Abbildungsgrade (von S^d auf sich), so darf man auch sagen:

$\mathfrak{c}$ bildet (d^e) homomorph ab in (d^{k+1}).

4.5. Für $f = \mathfrak{E}g$ ist $\mathfrak{c}(f) = 0$. (Klar.)

Mit der Bezeichnung von 3.6 gilt:

4.6. $\mathfrak{c}((-1)f) = \mathfrak{c}(f)$. (Siehe Hopf I, 639, Eigensch. IIb'.)

5. *Ein Hilfssatz.*

5.1. Das $\mathfrak{m}Z^k$ aus 4.3 besitzt (nach geeigneter Unterteilung) die Eigenschaft:

α) Jedes Simplex u^{k-1} von $\mathfrak{m}Z^k$ liegt auf genau zwei u^k von $\mathfrak{m}Z^k$.

„Mindestens zwei" folgt daraus, daß Z^k ein Zyklus ist. — Das Urbild von p' innerhalb einer t^{e-2} von S^e ist höchstens $(k-2)$-dimensional, ein u^{k-1} von $\mathfrak{m}Z^k$ liegt also entweder in einem t^{e-1} oder sein Inneres liegt im Innern eines t^e. Daß u^{k-1} auf höchstens zwei u^k von $\mathfrak{m}Z^k$ liegt, folgt im ersten Fall daraus, daß

[13]) I, § 1—3.

jedes t^{e-1} auf höchstens zwei t^e liegt, im zweiten Fall daraus, daß der Schnitt von $\mathfrak{m}Z^k$ mit einem t^e eine konvexe Zelle ist.

5.2. Von Pseudomannigfaltigkeiten pflegt man außer (α) noch zu fordern:

(β) Je zwei u^k lassen sich verbinden durch eine Kette von u^k, in der zwei aufeinanderfolgende ein u^{k-1} zum Durchschnitt haben.

Da $\mathfrak{m}Z$ [14]) die Eigenschaft (α) besitzt läßt es sich (eindeutig) als Vereinigung verschiedener geschlossener Pseudomannigfaltigkeiten [14a]) $\mathfrak{m}Z_1, \ldots, \mathfrak{m}Z_r$ darstellen. Dabei ist natürlich

$$\mathfrak{c}_Z(f) = \mathfrak{c}_{Z_1}(f) + \ldots + \mathfrak{c}_{Z_r}(f).$$

Die $Z_1, \ldots, Z_r$ bilden eine k-dimensionale Homologiebasis für $\mathfrak{m}Z$ (daß sie Pseudomannigfaltigkeiten sind, spielt weiter keine Rolle).

5.3. Hilfssatz: Man darf f in seiner Abbildungsklasse so annehmen, daß (mit den Bezeichnungen von 5.2.)

$$\mathfrak{c}_{Z_1}(f)=\mathfrak{c}_Z(f),\ \mathfrak{c}_{Z_2}(f)= \ldots = \mathfrak{c}_{Z_r}(f)=0$$

ist.

6. *Beweis des Hilfssatzes.*

Der Beweis läßt sich anschaulich so beschreiben: Wir bringen in $\mathfrak{m}Z_1$ und $\mathfrak{m}Z_2$ je eine Ausbuchtung an, führen die Fronten der Ausbuchtungen miteinander zur Deckung und löschen sie dann aus. In $\mathfrak{m}Z_1$ und $\mathfrak{m}Z_2$ sind dann kleine Löcher geschnitten und durch einen Schlauch verbunden. Ebenso verfahren wir mit den übrigen $\mathfrak{m}Z_\nu$, bis eine einzige Pseudomannigfaltigkeit entstanden ist.

6.1. Mit den früheren Bezeichnungen sei U_ν die Vereinigung der t^e, die Punkte von $\mathfrak{m}Z_\nu$ enthalten ($\nu=1, \ldots, r$); $f(U_\nu)= t'^d$, $f(\mathfrak{m}Z_\nu)= p' \in t'^d$. Der (mengentheoretische) Rand von U_ν wird durch f in den von t'^d abgebildet; wird dabei ein Rand-t'^{d-1} von t'^d nicht überdeckt, so können wir durch „Eindrücken" von t'^d f so abändern, daß außerhalb U_ν nichts geändert wird und das Bild von U_ν t'^d, also auch p' nicht mehr überdeckt. Derartige Z_ν können wir also von vornherein weglassen.

6.2. Auf dem Rand von U_ν ($\nu=1, 2$) wählen wir einen Punkt q_ν so, daß $f(q_1) = f(q_2) = q'$ innerer Punkt eines Rand-t'^{d-1}

[14]) Wir lassen den Dimensionsindex ab und zu weg.

[14a]) Sogar als Vereinigung von Mannigfaltigkeiten. Aber das haben wir hier nicht nötig.

von t'^d ist. Es sei $q_\nu \in t_\nu^e \subset U_\nu$ $(\nu=1, 2)$. Im Innern von t_ν^e bestimmen wir einen Punkt p_ν von $\mathfrak{m}Z_\nu$ $(\nu=1, 2)$.

Der einfache Bogen C mit dem Parameter ξ $(|\xi| \leqq 1)$ bestehe aus folgenden Stücken:

$-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq +\frac{1}{2}$: Streckenzug von q_1 nach q_2, der $\mathfrak{m}Z$, t_1^e, t_2^e sonst nirgends trifft.

$-\frac{3}{4} \leqq \xi \leqq -\frac{1}{2}$: Strecke von p_1 nach q_1 (in t_1^e gelegen).
$\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq \frac{3}{4}$: Strecke von q_2 nach p_2 (in t_2^e gelegen).
$-1 \leqq \xi \leqq -\frac{3}{4}$: Verlängerung von p_1q_1 über p_1 (in t_1^e).
$\frac{3}{4} \leqq \xi \leqq 1$: Verlängerung von p_2q_2 über p_2 (in t_2^e).

Man darf f (ohne Schaden für die Urbildmenge von p') als so abgeändert voraussetzen, daß C nebst einer kleinen Umgebung durch f in q' abgebildet wird.

D sei eine (der e-dimensionalen Vollkugel homöomorphe) Teilmenge dieser Umgebung, die in einem geeigneten cartesischen Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_{e-1}, \xi$ die Gestalt

$$D = (|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_{e-1}| \leqq 1, |\xi| \leqq 1)$$

besitze. Dabei soll

$$C = (x_1 = x_2 = \ldots = x_{e-1} = 0)$$

mit ξ als dem oben definierten Parameter sein; ferner [15])

$$\begin{aligned}
D \wedge \mathfrak{m}Z_1 &= (x_{k+1} = \ldots = x_{e-1} = 0,\ \xi = -\tfrac{3}{4}),\\
D \wedge \mathfrak{m}Z &= (x_{k+1} = \ldots = x_{e-1} = 0,\ \xi = +\tfrac{3}{4}),\\
D \wedge U_1 &= (\xi \leqq -\tfrac{1}{2}),\\
D \wedge U_2 &= (\xi \geqq +\tfrac{1}{2}),\\
f(x_1, \ldots, x_{e-1}, \xi) &= f(x_1, \ldots, x_{e-1}, -\xi) \text{ für } |\xi| \geqq \tfrac{1}{2},\\
f(x_1, \ldots, x_{e-1}, \xi) &= q' \text{ für } |\xi| \leqq \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$\varphi_\tau(\xi)$ sei eine stetige, aber nicht überall erklärte und nicht überall eindeutige Funktion $(0 \leqq \tau \leqq 1)$:

$$\varphi_\tau(-1) = -1,\ \varphi_\tau(+1) = +1 \text{ für } \tau \neq 1,$$
$$\varphi_1(\pm 1) = \text{alle Zahlen vom Betrage} \leqq 1,$$
$$\varphi_\tau(\xi) \text{ bildet } \begin{matrix} -1 \leqq \xi \leqq -\tau \\ \tau \leqq \xi \leqq 1 \end{matrix} \text{ linear auf } \begin{matrix} -1 \leqq \xi \leqq 0 \\ 0 \leqq \xi \leqq 1 \end{matrix} \text{ ab},$$
$$\varphi_\tau(\xi) \text{ ist unerklärt für } -\tau < \xi < \tau.$$

Wir setzen:

[15]) $\wedge$ ist das Zeichen für die Durchschnittbildung.

$$\psi_\tau(x_1, \ldots, x_{e-1}, \xi) \begin{matrix} = (x_1, \ldots, x_{e-1}, \varphi_\tau(\xi)) \\ = (x_1, \ldots, x_{e-1}, \alpha\varphi_\tau(\xi)+(1-\alpha)\xi) \end{matrix} \text{ für } \operatorname{Max}|x_\nu| \begin{matrix} \leqq \frac{1}{2}, \\ = 1-\frac{1}{2}\alpha \geqq \frac{1}{2}. \end{matrix}$$

χ_τ sei die Umkehrung von ψ_τ; obwohl sie nicht eindeutig ist, ist

$$f_\tau(a) = f(\chi_\tau(a))$$

eindeutig stetig.

Man überzeugt sich leicht davon, daß bei der stetigen Abänderung f_1 von f das Urbild von p' so aussieht: $Z_3, \ldots, Z_r$ sind unverändert geblieben; in $\mathfrak{m}Z_1$ und in $\mathfrak{m}Z_2$ ist ein Loch geschnitten (konzentrisch zu $D \wedge \mathfrak{m}Z_1$ bzw. $D \wedge \mathfrak{m}Z_2$), und diese Löcher sind durch einen (in D liegenden) Schlauch verbunden. Wiederholt man diesen Prozeß mit den andern Z_ν, so erhält man schließlich eine stetige Abänderung f^* von f, bei der das Urbild von p' eine einzige Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{m}Z^*$ ist. Es ist klar, daß $\mathfrak{c}_{Z^*}(f^*) = \mathfrak{c}_Z(f) = \mathfrak{c}(f)$ ist. Für die Anwendungen würde das genügen, wir tun aber noch ein Übriges und machen f^* wieder simplizial. [16])

6.3. Dabei kann es allerdings passieren, daß $\mathfrak{m}Z^*$ den Charakter einer Pseudomannigfaltigkeit verliert. Nun können wir die simpliziale Approximation f^{**} von f^* doch so wählen, daß außerhalb einer Umgebung U^* von $\mathfrak{m}Z^*$ keine neuen Urbilder von p' auftreten; U^* soll hier so bestimmt sein, daß jeder k-dimensionale Zyklus aus U^* in U^* einem Zyklus aus $\mathfrak{m}Z^*$ (also, da $\mathfrak{m}Z^*$ Pseudomannigfaltigkeit ist, einem Vielfachen von Z^*) homolog ist. Außerdem dürfen wir doch auf einigen Abstand von den Löchern und Schläuchen, wo bei allen Abänderungen die Abbildung simplizial geblieben ist, Z^{**} als im Wesentlichen [17]) mit Z^* identisch annehmen. $\mathfrak{m}Z^{**}$ besteht also aus einer Pseudomannigfaltigkeit, die als Zyklus in U^* mit Z^* homolog ist, und weiteren Bestandteilen, die in U^* homolog Null sind.

---

[16]) Ich führe das darum aus, weil die dafür in 6.3 entwickelte Methode auch sonst nützlich sein kann — besonders bei Beispielen, bei denen die Abbildung im Allgemeinen nicht in simplizialer Form gegeben sein wird.

[17]) Da man die Bildsphäre unterteilt, wird man gezwungen, auch auf größeren Abstand von Löchern und Schläuchen wieder für die Simplizialität zu sorgen. Sei u'^d das p' als inneren Punkt enthaltende Unterteilungssimplex. Im Innern eines t'^e benimmt sich das f-Urbild von u'^d wie das cartesische Produkt eines k-dimensionalen Simplexes (das in p' abgebildet wird) und eines d-dimensionalen Simplexes. Teilt man das cartesische Produkt etwa so unter, wie ich es in Fund. Math. **29** (1937), 138—142 angegeben habe, so erleidet auf größeren Abstand von Löchern und Schläuchen $\mathfrak{m}Z^*$ beim Übergang zu $\mathfrak{m}Z^{**}$ nur eine kleine Verschiebung in eine homöomorphe Menge.

War U^* klein genug gewählt, so sind wir jetzt bei der Behauptung des Hilfssatzes angelangt.

7. *Beweis von Satz I.*

In 7 sei $f \in (d^e)$, $d \geqq k$.

7.1. Um Satz I zu beweisen, braucht man nur (unter der Voraussetzung $\mathfrak{c}(f)=0$) f in seiner Abbildungsklasse so zu ermitteln, daß das Urbild von p' aus genau *einem* Punkt p besteht. Dann kann man nämlich S^e in zwei Vollkugeln V_1^e, V_2^e zerlegen (V_1^e = kleine Umgebung von p, $V_2^e = \overline{S^e \setminus V^e}$ [18]), so daß weder $f(V_1^e)$, noch $f(V_2^e)$ ganz S^e überdecken. Eine einfache Abänderung bringt dann f auf die Gestalt $\mathfrak{E}g$ in der Form von 3.2.

Um zu erreichen, daß das Urbild von p' ein einziger Punkt p wird, verfahren wir so: 1.) Das Urbild $\mathfrak{m}Z^k$ von p (das bereits die in 5.3 angegebene Gestalt habe) projizieren wir aus dem Punkt $p \in \mathfrak{m}Z^k$; dabei entsteht eine (sternige) Menge L. 2.) Unter Festhaltung auf $\mathfrak{m}Z^k$ ziehen wir das Bild von L auf p' zusammen, so daß L die gesamte Urbildmenge von p' wird; dabei machen wir von $\mathfrak{c}(f) = 0$ wesentlich Gebrauch. 3.) Schließlich ziehen wir L selbst in sich auf p zusammen.

Diese drei Schritte wollen wir jetzt ausführen.

7.2. p' sei wieder innerer Punkt eines $t'^d \subset S^d$; u'^d sei ein Unterteilungssimplex im Innern von t'^d und p' innerer Punkt von u'^d. Z^k sei der Urbildzyklus von p', U die Urbildmenge von u'^d, p ein Punkt von $\mathfrak{m}Z^k$. Man beachte, daß jeder k-dimensionale Zyklus mod m ($=0, 2, \ldots$) aus U in U einem Zyklus aus $\mathfrak{m}Z^k$ homolog ist.

Wir setzen nun $\mathfrak{c}(f) = 0$ voraus. Nach 5.3 dürfen wir dann annehmen, daß $\mathfrak{c}_{Z_\nu}(f) = 0$ ist für alle Pseudomannigfaltigkeiten $\mathfrak{m}Z_\nu^k$ ($\nu=1, \ldots, r$), aus denen sich $\mathfrak{m}Z^k$ zusammensetzt.

Nachdem wir einen nicht auf $\mathfrak{m}Z^k$ liegenden Punkt als unendlichfernen Punkt ausgezeichnet haben, fassen wir nun eine Weile S^e als euklidischen Raum auf. Wir verbinden p geradlinig mit $\mathfrak{m}Z^k$; die Vereinigung der Verbindungsstrecken heiße L. Weiter verbinden wir p geradlinig mit den Zyklen Z^k bzw. $Z_1^k, \ldots, Z_r^k$ und erhalten Komplexe K^{k+1} bzw. $K_1^{k+1}, \ldots, K_r^{k+1}$; $\mathfrak{r}K_\nu^{k+1} = Z_\nu^k$.

K^{*k+1} sei ein Zyklus mod m in L bis auf U. $\mathfrak{r}K^{*k+1}$ ist dann in U homolog einer Linearkombination der Z_ν^k (wobei in den Z_ν^k evtl. die Koeffizienten durch ihre Restklassen mod m zu

[18]) $A \setminus B$ bezeichnet die Menge der Punkte von A, die nicht zu B gehören.

ersetzen sind). K^{*k+1} ist also bis auf U mod m von der Form $\Sigma\alpha_\nu K_\nu^{k+1} + (k+1)$-dimensionaler Zyklus, wird also (bis auf $f(U) = u'^d$) mit dem Grad Null in S^d abgebildet. D.h. jeder Zyklus mod m in L bis auf U wird vom Grad 0 abgebildet [19]).

7.3. Nun können wir einen Überführungssatz von H. Hopf [20]) anwenden. Die Abbildung $f(\overline{L \setminus U}) \subset \overline{S^d \setminus u'^d}$ läßt sich (bei Festhaltung auf dem Durchschnitt mit U) stetig überführen in eine Abbildung $f_1(\overline{L \setminus U}) \subset \mathfrak{r}u'^d$. Man darf sich f_1 fortgesetzt denken zu einer Abbildung $f(\overline{S^e \setminus U}) \subset \overline{S^d \setminus u'^d}$, die auf dem Durchschnitt mit U übereinstimmt mit f. Erklärt man schließlich f_1 in U als mit f identisch, so hat man

$$f_1(S^e) \subset S^d,$$
$$f_1(\overline{S^e \setminus U}) \subset \overline{S^d \setminus u'^d},$$
$$f_1(\overline{L \setminus U}) \subset \mathfrak{r}u'^d,$$
$$f_1 = f \text{ in } U.$$

f_1 ändern wir ab in f_2: Für ein q im Abstande $\varrho \leqq \varepsilon$ [20a]) von L durchlaufe $f_{1+\tau}(q)$ in Abhängigkeit von τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ die Strecke von $f_1(q)$ nach p' gleichförmig bis zu *dem* Punkte, der diese Strecke im Verhältnis $\varepsilon - \varrho$ zu ϱ teilt; für die q im Abstande $\varrho \geqq \varepsilon$ sei $f_{1+\tau} \equiv f$.

f_2 bildet die Menge L und nicht mehr als L in p' ab.

7.4. Für ein q im Abstande $\varrho \leqq \eta$ von L durchlaufe $\varphi_\tau(q)$ in Abhängigkeit von τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ die Strecke von q nach p gleichförmig bis zu *dem* Punkte, der diese Strecke im Verhältnis $\eta - \varrho$ zu ϱ teilt, für die q im Abstande $\varrho \geqq \eta$ sei $\varphi_\tau(q) = q$.

$\psi_\tau(q)$ sei die Umkehrung von $\varphi_\tau(q)$. Wir setzen

[19]) Man bemerkt, wieviel Überlegungen man sich für $d > k+1$ sparen kann.

[20]) Es handelt sich um den Überführungssatz aus Rec. Math. Moscou **37** (1930), 53—62, Satz II*: A sei ein Teilpolytop des höchstens n-dimensionalen Polytops B, S sei die Randsphäre des n-dimensionalen Simplexes T; eine Abbildung f mit $f(A) \subset S$, $f(B) \subset T$ läßt sich dann und nur dann unter Festhaltung auf A überführen in (oder, was auf dasselbe hinauskommt, ersetzen durch) eine Abbildung $g(B) \subset S$, wenn jeder Zyklus mod $m (= 0, 2, \ldots)$ aus B bis auf A mit dem Grad 0 mod m abgebildet wird. Siehe auch ALEXANDROFF-HOPF, Topologie (Berlin 1935), 508, Satz IV. — Den Überführungssatz haben wir hier so *anzuwenden*, daß die Rolle von B durch $\overline{L \setminus U}$, die von T durch $\overline{S^d \setminus u'^d}$, die von A durch den Rand von B, die von S durch den Rand von T übernommen wird.

Für $d > k+1$ können wir den Überführungssatz natürlich entbehren.

[20a]) ε wähle man so, daß das Bild einer ε-Umgebung von L nicht ganz S^d überdeckt; dann kann man nämlich, wie es in diesem Absatz geschieht, S^d wie einen euklidischen Raum behandeln.

$$f_{2+\tau} = f_2(\psi_\tau(q));$$

f_3 bildet p und nicht mehr als p in q' ab, besitzt also die Gestalt, die wir nach 7.1 anzustreben hatten.

8. *Vorbereitungen zu Satz II und III.*

In 8 sei $g \in (d^e)$, $d \geqq k+1$ und $f = \mathfrak{E}g = 0$.

8.1. $f = \mathfrak{E}g$ sei zu g wie in 3.2 konstruiert (das dortige f heißt jetzt g, das dortige $\mathfrak{E}f$ jetzt f) und danach simplizial approximiert; da f unwesentlich sein soll, darf es als auf eine von der S^{e+1} berandete V^{e+2} fortgesetzt angenommen werden, $f(V^{e+2}) \subset S^{d+1}$.

$p' \in S^{d+1}$ sei innerer Punkt eines t'^{d+1} und liege auf der Breitensphäre S^d_β $(-1<\beta<1)$ (siehe 3.3). Der Urbildzyklus von p' in S^{e+1} heiße wieder Z^k, der Urbildkomplex von p' in V^{e+2} heiße Y^{k+1} [21]; $\mathfrak{r}Y^{k+1} = Z^k$ [22]). Z^k liegt im Wesentlichen in der Breitensphäre S^e_β (in Wirklichkeit kann die simpliziale Approximation eine Verschiebung verursacht haben, die wir aber getrost vernachlässigen dürfen). Z^k berandet in S^e_β ein K^{k+1};

$$Y^{k+1} - K^{k+1} = Z^{k+1} \tag{8.11}$$

ist ein Zyklus.

$f(\mathfrak{m}Y^{k+1}) = p'$; $f(K^{k+1}) = \mathfrak{c}(g)S^d_\beta$. Z^{k+1} berandet in V^{e+2} ein K^{k+2};

$$\mathfrak{r}K^{k+2} = Z^{k+1}, \tag{8.12}$$

$$\mathfrak{r}f(K^{k+2}) = f\mathfrak{r}(K^{k+2}) = \mathfrak{c}(g)S^d_\beta.$$

$f(K^{k+2})$ überdecke die Kappe $V^{d+1}_{\geqq\beta}$ (siehe 3.3) $\mathfrak{c}'$-mal, die Kappe $V^{d+1}_{\leqq\beta}$ (siehe 3.3) $\mathfrak{c}''$-mal. Für $\mathfrak{c}(g)$ schreiben wir kurz $\mathfrak{c}$. Dann ist

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' - \mathfrak{c}''.$$

8.2. $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ hängen von der Wahl von K^{k+2} nicht ab, da eine Änderung von K^{k+2} nur eine Änderung um das Bild eines (berandenden) Zyklus bei $f(K^{k+2})$ nach sich zieht.

$\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ hängen auch von der Wahl von K^{k+1} nicht ab, denn eine Änderung von K^{k+1} zieht nur nach sich eine von Z^{k+1} um einen in S^e_β liegenden und dort berandenden Zyklus, also von K^{k+2} um etwas in S^e_β Liegendes, dessen Bild $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ nicht beeinflußt.

8.3. $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ hängen schließlich auch von der Wahl von p'

[21]) Siehe Hopf I, § 2, 3.

[22]) Siehe Hopf I, § 2, 5.

nicht ab. Um das zu zeigen, wählen wir Punkte p'_ν mit den Breiten β_ν ($\nu=1, 2$). Zu p'_ν bestimmen wir Z^k_ν, Y^{k+1}_ν, K^{k+1}_ν, Z^{k+1}_ν, K^{k+2}_ν wie früher. $Z^{k+1}_{1\ldots2}$ und $Y^{k+2}_{1\ldots2}$ seihen die Urbildkomplexe eines in $V^{d+1}_{\beta_1,\beta_2}$ liegenden, von p'_1 nach p'_2 gerichteten Streckenzuges, und zwar bzw. genommen in S^{e+1} und V^{e+2}. Man hat dann

$$\mathfrak{r}Y^{k+2}_{1\ldots2} = Y^{k+1}_2 - Y^{k+1}_1 - Z^{k+1}_{1\ldots2},$$

$$\mathfrak{r}Z^{k+1}_{1\ldots2} = Z^k_2 - Z^k_1.$$

Wir bilden

$$L^{k+2} = K^{k+2}_2 - K^{k+2}_1 - Y^{k+2}_{1\ldots2}.$$

Da $\mathfrak{m}Y^{k+2}$ in einen Streckenzug abgebildet wird, genügt es, wenn wir jetzt beweisen, daß Nord- und Südpol durch $f(L^{k+2})$ mit dem Grad Null überdeckt werden. Wegen 8.11 und 8.12 hat man

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}L^{k+2} &= Z^{k+1}_2 - Z^{k+1}_1 - Y^{k+1}_2 + Y^{k+1}_1 + Z^{k+1}_{1\ldots2}\\ &= -K^{k+1}_2 + K^{k+1}_1 + Z^{k+1}_{1\ldots2}.\end{aligned}$$

Dieser in $V^{e+1}_{\beta_1,\beta_2}$ liegende Zyklus berandet dort ein M^{k+2},

$$\mathfrak{r}L^{k+2} = \mathfrak{r}M^{k+2}.$$

Da sich L^{k+2} und M^{k+2} nur um einen (berandenden) Zyklus unterscheiden, brauchen wir nur nachzuweisen, daß $f(M^{k+2})$ Nord- und Südpol mit dem Grade Null überdeckt. Wegen $\mathfrak{m}M^{k+2} \subset V^{e+2}_{\beta_1,\beta_2}$ gilt aber sogar $f(\mathfrak{m}M^{k+2}) \subset V^{d+1}_{\beta_1,\beta_2}$, womit unser Beweisziel erreicht ist.

8.4. Seien wieder p'_1 und p'_2 zwei Punkte mit den Breiten β_1, β_2 ($\beta_1>\beta_2$) und Z^{k+1}_1, Z^{k+2}_2 die zugehörigen Zyklen. Die Verschlingungszahl

$$\mathfrak{v}(Z^{k+1}_\mu,\ Z^{k+1}_\nu)$$

sei als Schnitt von K^{k+2}_μ und Z^{k+1}_ν erklärt. Man hat dann (siehe das Analoge bei H. Hopf [23]))

$$\mathfrak{c}' = \varepsilon\mathfrak{v}(Z^{k+1}_2, Z^{k+1}_1),\ \mathfrak{c}'' = \varepsilon\mathfrak{v}(Z^{k+1}_1, Z^{k+1}_2).\ [24])$$

8.5. Für $d > k+1$ ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = \mathfrak{c}'' = 0$. — Für gerades $d = k+1$ ist $\mathfrak{v}$ antisymmetrisch [25]), also $\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}'' = 0$; andererseits $\mathfrak{c}' - \mathfrak{c}'' = \mathfrak{c}$, also $2\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}$.

[23]) II, 429 unten.

[24]) Das Vorzeichen ε hängt nur von der Dimension ab; siehe a.a.O. [23]).

[25]) Hopf II, 430, § 2, 5.

8.6. Für $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = 0$ (und $\mathfrak{E}g=0$) ist $g = 0$. — Denn man darf wegen $\mathfrak{c} = 0$ (wie in 7) f in S^e_β (und höchstens noch einer kleinen Umgebung) so abändern, daß $f(\mathfrak{m}K^{k+1})$, also auch $f(\mathfrak{m}\mathfrak{r}K^{k+2})$ ein einzelner Punkt wird. K^{k+2} wähle man dabei wieder sternig und ziehe dann (genau wie in 7, nun aber unter Verwendung von $\mathfrak{c}' = 0$) erst das Bild von K^{k+2} (bei Festhaltung auf $\mathfrak{m}\mathfrak{r}K^{k+2}$) und dann K^{k+2} selbst auf einen Punkt zusammen. So erreicht man, daß bei $f(V^{e+2}) \subset S^{d+1}$ ein gewisser Punkt (etwa der Nordpol) nur *ein* Urbild (etwa den Nordpol) besitzt. In S^{e+1} hat sich dabei nichts Wesentliches ereignet, d.h. in jeder Breitensphäre S^e_β ist f als stetige Abänderung von g aufzufassen. Das Bild einer Breitenkugel V^{e+1}_β in genügender Nähe des Nordpols überdeckt natürlich den Südpol nicht, aber auch nicht den Nordpol (dessen Urbildmenge ja aus dem Nordpol besteht). Damit läßt sich aber $f(S^e_\beta) \subset S^d_\beta$ fortsetzen zu $f(V^e_\beta) \subset S^d_\beta$, so daß in der Tat g unwesentlich ist.

9. *Beweis von Satz II.*

In 9 sei $d \geqq k+1$, $g \in (d^e)$, $\mathfrak{c}(g) = 0$, $\mathfrak{E}g = 0$.

9.1. Für $d > k+1$ und gerades $d = k+1$ hat man nach 8.5 $\mathfrak{c}' = 0$, also nach 8.6 Unwesentlichkeit von g.

9.2. Gibt es ein $\psi \in (d+1^{e+2})$ mit der Invariante $-\mathfrak{c}'$, so verfahre man so: Man ersetze f (siehe 8.1) durch die kleine Abänderung f_1, die auf S^{e+1} mit f übereinstimme und eine zu K^{k+2} fremde Vollkugel V^{e+2}_1 aus dem Innern von V^{e+2} in *einen* Punkt abbilde. φ bilde V^{e+2}_1 auf eine S^{e+2}_1 ab und zwar das Innere topologisch und den Rand in einen Punkt; ψ bilde S^{e+2}_1 in S^{d+1} mit der Invariante $-\mathfrak{c}'$ ab. Wir setzen

$$f_2 = \psi\varphi \text{ in } V^{e+2}_1,$$

$$f_2 = f_1 \text{ sonst.}$$

f_2 ist auf S^{e+1} mit f identisch; $\mathfrak{c}'$ hat aber für f_2 den Wert Null erhalten, so daß wir nach 8.6 wieder auf die Unwesentlichkeit von g schließen können.

9.3. Gibt es in $(d+1^{e+2})$ ein Element mit der Invariante 1, so gibt es sicher auch ein Element mit beliebiger Invariante $-\mathfrak{c}'$ und wir können 9.2 anwenden. Andernfalls tritt aber bei ungeradem $d = k+1$ immer noch jede *gerade* Zahl als Invariante auf [26]). Wie man leicht sieht, kann man die Fortsetzung von

[26]) Hopf II, Satz II′.

$f^* = 2f = \mathfrak{E}2g$ ($f^*(S^{e+1}) \subset S^{d+1}$) so einrichten, daß $\mathfrak{c}'(f^*)=2\mathfrak{c}'(f)$ wird. Da das *gerade* ist, können wir 9.2 immerhin auf $f^* = 2f$ anwenden und auf die Unwesentlichkeit von $2g$ schließen.

Damit ist Satz II vollständig bewiesen.

10. *Beweis von Satz III.*

Es sei $g \in (d^e)$, $f = \mathfrak{E}g$, $d = k + 1$ gerade. 8.5 lehrt: Ist f unwesentlich, so ist notwendig $\mathfrak{c}(g)$ gerade. Damit ist eine Hälfte von IIIa bewiesen.

$\mathfrak{c}(g) \in \mathfrak{c}(d^e)$ sei ein tatsächlich auftretender Wert der Invariante ($d=k+1$ gerade). Wir setzen $h=g+(-1)g$. Dann ist (nach 3.8) $\mathfrak{E}h = 0$ und (nach 4.6 mit g statt f) $\mathfrak{c}(h) = 2\mathfrak{c}(g)$. Da entweder alle ganzen oder alle geraden Zahlen als Werte der Invariante auftreten, ist III damit vollständig bewiesen.

(Eingegangen den 4. September 1937.)

Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. I [1941]

Ann. of Math. (2) 42 (1941), 1051–1074
[MR 0005740]

(Received November 15, 1940)

Daß man die Topologie der Lieschen Gruppen nicht rein gruppentheoretisch erfassen kann, ist bekannt. Desto merkwürdiger ist der zuerst von E. Cartan,[1] danach (ohne Kenntnis der Cartanschen Arbeit) andersartig von B. L. v. d. Waerden[2] bewiesene Satz:

Ein Isomorphismus zwischen zwei *halbeinfachen kompakten* Lieschen Gruppen ist notwendig stetig.

Daß die Halbeinfachheit allein die Gültigkeit des Satzes nicht gewährleistet, zeigt das laut v. d. Waerden von J. v. Neumann herrührende Beispiel:

In der Gruppe $\mathfrak{g}$ der komplexen Matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit der Determinante 1 kann man durch unstetige Automorphismen f des Körpers der komplexen Zahlen unstetige Automorphismen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(\alpha) & f(\beta) \\ f(\gamma) & f(\delta) \end{pmatrix}$$

definieren.

Diese Gruppe $\mathfrak{g}$ ist nun als Liesche Gruppe von 6 reellen Parametern $(\Re_\alpha, \Re_\beta, \Re_\gamma, \Im_\alpha, \Im_\beta, \Im_\gamma)$ einfach (bis auf einen diskreten Normalteiler), und doch fehlt dem Beispiel die rechte Überzeugungskraft. Und das kommt so: Bei der reellen Klassifikation der *reellen einfachen* nichtabelschen Gruppen[3] unterscheidet man die

erster Art, die *komplex nicht mehr einfach* (sondern direktes Produkt zweier konjugierter einfacher Gruppen sind), und die

zweiter Art, die *auch komplex einfach* sind.

Die erster Art lassen sich, wie man leicht beweist,[4] alle so erzeugen: Man nehme eine reelle einfache nichtabelsche Gruppe, setze sie ins Komplexe fort und trenne Real- und Imaginärteil; diesen Prozeß, der die Dimensionszahl verdoppelt, wollen wir "Verdoppelung" nennen.

Eine Gruppe erster Art haben wir gerade in obigem Beispiel angetroffen. So

[1] E. Cartan, Sur les représentations linéaires des groupes clos [Comment. Helvet. **2** (1930), 269–283].

[2] B. L. van der Waerden, Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen [Math. Zeitschr. **36** (1933), 780–786].

[3] E. Cartan, Les groupes réels simples, finis et continus [Ann. Ecole Norm. Sup. (3) **31** (1914), 263–355].

[4] a. a. O.,[3] 266–267.

beschleicht uns der Verdacht, daß für den Cartan-v.d.Waerdenschen Satz nicht die Kompaktheit, sondern die Zugehörigkeit der einfachen Gruppe zur zweiten Art verantwortlich sei.

In der Tat beweisen wir den

HAUPTSATZ I: *Ein Isomorphismus zwischen zwei Lieschen Gruppen, von denen die eine einfach und von zweiter Art ist, ist notwendig stetig. Oder: Im Bereiche der Lieschen Gruppen ist die Topologie der einfachen Gruppen zweiter Art ein rein algebraisches Phänomen.*

(In der letzten Formulierung ist der Hauptsatz auch sinnvoll für jemanden, der unstetige Abbildungen überhaupt ablehnt—etwa aus intuitionistischen Erwägungen.)

BEMERKUNG 1: Der Hauptsatz bleibt gültig, wenn man die Einfachheit nur im Kleinen fordert.

BEMERKUNG 2: Hauptsatz I läßt sich in naheliegender Weise auf halbeinfache Gruppen ausdehnen (siehe v. d. Waerden, a.a.O.,[2] S. 785).

BEMERKUNG 3: Für die reellen projektiven Gruppen ist Hauptsatz I bereits von O. Schreier und B. L. van der Waerden bewiesen worden.[4a]

Man wird vermuten, daß die Aussage von Hauptsatz I für keine einfache Gruppe erster Art richtig sei; auf die nicht so ganz leichte Aufzählung aller Isomorphismen für Gruppen erster Art werde ich bald zurückkommen. Ich beabsichtige, dieselben Fragen auch für nicht-halbeinfache Gruppen zu beantworten; für die Gültigkeit von Hauptsatz I ist nämlich etwas wie die Zugehörigkeit zur zweiten Art wichtiger als die Halbeinfachheit.

Den Gedankengang unseres Beweises erkennt man leicht aus der Gliederung der Arbeit in die Sätze 1 – 9. Nur auf Satz 1 und seine wohl an und für sich interessanten Anwendungen will ich besonders hinweisen.

ALLGEMEINE BEZEICHNUNGEN

1. Gruppen: kleine gotische Buchstaben.
Elemente von Gruppen: kleine lateinische Buchstaben.
Gruppen-Eins: 1.
Infinitesimalgruppen: große gotische Buchstaben.
Elemente von Infinitesimalgruppen: große lateinische Buchstaben.
Mengen von Gruppen: kleine fette gotische Buchstaben.
Mengen von Infinitesimalgruppen: große fette gotische Buchstaben.
Meistens werden Gruppe und zugehörige Infinitesimalgruppe mit demselben Buchstaben bezeichnet (klein und groß).
$\cap$ = Durchschnitt, $\cup$ = Vereinigung.

Vorbereitungen—Liesche Gruppen

2. Liesche Gruppe ist bei uns jede Gruppe, die von einer Infinitesimalgruppe erzeugt wird. Wir finden es zweckmäßig, von einer Lieschen Untergruppe *nicht* (wie es manchmal geschieht) Abgeschlossenheit zu verlangen.

Unter einer *Basis* einer Infinitesimalgruppe $\mathfrak{G}$ verstehen wir ein System, aus

[4a] Die Automorphismen der projektiven Gruppen [Abh. Hamburg **6**(1928), 303–322].

dem sich alle Elemente von $\mathfrak{G}$ eindeutig linear kombinieren lassen; ein *Erzeugendensystem* von $\mathfrak{G}$ sei dagegen ein System, aus dem sich alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durch lineare Kombination und Kommutatorbildung herstellen lassen.

3. In Lieschen Gruppenkeimen verwendet man öfters geodätische Koordinatensysteme: Ist $X_1, \cdots, X_r$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, so erhält der Punkt

$$\exp\left(\sum_\nu \lambda^\nu X_\nu\right)$$

die Koordinaten

$$\lambda^1, \cdots, \lambda^r.$$

Alle geodätische Koordinatensysteme transformieren sich ineinander analytisch mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante.

Die Koordinatentransformation, bei der der Punkt

$$\exp\left(\mu^1 X_1 + \cdots + \mu^{\nu_1} X_{\nu_1}\right) \cdot \exp\left(\mu^{\nu_1+1} X_{\nu_1+1} + \cdots + \mu^{\nu_2} X_{\nu_2}\right) \cdots$$
$$\cdots \exp\left(\mu^{\nu_p+1} X_{\nu_p+1} + \cdots + \mu^r X_r\right)$$

die Koordinaten

$$\mu^1, \cdots, \mu^r$$

erhält, ist eine analytische Abbildung des λ-Raums in den μ-Raum mit der Funktionaldeterminante 1 im Nullpunkt.

4. In der Lieschen Gruppe $\mathfrak{g}$ seien $a_\nu(t)$ $(\nu = 1, \cdots, r)$ r stetig differenzierbare Bögen mit $a_\nu(0) = 1$; die Tangentialvektoren $X_\nu = a_\nu'(0)$ mögen eine Basis von $\mathfrak{G}$ bilden. Dann überdecken die

$$a_1(t_1) \cdots a_r(t_r)$$

eine Umgebung von 1.

Denn die Abbildung des $(t_1, \cdots, t_r)$-Raumes in den λ-Raum, die durch

$$a_1(t_1) \cdots a_r(t_r) = \exp\left(\lambda^1 X_1 + \cdots + \lambda^r X_r\right)$$

definiert ist, besitzt in 1 die Funktionaldeterminante 1.

5. Reguläre Schichtung einer r-dim. analytischen Mannigfaltigkeit in der Umgebung eines ihrer Punkte nennen wir das analytische Bild (Funktionaldeterminante $\neq 0$) der Schichtung

$$(*) \qquad \xi_{q+1} = \text{const}, \cdots, \xi_r = \text{const}$$

des $(\xi_1, \cdots, \xi_r)$-Raumes; die Bilder der q-dim. Hyperebenen (*) heißen die Schichten.

Wir zeigen: Ein stetig differenzierbarer Bogen, der in jedem seiner Punkte a die durch a laufende Schicht einer regulären Schichtung berührt, verläuft ganz in *einer* Schicht. Es genügt, das zu beweisen für die Schichtung (*) des

ξ-Raumes. In diesem Falle gilt aber, wenn $\xi_\nu(t)$ $(\nu = 1, \cdots, r)$ die r Koordinaten des Kurvenpunktes sind, $\xi'_\nu(t) = 0$ für alle $\nu > q$, also in der Tat $\xi_\nu(t) =$ const für alle $\nu > q$, w.z.b.w.

6. Die (Rechts-oder Links-)Nebengruppenschichtung eines Lieschen Gruppenkeimes $\mathfrak{g}$ in bezug auf einen Lieschen Untergruppenkeim $\mathfrak{h}$ ist in der Umgebung jedes Punktes regulär. Anwendung von 5 und des Borelschen Überdeckungssatzes liefert: Eine stetig differenzierbare Kurve in $\mathfrak{g}$, die in jedem ihrer Punkte a die Nebengruppe $a\mathfrak{h}$ berührt, verläuft ganz in *einer* Nebengruppe.

7. In der Lieschen Gruppe $\mathfrak{g}$ seien $c_\nu(t)$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ analytische Bögen, $c_\nu(0) = 1$. Die kleinste Gruppe, die diese Bögen enthält, heiße $\mathfrak{h}(\subset \mathfrak{g})$. $\mathfrak{h}$ ist notwendig Liesch.

Beweis: $a(t) = t^p X + t^{p+1} \cdot$(Potenzreihe in t) sei die MacLaurin-Entwicklung eines beliebigen analytischen Bogens aus $\mathfrak{h}$ mit $a(0) = 1$ und $X \neq 0$; der Vektor X heiße der "Hauptteil" von $a(t)$. $\mathfrak{H}$ sei die Menge aller solcher Hauptteile mit $a(t) < \mathfrak{h}$ nebst dem Nullvektor. $\mathfrak{H}$ ist eine Infinitesimalgruppe, denn sind X bzw. Y die Hauptteile von $a(t)$ bzw. $b(t)$, so sind $\alpha X + \beta Y$ bzw. $[X, Y]$ die Hauptteile der Bögen $a(\alpha t) \cdot b(\beta t)$ bzw. $a(t)b(t)a^{-1}(t)b^{-1}(t)$.

Sei a ein willkürliches Element von $\mathfrak{h}$; dann ist

$$a = c_{\nu_1}(t_1)^{\pm 1} \cdots c_{\nu_q}(t_q)^{\pm 1},$$

wo $\nu_1, \cdots, \nu_q$ gewisse der Zahlen $1, \cdots, n$ (evtl. mit Wiederholungen) sind. Der analytische Bogen

$$a(t) = c_{\nu_1}(tt_1)^{\pm 1} \cdots c_{\nu_q}(tt_q)^{\pm 1} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

verbindet 1 mit a in $\mathfrak{h}$. Für festes t ist

$$b(\tau) = a(t)^{-1} a(\tau + t) \qquad (-t \leqq \tau \leqq 1 - t)$$

ein analytischer Bogen in $\mathfrak{h}$; nach der Definition von $\mathfrak{H}$ gehört sein Tangentialvektor für $\tau = 0$ zu $\mathfrak{H}$. Also gehört $a'(t)$ (das ist nämlich der Tangentialvektor von $a(\tau + t)$ für $\tau = 0$) zu $a(t)\mathfrak{H}$. Sei $\mathfrak{h}_0$ die von $\mathfrak{H}$ erzeugte (Liesche) Gruppe; nun berührt $a(t)$ in jedem seiner Punkte die Nebengruppe $a(t)\mathfrak{h}_0$, liegt also nach 6 ganz in *einer* Nebengruppe, und da $a(0) = 1$ ist, ganz in $\mathfrak{h}_0$. Also ist $a = a(1) \in \mathfrak{h}_0$. Da a beliebig in $\mathfrak{h}$ war, haben wir

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_0 . \tag{1}$$

Sei nun $X_1, \cdots, X_r$ eine Basis von $\mathfrak{H}$; definitionsgemäß existieren in $\mathfrak{h}$ analytische Bögen $a_\nu(t)$ mit den Hauptteilen X_ν:

$$a_\nu(t) = t^{p_\nu} X_\nu + \cdots .$$

In $a_\nu(t)$ führen wir als neuen Parameter $s = t^{p_\nu}$ ein,

$$a_\nu(t) = b_\nu(s);$$

$b_\nu(s)$ ist stetig differenzierbar und sein Tangentialvektor für $s = 0$ ist X_ν. Die Menge der

$$b_1(s_1) \cdots b_r(s_r)$$

ist in $\mathfrak{h}$ enthalten und überdeckt nach 4 eine Umgebung von 1 in $\mathfrak{h}_0$. Also enthält $\mathfrak{h}$ eine Umgebung von 1 in $\mathfrak{h}_0$, also ganz $\mathfrak{h}_0$:

$$\mathfrak{h} \supset \mathfrak{h}_0 . \tag{2}$$

Also ((1) und (2)) ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$ Liesch, w.z.b.w.

8. SATZ 1: *In der Untergruppe* $\mathfrak{e}$ *der Lieschen Gruppe* $\mathfrak{g}$ *sei jedes Element analytisch verbindbar mit* 1. *Dann ist* $\mathfrak{e}$ *Liesch.*

BEWEIS: $\mathfrak{f}$ sei Liesche Untergruppe maximaler Dimension von $\mathfrak{e}$; $X_1, \cdots, X_p$ sei eine Basis der Infinitesimalgruppe von $\mathfrak{f}$. Sei a beliebig in $\mathfrak{e}$; nach Voraussetzung existiert ein analytischer Bogen $a(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ mit $a(0) = 1$, $a(1) = a$. Nach 7 erzeugen $a(t)$ und $\exp(tX_\nu)$ $(\nu = 1, \cdots, p)$ zusammen eine Liesche Untergruppe von $\mathfrak{g}$, die wegen der Maximalität (s.o.) gleich $\mathfrak{f}$ ist. Also ist $a \in \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{e} = \mathfrak{f}$ Liesch, w.z.b.w.

9. ANWENDUNGEN VON SATZ 1:

1. Sei $\mathfrak{k}$ Teilmenge der Lieschen Gruppe $\mathfrak{g}$; sei $\mathfrak{h}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{g}$, die 1 enthält, und in der jedes Element mit 1 analytisch verbindbar sei (z.B. eine Liesche Untergruppe von $\mathfrak{g}$). Die von den Kommutatoren $k^{-1}h^{-1}kh$ (mit $k \in \mathfrak{k}$ und $h \in \mathfrak{h}$) erzeugte Gruppe $\mathfrak{e}$ ist Liesch.—Denn ein Kommutator $k^{-1}h^{-1}kh$ ist mit 1 durch $k^{-1}h(t)^{-1}kh(t)^{-1}$ analytisch verbindbar, wenn $h(t)$ eine analytische Verbindung von 1 mit h ist; ist $e \in \mathfrak{e}$, so ist $e = e_1 \cdots e_q$, wo die e_ν von der Gestalt $k^{-1}h^{-1}kh$ sind; ist e_ν durch $e_\nu(t)$ mit 1 verbindbar, so auch e durch $e_1(t) \cdots e_q(t)$. Die Voraussetzungen von Satz I sind also erfüllt.

2. Ein Normalteiler $\mathfrak{e}$ der Lieschen Gruppe $\mathfrak{g}$, der mit seiner Kommutatorgruppe identisch ist, ist Liesch.—Man setze nämlich in 9.1: $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{e}$.

3. Ein Normalteiler $\mathfrak{e}$ der Lieschen Gruppe $\mathfrak{g}$, der nicht ganz im Zentrum von $\mathfrak{g}$ liegt, enthält eine Liesche Untergruppe positiver Dimension.—Ist $a \in \mathfrak{e}$, aber a nicht im Zentrum von $\mathfrak{g}$, so ist die von den $g^{-1}a^{-1}ga$ $(g \in \mathfrak{g})$ erzeugte Gruppe von positiver Dimension und nach Satz I (auch bereits nach 7) Liesch.

4. Ist die Liesche Gruppe $\mathfrak{g}$ einfach im Kleinen, so liegen alle ihre Normalteiler $(\neq \mathfrak{g})$ in ihrem (notwendig diskreten) Zentrum.[5]—Wäre nämlich $\mathfrak{e}$ ein Normalteiler, der nicht ganz im Zentrum läge, so wäre, wie aus Hauptsatz I leicht folgt, die maximale Liesche Untergruppe $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{e}$ ebenfalls Normalteiler von $\mathfrak{g}$ und nach 9.3 von positiver Dimension, was der Einfachheit im Kleinen widerspricht.

5. Man kann 9.4 auf im Kleinen halbeinfache Gruppen ausdehnen.

---

[5] Verallgemeinerung eines Satzes von v. d. Waerden, a. a. O.,[2] 784, für kompakte Gruppen.

10. Wir erwähnen für spätere Anwendungen den Satz: Bei einer abgeschlossenen Untergruppe einer Lieschen Gruppe ist die Menge der Komponenten (abzählbar) diskret und die Komponente von 1 eine Liesche Gruppe.[6]

Vorbereitungen—halbeinfache Gruppen[7]

11. 1. *Rang* l von $\mathfrak{G}$ nennt man bekanntlich die Zahl der algebraisch unabhängigen Wurzeln der Elemente von $\mathfrak{G}$. Bei einer halbeinfachen Gruppe ist der Rang gleich der Zahl der identisch verschwindenden Wurzeln. *Regulär* heißt ein Element von $\mathfrak{G}$, das nicht mehr als l verschwindende Wurzeln besitzt. *Reguläre* Untergruppe der halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt die Gruppe $\mathfrak{H}$ aller mit einem regulären Element vertauschbaren Elemente; auch die von einem regulären $\mathfrak{H}$ erzeugte endliche Gruppe $\mathfrak{h}$ wird regulär genannt.

In Bezug auf eine reguläre Untergruppe $\mathfrak{H}$ (Elemente H) kann man eine halbeinfache Gruppe bekanntlich auf folgende einfache Gestalt bringen:

$$\begin{aligned}[H, E_\alpha] &= \alpha E_\alpha\,,\\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= H_\alpha\,,\\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}(\text{falls } \alpha+\beta \neq 0).\end{aligned}$$

Die $\alpha, \beta, \cdots$ sind dabei lineare Funktionale von $\mathfrak{H}$, die "Wurzelformen"[8] von $\mathfrak{G}$ in bezug auf $\mathfrak{H}$ (die man auch als kontravariante Vektoren im Raume der H auffassen kann). Mit α ist auch $-\alpha$ Wurzelform; unter den Wurzelformen gibt es l linear unabhängige.

2. Wir setzen im Folgenden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ stets als reell voraus, gehen aber, wo es nötig ist, ohneweiteres ins Komplexe über. Dann tritt mit α auch $\bar{\alpha}$ (das konjugiert komplexe Funktional) als Wurzelform auf; wir wählen E_α und $E_{\bar{\alpha}}$ so, daß sie konjugiert komplex sind.

Wegen der Halbeinfachheit ist die quadratische Form

$$\begin{aligned}\varphi(T, T) &= \text{Spur der Abbildung } X \to [T[TX]]\\ &= \sum \rho^2 + \sum N_\rho \tau^\rho \tau^{-\rho} \qquad (T = H + \sum \tau^\rho E_\rho)\end{aligned}$$

(Summen über alle Wurzelformen erstrecken!) bekanntlich nicht entartet. N_ρ = Spur der Abbildung $X \to [E_{-\rho}[E_\rho X]]$, also $N_{\bar{\rho}} = \overline{N_\rho}$. Die Normierung[9]

[6] E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs [Mémorial sc. math. XLII], p. 24.

[7] Siehe hierzu: E. Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus [Thèse, Paris 1894].—H. Weyl, Theorie der Darstellungen kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen [Math. Zeitschr. **23**(1925), 271–309; **24** (1926), 328–395], insb. Kap. III.—Wir richten uns hier nach B. L. v. d. Waerden, Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen [Math. Zeitschr. **37**(1933), 446–462].

[8] Im Interesse der Deutlichkeit unterscheiden wir zwischen den Wurzeln—das sind die charakteristischen Wurzeln der Matrices der adjungierten Gruppe, entweder für ein einzelnes Element oder als Funktionen auf der ganzen Gruppe—und den Wurzelformen—das sind die Wurzeln, als lineare Funktionen auf $\mathfrak{H}$ definiert.

[9] Siehe v. d. Waerden, a. a. O.,[7] 447.

$N_\rho = -1$ läßt sich daher so durchführen, daß E_ρ und $E_{\bar\rho}$ konjugiert komplex bleiben.

Diese Normierung hat zur Folge, daß H_ρ linear von ρ abhängt. Ist

$$\lambda = \sum_\rho p_\rho \rho$$

eine lineare Kombination von Wurzelformen, so können wir dann widerspruchslos definieren

$$H_\lambda = \sum_\rho p_\rho H_\rho ;$$

alle Elemente von $\mathfrak{H}$ lassen sich auf diese (für uns recht bequeme) Weise darstellen.

Wir haben nun

$$[H_\lambda E_\rho] = -(\rho, \lambda) E_\rho ;$$

$-(\rho, \lambda)$ ist der Wert des Funktionals ρ für den Vektor H_λ. Hier ist (λ, μ) nichts Anderes als die zu der quadratischen Form $Q(H_\lambda, H_\lambda) = \sum \rho^2$ gehörige symmetrische Bilinearform.

Da mit ρ auch $\bar\rho$ Wurzelform ist, ist die Bilinearform (λ, μ) reell (d.h. reell für reelle Argumente). Die quadratische Form (λ, λ) ist im Allgemeinen nicht definit; trotzdem werden wir (mit der nötigen Vorsicht) Bezeichnungen wie orthogonal (in Bezug auf diese quadratische Form) gebrauchen; ein Vektor $H_\lambda \neq 0$ mit $(\lambda, \lambda) = 0$ heißt isotrop; die H_ρ, für die ρ eine Wurzelform ist, können nie isotrop sein, für Wurzelformen ρ gilt: $(\rho, \rho) < 0$.

3. Mit α und β ist auch $\alpha - 2\dfrac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\beta$ Wurzelform; die $2\dfrac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$ sind ganz. Mit α, β und $\alpha + k\beta$ ist auch $\alpha + k'\beta$ Wurzelform für $0 \leqq k' \leqq k$.

12. Eine halbeinfache Gruppe ist bekanntlich dann und nur dann komplex einfach, wenn sich je zwei Wurzelformen α, β durch eine "Kette"

$$\alpha = \alpha_1 , \qquad \alpha_2 , \cdots , \alpha_p , \qquad \alpha_{p+1} = \beta$$

von Wurzelformen verbinden lassen,

$$(\alpha_\nu , \alpha_{\nu+1}) \neq 0.$$

Wir behaupten:

Ist $\mathfrak{G}$ halbeinfach und komplex einfach, und sind α, β Wurzelformen mit $(\alpha, \beta) \neq 0$, so existiert eine Wurzelform γ mit

$$(\alpha, \gamma) \neq 0, \qquad (\beta, \gamma) \neq 0.$$

Zum Beweise nehmen wir an, obige Kette sei minimal; wir müssen dann zeigen, daß $p = 2$ ist. Wir dürfen weiter annehmen

$$\frac{(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})}{(\alpha_{\nu+1}, \alpha_{\nu+1})} < 0 \quad \text{für alle } \nu$$

(andernfalls ersetzen wir gewisse Wurzelformen durch ihre negativen). Aus der Minimalität folgt

$$(\alpha_\mu , \alpha_\nu) = 0 \text{ für } |\mu - \nu| > 1.$$

Sei bereits für ein $q < p$ bewiesen, daß $\sum_{\nu=2}^{q} \alpha_\nu$ entweder Wurzelform oder 0 ist; wir beweisen dasselbe für $\sum_{\nu=2}^{q+1} \alpha_\nu$. In der Tat ist

$$\frac{\left(\sum_{\nu=2}^{q} \alpha_\nu , \alpha_{q+1}\right)}{(\alpha_{q+1} , \alpha_{q+1})} = \frac{(\alpha_q , \alpha_{q+1})}{(\alpha_{q+1} , \alpha_{q+1})} < 0;$$

ist $\sum_{\nu=2}^{q} \alpha_\nu$ Wurzelform und $\neq -\alpha_{q+1}$, so ist nach 11.3 $\sum_{\nu=2}^{q} \alpha_\nu + \alpha_{q+1}$ Wurzelform; ist $\sum_{\nu=2}^{q} \alpha_\nu = -\alpha_{q+1}$, so ist $\sum_{\nu=2}^{q} \alpha_\nu + \alpha_{q+1} = 0$; ist schließlich $\sum_{\nu=2}^{q} \alpha_\nu = 0$, so ist $\sum_{\nu=2}^{q} \alpha_\nu + \alpha_{q+1} = \alpha_{q+1}$, also Wurzelform. Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

Aus ihr folgt: $\gamma = \sum_{\nu=2}^{p} \alpha_\nu$ ist Wurzelform oder 0.

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha_1 , \gamma) = (\alpha_1 , \alpha_2) \neq 0, \qquad (\beta, \gamma) = (\alpha_{p+1} , \gamma) = (\alpha_{p+1} , \alpha_p) \neq 0.$$

γ ist demnach die gesuchte Wurzelform.

13. Aus dem Vorigen folgt: Ist $\mathfrak{G}$ halbeinfach und komplex einfach, so sind alle Zahlen (α, β) (α, β Wurzelformen) rationale Vielfache einer unter ihnen.

14. $\mathfrak{H}$ sei eine p-dim. abelsche Untergruppe der halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{G}$; ferner sei $\mathfrak{H}$ von keiner größeren Untergruppe von $\mathfrak{G}$ Normalteiler. Dann ist $\mathfrak{H}$ regulär.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für jedes $X \in \mathfrak{G}$ mit

$$[HX] \in \mathfrak{H} \text{ für alle } H \in \mathfrak{H}$$

notwendig

$$X \in \mathfrak{H}.$$

Wir können daher $\mathfrak{G}$ auf die Gestalt

$$\begin{aligned} [HE_\alpha] &= \alpha E_\alpha \\ [HE'_\alpha] &= \alpha E'_\alpha \bmod E_\alpha \\ &\vdots \\ [E_\alpha E_{-\alpha}] &\in \mathfrak{H} \\ &\vdots \end{aligned}$$

bringen, wo die α die nichtverschwindenden Wurzelformen sind. Aus der Tatsache, daß die Spur von

$$X \to [T[TX]]$$

eine nichtentartete quadratische Form ist, schließt man wie üblich, daß $\sum \rho^2$ nicht ausgeartet ist, und daß es genau p linear unabhängige Wurzelformen gibt, also $p \leqq l$ (denn die Wurzeln sind Funktionen auf ganz $\mathfrak{G}$, die Wurzelformen nur auf $\mathfrak{H}$, und für die (linearen) Wurzelformen fallen lineare und algebraische Abhängigkeit zusammen; siehe auch 11.1). Andererseits ist p definitionsgemäß auch die Zahl der verschwindenden Wurzelformen, also $p \geqq l$. Demnach $p = l$; jedes genügend allgemeine Element von $\mathfrak{H}$ ist also regulär, und da $\mathfrak{H}$ sicher maximal abelsch ist, ist auch $\mathfrak{H}$ regulär.

15. Eine Teilmenge der Wurzelformen der halbeinfachen Gruppe nennen wir geschlossen, wenn sie mit α auch $-\alpha$ enthält und mit α und β auch $\alpha + \beta$, falls das eine Wurzelform ist.

Sei **P** eine geschlossene Menge von Wurzelformen und

$$\sigma = \sum_{\rho} p_\rho \rho$$

eine lineare Kombination aus **P**, die auf ganz **P** orthogonal sei. Dann ist $\sigma = 0$.

BEWEIS: Die obige Darstellung von σ sei so gewählt, daß $\sum | p_\rho |$ minimal positiv ist. Es gebe ein p_α mit $p_\alpha \neq 0$.

$$(\alpha, \sigma) = \sum p_\rho (\alpha, \rho).$$

Wegen $(\alpha, \sigma) = 0$ und $p_\alpha(\alpha, \alpha) \neq 0$ gibt es ein $\beta (\neq -\alpha)$ mit

$$\operatorname{sgn} p_\alpha(\alpha, \alpha) = -\operatorname{sgn} p_\beta(\alpha, \beta),$$

$$-\operatorname{sgn} \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \operatorname{sgn} \frac{p_\alpha}{p_\beta}.$$

Sei $\operatorname{sgn} p_\alpha = \operatorname{sgn} p_\beta$. Dann ist $\operatorname{sgn} \dfrac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} < 0$, also nach 11.3 $\beta + \alpha$ Wurzelform $\epsilon \mathbf{P}$.

$$\sigma = \sum p_\rho \rho \pm \alpha \pm \beta \mp (\alpha + \beta) = \sum q_\rho \rho;$$

$$q_\alpha = p_\alpha \pm 1,\ q_\beta = p_\beta \pm 1,\ q_{\alpha+\beta} = p_{\alpha+\beta} \mp 1$$

(untere Zeichen für $p_\alpha > 0$, obere für $p_\alpha < 0$). Das ist eine neue Darstellung für σ, und es ist $\sum | q_\rho | < \sum | p_\rho |$. Das ist ein Widerspruch zur Minimalität.

Analog schließt man bei $\operatorname{sgn} p_\alpha = -\operatorname{sgn} p_\beta$.

16. Sei **P** eine geschlossene Menge von Wurzelformen und S das System aller linearen Relationen in **P**. Dann bilden die Relationen der Form

$$(*) \qquad \alpha + \beta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

aus S ein Erzeugendensystem für S. ($\alpha, \beta, \gamma \epsilon \mathbf{P}$.)

BEWEIS: Das von (*) erzeugte Relationensystem heiße S^*. Ist $S^* \neq S$, so wählen wir die Relation

$$\sum p_\rho \rho = 0$$

in S, aber nicht in S^*, so daß $\sum | p_\rho |$ minimal ist. Wir schließen dann wörtlich wie oben auf die Existenz einer Relation

$$\sum q_\rho \rho = 0$$

in S, aber nicht in S^*, mit

$$\sum | q_\rho | < \sum | p_\rho |,$$

also auf einen Widerspruch.

17. Die Untergruppe $\mathfrak{E}$ der halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{G}$ sei von einer Menge von Paaren E_α, $E_{-\alpha}$ aus $\mathfrak{G}$ erzeugt. Dann ist $\mathfrak{E}$ halbeinfach und $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{H}$ reguläre Untergruppe von $\mathfrak{E}$.

BEWEIS: Ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{E}$ besteht aus den E_α, $E_{-\alpha}$, H_α, wo α eine geschlossene Menge **A** durchläuft. Man berechne $\varphi(T, T)$ für die Gruppe $\mathfrak{E}$. Da N_α ein positives Vielfaches von $(\alpha, \alpha) \neq 0$ ist (siehe Weyl, a.a.O., S.366), brauchen wir uns nur um $\sum \rho^2$ zu kümmern, um zu beweisen, daß $\varphi(T, T)$ nicht ausgeartet ist. Für $\sum \rho^2$ folgt das aber nun aus 15, da danach kein von **A** abhängiger Vektor auf ganz **A** senkrecht steht.

Rein gruppentheoretische Definition der regulären Untergruppen

Im Großen werden wir die halbeinfachen Gruppen jetzt immer als zentrumfrei voraussetzen.

18. $\mathfrak{h}$ sei reguläre Untergruppe der halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}^*$ sei die maximalabelsche Untergruppe von $\mathfrak{g}$ die $\mathfrak{h}$ enthält. Dann ist $\mathfrak{h}^*/\mathfrak{h}$ endlich.[10]

BEWEIS: Sei $a \in \mathfrak{h}^*$. Der Automorphismus

$$A \cdots x \to a^{-1}xa$$

läßt $\mathfrak{h}$ elementweise fest. A ist auch ein (reeller) Automorphismus für die komplexe Infinitesimalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{g}$:

$$[H, E_\alpha] = \alpha E_\alpha, \qquad [H, AE_\alpha] = \alpha AE_\alpha, \qquad \text{also } AE_\alpha = \nu_\alpha E_\alpha .$$

(1) $$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \qquad [AE_\alpha, AE_{-\alpha}] = H_\alpha, \qquad \text{also } \nu_\alpha \nu_{-\alpha} = 1.$$

(2) $$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, \; [AE_\alpha, AE_\beta] = N_{\alpha,\beta} AE_{\alpha+\beta}, \text{ also } \nu_\alpha \nu_\beta = \nu_{\alpha+\beta}, \text{ falls } \alpha + \beta \text{ Wurzelform.}$$

[10] In **18** und **19** befinden wir uns auf den Fußspuren von F. Gantmakher, Canonical representations of automorphisms of a complex semi-simple group [Recueil Math. Moscou **5(47)** (1939), 101–146], insb. 128, 129. Da wir mehr mit dem Reellen rechnen müssen, verfahren wir in **18** ein bißchen anders als Gantmakher. Die Resultate von Gantmakher gehen (im Komplexen) weiter als unsere in **18** und **19**; doch spielt das für unsere Untersuchungen keine Rolle.

(3) $\nu_{\bar{\alpha}}\overline{E_\alpha} = \nu_{\bar{\alpha}}E_{\bar{\alpha}} = AE_{\bar{\alpha}} = A\overline{E_\alpha} = \overline{AE_\alpha} = \overline{\nu_\alpha E_\alpha} = \bar{\nu}_\alpha \bar{E}_\alpha$, also $\nu_{\bar{\alpha}} = \overline{\nu_\alpha}$.

(1) und (2) kann man auch so interpretieren: ist $\alpha + \beta = 0$ bzw. $\alpha + \beta + \gamma = 0$ eine Relation zwischen Wurzelformen, so ist $\nu_\alpha \nu_\beta = 1$ bzw. $\nu_\alpha \nu_\beta \nu_\gamma = 1$. Nach 16 folgt hieraus:

$$\text{ist } \sum_\rho p_\rho \rho = 0, \qquad \text{so ist } \prod_\rho \nu_\rho^{p_\rho} = 1 \qquad (p_\rho \text{ ganz}).$$

Auf grund dessen können wir für eine beliebige lineare Kombination

$$\sigma = \sum_\rho q_\rho \rho \qquad (q_\rho \text{ ganz})$$

der Wurzelformen eindeutig definieren

$$\nu_\sigma = \prod_\rho \nu_\rho^{q_\rho}.$$

Diese σ besitzen eine Basis (für ganzzahlige lineare Kombination) $\sigma_1, \cdots, \sigma_l$. Definieren wir

$$\vartheta_{\sigma_\kappa} = \log \nu_{\sigma_\kappa} \text{ (irgendein Wert des log)}$$

und

$$\vartheta_\sigma = \sum_\kappa r_\kappa \log \nu_{\sigma_\kappa} \quad \text{für} \quad \sigma = \sum_\kappa r_\kappa \sigma_\kappa !$$

Dann ist ϑ_σ linear in den σ und für Wurzelformen α

$$e^{\vartheta_\alpha} = \nu_\alpha .$$

Wir definieren weiter

$$\eta_\sigma = \tfrac{1}{2}(\vartheta_\sigma + \overline{\vartheta_{\bar{\sigma}}}).$$

Dann ist auch η_σ linear in σ, reell für reelle σ und

$$e^{2\eta_\sigma} = \nu_\sigma \overline{\nu_{\bar{\sigma}}} = \nu_\sigma^2, \qquad e^{\eta_\sigma} = \pm \nu_\sigma .$$

Bestimmen wir $H = H_\xi$ so, daß

$$-(\xi\sigma) = \eta_\sigma$$

wird, so ist H reell und erzeugt $h = \exp H$ einen reellen Automorphismus

$$B \cdots x \to h^{-1}xh$$

mit

$$h^{-1}E_\alpha h = \exp(\eta_\alpha) \cdot E_\alpha = \pm \nu_\alpha E_\alpha .$$

Der Automorphismus AB^{-1} von $\mathfrak{g}$ läßt $\mathfrak{h}$ elementweise fest und macht

$$AB^{-1}E_\alpha = \pm E_\alpha .$$

Es gibt nur endlich viel derartige Automorphismen (entsprechend der Zeichenwahl). Da $\mathfrak{g}$ zentrumfrei, a beliebig in $\mathfrak{h}^*$ und $h \in \mathfrak{h}$ ist, besitzt also $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{h}^*$ nur endlich viel Nebengruppen, w.z.b.w.

19. $\mathfrak{h}$ sei reguläre Untergruppe der halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}'$ sei die größte Untergruppe von $\mathfrak{g}$, in der $\mathfrak{h}$ Normalteiler ist. Dann ist $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}$ endlich.

BEWEIS: Sei $a \in \mathfrak{h}'$. Der Automorphismus

$$A \cdots x \to a^{-1}xa$$

läßt $\mathfrak{h}$ als Ganzes fest. Wir setzen

$$AH_\lambda = H_{A\lambda}.$$

A wirkt dann linear auf die λ. Für eine Wurzelform ρ gilt

$$[H_\lambda E_\rho] = -(\rho, \lambda)E_\rho, \quad \text{also} \quad [H_{A\lambda}, AE_\rho] = -(\rho, \lambda)AE_\rho.$$

Also permutiert A die Wurzelformen. Ist A die identische Permutation der Wurzelformen, so ist

$$(\rho, A\lambda) = (\rho, \lambda) \text{ für alle } \rho,$$

also

$$A\lambda = \lambda;$$

dann läßt A also $\mathfrak{h}$ elementweise fest, und dann ist $a \in \mathfrak{h}^*$ (siehe 18). Da die Wurzelformen nur endlich viel Permutationen zulassen, besitzt $\mathfrak{h}^*$ in $\mathfrak{h}'$ nur endlich viel Nebengruppen, also ist $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}^*$ endlich, also nach 18 auch $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}$.

20. 1. Ist $\mathfrak{h}$ eine abelsche Gruppe, so sei $\mathfrak{h}^n$ die Gruppe aller h^n mit $h \in \mathfrak{h}$; der Durchschnitt aller $\mathfrak{h}^n$ ($n = 1, 2, \cdots$) heißt die *Verkürzung* von $\mathfrak{h}$.

2. Man zeigt leicht: Ist $\mathfrak{h}$ abelsch und $\mathfrak{h}_0$, die Komponente von 1 in $\mathfrak{h}$, Liesch, ist ferner $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ eine Gruppe von endlich vielen Erzeugenden, so ist $\mathfrak{h}_0$ die Verkürzung von $\mathfrak{h}$.

3. Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Liesche Untergruppen der Lieschen abelschen Gruppe $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die zugehörigen Infinitesimalgruppen. Sei $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{c}$ die Verkürzung von $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

BEWEIS: Nach 20.2 brauchen wir nur zu zeigen: $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{c}$ besitzt endlich viel Erzeugende.—Sei

$$h \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}.$$

Dann

$$h = \exp H_\lambda, \qquad H_\lambda \in \mathfrak{A} \text{ (reell)},$$

(*)

$$= \exp H_\mu, \qquad H_\mu \in \mathfrak{B} \text{ (reell)};$$

also

(**)

$$(\rho, \lambda) = (\rho, \mu) + n_\rho \cdot 2\pi i \quad (n_\rho \text{ ganz})$$

für alle Wurzelformen ρ. Die Zahlen $n_\rho = n_\rho(h)$ fassen wir zu einem "Vektor" $n(h)$ zusammen. Der Vektor $n(h)$ ist durch h nicht eindeutig bestimmt, sondern nur mod $\mathbf{m}$, der additiven Gruppe aller Vektoren $n(1)$. Die $n(h)$ mod $\mathbf{m}$ bilden, wie man leicht sieht, eine additive Darstellung der Gruppe $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Ist $n(h) \equiv 0$ mod $\mathbf{m}$, so kann man λ und μ in (*) so bestimmen, daß $n(h) = 0$ wird; dann wird in (**) $(\rho, \lambda) = (\rho, \mu)$ für alle ρ, also $\lambda = \mu$, $H_\lambda = H_\mu \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und $h \in \mathfrak{c}$.

Also ist $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/\mathfrak{c}$ homomorphes Bild der (additiven) Gruppe der $n(h)$ mod $\mathbf{m}$, also sicher eine Gruppe von endlich vielen Erzeugenden, w.z.b.w.

21. Folgender Satz definiert rein gruppentheoretisch die regulären Untergruppen:

SATZ 2: $\mathfrak{h}$ *ist dann und nur dann reguläre Untergruppe der halbeinfachen Gruppe* $\mathfrak{g}$, *wenn gilt*:

1. $\mathfrak{h}$ *ist abelsch*;
2. $\mathfrak{h}$ *ist seine eigene Verkürzung*;
3. $\mathfrak{h}$ *ist maximal in bezug auf* 1 *und* 2 *zusammen*;
4. *ist* $\mathfrak{h}_0$ *irgendein Normalteiler von* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ *abzählbar, ist weiter* $\mathfrak{h}'(\subset\mathfrak{g})$ *die größte Gruppe, in der* $\mathfrak{h}_0$ *Normalteiler ist, so ist auch* $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0$ *abzählbar.*

BEWEIS: Sei $\mathfrak{h}$ regulär. Dann ist 1 trivial, 2 ist in 20.2 und 3 ist in 18 und 20.2 enthalten. Nun zu 4: Sei $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ abzählbar; dann[11] ist $\overline{\mathfrak{h}_0} = \mathfrak{h}$, also auch $\mathfrak{h}$ Normalteiler von $\mathfrak{h}'$ und nach 19 $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}$ endlich, also $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0$ abzählbar, w.z.b.w.

UMGEKEHRT: Mögen Voraussetzungen 1–4 gelten. Sei $a \in \overline{\mathfrak{h}}$. Nach 10 häufen sich die Komponenten von $\overline{\mathfrak{h}}$ nicht; da aber a Häufungspunkt von $\mathfrak{h}$ ist, gibt es ein $b \in \mathfrak{h}$, das in derselben Komponente von $\overline{\mathfrak{h}}$ wie a liegt. Nennen wir die Komponente von 1 in $\overline{\mathfrak{h}}$ nun $\mathfrak{h}_0$, so ist $b^{-1}a = c \in \mathfrak{h}_0$. Es ist $a = bc$, also $\overline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h}_0$. Andererseits $\mathfrak{h} \subset \overline{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{h}_0 \subset \overline{\mathfrak{h}}$, also $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h}_0 \subset \overline{\mathfrak{h}}$. Demnach $\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h}_0$. Da $\mathfrak{h}$ nach Voraussetzung 1 abelsch ist, da ferner $\mathfrak{h}$ nach Voraussetzung 2 und $\mathfrak{h}_0$ als Liesche abelsche Gruppe (siehe 20.2) seine eigene Verkürzung ist, ist auch $\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h}_0$ seine eigene Verkürzung, also nach Voraussetzung 3: $\mathfrak{h} = \overline{\mathfrak{h}}$. Also ist $\mathfrak{h}$ abgeschlossen.

Sei wieder $\mathfrak{h}_0$ die Komponente von 1 in $\mathfrak{h}$. Dann ist $\mathfrak{h}_0$ Liesch und $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ abzählbar. Wenden wir auf dies $\mathfrak{h}_0$ nun Voraussetzung 4 an! Ist $\mathfrak{h}_0$ Normalteiler in $\mathfrak{h}'$, so muß $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0$ abzählbar sein. Insbesondere kann $\mathfrak{h}_0$ nun nicht Normalteiler einer Lieschen Gruppe höherer Dimension sein, ist also nach 14 regulär. Nach 18 (mit $\mathfrak{h}_0$ statt $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}$ statt $\mathfrak{h}^*$) und 20.2 ist $\mathfrak{h}_0$ die Verkürzung von $\mathfrak{h}$, also nach Voraussetzung 2: $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$. Also ist $\mathfrak{h}$ regulär, w.z.b.w.

Definition weiterer Untergruppen

Eine feste reguläre Untergruppe $\mathfrak{h}$ werde zugrunde gelegt.

22. 1. $\mathfrak{e}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{E}_\alpha$ heiße die von E_α und $E_{\bar{\alpha}}$ erzeugte (reelle) Untergruppe von $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{G}$. Ist $\mathbf{A}$ eine Menge von Wurzelformen, so heiße $\mathfrak{e}_\mathbf{A}$ bzw. $\mathfrak{E}_\mathbf{A}$ die von der Gesamtheit der $\mathfrak{e}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{E}_\alpha$ mit $\alpha \in \mathbf{A}$ erzeugte Untergruppe. Die Menge aller $\mathfrak{E}_\alpha$ heiße $\mathfrak{E}$, die Menge aller $\mathfrak{e}_\alpha$ heiße $\mathfrak{e}$ (α variabel).

2. Sei $\mathfrak{e} \in \mathfrak{e}$ und $\mathfrak{E}$ die zugehörige Infinitesimalgruppe, sei $\mathbf{A}$ die Menge aller α mit $E_\alpha \in \mathfrak{E}$ und $\mathbf{A}^*$ die Menge aller von $\mathbf{A}$ abhängigen Wurzelformen. Wir definieren $\mathfrak{e}^* = \mathfrak{e}_{\mathbf{A}^*}$ ($\mathfrak{e}^*$ hängt von $\mathfrak{e}$ ab); die Infinitesimalgruppe von $\mathfrak{e}^*$ heiße $\mathfrak{E}^*$. Nach 17 ist $\mathfrak{E}^*$ halbeinfach und $\mathfrak{E}^* \cap \mathfrak{H}$ reguläre Untergruppe von $\mathfrak{E}^*$.

---

[11] Die Überstreichung bedeutet im Augenblick den Übergang zur abgeschlossenen Hülle.

3. Sei **A** wie in 2 definiert. Die von den H_α mit $\alpha \in \mathbf{A}$ erzeugte (reelle) Gruppe heiße $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$, die zugehörige Infinitesimalgruppe $\mathfrak{H}_\mathfrak{e}$. Man bemerkt ohneweiteres: $\mathfrak{h}_\mathfrak{e} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{e}^*}$.

4. Sei **A** wie in 2 definiert. Die von den auf **A** *senkrechten* H_λ erzeugte Gruppe heiße $\mathfrak{h}^\mathfrak{e}$, die zugehörige Infinitesimalgruppe $\mathfrak{H}^\mathfrak{e}$. Man sieht ohneweiteres: $\mathfrak{h}^\mathfrak{e} = \mathfrak{h}^{\mathfrak{e}^*}$. Ferner: $\mathfrak{H}^\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{H}_\mathfrak{e}$ sind orthogonale Komplemente voneinander.

23. Folgender Satz definiert rein gruppentheoretisch die in 22 eingeführten Untergruppen.

SATZ 3: 1. *Die Untergruppe* $\mathfrak{e}$ *der halbeinfachen Gruppe* $\mathfrak{g}$ *gehört dann und nur dann zu* $\mathfrak{k}$, *wenn* $\mathfrak{e}$ *erzeugt wird von den Kommutatoren* $e^{-1}h^{-1}eh$ *mit* $e \in \mathfrak{e}$ *und* $h \in \mathfrak{h}$.

2. $\mathfrak{e}^*$ *ist die größte Gruppe aus* $\mathfrak{k}$ *mit* $\mathfrak{h}^\mathfrak{e} \perp \mathfrak{h}^{\mathfrak{e}^*}$.

3. $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$ *entsteht durch Verkürzung aus* $\mathfrak{e}^* \cap \mathfrak{h}$.

4. $\mathfrak{h}^\mathfrak{e}$ *entsteht durch Verkürzung aus der Gruppe* $(\mathfrak{h}^\mathfrak{e})'$ *aller* $h \in \mathfrak{h}$ *mit* $he = eh$ *für alle* $e \in \mathfrak{e}$.

Durch Satz 2 ist $\mathfrak{h}$ abstrakt definiert, Satz 3.1 definiert die Gesamtheit der $\mathfrak{e} \in \mathfrak{k}$ abstrakt, Satz 3.4 definiert dann abstrakt zu jedem $\mathfrak{e}$ das $\mathfrak{h}^\mathfrak{e}$, Satz 3.2 definiert abstrakt $\mathfrak{e}^*$ unter Verwendung von $\mathfrak{h}^\mathfrak{e}$, und schließlich wird durch Satz 3.3 $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{e}^*$ und $\mathfrak{h}$ definiert.

24. Wir erbringen den Beweis von Satz 3 in der Reihenfolge 1, 4, 2, 3.

1. "Dann": Nach Anwendung 1 von Satz I (siehe 9) ist $\mathfrak{e}$ Liesch. Sei $\mathfrak{E}$ die zugehörige Infinitesimalgruppe; dann ist $[HX] \in \mathfrak{E}$ für alle $H \in \mathfrak{H}$ und $X \in \mathfrak{E}$. Schreiben wir nach 11.1

$$X = H + \sum \tau^\alpha E_\alpha ,$$

so erhalten wir

$$[H_\lambda X] = -\sum \tau^\alpha (\alpha\lambda) E_\alpha \in \mathfrak{E}.$$

Hieraus und aus der Realität von $\mathfrak{E}$ erschließt man leicht, daß $\mathfrak{E}$ von einer Menge von E_α, $E_{\bar{\alpha}}$ erzeugt wird.

"Nur dann": Wird $\mathfrak{E}$ von einer Menge von E_α, $E_{\bar{\alpha}}$ erzeugt, so ist es reell und so gilt $[HE] \in \mathfrak{E}$ für alle $E \in \mathfrak{E}$. Daraus folgt die Behauptung.

4. Da $\mathfrak{h}$ abelsch ist, existiert zu jedem $h \in \mathfrak{h}$ ein $H_\lambda \in \mathfrak{H}$ mit $h = \exp H_\lambda$. Es gilt

$$h^{-1} E_\alpha h = \exp(-(\lambda\alpha)) \cdot E_\alpha .$$

$h \in (\mathfrak{h}^\mathfrak{e})'$ ist also äquivalent mit

$$\exp(-(\lambda\alpha)) = 1$$

oder

$$(*) \qquad (\lambda\alpha) \equiv 0 \bmod 2\pi i$$

für alle $\alpha \in \mathbf{A}$ (Def. von **A**, siehe 22.2).

Sei $\mathfrak{K}$ die Gruppe aller (reellen) H_λ mit

$$(\lambda\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{A}.$$

Dann ist nach Definition (22.4)

$$(**) \qquad \mathfrak{K} = \mathfrak{H}^{\mathfrak{k}}.$$

Nach (*) erzeugt $\mathfrak{K}$ die Gruppe

$$\mathfrak{k} = \text{Komponente von } \imath \text{ in } (\mathfrak{h}^{\mathfrak{k}})'$$

und ist $(\mathfrak{h}^{\mathfrak{k}})'/\mathfrak{k}$ zyklisch. Nach 20.2 ist die Verkürzung von $(\mathfrak{h}^{\mathfrak{k}})'$ gleich $\mathfrak{k}$, ferner ist nach (**) $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}^{\mathfrak{k}}$, also $\mathfrak{h}^{\mathfrak{k}}$ die Verkürzung von $(\mathfrak{h}^{\mathfrak{k}})'$, w.z.b.w.

2. Die Behauptung ergibt sich auf grund des Vorangehenden unmittelbar aus der Tatsache, daß

$$(\alpha\lambda) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{A}$$

und

$$(\alpha\lambda) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{A}^*$$

äquivalente Behauptungen sind.

3. Wir setzen $\mathfrak{k} = \mathfrak{e}^* \cap \mathfrak{h}$; $\mathfrak{k}_0$ sei die Komponente von $\imath$ in $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{K}$ die zugehörige Infinitesimalgruppe. $\mathfrak{K}$ wird erzeugt von den $H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$ mit $E_\alpha \in \mathfrak{E}^*$, also $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{e}^*} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{e}}$, also

$$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{h}_{\mathfrak{e}}.$$

Nach 22.2 (Ende) ist $\mathfrak{k}_0$ reguläre Untergruppe der halbeinfachen Gruppe $\mathfrak{e}^*$, $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{k}$ ist abelsch, also ist $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_0$ nach 18 endlich, also nach 20.2 $\mathfrak{k}_0$ $(=\mathfrak{h}_{\mathfrak{e}})$ die Verkürzung von $\mathfrak{k}$, w.z.b.w.

Die ausgezeichneten Untergruppen von $\mathfrak{h}$

25. $\mathfrak{M}$ sei die kleinste Menge von Untergruppen von $\mathfrak{H}$ mit der folgenden Eigenschaft:

1. $\mathfrak{M}$ enthält jedes $\mathfrak{H}_{\mathfrak{e}}$ und jedes $\mathfrak{H}^{\mathfrak{e}}$ mit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{E}$.

2. $\mathfrak{M}$ enthält mit je zwei Gruppen ihren Durchschnitt und die von ihnen erzeugte Gruppe.

Von selber gilt dann nach 22.4 (und weil Durchschnitt und Erzeugung orthogonal-komplementäre Operationen sind):

3. $\mathfrak{M}$ enthält mit irgendeiner Gruppe auch ihr orthogonales Komplement.

$\mathfrak{e}_\alpha$ war die von E_α und $E_{\tilde{\alpha}}$ erzeugte Gruppe. Statt $\mathfrak{H}^{\mathfrak{e}_\alpha}$ bzw. $\mathfrak{H}_{\mathfrak{e}_\alpha}$ wollen wir kurz $\mathfrak{H}^\alpha$ bzw. $\mathfrak{H}_\alpha$ schreiben. Analog $\mathfrak{h}_\alpha$, $\mathfrak{h}^\alpha$. $\mathfrak{H}_\alpha$ wird erzeugt von H_α und $H_{\tilde{\alpha}}$. Allgemeiner sei (bei beliebigem λ) $\mathfrak{H}_\lambda$ die von H_λ und $H_{\tilde{\lambda}}$ erzeugte Gruppe; ferner $\mathfrak{H}^\lambda$ das orthogonale Komplement von $\mathfrak{H}_\lambda$. Analog $\mathfrak{h}_\lambda$, $\mathfrak{h}^\lambda$.

Wir werden in Zukunft häufig die Fälle unterscheiden:

λ reell (d.h. *rein* reell),

λ imaginär (d.h. *rein* imaginär),

λ komplex (d.h. weder rein reell, noch rein imaginär).
In den beiden ersten Fällen ist $\mathfrak{H}_\lambda$ eindimensional, im dritten Fall zweidimensional (entsprechend $\mathfrak{H}^\lambda$ ($n-1$)- oder ($n-2$)-dimensional).

Wir bemerken schließlich:

4. Enthält $\mathfrak{M}$ eine gewisse nichtisotrope (11.2) eindimensionale Untergruppe $\mathfrak{H}_\lambda$ von $\mathfrak{H}_\alpha$, so enthält es auch noch eine zweite eindimensionale Untergruppe $\mathfrak{H}_\mu$ von $\mathfrak{H}_\alpha$ (nämlich das orthogonale Komplement von $\mathfrak{H}_\lambda$ schneidet $\mathfrak{H}_\alpha$ in einer solchen: $\mu = p\alpha + \bar{p}\bar{\alpha}$, $(\lambda, \mu) = 0$, also wegen der Nichtisotropie $\lambda \neq \mu$).

26. Die Menge $\mathfrak{m}$ (von Untergruppen von $\mathfrak{h}$) sei folgendermaßen definiert: $\mathfrak{k} \in \mathfrak{m}$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{k}$ die von einer Gruppe $\mathfrak{K} \in \mathfrak{M}$ erzeugte Liesche Gruppe ist.

$\mathfrak{m}$ ist dann auch die kleinste Menge von Untergruppen von $\mathfrak{h}$ mit der folgenden Eingenschaft:

1. $\mathfrak{m}$ enthält jedes $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$ und jedes $\mathfrak{h}^\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{e} \in \mathfrak{e}$.
2. $\mathfrak{m}$ enthält mit je zwei Gruppen die Verkürzung ihres Durchschnitts und die von ihnen erzeugte Gruppe. Um das einzusehen, beachte man 20.3.

Nach Satz 3 konnten wir die $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{h}^\mathfrak{e}$ rein gruppentheoretisch definieren. Somit ist auch die Menge $\mathfrak{m}$ (als Funktion von $\mathfrak{h}$ natürlich) rein gruppentheoretisch definiert.

27. Satz 4: *Sei* $\mathfrak{g}$ *halbeinfach und von zweiter Art. Dann gilt*: 1. *Ist die Gruppe* $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$ *eine minimale*[12] *Gruppe aus der Menge* $\mathfrak{m}$, *so ist* $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$ *gleich einem* $\mathfrak{h}_\alpha$ *und* α *reelle oder imaginäre Wurzelform.* 2. *Sind alle Wurzelformen komplex, so gibt es Wurzelformen* α *und* β, *die auch gleich sein können, derart daß* $\mathfrak{h}_{\alpha+\bar{\alpha}}$ *und* $\mathfrak{h}_{\beta-\bar{\beta}}$ *Elemente von* $\mathfrak{m}$ *sind.*

Beweis: Daß ein minimales $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$ ein $\mathfrak{h}_\alpha$ ist, ist klar. Die Annahme, α sei komplex, führen wir zum Widerspruch.

Klar ist, daß

$$(\alpha, \bar{\alpha}) = 0$$

sein müßte, da sonst nach 11.3 entweder $\alpha + \bar{\alpha}$ oder $\alpha - \bar{\alpha}$ Wurzelform, also $\mathfrak{h}_{\alpha+\bar{\alpha}}$ oder $\mathfrak{h}_{\alpha-\bar{\alpha}}$ in $\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{h}_\alpha$ nicht minimal wäre.

Voraussetzungsgemäß ist $\mathfrak{g}$ komplex-einfach, also gibt es nach 12 eine Wurzelform β mit

$$(\alpha, \beta) \neq 0, \qquad (\bar{\alpha}, \beta) \neq 0.$$

Dann ist auch

$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \neq 0, \qquad (\alpha, \bar{\beta}) \neq 0.$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

A: β ist reell oder imaginär.—Wegen $(\alpha, \beta) \neq 0$ ist $\mathfrak{H}_\alpha$ nicht senkrecht auf $\mathfrak{H}_\beta$, also (siehe 22.4, Ende) $\mathfrak{H}_\alpha \not\subset \mathfrak{H}^\beta$. Da ferner $\mathfrak{H}^\beta$ ($l-1$)-dim. ist, ist $\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}^\beta$

[12] Natürlich minimal bei Vernachlässigung der Gruppe (I).

eindimensional, also eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige echte Untergruppe von $\mathfrak{H}_\alpha$. Widerspruch zur Minimalität von $\mathfrak{h}_\alpha$!

B: β ist komplex und

$$(\beta, \bar{\beta}) \neq 0.$$

Nach 11.3 ist etwa

$$\gamma = \beta + \bar{\beta}$$

Wurzelform (denn Fall, daß $\beta - \bar{\beta}$ Wurzelform ist, behandelt man ganz analog), also $\mathfrak{H}_\gamma \in \mathfrak{M}$. Als Wurzelvektor ist H_γ nichtisotrop, also existiert nach 24.4 noch ein $\mathfrak{H}_\delta \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_\delta \subset \mathfrak{H}_\beta$, $\mathfrak{H}_\delta \neq \mathfrak{H}_\gamma$ (δ braucht nicht Wurzelform zu sein). $\mathfrak{H}_\gamma$ und $\mathfrak{H}_\delta$ erzeugen zusammen $\mathfrak{H}_\beta$, und da $(\alpha, \beta) \neq 0$ war, können nicht beide auf $\mathfrak{H}_\alpha$ senkrecht sein. Es gibt demnach ein eindimensionales $\mathfrak{H}_\epsilon$ ($\epsilon = \gamma$ oder δ) in $\mathfrak{M}$, das nicht auf $\mathfrak{H}_\alpha$ senkrecht ist. Das orthogonale Komplement $\mathfrak{H}^\epsilon$ von $\mathfrak{H}_\epsilon$ gehört nach 25.3 zu $\mathfrak{M}$ und schneidet $\mathfrak{H}_\alpha$ eindimensional. $\mathfrak{H}^\epsilon \cap \mathfrak{H}_\alpha \in \mathfrak{M}$ im Widerspruch zur Minimalität von $\mathfrak{h}_\alpha$!

C: β ist komplex und

$$(\beta, \bar{\beta}) = 0.$$

Wegen $(\alpha, \beta) \neq 0$ ist $\alpha + \beta$ oder $\alpha - \beta$ Wurzelform. Wir dürfen annehmen, $\alpha + \beta$ (sonst ersetzen wir β durch $-\beta$).

Wegen $(\alpha, \bar{\alpha}) = 0$ haben wir

$$(\alpha + \beta, \bar{\alpha}) = (\beta, \bar{\alpha}) \neq 0.$$

Also ist $\alpha + \beta \pm \bar{\alpha}$ Wurzelform ($\pm$ ist im Folgenden als "+ *oder* −" zu lesen). Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

I. Sei

$$(\alpha + \beta \pm \bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 0$$

Dann (wegen $(\beta, \bar{\beta}) = 0$):

$$(*) \qquad \begin{aligned} (\alpha \pm \bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= 0, \\ (\alpha \pm \bar{\alpha}, \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Also (22.4, Ende)

$$\mathfrak{H}^\beta \supset \mathfrak{H}_{\alpha \pm \bar{\alpha}}.$$

Andererseits wegen $(\alpha, \beta) \neq 0$

$$\mathfrak{H}^\beta \not\supset \mathfrak{H}_\alpha.$$

Zusammen:

$$(\text{CI, 1}) \qquad \mathfrak{H}^\beta \cap \mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_{\alpha \pm \bar{\alpha}} \in \mathfrak{M}.$$

Widerspruch zur Minimalität von $\mathfrak{h}_\alpha$.

Wir schließen aber noch weiter, falls alle Wurzelformen komplex sind: $(\alpha + \beta, \overline{\alpha + \beta}) = 0$, also $(\alpha, \bar{\beta}) = -(\bar{\alpha}, \beta)$. Einsetzen in (*) liefert:

$$(\alpha, \beta \mp \bar{\beta}) = 0,$$

$$(\bar{\alpha}, \beta \mp \bar{\beta}) = 0.$$

Hieraus schließt man wie vorhin:

(CI, 2) $$\mathfrak{H}^{\alpha} \cap \mathfrak{H}_{\beta} = \mathfrak{H}_{\beta \mp \bar{\beta}} \in \mathfrak{M}.$$

II. Sei nun

$$(\alpha + \beta \pm \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \neq 0.$$

Dann hat man vier Möglichkeiten:

a) $\alpha + \beta + \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ Wurzelform

b) $\alpha + \beta + \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ " "

a') $\alpha + \beta - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$ " "

b') $\alpha + \beta - \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ " " .

Wir behandeln nur a und b, da a' und b' genauso verlaufen.

a) $\gamma = \alpha + \bar{\alpha} + \beta + \bar{\beta}$ ist (reelle) Wurzelform. $\mathfrak{H}_{\gamma} \subset \mathfrak{H}_{\alpha+\beta}$, also existiert nach 25.4 noch ein $\mathfrak{H}_{\delta} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_{\delta} \subset \mathfrak{H}_{\alpha+\beta}$, $\mathfrak{H}_{\delta} \neq \mathfrak{H}_{\gamma}$. $\mathfrak{H}_{\gamma}$ und $\mathfrak{H}_{\delta}$ erzeugen zusammen $\mathfrak{H}_{\alpha+\beta}$, und da $(\alpha + \beta, \bar{\alpha}) = (\beta, \bar{\alpha}) \neq 0$ war, können nicht beide auf $\mathfrak{H}_{\alpha}$ senkrecht sein. Sind $\mathfrak{H}^{\gamma}$ und $\mathfrak{H}^{\delta}$ die orthogonalen Komplemente, so gilt demnach

$$\mathfrak{H}^{\gamma} \supset \mathfrak{H}_{\alpha} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{H}^{\delta} \supset \mathfrak{H}_{\alpha},$$

also ist $\mathfrak{H}^{\gamma} \cap \mathfrak{H}_{\alpha}$ oder $\mathfrak{H}^{\delta} \cap \mathfrak{H}_{\alpha}$ eindimensional und in $\mathfrak{M}$ (siehe 25.4) im Widerspruch zur Minimalität von $\mathfrak{h}_{\alpha}$.

b) $\gamma = \alpha + \bar{\alpha} + \beta - \bar{\beta}$ ist Wurzelform, $2\Re\alpha = \Re\gamma$, $2\Im\beta = \Im\gamma$. $\mathfrak{H}_{\gamma} \cap \mathfrak{H}_{\alpha} = \mathfrak{H}_{\alpha+\bar{\alpha}} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}_{\gamma} \cap \mathfrak{H}_{\beta} = \mathfrak{H}_{\beta-\bar{\beta}} \in \mathfrak{M}$.—Widerspruch zur Minimalität von $\mathfrak{h}_{\alpha}$.

Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen. Die Voraussetzung der zweiten Hälfte (alle Wurzelformen komplex) hat auch wieder $(\alpha, \bar{\alpha}) = 0$ zur Folge; sie hat weiter zur Folge, daß wir uns in den Fällen CI oder CIIb befinden —in beiden Fällen haben wir aber die zweite Behauptung bereits bewiesen (siehe die Formeln CI, 1 und CI, 2 und die Formeln in CIIb).

28. Ist

$$(\alpha, \bar{\alpha}) = 0,$$

so ist

$$[H'_{\alpha}, E'_{\alpha}] = \vartheta E'_{\alpha} \qquad (\vartheta \text{ reell}),$$

falls

$$E'_{\alpha} = E_{\alpha} + E_{\bar{\alpha}}, \qquad H'_{\alpha} = H_{\alpha} + H_{\bar{\alpha}}, \qquad \vartheta = (\alpha, \alpha).$$

ist.

Rein gruppentheoretische Definition kompakter Untergruppenkeime

29. SATZ 5: $\mathfrak{g}$ *sei halbeinfach von zweiter Art. Man wähle, wenn möglich, ein* $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_\mathfrak{e}$, *so daß es minimal in* $\mathfrak{M}$ *ist, und dabei* $\mathfrak{e} \in \mathfrak{E}$ *(auch* $\mathfrak{e}'$ *genannt) so, daß es auch minimal ist. Ist das nicht möglich, so wähle man* $\mathfrak{e} \in \mathfrak{E}$ *und eine in* $\mathfrak{M}$ *minimale Untergruppe* $\mathfrak{h}'$ *von* $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$, *so daß gilt:*

1. $\mathfrak{e}$ *ist minimal;*

2. *es gibt eine echte Untergruppe* $\mathfrak{e}' \neq (1)$ *von* $\mathfrak{e}$, *derart daß die Kommutatoren* $h^{-1}e^{-1}he$ $(h \in \mathfrak{h}', e \in \mathfrak{e}')$ *die Gruppe* $\mathfrak{e}'$ *erzeugen.*

Diese Wahl ist möglich, und es gilt weiter:

A. *Entweder ist* $\mathfrak{h}'$ *eine kompakte Gruppe.*

B. *Oder* $\mathfrak{h}'$ *ist nicht kompakt,*

$$\mathfrak{h}' = (\exp tH'), \qquad \mathfrak{e}' = (\exp tE'),$$

$$[H'E'] = \vartheta E' \qquad (\vartheta \text{ reell}).$$

Die beiden Fälle sind noch abstrakt dadurch unterschieden, daß in A $\mathfrak{h}'$ *Elemente endlicher Ordnung besitzt, in* B *nicht.*

30. BEWEIS VON SATZ 5: Sind nicht alle Wurzelformen komplex, so ist $\mathfrak{h}'$ wegen der Minimalität und nach Satz 4 ein $\mathfrak{h}_\alpha$ mit reellem oder imaginärem α; $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}_\alpha$ oder $\mathfrak{e}_{-\alpha}$. Ist α reell, so befinden wir uns im Fall B, $\vartheta = (\alpha, \alpha)$. Sei α imaginär. Dann wird $\mathfrak{e}_\alpha$ erzeugt von E_α, $E_{-\alpha}$. Eine Basis von $\mathfrak{E}_\alpha$ ist E_α, $E_{-\alpha}$, H_α, und es gilt

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha,$$

also nach Übergang zum Konjugierten

$$[E_{-\alpha}, E_\alpha] = \bar{H}_\alpha,$$

also $\bar{H}_\alpha = -H_\alpha$, also H_α imaginär. Wegen $(\alpha, \alpha) < 0$ und 13 ist auch (α, β) reell für alle Wurzelformen α, β. Ferner ist

$$H' = iH_\alpha$$

reell und

$$\mathfrak{h}' = (\exp tH')_{t \text{ reell}}.$$

In

$$[H'E_\beta] = -i(\alpha, \beta)E_\beta$$

sind wegen der Realität der (α, β) die Koeffizienten $-i(\alpha, \beta)$ imaginär. Also sind alle Wurzeln von H' imaginär und rationale Vielfache voneinander, und demnach ist $\mathfrak{h}'$ kompakt (Fall A).

Sind hingegen alle Wurzelformen komplex, so versagt nach Satz 4, 1 die erste Bestimmungsmethode für $\mathfrak{h}'$. Nach Satz 4, 2 und nach 28 ist die vorgeschriebene Wahl von $\mathfrak{h}'$ und $\mathfrak{e}'$ möglich. Sei diese Wahl irgendwie geschehen. Dann ist $\mathfrak{h}'$ eindimensional nach Satz 4, 1 und $\mathfrak{e}'$ Liesch nach Satz 1 und eindimensional als echte Untergruppe von $\mathfrak{e}$. Wir befinden uns somit wieder im Fall B.

31. SATZ 6: *Ein eindimensionaler kompakter Untergruppenkeim der halbeinfachen Gruppe zweiter Art* $\mathfrak{g}$ *läßt sich rein gruppentheoretisch beschreiben.*

BESCHREIBUNG: Im Falle A sind wir nach Satz 5 bereits fertig.—Fall B:

$$[H'E'] = \vartheta E',$$

$$h_t = \exp\left(\frac{t}{\vartheta} H'\right), \qquad e_s = \exp(sE'),$$

$$h_t E' h_t^{-1} = (\exp t) \cdot E'$$

$$(*) \qquad h_t e_s h_t^{-1} = e_{s \cdot \exp t}.$$

Sei $e_{s_0} (\neq 1)$ beliebig in $\mathfrak{e}'$; die Menge aller $h_t e_{s_0} h_t^{-1}$ nennen wir einen Strahl. Nach (*) gibt es in $\mathfrak{e}'$ nur die zwei Strahlen e_τ, $\tau > 0$, und e_τ, $\tau < 0$. Sei $\mathfrak{s}$ ein Strahl von $\mathfrak{e}'$, $e_{s_0} \in \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ der andere Strahl.

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{s} \cap e_{s_0} \cdot \mathfrak{t}$$

ist die Menge aller e_s mit s zwischen 0 und s_0.

$$\mathfrak{u} \cup \mathfrak{u}^{-1} \cup (e_{s_0}) \cup (e_{s_0}^{-1}) \cup (1)$$

ist also ein kompakter Keim von $\mathfrak{e}'$ und rein gruppentheoretisch beschrieben.

Rein gruppentheoretische Beschreibung einer kompakten Umgebung der Eins

32. Die Elemente

$$X_1, \cdots, X_{p_1} \qquad (p_1 > 1)$$

mögen die r-parametrige Gruppe $\mathfrak{G}$ erzeugen (Halbeinfachheit brauchen wir hier nicht vorauszusetzen). Man erweitere dies System zu einem System

$$X_1, \cdots, X_{p_1}, \cdots, X_{p_2}$$

durch Hinzufügung der Kommutatoren

$$[X_\rho X_\sigma] \qquad (\rho, \sigma \leqq p_1),$$

dies analog zu einem System

$$X_1, \cdots, X_{p_1}, \cdots, X_{p_2}, \cdots, X_{p_3}$$

durch Hinzufügung der Kommutatoren

$$[X_\rho X_\sigma] \qquad (\rho, \sigma \leqq p_2),$$

und fahre sofort. Dann gibt es ein u, das nur von r abhängt, derart daß

$$X_1, \cdots, X_u$$

eine Basis von $\mathfrak{G}$ bilden.

Man nehme nämlich $u = p_{r-1}$. Ist v so bestimmt, daß die

$$X_1, \cdots, X_{p_v}, \cdots, X_{p_{v+1}} \qquad (X_{v+1})$$

von den

$$X_1, \cdots, X_{p_v} \qquad (\mathfrak{X}_v)$$

linear abhängen, so enthält $\mathfrak{X}_v$ eine Basis von $\mathfrak{G}$. Sei v minimal. Dann liegt für $\nu < v$ in

$$X_1, \cdots, X_{p_\nu}, \cdots, X_{p_{\nu+1}}$$

mindestens ein linear unabhängiges Element mehr als in

$$X_1, \cdots, X_{p_\nu}.$$

Da es in $\mathfrak{G}$ nur r unabhängige Elemente gibt, muß also $v < r$ sein. Somit reicht $u = p_{r-1}$ in der Tat aus.

33. Satz 7: *In der einfachen Gruppe zweiter Art* $\mathfrak{g}$ *läßt sich eine kompakte Teilmenge* U, *die* 1 *als inneren Punkt enthält, rein gruppentheoretisch beschreiben.*

Beschreibung: $\mathfrak{k}$ sei der kompakte eindimensionale Untergruppenkeim aus Satz 6. Wegen der Einfachheit von $\mathfrak{g}$ kann man $a_1, \cdots, a_p$ so wählen, daß die ebenfalls kompakten Keime

$$\mathfrak{k}_\nu = a_\nu^{-1}\mathfrak{k}a_\nu \qquad (\nu = 1, \cdots, p)$$

$\mathfrak{g}$ erzeugen;

$$\mathfrak{k}_\nu : k_\nu(s) \qquad (0 \leqq s \leqq 1).$$

Zu den $k_\nu(s)$ füge man die Kommutatorkurven

$$k_\rho(s)^{-1}k_\sigma(s)^{-1}k_\rho(s)k_\sigma(s) \qquad (\rho < \sigma),$$

so daß das System

$$k_1(s), \cdots, k_{p_1}(s), \cdots, k_{p_2}(s) \qquad (p_1 = p)$$

entsteht. So fahre man fort bis zum Index u aus 32. Nach 32 kommt unter den Hauptteilen von

$$k_1(s), \cdots, k_u(s)$$

eine Basis von $\mathfrak{G}$ vor. Nach 4 enthält die offenbar kompakte Menge

$$U : k_1(s_1) \cdots k_u(s_u) \qquad (0 \leqq s_\nu \leqq 1)$$

eine Umgebung von 1, wie wir es wünschten.

Beweis des Hauptsatzes I

34. Satz 8: *In der einfachen Gruppe zweiter Art* $\mathfrak{g}$ *lassen sich beliebig kleine kompakte Teilmengen* V, *die* 1 *als inneren Punkt enthalten, rein gruppentheoretisch beschreiben.*

Beschreibung: a sei beliebig $\neq 1$. U sei gemäß Satz 7 gewählt.

$$V = \bigcup_{\substack{b_\nu \in U \\ c_\nu \in U}} \prod_{\nu=1}^{r} c_\nu^{-1}(b_\nu^{-1}a^{-1}b_\nu a)c_\nu.$$

Wörtlich wie bei v. d. Waerden, a.a.O.,[2] 783–784, zeigt man, daß die (von a abhängenden) V die gewünschten Eigenschaften besitzen. Nur verwendet man hier statt der Kompaktheit von $\mathfrak{g}$ die von U (Satz 7).

35. Der Satz 8 ist mit unserm Hauptsatz I äquivalent (siehe dazu auch v. d. Waerden, a.a.O.,[2] 784–785), wenn wir *beide* miteinander isomorphe Gruppen als von zweiter Art annehmen. Da die Einfachheit von selber ein rein gruppentheoretischer Begriff ist, haben wir nur noch zu zeigen, daß auch die "zweite Art" oder—was auf dasselbe hinauskommt—die "erste Art" rein gruppentheoretisch zu beschreiben ist, um den Hauptsatz I ganz bewiesen zu haben. Das geschieht nun:

Rein gruppentheoretische Beschreibung der "ersten" Art

36. Satz 4′: *Eine halbeinfache Gruppe ist dann und nur dann von erster Art, wenn für je zwei minimale Gruppen* $\mathfrak{e}$ *und* $\mathfrak{e}'$ *aus* $\mathfrak{e}$ *gilt:*

1) $\mathfrak{e}$ *ist abelsch;*
2) $\mathfrak{e}$ *enthält Elemente endlicher Ordnung;*
3) *Verkürzung von* $\mathfrak{h}_\mathfrak{e} \cap \mathfrak{h}^{\mathfrak{e}'} = (1)$ *oder* $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$;
4) *Verkürzung von* $\mathfrak{h}_\mathfrak{e} \cap \mathfrak{h}_{\mathfrak{e}'} = (1)$ *oder* $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$.

Beweis: "Nur dann": Die Wurzelformen einer Gruppe erster Art zerfallen in zwei Systeme $\mathbf{P}$ und $\overline{\mathbf{P}}$. Ist $\alpha \in \mathbf{P}$, so ist $\bar{\alpha} \in \overline{\mathbf{P}}$ und umgekehrt; ist $\alpha, \beta \in \mathbf{P}$, so ist $(\alpha, \bar{\beta}) = 0$.

Sei $\mathfrak{g}$ von erster Art. Jedes minimale $\mathfrak{e}$ ist von der Gestalt $\mathfrak{e}_\sigma$. Das zugehörige $\mathfrak{E}_\alpha$ wird von E_α und $E_{\bar{\alpha}}$ erzeugt. Wegen $(\alpha, \bar{\alpha}) = 0$ ist $[E_\alpha E_{\bar{\alpha}}] = 0$, also 1 erfüllt.

Seien $\alpha, \rho \in \mathrm{P}$. Man bilde

$$K = i(\bar{\alpha}, \bar{\alpha})H_\alpha - i(\alpha, \alpha)H_{\bar{\alpha}} ;$$

aus $(\alpha, \bar{\rho}) = (\bar{\alpha}, \rho) = 0$ folgt

$$[KE_\rho] = -i(\bar{\alpha}, \bar{\alpha})(\alpha, \rho)E_\rho ,$$

$$[KE_{\bar{\rho}}] = \quad i(\alpha, \alpha)(\bar{\alpha}, \bar{\rho})E_{\bar{\rho}} .$$

Aus 11.3 und $(\alpha, \alpha) = (\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) < 0$ schließt man, daß die Koeffizienten rechts (für alle $\rho \in \mathbf{P}$), d.h. die Wurzeln von K, rein imaginär und rationale Vielfache voneinander sind. Die von K erzeugte Untergruppe $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{h}_\mathfrak{e}$ ist also kompakt, und daraus folgt 2.

$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_\alpha$, $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}_\beta$. Sei $H_\lambda \in \mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}^\beta$. Dann

$$\lambda = p\alpha + \bar{p}\bar{\alpha}, \qquad (\lambda, \beta) = 0,$$

also wegen $(\bar{\alpha}, \beta) = 0$

$$p(\alpha, \beta) = 0.$$

Also entweder $(\alpha, \beta) = 0$ und dann $\mathfrak{H}_\alpha$ senkrecht auf $\mathfrak{H}_\beta$ und $\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}^\beta = \mathfrak{H}_\alpha$. Oder $p = 0$, $\bar{p} = 0$, $\lambda = 0$ und dann $\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}^\beta = (0)$. Also gilt 3 (siehe 20.3).

Wir betrachten nun $H_\lambda \in \mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta$.

$$\lambda = p\alpha + \bar{p}\bar{\alpha} = q\beta + \bar{q}\bar{\beta}$$

"Multiplikation" mit ρ liefert:

$$p(\alpha\rho) = q(\beta\rho) \qquad \text{für alle } \rho,$$

also

$$p\alpha = q\beta.$$

Also entweder $p = q = 0$, $\lambda = 0$ und dann $\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta = (0)$. Oder $p \neq 0$ und dann $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}_\beta$. Also gilt 4 (siehe 20.3).

"Dann": Wegen Voraussetzung 1 kann das α eines minimalen $\mathfrak{e}_\alpha$ nicht imaginär sein ($[E_\alpha E_{-\alpha}]$ ist doch $= H_\alpha$), wegen Voraussetzung 2 kann es nicht reell sein ($\mathfrak{e}_\alpha$ ist dann offen); also ist für ein minimales $\mathfrak{e}_\alpha$ das α komplex. Da andererseits $\mathfrak{e}_\alpha$ für reelles oder imaginäres α sicher minimal ist, müssen alle Wurzelformen komplex sein. Wäre $\mathfrak{g}$ von zweiter Art, so kämen nur die Fälle CI und CIIb aus 27 in Frage. CI ist ausgeschlossen wegen $\mathfrak{H}^\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta \neq \mathfrak{H}_\beta$, $\neq (0)$ (Formel CI, 1) und CIIb wegen $\mathfrak{H}_\gamma \cap \mathfrak{H}_\alpha \neq \mathfrak{H}_\alpha$, $\neq (0)$. Also ist $\mathfrak{g}$ von erster Art.

Einfache Gruppen mit diskretem Zentrum

37. Wir beweisen die Bemerkung 1 zu Hauptsatz I.

Die einfachen Gruppen zweiter Art $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ dürfen ein diskretes Zentrum besitzen. A sei ein Isomorphimus, $A\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$. Die resp. Faktorgruppen nach dem Zentrum seien $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{g}'$; φ und ψ seien die zugehörigen Homomorphismen, $\varphi\mathfrak{f} = \mathfrak{f}'$, $\psi\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. A induziert einen Isomorphismus A', $A'\mathfrak{f}' = \mathfrak{g}'$,

$$A'\varphi = \psi A. \tag{1}$$

Die universellen Überlagerungsgruppen von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ seien $\tilde{\mathfrak{f}}$ und $\tilde{\mathfrak{g}}$, die zugehörigen Projektionen Φ und Ψ, $\Phi\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}$, $\Psi\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$. A' ist nach Hauptsatz I stetig und induziert, wie man weiß, einen stetigen Homomorphismus $\tilde{A}$, $\tilde{A}\tilde{\mathfrak{f}} = \tilde{\mathfrak{g}}$,

$$A'\varphi\Phi = \psi\Psi\tilde{A}. \tag{2}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} A\Phi &= B, \\ \Psi\tilde{A} &= C. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus (1), (2), (3) folgt

$$\psi B = \psi A\Phi = A'\varphi\Phi = \psi\Psi\tilde{A} = \psi C. \tag{4}$$

Das ψ-Urbild von $\mathfrak{1}$ ist das Zentrum von $\mathfrak{g}$, also folgt aus (4):

Für jedes $x \in \mathfrak{f}$ ist $(Bx)\cdot(Cx)^{-1}$ im Zentrum von $\mathfrak{g}$. Da das Zentrum abzählbar ist, kann der Normalteiler $\mathfrak{d}$ aller x mit

$$Bx = Cx$$

nicht abzählbar sein, sicher also nicht im Zentrum von $\mathfrak{f}$ liegen. Nach Anwendung 4 von Satz 1 ist dann $\mathfrak{d} = \mathfrak{f}$, also

$$Bx = Cx$$

für alle x. Da $\tilde{A}$, also nach (3) auch C stetig war, ist B stetig. Da Φ als im Kleinen topologische Abbildung beiderseits stetig ist (Bilder offener Mengen sind offen), ist nach (3) auch A stetig, w.z.b.w.

AMSTERDAM, HOLLAND

Simplizialzerlegungen von beschränkter Flachheit [1942b]

Ann. of Math. (2) 43 (1942), 580–582
[Zbl 0060.40701; MR 0007105]

(Received July 25, 1941)

Wir beantworten eine Frage von Herrn Prof. L. E. J. Brouwer nach einer einfachen Konstruktion einer unendlichen Folge beliebig feiner Simplizialzerlegungen eines Polytops, deren jede eine Unterteilung der vorangehenden ist, und bei der die auftretenden Teilsimplexe nicht beliebig flach werden dürfen, d. h. bei der der Quotient

$$c^r/v$$

(c = Durchmesser = größte Kantenlänge des Simplexes, v = Volumen des Simplexes) für alle r-dimensionalen Simplexe gleichmäßig beschränkt bleibt. Derartige Zerlegungsfolgen braucht man in der Analysis und auch im Grenzgebiet zwischen Analysis und Topologie.

Die Konstruktion, die wir hier angeben wollen, verläuft ähnlich wie unsere Simplizialzerlegung des Cartesischen Produkts zweier Simplexe.[2]

1

Simplexe sollen hier immer mit einer *festen* Reihenfolge der Ecken gegeben sein, Parallelotope immer unter Auszeichnung einer Ecke und einer Anordnung der von dieser Ecke ausgehenden Kanten.

Das Simplex T habe die Ecken

$$e_0 , \cdots , e_r .$$

Wir können T auch beschreiben durch die Vektoren

$$x_0 = e_0 , \qquad x_i = e_i - e_{i-1} \qquad (i = 1, \cdots , r).$$

Sei π eine Permutation $p_1 , \cdots , p_r$ der Zahlen $1, \cdots , r$. Die Punkte

$$e_i = x_0 + \sum_{\nu=1}^{r} x_{p_\nu} \qquad (i = 0, \cdots , r)$$

(als Ecken) erzeugen ein Simplex T^π. Ist π_0 die identische Permutation der Zahlen $1, \cdots , r$, so ist $T^{\pi_0} = T$. Die $r!$ Simplexe T^π heißen *untereinander konjugiert*.

T^π ist die Gesamtheit der Punkte

$$T^\pi \cdots \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu e_{p_\nu} \quad \text{mit} \quad \lambda_\nu \geqq 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu = 1,$$

---

[1] Diese Note stimmt im Wesentlichen überein mit einer im März 1939 bei den Fundamenta Mathematicae eingereichten Note die dort nicht mehr erschienen ist. Das Ergebnis habe ich bereits anderswo verwendet [Proceedings Amsterdam 42 (1939), 880–901].

[2] Fund. Math. 29 (1937), 138–144.

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$T^{\pi} \cdots x_0 + \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu x_{p_\nu} \quad \text{mit} \quad 1 \geqq \alpha_1 \geqq \cdots \alpha_r \geqq 0.$$

Daraus folgt: *Die T^{π} bilden eine simpliziale Teilung des Parallelotops P,*

$$P \cdots x_0 + \sum \alpha_\nu x_\nu , \qquad 0 \leqq \alpha_\nu \leqq 1.$$

Umgekehrt wird durch den Parallelotop P, von dem die Ecke x_0 und die Kantenvektoren $x_1 , \cdots , x_r$ gegeben sind, und durch die Permutation π eindeutig das Simplex T^{π} bestimmt.

2

Aus dem Parallelotop P entstehen durch Halbierung quer zu allen Kanten die Parallelotope

$$P_\sigma \cdots x_{\sigma,0} + \tfrac{1}{2} \sum \alpha_\nu x_\nu ;$$

hier sei σ ein System

$$s_1 , \cdots , s_r$$

von Zahlen s_ν ,

$$s_\nu = 0 \text{ oder } 1,$$

und

$$x_{\sigma,0} = x_0 + \tfrac{1}{2} \sum s_\nu x_\nu .$$

In derselben Weise wie P in die Simplexe T^{π} ist jedes P_σ zerlegt in die Simplexe $(T_\sigma)^{\pi}$.—*T^{π} und $(T_\sigma)^{\pi}$ sind homothetisch* (1:2).

Sei π wieder die Permutation $p_1 , \cdots , p_r$ der $1, \cdots , r$ und sei $\pi^* = \pi^\sigma$ die Permutation $p_1^* , \cdots , p_r^*$, die entsteht, wenn man erst (in der durch π gegebenen Reihenfolge) alle p_ν mit $s_{p_\nu} = 1$ auszieht, und dann alle mit $s_{p_\nu} = 0$, also:

für $s_a > s_b$ kommt a vor b in π^*,

für $s_a = s_b$ und a vor b in π kommt auch a vor b in π^*.

Wir behaupten: *$(T_\sigma)^{\pi}$ liegt ganz in T^{π^σ}.*

In der Tat ist

$$(T_\sigma)^{\pi} \cdots x_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{r} s_\nu x_\nu + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu x_{p_\nu}$$

$$= x_0 + \tfrac{1}{2} \sum{}' (\alpha_\nu + \tfrac{1}{2}) x_{p_\nu} + \tfrac{1}{2} \sum{}'' \alpha_\nu x_{p_\nu} \qquad (1 \geqq \alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_r \geqq 0)$$

(wo $\sum'$ zu erstrecken ist über alle ν mit $s_{p_\nu} = 1$ und $\sum''$ über alle ν mit $s_{p_\nu} = 0$)

$$= x_0 + \sum_{\nu=1}^{r} \beta_\nu x_{p_\nu^*} \qquad (1 \geqq \beta_1 \geqq \cdots \geqq \beta_u \geqq \tfrac{1}{2} \geqq \beta_{u+1} \geqq \cdots \geqq \beta_r \geqq 0)$$

(wo u die Zahl der Einsen unter den s_ν ist). Hieraus folgt unsere Behauptung.

Weiter folgt hieraus: *Die $(T_\sigma)^{\pi}$ mit $\pi^\sigma = \pi^*$ bilden eine Simplizialzerlegung $Z(T)$ von T.*

3

Sei $e_{ij}^{\pi^*}$ der Mittelpunkt der Strecke $e_i^{\pi^*} e_j^{\pi^*}$, $e_{ii}^{\pi^*} = e_i^{\pi^*}$,

$$e_{ij}^{\pi^*} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \sum_{\nu=1}^{i} x_{p_\nu^*} + x_0 + \sum_{\nu=1}^{j} x_{p_\nu^*}\right)$$

$$= x_0 + \sum_{\nu=1}^{i} x_{p_\nu^*} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=i+1}^{i} x_{p_\nu^*} \qquad (i \leqq j).$$

Seien unter den s_{p_ν} mit $\nu \leqq k$

$$k' \text{ Einsen} \quad \text{und} \quad k'' \text{ Nullen}.$$

Die k^{te} Ecke von $(T_\sigma)^\pi$ erhält man für $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 1$, $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_r = 0$; sie lautet also

$$x_0 + \sum_{\nu=1}^{k'} x_{p_\nu^*} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=l'+1}^{l''+u} x_{p_\nu^*} = e_{ij}^{\pi^*} \qquad (i = k', j = k'' + u).$$

Daraus folgt für jedes Teilsimplex $(T_\sigma)^\pi$ von T^{π^σ}:

0^{te} *Ecke ist* $e_{0u}^{\pi^\sigma}$;

auf die Ecke $e_{ij}^{\pi^\sigma}$ *folgt die Ecke* $e_{i+1,j}^{\pi^\sigma}$ *oder die Ecke* $e_{i,j+1}^{\pi^\sigma}$;

der erste Index ist stets $\leqq u$, *der zweite* $\leqq r$.

Umgekehrt sind die Teilsimplexe $(T_\sigma)^\pi$ von T^{π^*} durch diese Eigenschaften auch gekennzeichnet.

4

Wir achten nun nur noch auf $T = T^{\pi_0}$ und lassen den Index π_0 im Folgenden weg. Wir können dann die Teilung $Z(T)$ von T auch so beschreiben:

Die Ecken von $Z(T)$ *sind die* e_{ij} ;

dann und nur dann bilden e_{ij} *und* $e_{i'j'}$ *ein eindimensionales Simplex, wenn die Paare* ij *und* $i'j'$ *einander nicht trennen*;

eine Menge von e_{ij} *bildet dann und nur dann ein Simplex von* $Z(T)$, *wenn ihre Elemente zu je zweien Simplexe von* $Z(T)$ *bilden*;

in den Simplexen von $Z(T)$ *sind die Ecken nach steigenden* $i + j$ *angeordnet.*

Wir bemerken weiter:

Die Simplexe von $Z(T)$ *sind ähnlich der zu* T *konjugierten.*

Sei nun ein endlicher Polytop R gegeben! Wir legen eine Reihenfolge der Ecken zugrunde und bilden die Teilung $Z(R)$, indem wir auf jedes Simplex von R den Prozeß Z anwenden. Die Ecken von $Z(R)$ ordnen wir lexikographisch. Indem wir den Prozeß Z unbegrenzt wiederholen, erhalten wir eine Unterteilungsfolge. Alle dabei auftretenden Simplexe sind den (endlich vielen) konjugierten der Simplexe von R ähnlich, und da ähnliche Simplexe dieselbe Flachheit

$$c^r/v$$

besitzen, bleibt, wie wir es wünschten, die Flachheit gleichmäßig beschränkt.

AMSTERDAM

Über die Enden diskreter Räume und Gruppen [1945]

Comment. Math. Helv. 17 (1945), 1–38
[Zbl 0060.40007; MR 0012214]

In meiner Dissertation[1]) habe ich offene Räume durch „Endpunkte" kompaktifiziert; neuerdings habe ich[2]) die Theorie der Enden bis an die Grenzen — wie ich meinte — ihrer Gültigkeit ausgedehnt. Der Sinn der Unternehmungen war es, unter den Kompaktifizierungen eines nicht kompakten Raumes eine zu bevorzugen; die Forderungen, die ich stellte, lauteten:

Das „Unendlichferne" (die zum Raume hinzugefügte Menge) soll möglichst dünn (nulldimensional) sein.
Das Unendlichferne soll möglichst weitgehend aufgespalten sein.

Ich habe dies Kompaktifizierungsproblem in meiner zweiten zitierten Arbeit durch die Methode der Endpunkte gelöst für alle

semikompakten[3])	(a)
separablen Räume	(b)
mit kompaktem Quasikomponentenraum[4]),	(c)

und ich habe dort auch gezeigt, daß man keine dieser Bedingungen abschwächen kann. Diese Tatsache hat ihre endgültige Formulierung durch J. de Groot erfahren, der in seiner Dissertation[5]) definierte und bewies:

> R^* heißt ideale Kompaktifikation des separablen R, wenn die Menge $R^* \setminus R$ der „neuen" Punkte nulldimensional und jede andere Kompaktifikation R' stetiges Bild der Kompaktifikation R^* ist (d. h. jede topologische Abbildung von R auf sich selbst zu einer stetigen Abbildung von R^* auf R' erweitert werden kann).

---

[1]) Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. Math. Zeitschr. 33 (1931), 692—713.

[2]) Neuaufbau der Endentheorie. 1941. Vermutlich in den Annals of Mathematics erschienen.

[3]) d. h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung mit kompakter Berandung. — Dieser Begriff in der Endentheorie rührt von *L. Zippin* her: On semicompact spaces. Amer. J. of Math. 57 (1935), 327—341.

[4]) d. h. jede abnehmende Folge nichtleerer offener abgeschlossener Teilmengen von R soll einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.

[5]) Topologische Studiën. Compactificatie, voortzetting van afbeeldingen en samenhang. 1942.

R ist dann und nur dann ideal kompaktifizierbar, wenn es obige drei Eigenschaften (a), (b), (c) besitzt.

Es war jedenfalls über jedem Zweifel erhaben, daß etwa der Raum, der aus abzählbar viel isolierten Punkten besteht, keine ausgezeichnete und gleichzeitig „anständige" Kompaktifizierung besitzt, die Maximalitätsforderungen, wie wir sie gestellt haben, erfüllt.

Hier hat nun eine Arbeit von H. Hopf[6]) ganz neue Gesichtspunkte aufgezeigt und mich zu einer Endentheorie abzählbarer, diskreter Räume veranlaßt. Allerdings muß man das Wort „diskret" nicht zu wörtlich auffassen. Es handelt sich immerhin um Räume mit einer nichttrivialen Topologie. Wir fordern, daß in R ein nichttrivialer, reflexiver Begriff der

Nachbarschaft zweier Punkte[7])

definiert ist (d. h. je zwei Punkte sind Nachbarn oder sind es nicht), wobei jeder Punkt

endlich viel Nachbarn

besitzt. Unter der Hülle eines Punktes in einem solchen Raum verstehen wir die Menge seiner Nachbarn und unter der $(k+1)$-ten Hülle die Hülle seiner k-ten Hülle. Zwei solche Topologien heißen äquivalent, wenn ein k existiert, so daß

$$\mathfrak{H}_1(a) \subset \mathfrak{H}'_k(a) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}'_1(a) \subset \mathfrak{H}_k(a)$$

mit $\mathfrak{H}_n(a)$ als n-te Hülle von a in der einen und
$\mathfrak{H}'_n(a)$ „ „ „ „ a „ „ anderen Topologie.

In diskreten Räumen mit Nachbarschaftsbegriff kann man nun in der Tat eine Endentheorie — ganz analog wie früher — entwickeln; äquivalente Räume liefern dabei denselben Endenraum.

Ein anschauliches Modell eines diskreten Raumes R mit Nachbarschaftsbegriff ist ein

Polygon.

---

[6]) Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. Comment. Math. Helvet. 16 (1943), 81—100.

[7]) Ein derartiger topologischer Grundbegriff steht wohl in der Literatur zuerst bei *B. Linfield*, Espaces discrets paramétriques et non-paramétriques. Thèse Strasbourg 1925. Siehe auch: *H. Fréchet*, Fund. Math. 8 (1926), 151—159, wo die Begriffe Linfields auf ältere topologische Begriffe zurückgeführt werden. — Von den tiefergehenden Untersuchungen Alexandroffs u. a. über diskrete Räume werden wir hier nichts brauchen.

Man identifiziere nämlich die Punkte von R mit den Ecken des Polygons P und denke sich je zwei benachbarte Punkte durch eine Kante verbunden. Allerdings gehört dabei zu äquivalenten R nicht notwendig dasselbe Polygon. Aber die Endentheorie von R fällt mit der von P (im alten Sinne) zusammen.

Mein Ausgangspunkt waren ursprünglich die Enden der topologischen Gruppen. Das verschärfte Resultat meiner zweiten zitierten Arbeit lautet:

> Jede separable, semikompakte, zusammenhängende Gruppe besitzt höchstens zwei Endpunkte (ist also im kleinen kompakt).

Auch über die Enden der Wirkungsräume transitiver topologischer Gruppen habe ich in meiner Dissertation etwas ausgesagt, aber H. Hopf hat (l. c.) für ganz andersartige Räume scharfe Aussagen über die Anzahl der Endpunkte machen können, nämlich für offene Räume, in denen eine diskontinuierliche Menge topologischer Selbstabbildungen mit kompaktem Fundamentalbereich agiert. Er bewies, daß solch ein Raum

> einen,
> zwei oder
> eine perfekte Menge von Endpunkten

besitzt[8]).

Es zeigte sich bei Hopf, daß für den Fall einer *Gruppe G* topologischer Selbstabbildungen die Endenzahl nicht von der speziellen Darstellung

---

[8]) *Einen* Endpunkt hat die Ebene (mit der Decktransformationsgruppe des Torus); zwei Endpunkte hat die Gerade (mit der Decktransformationsgruppe des Kreises). Für den Fall unendlich vieler Endpunkte geben wir an Stelle des Hopfschen Beispiels eins aus der Theorie der automorphen Funktionen ohne Grenzkreis: In der funktionentheoretischen Ebene seien drei Kreise K_1, K_2, K_3 gegeben, von denen je zwei in demselben von den zwei Gebieten liegen, die der dritte bestimmt. Die drei Kreise beranden zusammen ein dreifach zusammenhängendes Gebiet A_1. Man spiegele A_1 an seinen drei Rändern und vereinige die drei Spiegelbilder — so entsteht A_2. Die Vereinigung $A_1 \cup A_2$ spiegele man an ihren sechs Randkreisen, vereinige die Spiegelbilder und nenne das Resultat A_3. So fahre man fort. Die Vereinigung A aller A_n erfüllt die ganze Ebene bis auf eine nulldimensionale perfekte Menge (die Menge der Endpunkte von A). In A herrscht die Gruppe gebrochen linearer Abbildungen, die von den Spiegelungen an K_1, K_2, K_3 erzeugt wird; A_1 ist einer ihrer Fundamentalbereiche. Zu der Gruppe gehören automorphe Funktionen, deren Singularitätenmenge mit der Endpunktmenge von A zusammenfällt. — Man kann dieses Schottkysche Beispiel auch durch einen regulären Baum vom Grade 3 ersetzen (bei Hopf ist das einfachste Beispiel ein regulärer Baum vom Grade 4), d. h. durch ein Polygon ohne geschlossenes Teilpolygon und mit drei Strecken bei jeder Ecke. Heißt eine Ecke 0 und sind die benachbarten Ecken 1, 2, 3, so nenne man S_1, S_2, S_3 gewisse Spiegelungen (Automorphismen des Baumes von der Periode 2) die bzw. 0 mit 1, 2, 3 vertauschen. Die S_i erzeugen die gewünschte Gruppe.

der Gruppe abhängt, sondern eine Invariante der abstrakten Gruppe ist, und daß man allgemein von den Enden einer abstrakten Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden sprechen kann. Auf Grund dieser Ergebnisse formulierte Hopf folgende Probleme:

1. eine direkte Endentheorie der abstrakten Gruppen mit endlich viel Erzeugenden zu entwickeln,
2. algebraische Kriterien dafür anzugeben, daß eine Gruppe 1, 2 oder unendlich viel Endpunkte hat.

Das erste Problem (das bei Hopf nicht in Angriff genommen wird) werden wir vollständig lösen. Das zweite, das für den Fall zweier Endpunkte bei Hopf vollständig und befriedigend beantwortet wird, werden wir zwar nicht lösen, aber doch einigermaßen fördern; gleichzeitig werden wir einige feinere Aussagen über die Struktur der Endenmenge diskreter Gruppen machen können.

Der Zusammenhang zwischen diskreten Räumen und diskreten Gruppen wird nahegelegt durch die Dehnschen Gruppenbilder. Sei

$$U = (u_1, \ldots, u_p)$$

eine Teilmenge der Gruppe G, derart daß

1. U die Gruppe G erzeugt,
2. die Identität zu U gehört,
3. mit irgendeinem Element auch das Inverse zu U gehört.

Wir machen G zu einem diskreten Raum durch die Festsetzung:

> a und b sind benachbart, wenn $b = au$ für ein geeignetes u aus U.

Nun kann man auf die Gruppe unsere Endentheorie für diskrete Räume anwenden. Der Nachbarschaftsbegriff hängt zwar von der — willkürlichen — Wahl des erzeugenden Systems U ab; man sieht aber ohne weiteres, daß man mit einem andern erzeugenden System einfach zu einem äquivalenten Raum kommt, also auch zu einer äquivalenten Endentheorie. Die Abhängigkeit vom erzeugenden System ist also nur scheinbar.

In dieser Topologie ist die Gruppe G von selber zusammenhängend, und man kann nun ungefähr genau so, wie Hopf es tut (oder wie es bei

dem entsprechenden Satz in meiner Dissertation geschehen ist), beweisen, daß G endlich ist oder 1,2 oder unendlich viel Endpunkte besitzt. Daß es nicht — wie in meiner Dissertation bei 1 oder 2 Endpunkten bleibt, hat seinen tieferen Grund darin, daß im diskreten Fall die Linksmultiplikationen

$$x' = ax$$

die Endenmenge nicht mehr punktweise festhalten. Der „Abstand" zwischen x und ax braucht nämlich (bei festem a und variablem x) nicht mehr beschränkt zu bleiben, und je „freier und nichtkommutativer" die Gruppe ist, desto wahrscheinlicher ist es, daß die Endpunkte in der Tat nicht festbleiben und die Endenmenge unendlich wird.

Wie man das rechte Maß für die Nichtkommutativität genauer formulieren muß — diese Frage können wir, wie gesagt, nur annähernd beantworten; wir verweisen dafür auf die Arbeit selbst.

Bezeichnungen:

$\cup$, $\bigcup$ = Vereinigung,
$\frown$, $\bigcap$ = Durchschnitt,
$a \in M \setminus N$ bedeutet: $a \in M$, $a \bar{\in} N$,
$\mathfrak{o}$ ist die leere Menge.

1. Diskrete Räume.

1.1. R heißt ein *Nachbarschaftsraum*, wenn für je zwei Punkte von R definiert ist, ob sie *benachbart* sind oder nicht, und zwar auf reflexive und symmetrische Weise: a ist Nachbar von a; ist a Nachbar von b, so ist b Nachbar von a.

1.2. Die Menge der Nachbarn von a heißt seine *Hülle* $\mathfrak{H}(a)$. Unter der *Hülle* einer Menge verstehen wir die Vereinigung der Hüllen ihrer Elemente.

1.3. *Franse* einer Menge M heißt die Menge

$$\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{H}(M) \setminus M$$

der Elemente der Hülle von M, die nicht zu M gehören.

Wir definieren

$$\mathfrak{H}^0(M) = M,$$
$$\mathfrak{H}^{k+1}(M) = \mathfrak{H}(\mathfrak{H}^k(M)).$$

$\mathfrak{H}^k(M)$ heißt die k-te Hülle von M.

$$\mathfrak{F}^{(k)}(M) = \mathfrak{H}^k(M) \setminus M$$

heißt die k-te Franse von M.

1.4. Man hat

$$\mathfrak{H}(\bigcup_n M_n) = \bigcup_n \mathfrak{H}(M_n) \qquad 1.4.1$$

und

$$\mathfrak{H}^k(M) = \bigcup_{a \in M} \mathfrak{H}^k(a)\,, \qquad 1.4.2$$

$$\mathfrak{F}^{(k)}(\bigcup_n M_n) \subset \bigcup_n \mathfrak{F}^{(k)}(M_n)\,. \qquad 1.4.3.$$

1.5. Wir ordnen dem Raum R ein Polygon $\breve{R}$ zu: jedem Element von R entspricht eine Ecke von $\breve{R}$; benachbarten Elementen entsprechen Ecken, die durch eine Kante verbunden sind.

1.6. R besitze von nun an die Eigenschaft

(K) $\mathfrak{H}(a)$ ist für jedes a endlich,

und die Eigenschaft

(S) R ist abzählbar.

Man sieht ohne weiteres, daß diese Eigenschaften bei $\breve{R}$ die

Kompaktheit im Kleinen

und

Separabilität

nach sich ziehen.

1.7. Die Gesamtheit aller Mengen M mit

$\mathfrak{F}(M)$ endlich

heiße $\mathfrak{Q}$. Wegen (K) ist jedes endliche M in $\mathfrak{Q}$.

1.8. Mit M ist auch $\mathfrak{H}(M) \in \mathfrak{Q}$, denn nach 1.4.1 ist

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{H}(M)) \in \mathfrak{F}(M) \cup \mathfrak{F}(\mathfrak{H}(M) \setminus M) = \mathfrak{F}(M) \cup \mathfrak{F}(\mathfrak{F}(M))\,,$$

und hier ist der erste Summand nach Voraussetzung und der zweite nach 1.7 endlich.

1.9. Ist $M \in \mathfrak{Q}$, so ist auch $\mathfrak{F}^{(k)}(M)$ endlich. Denn

$$\mathfrak{F}^{(k)}(M) = \mathfrak{H}^k(M) \setminus M = \bigcup_{\kappa=1} \left(\mathfrak{H}\mathfrak{H}^{\kappa-1}(M) \setminus \mathfrak{H}^{\kappa-1}(M)\right) = \bigcup_{\kappa=1}^{k} \mathfrak{F}\mathfrak{H}^{\kappa-1}(M) ,$$

und hier ist nach 1.8 jeder Summand endlich.

1.10. Wir nennen zwei Nachbarschaftsbegriffe (in derselben Menge) äquivalent[9]), wenn für die zugehörigen Hüllenbegriffe $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ gilt:

Es gibt ein k, so daß für alle a

$$\mathfrak{H}'(a) \subset \mathfrak{H}^k(a) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}(a) \subset \mathfrak{H}'^k(a)$$

erfüllt ist.

1.11. Für äquivalente Nachbarschaftsbegriffe sind $\mathfrak{F}(M)$ und $\mathfrak{F}'(M)$ nur gleichzeitig endlich oder unendlich; die Gesamtheit $\mathfrak{Q}$ ist für äquivalente Nachbarschaftsbegriffe also dieselbe.

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus 1.9.

2. Die Endpunkte.

2.1. Eine Teilmenge $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{Q}$ heißt

Endpunkt von R,

wenn

1. $Q \neq 0$ für alle $Q \in \mathfrak{e}$,
2. mit Q_1, $Q_2 \in \mathfrak{e}$ auch $Q_1 \cap Q_2 \in \mathfrak{e}$ (also $\neq 0$),
3. $R \setminus M \in \mathfrak{e}$ für jedes endliche M,
4. $\mathfrak{e}$ maximal ist.

Die Menge aller Endpunkte von R heißt $\mathfrak{E}$.

2.2. Statt $Q \in \mathfrak{e}$ sagen wir auch $\mathfrak{e} \prec Q$. Wir definieren:

$\{Q\}$ ist die Vereinigung aller $a \in Q$ und aller $\mathfrak{e} \prec Q$.

Wir nennen $\{Q\}$ auch Umgebung jedes in ihm enthaltenen Endpunktes. Umgebung eines $a \in R$ heißt die einpunktige Menge a selbst.

Durch diese Festsetzungen wird $R \cup \mathfrak{E} = R^*$ zu einem Umgebungsraum.

---

[9]) Man nennt das vielleicht besser: gleichmäßig äquivalent.

2.3. In R^* gilt das Trennungsaxiom: zwei Punkte lassen sich durch Umgebungen voneinander trennen. Und zwar ist es trivial für zwei Punkte aus R, und es folgt aus 2.1.3 für einen Punkt aus R und den anderen aus $\mathfrak{E}$. Für zwei Endpunkte $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}'$ beweist man es so: Aus $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}'$ folgt die Existenz eines $Q \in \mathfrak{e}$, $\bar{\in} \mathfrak{e}'$. Also muß ein $Q' \in \mathfrak{e}'$ mit $Q \cap Q' = 0$ existieren, da man Q sonst noch zu $\mathfrak{e}'$ hinzufügen könnte (im Widerspruch zu 2.1.4). Aus $Q \cap Q' = 0$ folgt $\{Q\} \cap \{Q'\} = 0$, und zwar ist das trivial hinsichtlich der Punkte von R und folgt für Endpunkte daraus, daß $\mathfrak{e}'' \in \{Q\} \cap \{Q'\}$ $Q \prec \mathfrak{e}''$ und $Q' \prec \mathfrak{e}''$ nach sich zöge, was nach 2.1.2 unmöglich ist. $\{Q\}$ und $\{Q'\}$ sind also die gewünschten zueinander fremden Umgebungen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$.

2.4. Wir notieren noch die soeben bewiesene Tatsache:

Mit $Q_1 \cap Q_2$ ist auch $\{Q_1\} \cap \{Q_2\}$ nicht leer.

2.5. Die Berandung jedes $\{Q\}$ ist leer. Denn wäre $\mathfrak{e}$ Randpunkt von Q, so wäre $\{Q\} \cap \{Q'\} \neq 0$ für jede Umgebung $\{Q'\}$ von $\mathfrak{e}$, also $Q \cap Q' \neq 0$ im Widerspruch zu 2.1.4.

2.6. R^* ist regulär und separabel. Denn aus 2.5 folgt das Trennungsaxiom in seiner schärfsten Form.

3. Zusammenhang.

3.1. Ist $\mathfrak{H}(M) \cap N \neq 0$, so ist auch $\mathfrak{H}(N) \cap M \neq 0$. (Klar.) Speziell:

Ist $\mathfrak{H}(N) = N$, so ist $\mathfrak{H}(R \setminus N) = R \setminus N$.

3.2. N abgeschlossen — bedeutet: $\mathfrak{F}(N) = 0$.

Aus 3.1 folgt:

Mit N ist auch $R \setminus N$ abgeschlossen. 3.2.1.

Aus 1.4.3 folgt:

Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. 3.2.2.

Und hieraus durch Übergang zum Komplement:

Der Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. 3.2.3.

3.3. Durch Relativierung entsteht die Definition:

$N \subset M$ abgeschlossen rel M — bedeute:

$$F(N) \subset F(M) . \qquad 3.3.1.$$

Oder $F(N) \frown M = \mathrm{o}$. 3.3.2.

Die Sätze aus 3.1—2 gelten auch für die relative Abgeschlossenheit.

3.4. Minimale rel M abgeschlossene Teilmengen von M heißen Komponenten. Mengen mit nur einer Komponente heißen zusammenhängend.

3.5. Jede rel M abgeschlossene Menge zerfällt in disjunkte Komponenten von M. Denn nach 3.2.3 ist der Durchschnitt aller das Element a enthaltenden (rel M) abgeschlossenen Mengen abgeschlossen (rel M), also minimal abgeschlossen, also eine Komponente. Ebenfalls nach 3.2.3 können zwei Komponenten nur einen leeren Durchschnitt besitzen.

3.6. Ist $P \subset N \subset M$ und P abgeschlossen rel N, N abgeschlossen rel M, so ist P abgeschlossen rel M. Denn $F(P) \subset F(N) \subset F(M)$.

3.7. Ist N abgeschlossen rel M und $N \subset M_0 \subset M$, so ist N abgeschlossen rel M. Denn $F(N) \frown M = \mathrm{o}$, also $(FN) \frown M_0 = \mathrm{o}$.

3.8. Die Komponenten von M sind zusammenhängend. Denn nach 3.6 wäre eine rel M abgeschlossene Teilmenge einer Komponente von M auch in M abgeschlossen, im Widerspruch zur Minimalität der Komponenten.

3.9. Die Komponenten von M sind maximale zusammenhängende Teilmengen von M. Denn nach 3.7 ist jede Komponente N von M auch Komponente jedes M_0 mit $N \subset M_0 \subset M$, so daß keine Menge, die N echt enthält, noch zusammenhängend sein kann.

3.10. Kette heißt eine endliche Elementfolge, wenn jedes ihrer Elemente dem folgenden benachbart ist.

Je zwei benachbarte Elemente von M gehören zur selben Komponente von M. Also auch je zwei Elemente von M, die sich in M durch eine Kette verbinden lassen. Andererseits ist die Menge der Elemente, die sich in M mit einem Element durch eine Kette verbinden lassen, abgeschlossen, also nach 3.5 aus Komponenten von M zusammengesetzt. Hieraus folgt:

Komponenten von M sind die Teilmengen der Elemente, die sich mit einem festen Element durch eine Kette verbinden lassen.

3.11. Von nun an besitze R immer die Eigenschaft:

(Z) R ist zusammenhängend.

3.12. Jede Komponente von M besitzt Punkte in $\mathfrak{F}(M)$. Sonst hätte sie nämlich wegen 3.3.1 eine leere Franse, wäre also eine Komponente von R, das doch zusammenhängend sein soll.

3.13. Jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ besitzt nur endlich viel Komponenten. Denn nach 3.12 gibt es in der Franse $\mathfrak{F}(K)$ jeder Komponente K von Q einen Punkt von $\mathfrak{F}(Q)$. Also gibt es in jeder Komponente K von Q ein Element von $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(Q))$. Q besitzt also höchstens soviel Komponenten wie $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(Q))$ Elemente. Nach 1.9 sind das endlich viele.

3.14. Für jedes a ist $\bigcup_n \mathfrak{H}^n(a) = R$. (Folgt aus 3.10—11.)

3.15. (Z) bleibt gültig beim Übergang zu einem äquivalenten Nachbarschaftsbegriff. (Folgt aus 3.14.)

4. Die Kompaktheit von R*.

4.1. a sei fest gewählt. Die unendlichen Komponenten von $R \setminus \mathfrak{H}^k(a)$ nennen wir

$$P_1^{(k)}, \ldots, P_{s_k}^{(k)} .$$

Da ihre Fransen in $\mathfrak{H}^k(a)$ liegen, gehören sie zu $\mathfrak{Q}$.

4.2. Sei $\mathfrak{e}$ ein Endpunkt. Zu jedem k gibt es ein $P_{\sigma_k}^{(k)} \in \mathfrak{e}$, und diese bilden eine absteigende Folge.

Denn wegen 2.1.3 ist $R \setminus H^k(a) \in \mathfrak{e}$. Wäre für ein gewisses k kein $P_{\sigma_k}^{(k)} \in \mathfrak{e}$, so gäbe es (für dieses feste k) zu jedem $\sigma = 1, \ldots, s_k$ ein $Q_\sigma \in \mathfrak{e}$ mit

$$P_\sigma^{(k)} \frown Q_\sigma = 0 .$$

Wir setzen

$$Q = \bigcap_{\sigma=1}^{s} Q_\sigma \; (\neq 0)$$

und haben

$$P_\sigma^{(k)} \frown Q = 0 ,$$

also

$$\bigcup_{\sigma=1}^{s} P_\sigma^{(k)} \frown Q = 0 .$$

Q hätte also mit $R \setminus \mathfrak{H}^k(a)$ einen endlichen, mit einem geeigneten $R \setminus \mathfrak{H}^l(a)$ nach 3.14 sogar einen leeren Durchschnitt, im Widerspruch zu 2.1.3. Daher muß es zu jedem k das gewünschte $P_{\sigma_k}^{(k)} \in \mathfrak{e}$ geben. Daß diese bei wachsendem k abnehmen, ist klar.

4.3. Zu jeder absteigenden Folge $P_{\sigma_k}^{(k)}$ gibt es genau ein $\mathfrak{e}$, das sie enthält.

Daß es solch ein $\mathfrak{e}$ gibt, ist klar: man braucht die Folge der $P_{\sigma_k}^{(k)}$ nur zu einer maximalen Menge mit den Eigenschaften 2.1.1—3 zu ergänzen. Gäbe es zwei solche Endpunkte, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$, so gäbe es nach 2.3 $Q \in \mathfrak{e}$, $Q' \in \mathfrak{e}'$, $Q \frown Q' = o$. Man wähle dann k so groß, daß $\mathfrak{F}(Q) \smile \mathfrak{F}(Q') \subset \mathfrak{H}^k(a)$ liegt. Die Mengen

$$Q_0 = Q \setminus \mathfrak{H}^k(a),$$
$$Q_0' = Q' \setminus \mathfrak{H}^k(a)$$

gehören nach 2.1.2—3 immer noch zu $\mathfrak{e}$ resp. $\mathfrak{e}'$, und man hat

$$Q_0 \frown Q_0' = o.$$

Nach 3.5 setzen sich die in $R \setminus \mathfrak{H}^k(a)$ abgeschlossenen Mengen Q_o und Q_o' aus Komponenten von $R \setminus \mathfrak{H}^k(a)$ zusammen, also aus Mengen $P_{\sigma_k}^{(k)}$. Wegen 2.1.2 hat man

$$P_{\sigma_k}^k \frown Q_0 \neq o, \quad \text{also} \quad P_{\sigma_k}^k \subset Q_0$$
$$P_{\sigma_k}^k \frown Q_0' \neq o, \quad \text{,,} \quad P_{\sigma_k}^k \subset Q_0',$$

im Widerspruch zum Vorigen. — Es kann also nur einen Endpunkt zu der Folge $P_{\sigma_k}^{(k)}$ geben, und damit ist die Behauptung bewiesen.

4.4. Nach 4.2 und 4.3 kann man die Endpunkte einfach mit Hilfe der absteigenden Folgen der Mengen P erzeugen. Hieraus folgt, daß R^* ein Kompaktum ist. 2.5 lehrt weiter, daß R^* nulldimensional ist. Wir fassen das Ergebnis folgendermaßen zusammen:

> Satz 1: Jeder Nachbarschaftsraum R, der (K), (S) und (Z) genügt, läßt sich durch seine Endpunkte zu einem nulldimensionalen Kompaktum R^* abschließen, dessen einzige Häufungspunkte die Endpunkte sind. Jeder Endpunkt besitzt beliebig kleine Umgebungen, die im Sinne des Nachbarschaftsbegriffes zusammenhängend sind und eine endliche Franse haben. Äquivalente R liefern dasselbe R^*.

(Die letzte Bemerkung folgt aus 1.11.)

4.5. Die in 1.5 definierte Zuordnung eines Polygons zu einem Nachbarschaftsraum R verallgemeinern wir folgendermaßen:

$\breve{R}$ sei ein im kleinen kompakter, im kleinen zusammenhängender, zusammenhängender Raum mit 2. Abzählbarkeitsaxiom. $\mathfrak{V}$ sei ein System von

kompakten Gebieten V aus R

mit den Eigenschaften

(K′) Jedes $\overline{V}$ mit V aus $\mathfrak{V}$ hat mit fast allen Gebieten aus $\mathfrak{V}$ einen leeren Durchschnitt.

(S′) $\mathfrak{V}$ ist abzählbar.

(Z′) Zu je zwei $V \in \mathfrak{V}$ gibt es eine Kette von $V \in \mathfrak{V}$, in der jedes V mit dem folgenden einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Wegen der Existenz eines Systems $\mathfrak{V}$ unter unsern Voraussetzungen siehe[1]), Hilfssatz 2, wo (K′) und (S′) gezeigt werden. (Z′) ergibt sich aus dem Zusammenhang von R: Die Vereinigung der V, die sich mit einem festen V durch eine Kette verbinden lassen, heiße T. Ein etwaiger Randpunkt von T läge in einem neuen $V \in \mathfrak{V}$, das mit einem der in T enthaltenen einen nichtleeren Durchschnitt hätte. Also muß der Rand von T leer sein, also T eine Komponente von R, also $= R$.

$\breve{R}$ und $\mathfrak{V}$ definieren einen Nachbarschaftsraum R: Elemente von R sind die $V \in \mathfrak{V}$,

V_1, V_2 heißen benachbart, wenn $V_1 \frown V_2 \neq 0$.

R besitzt auf Grund von (K′), (S′), (Z′) die Eigenschaften (K), (S), (Z).

Ist $\breve{R}$ ein Polygon und ordnet man einer Ecke a von R die Vereinigung von a mit den von a ausgehenden offenen Kanten zu, so kommt man zu einem System $\mathfrak{V}$, das der in 1.5 definierten Zuordnung für Polygone entspricht.

4.6. Zwischen der Endentheorie von R und der von $\breve{R}$ (im Sinne meiner Dissertation[1])) besteht ein einfacher Zusammenhang, der beschrieben wird durch

Satz 2: Die Beziehung zwischen R und $\breve{R}$ gemäß 4.5 läßt sich stetig fortsetzen zu einer topologischen Abbildung der zugehörigen Endenmengen E und $\breve{E}$, und zwar stetig in dem Sinne, daß $\lim V_{\nu_n} = \mathfrak{e}$ im Sinne von $\breve{R}$ dann und nur dann gilt, wenn es im Sinne von R gilt. Insbesondere haben also R und $\breve{R}$ ebenso viel Endpunkte.

12

Die Zuordnung geschieht so: Sei

$$Q \in \mathfrak{Q} \text{ (in } R).$$

Wir setzen in $\breve{R}$:

$$\breve{Q} = g(Q) = \bigcup_{V \in Q} V .$$

Q ist offen. Ist $\breve{a}$ Randpunkt von $\breve{Q}$, so ist $\breve{a}$ in einem gewissen $V_0 \in \mathfrak{V}$, das mit Q, also mit einem der $V \in Q$ einen nichtleeren Durchschnitt hat. Also

$$\breve{a} \in \bigcup_{V \in \mathfrak{H}(Q)} V .$$

Andererseits ist a als Randpunkt von $\breve{Q}$

$$\bar{\epsilon} \bigcup_{V \in Q} V .$$

Also ist

$$\text{Rand } (\breve{Q}) \subset \bigcup_{V \in \mathfrak{F}(Q)} V ,$$

also kompakt.

Ist umgekehrt

$\breve{Q}$ eine offene Menge von $\breve{R}$ mit kompaktem Rand,

so setzen wir

$$Q = g'(\breve{Q}) = \text{Gesamtheit der } V \subset \breve{Q} .$$

Da die $V \in \mathfrak{V}$ Gebiete sind, muß jedes, das Punkte von $\breve{Q}$ enthält, ohne in $\breve{Q}$ enthalten zu sein, Punkte von Rand $(\breve{Q})$ enthalten, d. h.

$$\text{aus } V \in \mathfrak{F}(Q) \text{ folgt } V \frown \text{Rand } (\breve{Q}) \neq 0 .$$

Rand (Q) ist in endlich viel V zusammen enthalten, $V_1, \ldots, V_s$. Also:

$$\text{Ist } V \in \mathfrak{F}(Q), \text{ so ist } V \in \mathfrak{H}(V_1) \cup \cdots \cup \mathfrak{H}(V_s) .$$

Also ist

$$\mathfrak{F}(Q) \text{ endlich, also } Q \in \mathfrak{Q} .$$

$g'g(Q)$ ist in $\mathfrak{H}(Q)$ enthalten, unterscheidet sich also von Q nur in einer endlichen Menge. Ebenso unterscheidet sich $gg'(\breve{Q})$ von $\breve{Q}$ höchstens in der Vereinigung der V, die den Rand von Q überdecken, also in einer

kompakten Menge. Für die Bildung der Endpunkte sind zwei Q bzw. $\breve{Q}$, die sich nur in einer endlichen bzw. kompakten Menge unterscheiden, nicht wesentlich verschieden. In diesem Sinne ist die durch g und g' vermittelte Beziehung zwischen den Q und den $\breve{Q}$ eineindeutig.

Man erhält nun aus einem Endpunkt $\mathfrak{e}$ von R einen Endpunkt $\mathfrak{e}'$ von R, indem man jedes $Q \in \mathfrak{e}$ durch das zugehörige $g(Q)$ ersetzt. Es ist klar, daß $\mathfrak{E}$ und $\breve{\mathfrak{E}}$ dann topologisch aufeinander bezogen sind, und daß diese Beziehung stetige Forsetzung der zwischen R und $\breve{R}$ gegebenen ist.

5. Gruppen.

5.1. R sei von nun an eine

Gruppe G mit endlich vielen Erzeugenden.

Wir machen G durch folgende Festsetzungen zu einem Nachbarschaftsraum:

Sei U eine Teilmenge von G mit den Eigenschaften:

1. U ist endlich,
2. U enthält die Identität,
3. U enthält mit jedem Element das inverse,
4. die kleinste Untergruppe von G, die U enthält, ist mit G identisch.

Wir nennen zwei Elemente

$$a, b \text{ benachbart, wenn } a^{-1}b \in U \text{ [10]}).$$

5.2. Wegen 5.1.2—3, ist der Nachbarschaftsbegriff symmetrisch und reflexiv. Die Hülle von a wird

$$\mathfrak{H}(a) = aU\,, \qquad 5.2.1$$

die k-te Hülle

$$\mathfrak{H}^k(a) = aU^k \text{ [11]}). \qquad 5.2.2$$

---

[10]) Man könnte natürlich ebensogut festsetzen: a, b benachbart, wenn $ab^{-1} \in U$. Statt der „Rechtsnachbarschaft" als Grundbegriff erhielte man dann eine „Linksnachbarschaft" als Grundbegriff. Beide dürfen nicht durcheinander geworfen werden, obschon sie natürlich isomorphe Theorien liefern.

[11]) In Gruppen bedeutet MN die Menge aller mn mit $m \in M$, $n \in N$. M^p bedeutet hier die Menge $M \cdot M \cdot \cdots \cdot M$ (p-mal).

Hieraus folgt:

G ist ein Nachbarschaftsraum mit Gültigkeit von (K), (S), (Z).

Wir können alles, was wir in § 1—4 entwickelt haben, anwenden.

5.3. Ersetzt man das System U durch ein anderes, U', das auch die Eigenschaften 5.1.1—4 besitze, so gelangt man nur zu einem äquivalenten Nachbarschaftsbegriff.

Wegen 5.1.4 gibt es nämlich ein k mit

$$U' \subset U^k, \quad U \subset U'^k .$$

Setzt man das in 5.2.2 ein und berücksichtigt man die Definition aus 1.10, so ist man fertig.

6. Endpunkte von Gruppen.

6.1. Rechtsmultiplikation und Linksmultiplikation mit einem festen Element sind eineindeutige Abbildungen von G auf sich.

> Rechtsmultiplikationen und Linksmultiplikationen lassen sich topologisch bis in die Endpunkte hinein fortsetzen. Die Rechtsmultiplikationen lassen jeden Endpunkt invariant; die Linksmultiplikationen lassen die Begriffe „Nachbar", „Hülle", „Franse" invariant. (Dagegen werden die Linksmultiplikationen im allgemeinen die Endpunkte nicht punktweise festlassen, und die Rechtsmultiplikationen werden die Struktur von R zerstören.)

Die Beweise stehen in 6.2—3.

6.2. Rechtsmultiplikationen: Sei $\lim a_n = \mathfrak{e}$. Wir beweisen, daß dann auch $\lim a_n c = \mathfrak{e}$. Wir brauchen das nur für den Fall $c \in U$ zu beweisen — durch endlichfache Wiederholung ergibt es sich hieraus allgemein. Sei also $c \in U$. Sei $\{Q\}$ irgendeine Umgebung von $\mathfrak{e}$ mit $Q \in \mathfrak{Q}$. Fast alle

$$a_n \in Q ,$$

also fast alle

$$a_n c \in Qc \subset H(Q) = Q \cup \mathfrak{F}(Q) .$$

15

Da $\mathfrak{F}(Q)$ endlich ist, sind also fast alle

$$a_n c \in Q .$$

Das gilt für jede Umgebung $\{Q\}$ von $\mathfrak{e}$, und damit ist $\lim a_n c = \mathfrak{e}$ bewiesen — also alles, was wir über die Rechtsmultiplikationen aussagten.

6.3. Linksmultiplikationen: Bei der Linksmultiplikation mit a geht x in ax und y in ay über.

$$(ax)^{-1}(ay) = x^{-1}y .$$

Also gilt: sind x, y benachbart, so sind ax, ay benachbart. Daher sind „Hülle" und „Franse" linksinvariant,

$$\mathfrak{H}(aM) = a\mathfrak{H}(M), \quad \mathfrak{F}(aM) = a\mathfrak{F}(M) .$$

Hieraus folgt:

Ist $Q \in \mathfrak{Q}$, so ist auch $aQ \in \mathfrak{Q}$.
Ist $\mathfrak{e}$ ein Endpunkt, so auch $a\mathfrak{e}$.
Ist $\{Q\}$ Umgebung von $\mathfrak{e}$, so ist $\{aQ\}$ Umgebung von $a\mathfrak{e}$.

Hieraus ergeben sich alle zu beweisenden Aussagen über die Linksmultiplikationen.

6.4. Ist $\lim a_n = \mathfrak{e}$ und M endlich, ist ferner $\{Q\}$ eine Umgebung von $\mathfrak{e}$, so gilt für fast alle n

$$a_n M \subset Q .$$

Denn nach 6.2 ist $\quad a_n c \in Q$

für fast alle n. Angewandt auf die endlich vielen c von M folgt hieraus die Behauptung.

6.5. Seien $\{Q_1\}$ bzw. $\{Q_2\}$ Umgebungen der (evtl. zusammenfallenden) Endpunkte $\mathfrak{e}_1$ bzw. $\mathfrak{e}_2$; $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{Q}$. Sei $\lim a_n = \mathfrak{e}_1$. Dann gilt für fast alle n:

$$a_n Q_2 \subset Q_1 \quad \text{oder} \tag{1}$$

$$a_n Q_2 \supset R \setminus Q_1 . \tag{2}$$

Zum Beweise bestimmen wir nach 6.4 n so groß, daß

$$a_n \mathfrak{F}(Q_2) \subset Q_1 . \tag{3}$$

Wir lassen den Index n von nun an weg. Wir nehmen an, daß

$$R \setminus Q_1 \not\subset aQ_2 \tag{4}$$

sei. Dann ist entweder

$$(R \setminus Q_1) \cap aQ_2 = o\,,$$

also $$aQ_2 \subset Q_1\,,$$

also (1) erfüllt, oder

$$(R \setminus Q_1) \cap aQ_2 = Q_3 \tag{5}$$

eine

$$\text{nichtleere echte Teilmenge von } R \setminus Q_1\,. \tag{6}$$

Wir dürfen annehmen, daß

$$R \setminus Q_1$$

zusammenhängend ist (evtl. verkleinern wir Q_1 um endlich viel Elemente, um das zu erreichen). Wegen (5) und der Definition 3.4 ist

$$\mathfrak{F}(Q_3) \cap (R \setminus Q_1) \neq o\,, \tag{7}$$

da Q_3 sonst Komponente von $R \setminus Q_1$ also $= R \setminus Q_1$ wäre im Widerspruch zu (6). Andererseits ist nach (5)

$$\mathfrak{F}(Q_3) \subset \mathfrak{H}(R \setminus Q_1) \cap \mathfrak{H}(aQ_2)\,,$$

also $$\subset [(R \setminus Q_1) \cap aQ_2] \cup \mathfrak{F}(R \setminus Q_1) \cup \mathfrak{F}(aQ_2)\,,$$

also $$\subset \mathfrak{F}(R \setminus Q_1) \cup \mathfrak{F}(aQ_2)$$

also $$\subset Q_1 \cup \mathfrak{F}(aQ_2)$$

(nach 6.3) $$= Q_1 \cup a\mathfrak{F}(Q_2)$$

(nach (3)) $$= Q_1\,.$$

Das steht im Widerspruch zu (7). Von den beiden Alternativschlüssen, die wir aus der Annahme (4) zogen, war also (5)—(6) unzulässig und nur (1) zulässig. Es gilt also: (1) richtig oder (4) falsch. Oder: (1) oder (2) richtig, w.z.b.w.

6.6. $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ seien zwei (evtl. zusammenfallende) Endpunkte, und $\lim a_n = \mathfrak{e}_1$. Dann ist

entweder $\lim a_n \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_1$ (1)

oder $\mathfrak{e}_2$ Häufungspunkt der a_n^{-1} (2)

(aber nicht beides zugleich).

17

Denn seien $\{Q_1\}, \{Q_2\}$ Umgebungen von bzw. $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$. Tritt für fast alle n der Fall 6.5.1 ein, so hat man für fast alle n

$$a_n \mathfrak{e}_2 \in \{Q_1\} ,$$

also

$$\lim a_n \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_1 .$$

Tritt dagegen für unendlich viele n der Fall 6.5.2 ein, so hat man unendlich oft

$$c \in a_n Q_2 ,$$

wo c ein (festes) Element von $R \setminus Q_1$ ist, also unendlich oft

$$a_n^{-1} c \in Q_2 .$$

Das gilt für jede Umgebung Q_2 von $\mathfrak{e}_2$, also ist $\mathfrak{e}_2$ Häufungspunkt der $a_n^{-1} c$, also nach 6.2 auch

$$\mathfrak{e}_2 \text{ Häufungspunkt der } a_n^{-1} ,$$

w.z.b.w.

6.7. Seien $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ drei verschiedene Endpunkte und $\lim a_n = \mathfrak{e}_1$. Die a_n^{-1} können sich an und für sich bei allen drei Endpunkten $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ häufen; durch Auswahl kann man aber erreichen, daß sie sich bei höchstens einem, etwa $\mathfrak{e}'$ häufen ($\mathfrak{e}'$ kann mit $\mathfrak{e}_1$ zusammenfallen); die beiden anderen nennen wir $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}'''$. Nach 6.6 ist

$$\lim a_n \mathfrak{e}'' = \lim a_n \mathfrak{e}''' = \mathfrak{e}_1 ,$$

also: in jeder Umgebung von $\mathfrak{e}_1$ liegen mindestens zwei Endpunkte. Also:

> Gibt es mehr als zwei Endpunkte, so ist die Menge $\mathfrak{E}$ der Endpunkte perfekt[12]).

6.8. Die Endpunkte $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ heißen einander invers, wenn eine Folge a_n existiert mit

$$\lim a_n = \mathfrak{e} , \quad \lim a_n^{-1} = \mathfrak{e}' .$$

Die Vereinigung aller zu $\mathfrak{e}$ inversen Endpunkte heiße $\mathfrak{e}^{-1}$.

---

[12]) Satz von *Hopf*, l. c., S. 82.

6.9. $\mathfrak{e}^{-1}$ ist abgeschlossen.

Denn seien alle $\mathfrak{e}_n$ invers zu $\mathfrak{e}$ und $\lim \mathfrak{e}_n = \mathfrak{e}_0$. Seien $\{Q\}$ und $\{Q_0\}$ bzw. Umgebungen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_0$. In jeder Umgebung von $\mathfrak{e}_n$, also auch in $\{Q_0\}$ gibt es Elemente a_n mit $a_n^{-1} \in Q$. Das gilt für jedes Paar $\{Q\}, \{Q_0\}$ von Umgebungen von $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{e}_0$. Also ist $\mathfrak{e}_0$ auch invers zu $\mathfrak{e}$, w.z.b.w.

6.10. Sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ einander invers, so sind auch $a\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ einander invers.

Denn es sei etwa $\lim c_n = \mathfrak{e}$, $\lim c_n^{-1} = \mathfrak{e}'$. Dann ist nach 6.2:

$$\lim c_n^{-1} a^{-1} = \mathfrak{e}' .$$

Andererseits $$\lim a c_n = a\mathfrak{e} .$$

Das bedeutet, daß $\mathfrak{e}'$ und $a\mathfrak{e}$ invers sind.

6.11. Wir verstehen unter

$$R\mathfrak{e} \text{ die Menge aller } a\mathfrak{e},\ a \in R .$$

Wir nennen

$$\mathfrak{e} \text{ linksinvariant, wenn } R\mathfrak{e} = \mathfrak{e} \text{ ist.}$$

Jede Gruppe befindet sich in einem der beiden folgenden Fälle:

Entweder für jedes $\mathfrak{e}$

$$\overline{R\mathfrak{e}} = \mathfrak{E} \qquad 6.11.1$$

$$\text{und} \quad \mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{E} . \qquad 6.11.2$$

Oder: es gibt einen linksinvarianten Endpunkt, und jeder linksinvariante Endpunkt $\mathfrak{e}_0$ erfüllt 6.11.3

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 \text{ für jedes } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0 . \qquad 6.11.4$$

Zum Beweise nennen wir

$$V(\mathfrak{e}_0) \text{ die Menge aller } \mathfrak{e} \text{ mit } \mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 ,$$

wenn $\mathfrak{e}_0$ irgendein Endpunkt ist. $V(\mathfrak{e}_0)$ kann natürlich leer sein; im allgemeinen besteht ja $\mathfrak{e}^{-1}$ aus mehr als einem Endpunkt.

Wir haben

$$\mathfrak{E} = V(\mathfrak{e}_0) \cup \overline{R\mathfrak{e}_0} \qquad 6.11.5$$

für jedes $\mathfrak{e}_0$, denn ist

$$\mathfrak{e} \bar{\epsilon} V(\mathfrak{e}_0),$$

so ist

$$\mathfrak{e}^{-1} \neq \mathfrak{e}_0 ;$$

es gibt dann eine Folge a_n mit

$$\lim a_n = \mathfrak{e}$$

und

$$\mathfrak{e}_0 \text{ nicht Häufungspunkt von } a_n^{-1} ;$$

also ist nach 6.6

$$\lim a_n \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}$$

in $\overline{R\mathfrak{e}_0}$ enthalten. Also gilt 6.11.5 in der Tat.

Wir haben nun zwei Fälle:

a) $V(\mathfrak{e}) = 0$ für jedes $\mathfrak{e}$. Dann ist nach 6.11.5

$$\overline{R\mathfrak{e}} = \mathfrak{E}$$

für jedes $\mathfrak{e}$, also 6.11.1 gültig. Ist weiter $\mathfrak{e}_1$ ein Endpunkt in $\mathfrak{e}^{-1}$, so ist nach 6.10

$$a\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}^{-1},$$

$$R\mathfrak{e}_1 \subset \mathfrak{e}^{-1}$$

und nach 6.9

$$\overline{R\mathfrak{e}_1} \subset \mathfrak{e}^{-1},$$

also nach 6.11.1

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{E},$$

so daß auch 6.11.2 gilt.

b) Für ein gewisses $\mathfrak{e}_0$ ist $V(\mathfrak{e}_0) \neq 0$. Dann ist für ein gewisses $\mathfrak{e}$

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 . \qquad (6.11.6)$$

Nach 6.10 sind dann aber auch $\mathfrak{e}$ und $a\mathfrak{e}_0$ invers, also wegen 6.11.6

$$a\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 ,$$

womit 6.11.3 bewiesen ist. Man hat also

$$R\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0 ,$$

also nach 6.11.5

$$\mathfrak{e} \in V(\mathfrak{e}_0) \text{ für alle } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0 ,$$

d. h.

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 \text{ für jedes } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0 ,$$

und damit ist zum Schluß auch 6.11.4 bewiesen.

6.12. Hat G zwei linksinvariante Endpunkte, so hat es genau zwei Endpunkte.

Denn nach 6.11 gilt, wenn $\mathfrak{e}_0$ linksinvariant ist,

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0 \text{ für jedes } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0 .$$

Ebenso, wenn auch $\mathfrak{e}_1$ linksinvariant ist,

$$\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_1 \text{ für jedes } \mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_1 .$$

Es kann also kein $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0$ und $\neq \mathfrak{e}_1$ geben.

6.12a. Hat G genau zwei Endpunkte, so sind sie zueinander invers. Sind sie obendrein invariant, so ist keiner zu sich selbst invers. (Folgt aus 6.11.2 und 6.11.4.)

6.13. Sind $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ zwei verschiedene einander inverse Endpunkte und $\{Q\}, \{Q'\}$ bzw. (fremde) Umgebungen, so gibt es ein c derart, daß

$$cQ \text{ echt in } Q ,$$
$$c^{-1}Q' \text{ echt in } Q'$$

enthalten ist.

Da $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ invers sind, gibt es nämlich eine Folge a_n,

$$\lim a_n = \mathfrak{e}$$
$$\lim a_n^{-1} = \mathfrak{e}' .$$

Nach 6.5 gilt also für ein a_n (das wir auch c nennen dürfen)

$$cQ \subset Q_1 ,$$
$$c^{-1}Q' \subset Q_1' ,$$

wo Q_1 und Q_1' irgendwelche echte Teilumgebungen von Q und Q' seien. Daraus folgt die Behauptung.

6.14. Eine Gruppe mit genau zwei Endpunkten besitzt eine unendliche zyklische Untergruppe von endlichem Index[13]).

Zum Beweise wähle man ein c gemäß 6.13. (Wegen 6.12a ist das möglich.) Dann bilden die Mengen

$$c^n Q$$

eine absteigende Folge. Der Durchschnitt ist leer, da Q sonst eine Folge

$$c^{-n} b$$

enthielte, was nach 6.13 nicht möglich ist. Jedes Element von Q liegt also in einer der Mengen

$$c^n Q \setminus c^{n+1} Q \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$= c^n (Q \setminus cQ) .$$

Ebenso liegt jedes Element von Q' in einer der Mengen

$$c^{-n} (Q' \setminus c^{-1} Q') .$$

$Q \setminus cQ$ und $Q' \setminus c^{-1} Q'$ sind endlich.
Jedes Element von G ist also darstellbar in der Form

$$c^n a_1, \ldots, c^n a_k ,$$

mit geeigneten (aber festen) $a_1, \ldots, a_k$ und ganzem n.
c erzeugt also die gesuchte zyklische Untergruppe von endlichem Index.

6.15. Eine Gruppe, die eine unendliche zyklische Untergruppe von endlichem Index besitzt, besitzt genau zwei Endpunkte[13]).
Jedes Element von G ist nämlich in der Form

$$c^n a_1, \ldots, c^n a_k$$

darstellbar. Die von c erzeugte Untergruppe besitzt die Endpunkte

$$\mathfrak{e} = \lim c^n \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{e}' = \lim c^{-n} .$$

---

[13]) Auch dieser Satz ist von *Hopf*, l. c., S. 97.

Jede unendliche Folge aus G läßt sich in Folgen

$$c^n a_\kappa \quad \text{und} \quad c^{-n} a_\kappa$$

mit festem κ zerlegen. Nach 6.2 konvergieren diese gegen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$. Also sind das die einzigen Endpunkte von G. $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}'$ in G, da $n > 0$ bzw. $n < 0$ zueinander fremde Umgebungen von $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{e}'$ sind.

6.16. Satz 3:

1. Die Kompaktisierung einer Gruppe G von endlich vielen Erzeugenden durch ihre Endpunktmenge $\mathfrak{E}$ ist eindeutig bestimmt.
2. $\mathfrak{E}$ besteht aus 0, 1, 2 Punkten, oder ist perfekt[12]).
3. 0 Endpunkte besitzen die endlichen Gruppen und nur diese.
4. 2 Endpunkte besitzen die Gruppen mit unendlicher zyklischer Untergruppe von endlichem Index und nur diese[13]).
5. $\mathfrak{E}$ ist invariant bei Linksmultiplikationen und punktweise invariant bei Rechtsmultiplikationen.
6. Die $a\,\mathfrak{e}$ liegen entweder überall dicht oder $\mathfrak{e}$ ist linksinvariant.
7. Es kann

   0, 1 oder 2

   linksinvariante Endpunkte geben — wir sprechen dann von

   elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen

   Gruppen.
8. Gruppen mit 0 Endpunkten sind elliptisch.
9. Gruppen mit 1 Endpunkt sind parabolisch.
10. Gruppen mit 2 Endpunkten sind elliptisch oder hyperbolisch.
11. Gruppen mit ∞ viel Endpunkten sind elliptisch oder (?) parabolisch. (Ob hier der parabolische Fall wirklich eintreten kann, ist unsicher.)
12. Bei elliptischen Gruppen ist $\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{E}$ für jedes $\mathfrak{e}$.
13. Bei parabolischen Gruppen mit dem linksinvarianten Endpunkt $\mathfrak{e}_0$ ist $\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_0$ für alle $\mathfrak{e} \neq \mathfrak{e}_0$ und $\mathfrak{e}_0^{-1} = \mathfrak{E}$.
14. Bei hyperbolischen Gruppen sind die beiden (invarianten) Endpunkte zueinander invers, aber keiner zu sich selbst invers.

---

[12]) Satz von *Hopf*, l. c., S. 82.

[13]) Auch dieser Satz ist von *Hopf*, l. c., S. 97.

Wir geben zu jeder Nummer an, wo sie bewiesen ist. 1. in 5.2—3. 2. in 6.7. 3. trivial. 4. in 6.14—15. 5. in 6.1—3. 6. in 6.11.1 und 6.11.3. 7. in 6.12 (Beispiele folgen). 8. trivial. 9. trivial. 10. trivial (Beispiele folgen). 11. in 6.12. 12. in 6.11.2. 13. Die erste Aussage steht in 6.11.4, die andere ergibt sich so: $\mathfrak{e}_0^{-1} \supset \mathfrak{E} \setminus \mathfrak{e}_0$, also $= \mathfrak{E}$ wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{e}^{-1}$ und der Perfektheit von $\mathfrak{E}$. 14. in 6.12a.

6.17. Beispiele:

1. Gruppe mit einem Endpunkt: abelsche Gruppe von 2 Erzeugenden.
2. Hyperbolische Gruppe: zyklische unendliche Gruppe.
3. Elliptische Gruppe mit 2 Endpunkten: die Gruppe mit den 2 Erzeugenden s und t und den Relationen

$$s^2 = stst = \text{Identität}.$$

4. Elliptische Gruppe mit ∞ vielen Endpunkten: freie Gruppe von 2 Erzeugenden.

1. $\mathfrak{H}^n(1)$ besteht aus $u^i v^j$ mit $|i| + |j| \leqq n$, wenn u, v die Erzeugenden sind. $R \setminus \mathfrak{H}^n(1)$ ist also zusammenhängend.

2. $\mathfrak{H}^n(1)$ besteht aus den u^i, $|i| \leqq n$, wenn u die Erzeugende ist. $R \setminus \mathfrak{H}^n(1)$ besitzt die Komponenten u^i, $i > n$ und $i < -n$. $u \cdot u^i = u^{i+1}$, d. h. die Endpunkte bleiben fest.

3. Man zieht aus den beiden Relationen:

$$st = t^{-1}s,$$

also

$$st^i = t^{-i}s.$$

Man kann mit dieser Relation alle Elemente von G auf die Gestalt

$$t^i s^{0,1}$$

bringen. Man erhält für

$$\mathfrak{H}^n(1): t^i, \quad |i| \leqq n$$
$$t^i s, \quad |i| \leqq n - 1.$$

Die Komplementärmenge besitzt also wieder zwei Komponenten P, P'.

Bei den $t^i s^{0,1} \in P$ ist $i > 0$,
$\in P'$ $i < 0$.

24

Linksmultiplikation mit s liefert

$$s t^i s^{0,1} = t^{-i} s^{1,0} ,$$

also Vertauschung der beiden Endpunkte.

4. Die Erzeugenden seien u und v. Die „Worte"

$$w = u^i v^j \cdots u^k v^l =$$

verteilen sich auf vier Mengen:

$$U_+ : i > 0 \cdot U_- : i < 0 .$$

$$V_+ : i = 0,\ j > 0 \cdot V_- : i = 0,\ j < 0 .$$

Alle haben die Franse 1, gehören also zu $\mathfrak{Q}$, sind unendlich und paarweise elementefremd. Jede enthält mindestens einen Endpunkt; es gibt also vier, also ∞ viel Endpunkte. Der Automorphismus

$$u \longleftrightarrow v$$

vertauscht die linksinvarianten Endpunkte untereinander, aber auch U_+ mit V_+ und U_- mit V_-. Gibt es einen linksinvarianten Endpunkt, so gibt es zwei, was nicht möglich ist.

Die Gruppe ist demnach nicht parabolisch, also elliptisch.

Problem: Gibt es überhaupt parabolische Gruppen mit unendlich vielen Endpunkten?

7. Untergruppen.

7.1. Wir nennen

$$S_{\mathfrak{e}} \text{ die Untergruppe aller } a \text{ mit } a\mathfrak{e} = \mathfrak{e} .$$

7.2. $$S_{c\mathfrak{e}} = c S_{\mathfrak{e}} c^{-1} .$$

7.3. Sei a_n eine Folge aus $S_{\mathfrak{e}}$. Dann ist

entweder	$\lim a_n = \mathfrak{e}$	7.3.1
oder	$\mathfrak{e}$ Häufungspunkt der a_n^{-1} .	7.3.2

Denn sei 7.3.2 falsch und $a_{n'}$ eine Teilfolge mit

$$\lim a_{n'} = \mathfrak{e}' \neq \mathfrak{e} . \qquad 7.3.3$$

Dann ist nach 6.6

$$\lim a_{n'} \mathfrak{e} = \mathfrak{e}' ,$$

also wegen $a_{n'} \mathfrak{e} = \mathfrak{e}$

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}$$

im Widerspruch zu 7.3.3. Also muß entweder 7.3.1 oder 7.3.2 gelten.

7.4. Ist $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$ unendlich, so sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ gleich oder invers.

Denn sei a_n eine Teilfolge von $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$. Dann gibt es auch eine Teilfolge b_n mit

$$\lim b_n = \mathfrak{e}$$

(nämlich entweder a_n selbst oder — nach 7.3 — eine Teilfolge von a_n^{-1}). Nun ist

$$\lim b_n = \mathfrak{e}' \neq \mathfrak{e}$$

ausgeschlossen, also nach 6.6

$$\mathfrak{e}' \text{ Häufungspunkt von } b_n^{-1} .$$

Es gibt also eine Teilfolge c_n mit

$$\lim c_n = \mathfrak{e} , \quad \lim c_n^{-1} = \mathfrak{e}' ,$$

w.z.b.w.

7.5. Sind $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ drei verschiedene Endpunkte, so ist

$$S_{\mathfrak{e}_1} \frown S_{\mathfrak{e}_2} \frown S_{\mathfrak{e}_3}$$

endlich.

Denn nach 7.4 gibt es eine Folge c_n mit

$$\lim c_n = \mathfrak{e}_1 , \quad \lim c_n^{-1} = \mathfrak{e}_2$$

im Widerspruch zu 7.3, angewandt auf $\mathfrak{e}_3$.

7.6. Wir führen den Gedankengang von 6.13 weiter: $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ sind zueinander inverse Endpunkte mit den im Sinne von R zusammenhängenden Umgebungen $\{Q\}$, $\{Q'\}$. Man findet ein c so, daß die

$$c^n Q$$

und die

$$\mathfrak{c}^{-n} Q'$$

absteigende Folgen bilden.

$$\bigcap_n c^n Q = \bigcap_n c^{-n} Q' = \mathfrak{o} ,$$

da sonst z. B. Q eine Folge $c^{-n}b$ enthielte, was nicht möglich ist. c^nQ ist zusammenhängend. Es gibt also (siehe 4.1—3) zu jedem k ein n, so daß

$$c^nQ \text{ in genau einem } P^{k\,13a})$$

enthalten ist.

$$\bigcap_n c^n\{Q\} \quad (\text{ebenso} \quad \bigcap_n c^{-n}\{Q'\})$$

besteht also aus genau einem Endpunkt

$$\mathfrak{e}_1 = \lim c^n \quad (\text{bzw. } \mathfrak{e}_1' = \lim c^{-n}) .$$

Man hat

$$c\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1 , \quad c\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1' ,$$

$$c^i\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1 , \quad c^i\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1' ,$$

d. h.

$S_{\mathfrak{e}_1} \frown S'_{\mathfrak{e}_1}$ enthält ein Element unendlicher Ordnung.

Wir haben demnach bewiesen:

Zu jedem Paar verschiedener, zueinander inverser Endpunkte $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ gibt es in beliebiger Nähe ein Paar inverser Endpunkte $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1'$ mit unendlichem

$$S_{\mathfrak{e}_1} \frown S'_{\mathfrak{e}_1} .$$

Sowie:

Jede Gruppe mit mehr als einem Endpunkt besitzt Elemente unendlicher Ordnung. (Dieser Satz gilt aber allgemeiner.)

7.7. Ist T eine unendliche Untergruppe von $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$ und cTc^{-1} ebenfalls in $S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$ enthalten, so ist

$$c\mathfrak{e} = \mathfrak{e} , \quad c\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'$$

oder

$$c\mathfrak{e} = \mathfrak{e}' , \quad c\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} ,$$

$$c^2 \in S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'} .$$

Sei nämlich

$$a_n \in T \subset S_{\mathfrak{e}} \frown S_{\mathfrak{e}'}$$

eine unendliche Folge. Man darf auf Grund von 7.3 (nach evtl. Übergang zur inversen und Auswahl) voraussetzen, daß

$$\lim a_n = \mathfrak{e} , \quad \lim a_n^{-1} = \mathfrak{e}' . \tag{1}$$

13a) k ist hier natürlich nicht Exponent.

Nun ist auch

$$ca_nc^{-1} \in cTc^{-1} \subset S_e \cap S_{e'} ;$$

man darf also nach 7.3 wiederum voraussetzen, daß

entweder $\lim ca_nc^{-1} = e$, $\lim ca_n^{-1}c^{-1} = e'$

oder $\lim ca_nc^{-1} = e'$, $\lim ca_n^{-1}c^{-1} = e$

ist, also nach 6.2

entweder $\lim ca_n = e$, $\lim ca_n^{-1} = e'$

oder $\lim ca_n = e'$, $\lim ca_n^{-1} = e$,

d. h. wegen (1)

entweder $ce = e$, $ce' = e'$

oder $ce = e'$, $ce' = e$,

jedenfalls aber

$$c^2e = e , \quad c^2e' = e' ,$$

also

$$c^2 \in S_e \cap S_{e'} ,$$

w. z. b. w.

7.8. Wir fassen die Ergebnisse zusammen in

Satz 4: 1. Die Untergruppen S_e der Elemente von R, die die Endpunkte e bei Linksmultiplikation festlassen, haben zu je dreien einen endlichen Durchschnitt und zu je zweien höchstens dann einen unendlichen Durchschnitt, wenn die zugehörigen Endpunkte zueinander invers sind; in jeder Umgebung jedes inversen Endpunktpaares kann man ein Endpunktpaar finden, für das der Durchschnitt in der Tat unendlich ist.

2. Ist

$$T \text{ unendlich}, \ T \subset S_e \cap S_{e'} , \ cTc^{-1} \in S_e \cap S_{e'} ,$$

so ist

$$ce = e , \quad ce' = e'$$

oder

$$ce = e', \quad ce' = e$$

und

$$c^2 \in S_e \cap S_{e'} .$$

7.9. Man kann Satz 4 zu einem abstrakten notwendigen Kriterium für die Existenz unendlich vieler Endpunkte ausgestalten, indem man von der zwischen S_e und seinem Endpunkt e bestehenden Beziehung abstrahiert.

Satz 5: Zu einer Gruppe G mit unendlich vielen Endpunkten gibt es ein System Σ von Untergruppen S mit folgender Eigenschaft:

1. Σ enthält mit jeder Gruppe alle konjugierten.
2. Jedes Tripel von Σ hat einen endlichen Durchschnitt.
3. Es gibt unendlich viel Paare von Σ mit unendlichem Durchschnitt.
4. Ist S_1, S_2 ein Paar von Σ, T unendlich, $T \subset S_1 \cap S_2$, $cTc^{-1} \subset S_1 \cap S_2$, so ist $c^2 \in S_1 \cap S_2$ und $cS_1c^{-1} = S_1$ oder S_2.

Ist die Gruppe obendrein parabolisch, so fällt genau eine der Gruppen S von Σ mit G zusammen.

Man nehme natürlich für Σ das System aller unendlichen Gruppen $S_\mathfrak{e}$. Die im parabolischen Fall mit G zusammenfallende Gruppe gehört zum linksinvarianten Endpunkt.

7.10. Als Anwendungsbeispiel beweise ich:

Das direkte Produkt zweier unendlicher Gruppen G und H besitzt genau einen Endpunkt.

(Allerdings kann man diesen Satz mit anderen Methoden einfacher beweisen — siehe die zweite zitierte Arbeit des Verf.[2]), Satz 8 — aber darauf soll es uns hier nicht ankommen.)

Nach Satz 3, (3)—(4) sind die Möglichkeiten „0 und 2 Endpunkte" ausgeschlossen. Wir schließen nun die Möglichkeit „∞ viel Endpunkte" aus.

Seien ∞viel Endpunkte vorhanden. Nach 7.6 gibt es ein Element unendlicher Ordnung

$$c = a \times b\,, \quad a \in G\,, \quad b \in H\,,$$

$$\lim c^n = \mathfrak{e}\,, \quad \lim c^{-n} = \mathfrak{e}'\,.$$

c erzeugt eine unendliche zyklische Gruppe $T \subset S_\mathfrak{e} \cap S_{\mathfrak{e}'}$. Nun ist

$$c_0 = 1 \times b$$

mit T elementweise vertauschbar, also nach Satz 4

$$c_0^2 = 1 \times b^2 \in S_\mathfrak{e} \cap S_{\mathfrak{e}'}\,.$$

Wegen der Gruppeneigenschaft ist

$$c_{00}^2 = (c_0^{-1}c)^2 = a^2 \times 1' \in S_\mathfrak{e} \cap S_{\mathfrak{e}'}\,.$$

c_o^2 oder c_{oo}^2 ist von unendlicher Ordnung und erzeugt eine unendliche zyklische Gruppe $T' \subset S_e \cap S_{e'}$. Entweder jedes Element von G oder jedes Element von H ist mit T' elementweise vertauschbar. Also nach 7.7:

$$\text{Alle} \quad c \in G \times 1'$$
$$\text{oder alle} \quad c \in 1 \times H$$

vertauschen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ untereinander. Da $S_e \cap S_{e'}$ in der Gruppe der $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ vertauschenden Linksmultiplikationen vom Index 2 ist, gilt:

$$\text{Unendlich viel} \quad c \in G \times 1'$$
$$\text{oder unendlich viel} \quad c \in 1 \times H$$

liegen in $S_e \cap S_{e'}$. Durch nochmalige Anwendung von 7.7 folgt hieraus:

$$\text{alle} \quad c \in G \times 1'$$
$$\text{und alle} \quad c \in 1 \times H,$$

vertauschen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$, also auch

$$\text{alle} \quad c \in G \times H.$$

$S_e \cap S_{e'}$ ist also vom Index 2 in $G \times H$,

was der Annahme der Existenz von mehr als einem Endpunkt widerspricht.

8. Normalteiler.

8.1. Die Rechtsnebengruppen Ha und Hb von H in G heißen benachbart, wenn a und b benachbart sind. Gilt das für Ha und Hb, so gilt sogar: Zu jedem $a' \in Ha$ gibt es ein benachbartes $b' \in Hb$. Man nehme nämlich $a'a^{-1}b$.

8.2. Benachbarte Nebengruppen häufen sich gegen dieselben Endpunkte. Denn sei $\lim a_n = \mathfrak{e}$, $a_n \in Ha$, und sei Hb benachbart zu Ha. Dann gibt es zu a_n einen Nachbar b_n in Hb: $b_n = a_n u_n$, $u_n \in U$. Da U endlich ist, zerfällt die Folge der b_n in endlich viel Teilfolgen, die nach 6.2 den Limes $\mathfrak{e}$ besitzen. Daraus folgt die Behauptung.

8.3. Je zwei Rechtsnebengruppen von H in G häufen sich gegen dieselben Endpunkte. Man kann ja irgend zwei Elemente, also auch zwei Rechtsnebengruppen von H in G durch eine Kette benachbarter verbinen. Nach 8.2 folgt hieraus die Behauptung.

8.4. H sei eine feste Untergruppe von G. Q sei $\epsilon \mathfrak{Q}$. Gilt für *ein* Ha

$$Q \frown Ha \quad \text{endlich},$$

so gilt es für alle Ha.

Denn ist $Q \frown Ha$ endlich, so gibt es in Q keinen Endpunkt $\mathfrak{e}$, der Häufungspunkt von Ha ist. Nach 8.3 gilt dieselbe Aussage hinsichtlich eines jeden Ha, und da Q Umgebung des etwaigen $\mathfrak{e}$ ist, muß dann auch wieder bzw. $Q \frown Ha$ endlich sein.

8.5. Ist N Normalteiler von G, so haben natürlich auch alle Linksnebengruppen von N in G dieselben Häufungspunkte. Andererseits ist nach 6.3, wenn $\mathfrak{e}$ Häufungspunkt von N ist, auch $a\mathfrak{e}$ Häufungspunkt von aN. Hieraus folgt:

Mit $\mathfrak{e}$ sind alle $a\mathfrak{e}$ Häufungspunkte von N.

Nach 6.11 ergeben sich also zwei Möglichkeiten:

> Satz 5. Ist N Normalteiler von G, so häuft sich N entweder gegen alle Endpunkte von G, oder es häuft sich gegen genau einen, nämlich den invarianten Endpunkt von G.

8.6. Ist H Untergruppe von G und $Q \epsilon Q$ (also $F(Q)$ endlich), so ist für fast alle Rechtsnebengruppen Ha

$$Q \frown Ha \quad \text{abgeschlossen in } Ha$$

(also nach 3.5 aus Komponenten von Ha zusammengesetzt).

Denn man hat

$$\mathfrak{F}(Q \frown Ha) \frown Ha \subset \mathfrak{H}(Q \frown Ha) \frown Ha \subset \mathfrak{H}(Q) \frown Ha,$$

also

$$\mathfrak{F}(Q \frown Ha) \frown Ha \subset (\mathfrak{H}(Q) \frown Ha) \setminus (Q \frown Ha) = \mathfrak{F}(Q) \setminus Ha.$$

Die Vereinigung aller

$$\mathfrak{F}(Q \frown Ha) \frown Ha$$

ist also endlich, also sind fast alle leer, d. h. fast alle $Q \frown Ha$ abgeschlossen in ihrem Ha.

8.7. Satz 6. Besitzt G einen zusammenhängenden unendlichen Normalteiler mit unendlicher Faktorgruppe, so besitzt G genau einen Endpunkt.

Zum Beweise wenden wir 8.6 auf den zusammenhängenden Normalteiler N an:

Ist $Q \in \mathfrak{Q}$, so gilt für fast alle aN:

$$Q \cap aN = o$$

oder

$$= aN . \tag{1}$$

Anders formuliert:

$$Q \cap aN \text{ oder } (R \setminus Q) \cap aN = o \text{ für fast alle } aN , \tag{1'}$$

und da es unendlich viel aN gibt, auch für mindestens eines. Also gilt nach 8.4

$$Q \cap aN \text{ oder } (R \setminus Q) \cap aN \text{ endlich für alle } aN . \tag{2}$$

Einer dieser beiden Fälle kann nur eintreten, z. B.

$$Q \cap aN \text{ endlich für alle } aN . \tag{2'}$$

Dann muß in (1) auch der Fall

$$Q \cap aN = o \text{ für fast alle } aN \tag{1'}$$

eintreten, da aN ja unendlich ist. Die Ausnahme-aN, für die hier

$$Q \cap aN \neq o$$

ist, werden nun durch (2') erfaßt. Also ist

$$Q \text{ endlich.} \tag{3'}$$

Hat man hingegen statt (2')

$$(R \setminus Q) \cap aN \text{ endlich für fast alle } aN , \tag{2''}$$

so schließt man analog:

$$R \setminus Q \text{ endlich.} \tag{3''}$$

Alle $Q \in \mathfrak{Q}$ befinden sich also im Falle (3') oder im Falle (3''), d. h. sie sind bis auf endlich viel Elemente mit o oder G identisch. Es kann daher keine zwei Endpunkte geben (die ja disjunkte Umgebungen Q haben müßten). Da G unendlich ist, gibt es demnach genau einen Endpunkt.

8.7. Zusatz zu Satz 6: Besitzt G einen unendlichen Normalteiler von endlich viel Erzeugenden mit unendlicher Faktorgruppe, so besitzt G genau einen Endpunkt.

Wählt man nämlich, wenn eine Gruppe G von endlich vielen Erzeugenden und eine Untergruppe H gegeben sind, das System U für G (gemäß 5.1) so, daß es ein Erzeugendensystem von H als Teilmenge enthält, so stimmt der Nachbarschaftsbegriff in H mit dem von G induzierten überein und H wird zusammenhängend. Daraus ergibt sich der Zusatz.

Daraus folgt insbesondere: Eine freie Gruppe von endlich vielen Erzeugenden besitzt keine Normalteiler von endlich vielen Erzeugenden und unendlichem Index. — Jedoch kann man das leicht auch direkt beweisen.

Bemerkung zu Satz 5: Der Satz erinnert an Satz 18 meiner Dissertation[1]): Besitzt die abgeschlossene Untergruppe von G genau einen Endpunkt, so besitzt auch G genau einen Endpunkt. Etwas Derartiges gilt bei diskreten Gruppen nicht; man kann die Forderung, daß N ein Normalteiler sein soll, nicht fallen lassen, wenn man den Satz aufrecht erhalten will. Beispiel: Die Gruppe von 4 Erzeugenden u_1, u_2, v_1, v_2 und den Relationen $u_1 u_2 = u_2 u_1$, $v_1 v_2 = v_2 v_1$, von der man genau wie von der Gruppe 6.17.4 beweist, daß sie unendlich viel Endpunkte besitzt. Man sieht ohne weiteres, daß sie eine — sogar abgeschlossene — Untergruppe mit genau einem Endpunkt besitzt, z. B. die von u_1, u_2 erzeugte.

Bemerkung zu Satz 6: Dieser Satz erinnert an Satz 8 meiner Dissertation: Das kartesische Produkt zweier nichtkompakter Räume hat genau einen Endpunkt. Er ist mit diesem Satz auch begrifflich verwandt. Übrigens ist natürlich auch 7.10 als einfache Folge von Satz 6 einzusehen.

Die Frage liegt nahe, ob auch für die in meiner Dissertation behandelten Gruppen ein Analogon des Satzes 6 gilt. Die Frage ist zu bejahen, selbst unter den weiteren Voraussetzungen meiner unter[2]) zitierten Arbeit. Wir zeigen das im Anhang.

9. Darstellungen diskreter Gruppen.

9.1. $\breve{R}$ sei ein im kleinen kompakter, im kleinen zusammenhängender, zusammenhängender Raum mit 2. Abzählbarkeitsaxiom. Die diskrete Gruppe G sei dargestellt durch topologische Selbstabbildungen von $\breve{R}$. $a \in G$ entspricht $f_a(\breve{R}) = \breve{R}$.

Die Darstellung sei stark diskontinuierlich[14]), d. h.:

> Sind A und B kompakt in R, so ist $f_a(A) \frown B = o$ für fast alle a.

Die Darstellung besitze eine kompakte Fundamentalmenge[14]) M, d. h.:

$$\bigcup_{a \in G} f_a(M) = R .$$

9.2. In $\breve{R}$ existiert eine Folge kompakter Gebiete $V_1, V_2, \ldots$ die $\breve{R}$ überdeckt, und je zwei der V lassen sich durch eine Kette von V verbinden, in der jedes mit dem folgenden einen Punkt gemeinsam hat. (Siehe 4.5.)

Nach dem bekannten Überdeckungssatz gibt es ein p, so daß die kompakte Fundamentalmenge

$$M \subset V_1 \cup \cdots \cup V_p$$

liegt. Wegen der Ketteneigenschaft gibt es ein $q \geqq p$, so daß

$$M^* = V_1 \cup \cdots \cup V_q$$

zusammenhängend ist. M^* ist also ein kompaktes Fundamental*gebiet*.

9.3. Die Transformierten $f_a(M^*)$ sind ebenfalls kompakte Gebiete und überdecken ganz $\breve{R}$. Sie bilden ein System $\mathfrak{B}$ im Sinne von 4.5. (Zusammenfallende V werden mehrfach gezählt.) Insbesondere ist (K′) erfüllt wegen der starken Diskontinuität von G. Wir können also die $f_a(M^*)$ als Elemente eines Nachbarschaftsraumes R auffassen, mit

$$\overline{f_a(M^*)} \frown \overline{f_b(M^*)} \neq o$$

als Nachbarschaftsbegriff. Nach 4.5 sind dann (K), (S), (Z) erfüllt.

9.4. Die Teilmenge U von G werde so definiert:

$$a \in U, \quad \text{wenn} \quad f_a(M^*) \frown M^* \neq o .$$

Zu jedem

$$f_c(M^*)$$

gibt es eine Kette

---

[14]) Beide Definitionen bei *Hopf*, l. c., S. 88, 90.

$$f_{b_1}(M^*),\ f_{b_2}(M^*),\ \ldots,\ f_{b_t}(M^*)$$

$$b_1 = 1\ ,\quad b_t = c$$

mit

$$\overline{f_{b_i}(M^*)} \cap \overline{f_{b_{i+1}}(M^*)} \neq 0\ ,$$

also

$$\overline{f_{b_i^{-1}b_{i+1}}(M^*)} \cap \overline{M^*} \neq 0\ ,$$

also

$$b_i^{-1}b_{i+1} \in U\ .$$

Hieraus folgt

$$c = b_1^{-1}b_2 \cdot b_2^{-1}b_3 \cdots b_{t-1}^{-1}b_t\ ,$$

d. h. ein Produkt von Elementen aus U. U ist demnach ein erzeugendes System.

9.5. Es ist klar, daß die Nachbarschaftsbegriffe von G (siehe 9.4) und R (siehe 9.3) zusammenfallen, sobald man a mit $f_a(M^*)$ identifiziert. Dasselbe gilt dann auch für die Endentheorien. Nach 4.6 kann man weiter die Endentheorien von R und $\breve{R}$ identifizieren, und damit gelangt man zu dem

Satz 7: Die Gruppe G von endlich vielen Erzeugenden sei dargestellt in einem Raum $\breve{R}$ (siehe 9.1); die Darstellung sei stark diskontinuierlich und besitze eine kompakte Fundamentalmenge. Die Endentheorien von G und $\breve{R}$ fallen zusammen, wenn man eine Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ von G identifiziert mit

$$\bigcup_{a \in Q} f_a(M^*)\ ,$$

wo M^* irgendein Fundamental*gebiet* ist. Insbesondere haben G und $\breve{R}$ gleichviel Endpunkte[15]).

10. Anhang.

10.1. Wir beschäftigen uns noch mit den im Kleinen kompakten, zusammenhängenden Gruppen G mit 2. Abzählbarkeitsaxiom. (Siehe [2]).) Wir beweisen

---

[15]) Bei Hopf sind die Endpunkte von $\breve{R}$ primär. Die Tatsache, daß zwei Räume $\breve{R}$ mit demselben G dieselbe Anzahl Endpunkte haben, wies auf die Möglichkeit einer Endpunkttheorie von G hin (Hopf, l. c., S. 96).

Satz 8 G besitze einen zusammenhängenden, abgeschlossenen nichtkompakten Normalteiler mit nichtkompakter Faktorgruppe[16]). Dann besitzt G genau einen Endpunkt.

10.2. $\mathfrak{R}$ bezeichne die Randbildung in R. Q sei eine offene Menge mit kompaktem Rand.

Wir sagen, daß eine Eigenschaft gilt für „nahezu alle" Elemente einer Menge, wenn sie nur in einer kompakten Teilmenge nicht gilt.

Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{R}(Q)$ bilden die aN mit

$$\mathfrak{R}(Q) \frown aN \neq o$$

eine kompakte Teilmenge der Faktorgruppe G/N. Für nahezu alle aN gilt demnach

$$\mathfrak{R}(Q) \frown aN = o\,,$$

und da mit N auch aN zusammenhängend ist:

$$Q \frown aN = o$$

oder

$$= aN\,.$$

Anders formuliert

$$Q \frown aN = o \qquad \text{für nahezu alle } aN. \quad (1)$$

oder

$$(R \setminus \overline{Q}) \frown aN = o$$

Je zwei Nebengruppen aN häufen sich (wegen der Invarianz der Endpunkte bei Multiplikationen[17])) gegen dieselben Endpunkte. Ist $Q \frown a_0 N$ kompakt, so muß darum auch jedes $Q \frown aN$ kompakt sein; andernfalls gäbe es ja in Q einen Endpunkt, gegen den aN, aber nicht $a_0 N$ sich häufte.

Da G/N nicht kompakt ist, folgt aus (1) die Existenz eines a_0 mit

$$Q \frown a_0 N = o \quad \text{(also kompakt)}$$

oder

$$(R \setminus \overline{Q}) \frown a_0 N = o \quad \text{(also kompakt)};$$

also gilt

$$Q \frown a_0 N \quad \text{oder } (R \setminus \overline{Q}) \frown aN \text{ kompakt für alle } aN. \qquad (2)$$

---

[16]) Das Nötige über Normalteiler und Faktorgruppen findet man bei Verf., Einige Sätze über topologische Gruppen, Annals of Math. 37 (1936), 46—56, oder bei *D. van Dantzig*, Zur topologischen Algebra, I, Math. Annalen 107 (1932), 587—626.

[17]) Siehe [2]), Satz 8. Man kann sich aber auch mit [1]), Satz 9, begnügen.

Einer der beiden Fälle kann nur eintreten, z. B.

$$Q \cap aN \quad \text{kompakt für alle } aN. \tag{2'}$$

Dann muß in (1) auch notwendigerweise der Fall

$$Q \cap aN = o \quad \text{für nahezu alle } aN \tag{1'}$$

eintreten.

Sei nun irgendeine Folge

$$a_n \in Q$$

gegeben. Nach (1′) bilden die a_nN eine kompakte Menge in G/N, und wir dürfen — nach Auswahl — die Existenz von

$$\lim a_nN = aN$$

annehmen, d. h. die Existenz von

$$b_n \in N\,, \quad b \in N \tag{3}$$

mit

$$\lim a_nb_n = ab\,. \tag{4}$$

Aus (3) folgt, daß die Folgen

$$a_n \quad \text{und} \quad b_n^{-1}$$

sich gegen dieselben Endpunkte häufen; da Q eine Umgebung dieser Endpunkte ist, gilt

$$b_n^{-1} \in Q$$

für fast alle n. (3) und (5) liefern (5)

$$b_n^{-1} \in Q \cap N\,,$$

also ist nach (2′) die Folge

$$b_n^{-1} \quad \text{kompakt.} \tag{6}$$

(4) und (6) zusammen liefern, daß

$$a_n \quad \text{kompakt}$$

ist, daß man also aus jeder Folge von Q eine kompakte auswählen kann, d. h.

$$Q \quad \text{kompakt.} \tag{7'}$$

Hätte man nun statt (2′)

$$(R \setminus Q) \frown aN \quad \text{kompakt für alle } aN, \tag{2″}$$

so schlösse man genau so auf

$$R \setminus \overline{Q} \quad \text{kompakt.} \tag{7″}$$

Alle Q befinden sich also im Falle (7′) oder (7″). Sie sind alle nahezu $= o$ oder nahezu $= G$. Es kann daher keine zwei verschiedenen Endpunkte geben (die ja disjunkte Umgebungen haben müßten). Da G nicht kompakt ist, besitzt es also genau einen Endpunkt.

(Eingegangen den 1. März 1944.)

Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie [1951b]

Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, Utrecht, 1951
(reprinted with corrections in Geom. Dedicata 19 (1985), 7–63)
[Zbl 0054.01701; MR 0044533 (Zbl 0573.51004; MR0797151)]

EINLEITUNG

Außer den großen Klassen einfacher Liescher Gruppen[1] gibt es bekanntlich noch die Ausnahmegruppen

$$\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8,$$

die, so wie E. Cartan [2] sie algebraisch festgelegt hat, nicht sehr eindrucksvoll und anschaulich sind. E. Cartan selber hat später bemerkt und ohne Beweis angegeben [4], daß die $\mathbf{G}_2$ die Automorphismengruppe des Systems der Oktaven (der Graves–Cayleyschen Zahlen) ist. Die Oktaven in ihren Beziehungen zu Eigentümlichkeiten der $\mathbf{D}_4$ hat E. Cartan [5] ebenfalls behandelt. Von einem mehr algebraischen Standpunkt hat N. Jacobson [10], [11] das Studium der Oktaven im Hinblick auf die Lie-Ringe wiederaufgenommen, wobei er sich auf Untersuchungen von M. Zorn [15] über Alternativkörper stützte.

Einen neuen wesentlichen Fortschritt erzielten C. Chevalley und R. D. Schafer [6]. Sie entdeckten nämlich, daß die $\mathbf{F}_4$ aufgefaßt werden kann als Automorphismengruppe der sogen. Jordanschen Algebra $\mathfrak{J}$, die besteht aus den hermiteschen 3×3 Matrices X mit Oktavenkoeffizienten und der Ringoperation $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$. Sie zeigten weiter, daß diese Automorphismen (und also auch die $\mathbf{F}_4$ als ihre Gesamtheit) charakterisiert werden können durch die Eigenschaft, daß sie die quadratische und die kubische Form

$$\chi(X \circ X) \qquad \text{und} \qquad \chi(X \circ X \circ X)$$

invariant lassen. In gewissem Sinne findet sich alles, was zu dieser Entdeckung nötig war, schon implizit bei E. Cartan [2], der aber die kubische Form rätselhafterweise übersehen hat, obwohl er eine analoge im Zusammenhang mit der $\mathbf{E}_6$ wohl kennt; aber auch der Zusammenhang zwischen der $\mathbf{F}_4$ und $\mathbf{E}_6$ fehlt bei Cartan. Bei Chevalley und Schafer findet sich auch eine Deutung der $\mathbf{E}_6$ im Zusammenhang mit der Algebra $\mathfrak{J}$, bei der aber die Beziehung zu einer kubischen Invariante fehlt.

[1] Wir geben häufig eine Gruppe und eine ihrer Darstellungen mit demselben Buchstaben an, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Darstellung gemeint ist.

Wir haben hier alle diese Probleme noch einmal behandelt und das Bild einigermaßen abgerundet. Abgesehen von den Grundeigenschaften der Lieschen Theorie der kontinuierlichen Gruppen und der Cartan–Weylschen Theorie der halbeinfachen Gruppen [2], [14] haben wir nicht viel vorausgesetzt und uns so wenig möglich auf die Literatur berufen. Auch von der Theorie der Alternativkörper (die uns bei der Abfassung nicht bekannt war) und der Jordanschen Algebren von Albert haben wir keinen Gebrauch gemacht.

Die Theorie der Oktaven haben wir von Grund auf entwickelt und dabei einen einfachen Beweis des Hurwitzschen Satzes angegeben, der eine merkwürdige Beziehung der nullteilerfreien Algebren zu den projektiven Geometrien der Dimensionen $-1, 0, 1, 2$ und der Charakteristik 2 aufdeckt.

Danach haben wir die $\mathbf{D}_4$ und die $\mathbf{B}_3$ in ihren Beziehung zum Oktavensystem $\mathfrak{C}$ untersucht und allerlei Eigenschaften, insbesondere die Trialität bestätigt; verschiedene der Beweismethoden sind vielleicht auch an sich interessant.

Das nächste Thema war die $\mathbf{G}_2$, die sich als Automorphismengruppe von $\mathfrak{C}$ ergibt. (Diese Behauptung haben wir – wie später analog – direkt durch Angabe des Wurzelformensystems erhärtet.)

Beim Studium der Algebra $\mathfrak{J}$ (siehe oben) bemerkten wir, daß die infinitesimalen Automorphismen von $\mathfrak{J}$ erzeugt werden von Operationen

$$X \to \tilde{A}X = [A, X]$$

mit A antisymmetrisch, $\chi(A) = 0$. Diese Operationen bilden zusammen mit den Automorphismen von $\mathfrak{C}$ eine Basis der Automorphismengruppe von $\mathfrak{J}$. Weitere Ergebnisse, auch die Identität dieser Gruppe mit $\mathbf{F}_4$, suche man in der Arbeit selber auf.

Wir erwähnen aber noch den Hauptachsensatz für $\mathfrak{J}$: Die Elemente von $\mathfrak{J}$ lassen sich durch Transformationen von $\mathbf{F}_4$ auf die Hauptdiagonalform bringen.

Die $\mathbf{E}_6$ haben wir charakterisieren können als die Gruppe der linearen Abbildungen von $\mathfrak{J}$ auf sich, bei denen $\det X$ invariant bleibt; die Chevalley–Schafersche Charakterisierung folgt hieraus.

$\mathfrak{J}$, $\mathbf{F}_4$ und $\mathbf{E}_6$ stehen auch noch in einem Zusammenhang zur projektiven Oktavenebene. Daß man die trivialen Inzidenzaxiome der projektiven Geometrie auch durch eine Oktavengeometrie muß befriedigen können, ist seit den Untersuchungen von R. Moufang [12], [13] plausibel; sie hat jedenfalls eine affine Oktavengeometrie angegeben. G. Hirsch [9] konstruierte mit topologischen Mitteln eine ebene projektive Geometrie mit

8-Sphären als Geraden. Wir haben dieselbe Aufgabe nun rein algebraisch gelöst.

Punkte und Geraden unserer Geometrie werden nämlich gegeben durch die irreduzibelen Idempotente der Algebra $\mathfrak{J}$, und die Inzidenzrelation lautet $X \circ Y = 0$. Die Automorphismengruppe dieser Geometrie ist die $\mathbf{E}_6$. Die Untergruppe $\mathbf{F}_4$ ist die der elliptischen Oktavengeometrie. Die Geraden sind (als Punktmengen) 8-Sphären: die Automorphismengruppe der Geometrie reduziert sich bei Beschränkung auf die Gerade auf die $\mathbf{D}_5$, die projektive Gruppe der 8-Sphäre; bei der elliptischen Geometrie auf die $\mathbf{B}_4$, die Drehgruppe der 8-Sphäre. Sehr einfach ergibt sich in der Oktavengeometrie die Gültigkeit des Satzes vom Vierseit; der Desarguessche Satz ist hier bekanntlich nicht erfüllt.

Da uns hauptsächlich die Beziehungen zu den Lieschen Gruppen interessieren, haben wir uns algebraisch nicht der größten Allgemeinheit befleißigt und daher die Oktaven immer über dem reellen Grundkörper betrachtet. Für einen Teil der Beweismethoden und wohl auch der Ergebnisse ist das übrigens unumgänglich.

Am Ende haben wir einige offene Probleme aufgezählt.

INHALT

Hinweise
1. $\mathfrak{C}$
2. $\mathbf{D}_4, \mathbf{B}_3$
3. $\mathbf{G}_2$
4. $\mathfrak{J}, \mathbf{F}_4$
5. Π
6. $\mathscr{P}$
7. $\mathscr{P}(\mathfrak{C})$
8. $\mathbf{E}_6$
9. $\mathbf{A}$
10. ? ?

Bemerkung 1960. Vor mir hat schon A. Borel die Bezeichnung 'projektive Oktavenebene' gebraucht, allerdings nur im topologischen Sinn (*Comptes Rendus, Paris* **230** (1950), 1378–1380) und hat P. Jordan ohne Beweis eine Darstellung der Oktavenebene durch die Idempotenten des Ringes $\mathfrak{J}$ angegeben. (*Abh. Math. Sem. Hamburg* **16** (1949), 74–76.) Beide Arbeiten waren mir unbekannt.

HINWEISE

$\mathbf{B}_n = (2n+1)$-dim. Drehgruppe.
$\mathbf{D}_n = 2n$-dim. Drehgruppe.
$\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$ Ausnahmegruppen.
$\mathfrak{C}$ = System der Oktaven (reeller Grundkörper);
(x, y) inneres Produkt; $e_0, \ldots, e_7$, Basiselemente.

$\mathfrak{U}$	1.6
G_{ij}, F_{ij}	2.1
$\kappa, K, \pi, \lambda, \pi_1,$	2.2
Trialität	(2.3.6); (2.4.5); 7.10
$\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^+, \mathfrak{M}^-$	4.1–4.4
$X \circ Y, (X, Y), (X, Y, Z)$	(4.5.9)–(4.5.11)
$\mathfrak{J}$ (Algebra von Albert)	(4.5.9)
$\tilde{A}, \mathfrak{R}$	(4.5.12)–(4.5.13)
δ	4.6
$E_{1,2,3}, F_i^a, \delta_i, A_p$	4.7
$\delta_{ij}, \mathfrak{M}_3$	4.9
Hauptmatrix	5.1
Charakteristische Gleichung	(5.2.4)
det X	(5.2.5)
Π (System der irreduzibelen Idempotente von $\mathfrak{J}$)	5.3
$\mathscr{P}$ (ebene projektive Geometrie)	6.1
P, L	6.2
$\mathscr{P}(\mathfrak{C})$ (Oktavengeometrie)	7.1
$X \vee Y$	7.5
det(X, Y, Z)	7.11
Reelle Gerade	7.12
$\Pi^{\#}$	7.12
Prospektive Gruppe	7.13
$\mathfrak{T}$	8.1
$\mathbf{A}$	9.3

1. $\mathfrak{C}$

1.1. Das hyperkomplexe System $\mathfrak{C}$ besitze die folgenden Eigenschaften:

1.1.1. $\mathfrak{C}$ ist ein endlich dimensionaler linearer Raum (Elemente: kleine lateinische Buchstaben) mit dem reellen Zahlkörper (Elemente: kleine griechische Buchstaben) als Koeffizientenkörper und mit einem (positiv

definiten) inneren Produkt (x, y), also auch mit einer Vektorlänge $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

1.1.2. In $\mathfrak{C}$ ist eine distributive, nicht notwendig assoziative Multiplikation definiert,

$$x, y \in \mathfrak{C} \Rightarrow xy \in \mathfrak{C}; (a - b)(x - y) = ax - bx - ay + by;$$

$$a(\alpha x) = \alpha(ax); 1x = x;$$

1.1.3. Mit einem Eins-Element,

1.1.4. die $|xy| = |x||y|$ erfüllt.

1.2. Aus 1.1.2 folgt: Die Linksmultiplikationen

$$L_a x = ax$$

und die Rechtsmultiplikationen

$$R_a x = xa$$

sind lineare Abbildungen. Aus (1.1.4) folgt, daß sie für $|a| = 1$ isometrisch, also orthogonal sind. Sie lassen also auch die inneren Produkte invariant ($|a| = 1$):

$$(L_a(\lambda x + \mu y), L_a(\lambda x + \mu y)) = (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y),$$

also

$$\lambda^2(L_a x, L_a x) + 2\lambda\mu(L_a x, L_a y) + \mu^2(L_a y, L_a y)$$

$$= \lambda^2(x, x) + 2\lambda\mu(x, y) + \mu^2(y, y),$$

und hieraus durch Koeffizientenvergleichung

$$(L_a x, L_a y) = (x, y) \quad \text{für } |a| = 1.$$

Ähnlich für die R_a.

Den hier angewandten Kunstgriff der Ersetzung von x durch $\lambda x + \mu y$ nennen wir im Anschluß an einen invariantentheoretischen Prozeß 'Polarisieren'. Wir lassen in Zukunft die Rechnung weg, wenn wir ihn anwenden.

Wir zeigten:

$$(ax, ay) = (x, y) \quad \text{für } |a| = 1.$$

Also

$$\left(\frac{a}{|a|} x, \frac{a}{|a|} y\right) = (x, y) \quad \text{für } a \neq 0$$

und daher

(1.2.1) $(ax, ay) = (a, a)(x, y)$,

was auch für $a = 0$ gilt. Ebenso

(1.2.2) $(xa, ya) = (a, a)(x, y)$.

Polarisieren von (1.2.1) hinsichtlich a ergibt

(1.2.3) $(ax, by) + (bx, ay) = 2(a, b)(x, y)$.

1.3. Mit e_0 bezeichnen wir die Eins von $\mathfrak{C}$. Die gespiegelte einer linearen Abbildung A von $\mathfrak{C}$ in sich wird mit A' bezeichnet, also

$$(Ax, y) = (x, A'y).$$

Aus (1.2.3) mit $b = e_0$ und $(a, e_0) = 0$ folgt

$$(ax, y) + (x, ay) = 0,$$

also

$$L_a + L'_a = 0 \quad \text{für } (a, e_0) = 0.$$

Außerdem ist

$$L_{e_0} = L'_{e_0}.$$

Definieren wir nun $\bar{a}$ als Funktion von a, sodaß

$$\bar{a} \text{ linear in } a$$

ist und

$$\bar{a} = -a \quad \text{für } (a, e_0) = 0$$

und

$$\bar{a} = a \quad \text{für } a = e_0,$$

so können wir schreiben

$$L'_a = L_{\bar{a}},$$

also

(1.3.1) $(ax, y) = (x, \bar{a}y)$.

Dies können wir auch als Definitionsgleichung für $\bar{a}$ auffassen. Analog gilt

(1.3.2) $(xa, y) = (x, y\bar{a})$.

Wiederholte Anwendung von (1.3.1)–(1.3.2) liefert:

$$(ax, y) = (x, \bar{a}y) = (x\bar{y}, \bar{a}) = (\bar{y}, \bar{x}\bar{a}),$$

woraus erstens

(1.3.3) $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$

folgt und zweitens

$$(\overline{ax}, \bar{y}) = (\bar{x}\bar{a}, \bar{y}),$$

also

(1.3.4) $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}.$

Wir setzen

$$\mathrm{Re}\ x = \tfrac{1}{2}(x + \bar{x}), \qquad \mathrm{Ve}\ x = \tfrac{1}{2}(x - \bar{x}),$$

also

$$\mathrm{Re}\ x = (x, e_0)e_0$$

$$x = \mathrm{Re}\ x + \mathrm{Ve}\ x$$

$$\bar{x} = \mathrm{Re}\ x - \mathrm{Ve}\ x.$$

Wegen (1.3.1) mit $x = e_0$ hat man

$$(a, y)e_0 = (e_0, \bar{a}y)e_0 = \mathrm{Re}(\bar{a}y),$$

also

$$(x, y)e_0 = \mathrm{Re}(\bar{x}y) = \mathrm{Re}(\bar{y}x)$$

und wegen (1.3.3)–(1.3.4)

$$(x, y)e_0 = \mathrm{Re}(x\bar{y}) = \mathrm{Re}(y\bar{x}).$$

Also

(1.3.5) $(x, y)e_0 = \mathrm{Re}(\bar{x}y) = \mathrm{Re}(x\bar{y}) = \mathrm{Re}(\bar{y}x) = \mathrm{Re}(y\bar{x})$

Aus (1.3.1) folgt $\mathrm{Re}((ax)\bar{y}) = \mathrm{Re}(x(\bar{y}a)) = \mathrm{Re}((\bar{y}a)x)$, also

(1.3.6) $\mathrm{Re}((ab)c) = \mathrm{Re}((bc)a) = \mathrm{Re}((ca)b).$

1.4. Aus (1.2.3) leitet man mittels (1.3.1) ab:

$$(\bar{b}(ax), y) + (\bar{a}(bx), y) = 2(a, b)(x, y).$$

Dies gilt für alle y. Also

(1.4.1) $\bar{b}(ax) + \bar{a}(bx) = 2(a, b)x = (\bar{b}a)x + (\bar{a}b)x.$

Speziell für $a = b$ ergibt das

(1.4.2) $\bar{a}(ax) = (\bar{a}a)x.$

Da $(\mathrm{Re}\ a)(ax) = (\mathrm{Re}\ a \cdot a)x$ (wegen $\mathrm{Re}\ a = \alpha e_0$) ist, hat man auch

(1.4.3) $a(ax) = a^2x.$

Polarisieren ergibt:

(1.4.4) $a(bx) + b(ax) = (ab)x + (ba)x.$

Analog gilt

(1.4.5) $(xa)\bar{b} + (xb)\bar{a} = 2(a, b)x,$

(1.4.6) $(xa)\bar{a} = x(a\bar{a}),$

(1.4.7) $(xa)a = xa^2,$

(1.4.8) $(xa)b + (xb)a = x(ab) + x(ba).$

Ersetzt man in (1.4.4) b durch x und x durch y und in (1.4.8) a durch y und b durch a, so findet man durch Vergleichen:

(1.4.9) $(ax)y + x(ya) = a(xy) + (xy)a.$

Hieraus ergibt sich für $y = a$ unter Berücksichtigung von (1.4.7):

(1.4.10) $(ax)a = a(xa).$

Polarisieren liefert:

(1.4.11) $(ax)b + (bx)a = a(xb) + b(xa).$

Aus (1.4.10) folgt auch:

(1.4.12) $(ax)\bar{a} = a(x\bar{a})$

und durch polarisieren

(1.4.13) $(ax)\bar{b} + (bx)\bar{a} = a(x\bar{b}) + b(x\bar{a}).$

Für (1.4.9) können wir schreiben

(1.4.14) $L_a x \cdot y = x \cdot R_a y = (L_a + R_a)(xy);$

ersetzen wir hier einmal x durch $L_a x$ und ein anderes Mal y durch $R_a y$ und addieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir

$$L_a^2 x \cdot y + 2L_a x \cdot R_a y + x \cdot R_a^2 y$$
$$= (L_a + R_a)(L_a x \cdot y + x \cdot R_a y)$$

wegen (1.4.10)

$$= (L_a + R_a)^2(xy).$$

Mit a^2 statt a in (1.4.14) und unter Berücksichtigung von

$$L_a^2 = L_{a^2}, \qquad R_a^2 = R_{a^2}, \qquad L_a R_a = R_a L_a$$

(wegen (1.4.3), (1.4.7), (1.4.10)) erhält man

$$L_a x \cdot R_a y = L_a R_a(xy)$$

oder

(1.4.15) $(ax)(ya) = a(xy)a.$

Nach Einführung des 'Assoziators'

$$\{a, b, c\} = (ab)c - a(bc)$$

kann man (1.4.4), (1.4.9), (1.4.11) auch schreiben

(1.4.16) $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = -\{b, a, c\}.$

Diese Formel heißt auch das 'alternative Gesetz'.

1.5. Sei $\{e_0, e_1, \ldots, e_{r-1}\}$ ein orthonormales System aus $\mathfrak{C}$, also

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j,$$
$$e_0 \quad \text{für } i = j.$$

Nach (1.4.1) ist dann

(1.5.1) $e_i(e_j x) + e_j(e_i x) = 0 \quad$ für $i \neq j;\ i, j > 0$

(1.5.2) $e_i(e_i x) = -x \quad$ für $i > 0.$

Speziell folgt hieraus:

(1.5.3) $e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad$ für $i \neq j,\ i, j > 0,$

(1.5.4) $e_i^2 = -e_0 \quad$ für $i > 0,$

$$e_i(e_j e_k) = -e_j(e_i e_k) = e_j(e_k e_i) \quad \text{für } i \neq j,\ i \neq k;\ i, j, k > 0,$$

also

(1.5.5) $e_i(e_j e_k) = e_j(e_k e_i) = e_k(e_i e_j)$ für $i \neq j \neq k \neq i$; $i, j, k > 0$.

Ferner gilt:

1.5.6. Aus $e_i e_j = e_k e_l$ $(i \neq j \neq k \neq l \neq i, j \neq l$; $i, j, k, l > 0)$ folgt

$$e_i e_l = e_j e_k .$$

Denn aus der Voraussetzung ergibt sich $e_j = -e_i(e_k e_l) = e_k(e_i e_l)$, und hieraus folgt die Behauptung.

1.5.7. Wir können die Basis so abändern, daß außerdem für alle i, j gilt

$$e_i e_j = \pm e_{k_{i,j}} .$$

Sei das nämlich bereits gelungen für $i, j < 2^p$, d.h. $e_i e_j = \pm e_k$ für alle $i, j < 2^p$ und geeignetes $k < 2^p$. Wir wählen dann ein f mit

$$(f, e_i) = 0 \quad \text{für } i < 2^p \qquad \text{und} \qquad (f, f) = e_0$$

und setzen $e_{2^p+i} = fe_i$. Dann ist wegen (1.3.2)

$$(fe_i, e_j) = -(f, e_j e_i) = 0 \quad \text{für } i, j < 2^p,\ i \neq j,$$

und wegen (1.2.1)

$$\begin{aligned} (fe_i, fe_j) = (e_i, e_j) \quad & \text{für } i, j < 2^p \\ = 0 \quad & \text{für } i \neq j, \\ = -e_0 \quad & \text{für } i = j. \end{aligned}$$

Also bilden die e_i und fe_i ein orthonormales System und können wir (1.5.3)–(1.5.5) anwenden.

$$(fe_i)e_j = (e_i e_j)f = \pm f(e_j e_i)$$

$$(fe_i)(fe_j) = (e_i(fe_j))f = -f(f(e_j e_i)) = e_j e_i .$$

Also erfüllen die e_i $(i < 2^{p+1})$ auch die Bedingung.

1.5.8. Wir nennen die Menge der e_i $(i > 0)$ nun $\mathfrak{E}$, die Elemente von $\mathfrak{E}$ Punkte und die zyklisch geordneten Tripel $\{e_i, e_j, e_k\}$ orientierte Geraden, und zwar positive, wenn

$$e_i(e_j e_k) = -e_0 \text{ (oder } e_i = e_j e_k),$$

negative, wenn

$$e_i(e_j e_k) = e_0 \text{ (oder } e_i = -e_j e_k)$$

ist. Positive Geraden (ebenso negative) heißen untereinander gleich orientiert. Eine positive und eine negative heißen entgegengesetzt orientiert. Vernachlässigen wir die Ordnung, so sprechen wir von Geraden ohne weiteres. Wir bedienen uns der Terminologie der projektiven Geometrie.

Jede Gerade besitzt nun genau drei Punkte und je zwei Punkte haben eine eindeutig bestimmte Verbindungsgerade. Auch das 'Ebenenaxiom' gilt, d.h. nennen wir eine Gerade C Transversale der Geraden A, B, wenn $C \cap A \neq C \cap B$ ist, $C \cap A$ und $C \cap B$ beide nichtleer, so gilt: Schneiden zwei Geraden einander, so schneiden sich auch ihre Transversalen.

Denn ist $A = \{e_i, e_j, e_k\}$, $B = \{e_i, e_l, e_m\}$, so ist: $e_j e_k = \pm e_l e_m$ also nach 1.5.6, $e_j e_m = \pm e_k e_l$ usw.

Unter der Ebene AB zweier schneidender Geraden A, B verstehen wir die Vereinigungsmenge von A, B und ihrer Transversalen. Wir beweisen:

1.5.9. Mit zwei Punkten e_i, e_j liegt auch der dritte Punkt ihrer Verbindung in AB.

Wir können annehmen, daß z.B. e_j weder auf A noch auf B liegt. Es gibt eine Transversale D von A und B, auf der e_j liegt; $D = \{e_j, e_k, e_l\}$, $e_k \in A$, $e_l \in B$, $e_i \notin D$. Ist nun $e_i \in A \cap B$ und $A = \{e_i, e_k, e_p\}$, so sind $\{e_i, e_j, \cdot\}$ und $\{e_p, e_l, \cdot\}$ Transversalen von A und D, also liegt der dritte Punkt von $\{e_i, e_j, \cdot\}$ auf $\{e_p, e_l, \cdot\}$ und daher in AB. Ist dagegen $e_i \notin B$, $e_i \in A$, so sind $\{e_i, e_j, \cdot\}$ und B Transversalen von A und D und man schließt analog. Ist schließlich $e_i \notin A \cup B$, und ist C eine Transversale von A und B die e_i enthält, so sind $\{e_i, e_j, \cdot\}$ und A Transversalen von C und D, und das Resultat ergibt sich wieder analog.

1.5.10. Bilden die Punkte e_i, e_j, e_k, e_l ein ebenes Viereck und sind (nach den Vorschriften) die Seiten $\{e_i, e_j, \cdot\}$ und $\{e_k, e_l, \cdot\}$ gleich orientiert (also $e_i e_j = e_k e_l$), so sind die Seiten $\{e_i, e_k, \cdot\}$ und $\{e_j, e_l, \cdot\}$ entgegengesetzt orientiert. (Folgt aus 1.5.6.)

1.5.11. Zu einem Dreieck, etwa mit den Seiten $\{e_1, e_3, e_2\}$, $\{e_2, e_6, e_4\}$, $\{e_6, e_7, e_1\}$ gibt es genau eine Gerade, nämlich $\{e_4, e_3, e_7\}$, die Transversale jedes Seitenpaares ist. Durch die positive Orientierung der Seiten ist die der Transversalen festgelegt. Mit den oben angegebenen als positiven Orientierungen sind nämlich im Viereck e_1, e_3, e_6, e_4 die Seiten $\{e_1, e_3, \cdot\}$ und $\{e_6, e_4, \cdot\}$ gleich orientiert, also ist $\{e_4, e_3, \cdot\}$ notwendig die positive Transversale.

1.5.12. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{E}$ als projektive Geometrie höchstens die Dimension 2 besitzt.

Unter der Voraussetzung, daß das nicht der Fall sei, ziehen wir durch einen Punkt drei Geraden $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_4, e_5\}$, $\{e_1, e_8, e_9\}$ mit diesen positiven Orientierungen, die nicht in einer Ebene liegen, und betrachten die perspektiven Dreiecke e_2, e_4, e_8 und e_3, e_5, e_9 (siehe Figur 1). Entsprechende Seiten sind nach 1.5.10 dann entgegengesetzt orientiert. Sie schneiden einander auf einer Geraden, die für beide Dreiecke Transversale ist und nach 1.5.11 von beiden Dreiecken eine entgegengesetzte Orientierung empfängt.

Das ist der gewünschte Widerspruch.

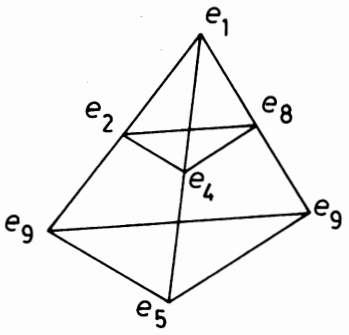


Fig. 1.

1.5.13. Ist dim $\mathfrak{E} = -1$, also $\mathfrak{E}$ leer, so ist $\mathfrak{C}$ wesentlich das System der reellen Zahlen. Ist dim $\mathfrak{E} = 0$, also keine Gerade vorhanden, so besteht $\mathfrak{E}$ aus einem Element e_1, mit $e_1^2 = -e_0$, also ist $\mathfrak{C}$ wesentlich das System der komplexen Zahlen. Ist dim $\mathfrak{E} = 1$ also genau eine Gerade vorhanden mit den Punkten e_1, e_2, e_3, so kann man nach eventueller Umnormierung $e_1 e_2 = e_3$ voraussetzen, und man erhält für $\mathfrak{C}$ das System der Quaternionen.

Ist nun dim $\mathfrak{E} = 2$, so ist $\mathfrak{E}$ die ebene projektive Geometrie über dem Primkörper der Charakteristik 2, $\mathfrak{E}$ hat dann die Mächtigkeit 7. Wir führen projektive Koordinaten ein; jedes Element von $\mathfrak{E}$ wird dann beschrieben durch ein Tripel $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ mit $\alpha_\nu = 0, 1$ (nicht alle 0). Wir nennen dieses Element auch e_i mit $i = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2$. Ist $e_j = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ ein anderes Element, so ist $e_i e_j = \pm e_k$ mit $e_k = (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$ (mod 2). Man sorge nun dafür, daß die Seiten des Dreiecks $e_1 e_2 e_4$ die positiven Orientierungen $\{e_1, e_3, e_2\}$, $\{e_2, e_6, e_4\}$, $\{e_4, e_5, e_1\}$ besitzen (man erreicht das durch evtl. Umnormierung der Punkte e_3, e_6, e_2). Dann ist die Orientierung der Transversalen notwendig $\{e_3, e_6, e_5\}$. Durch Umnormierung von e_7 kann man die Orientierung $\{e_1, e_7, e_6\}$ erreichen, und hieraus folgt eindeutig und widerspruchslos $\{e_2, e_7, e_5\}$, $\{e_4, e_7, e_3\}$.

Auch für dim $\mathfrak{E} = 2$ gibt es also im Wesentlichen *ein* System $\mathfrak{C}$, es ist 8-dimensional und heißt das der (*Graves–Cayleyschen*) *Oktaven.*

Die hier gewählte Multiplikationstabelle besteht aus (1.5.3)–(1.5.5) und der Figur 2:

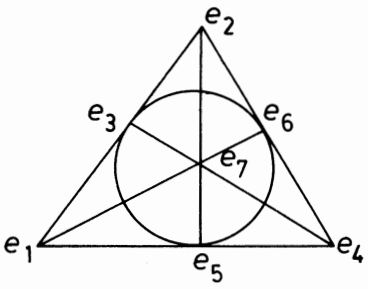


Fig. 2

$$e_1e_3 = e_2, \quad e_2e_6 = e_4, \quad e_4e_5 = e_1,$$
$$e_3e_6 = e_5,$$
$$e_1e_7 = e_6, \quad e_2e_7 = e_5, \quad e_4e_7 = e_5.$$

Wir haben also bewiesen (siehe die Literatur in [8]):

1.5.14. HURWITZSCHER SATZ. *Die einzigen Systeme* $\mathfrak{C}$ *sind die der reellen Zahlen, der komplexen Zahlen, der Quaternionen und der Oktaven.*

Wir verstehen in Zukunft unter $\mathfrak{C}$ stets das System der Oktaven.

1.6. Wählt man die orthonormale Basis $e_0, e_1, \ldots, e_7$ wieder willkürlich (abgesehen von der Forderung, daß e_0 die Eins ist), so erzeugen die L_{e_i} aufgrund der Vertauschungsrelationen (1.5.1) eine endliche Gruppe $\mathfrak{U}$ die durch orthogonale Transformationen dargestellt ist. Diese Darstellung hängt stetig von der gewählten Basis ab, und da eine endliche Gruppe nur endlich viele inäquivalente Darstellungen derselben Dimension besitzt, ist die Klasse dieser Darstellung dieselbe hinsichtlich aller Bases, die auseinander durch orthogonale Transformation mit positiver Determinante hervorgehen.

Diese Darstellung spielt in gewissen Beweisen des Hurwitzschen Satzes eine Rolle.

2. $\mathbf{D}_4$, $\mathbf{B}_3$.

2.1. Unter $\mathbf{D}_4$ verstehen wir wie üblich die Rotationsgruppe des 8-dimensionalen Raumes, unter $\mathbf{B}_3$ die des 7-dimensionalen. Die zugehörigen Infinitesimalringe bezeichnen wir mit denselben Buchstaben. Sie bestehen bekanntlich aus den antisymmetrischen linearen Abbildungen der betreffenden Dimension. Wir deuten $\mathbf{D}_4$ als Transformationsgruppe in $\mathfrak{C}$, und $\mathbf{B}_3$ als die Untergruppe, die e_0 festläßt.

2.2. Als Basis von $\mathbf{D}_4$ können wir verwenden die G_{ij}, die definiert sind durch

$$G_{ij}e_j = e_i,\ G_{ij}e_i = -e_j,\ G_{ij}e_k = 0\ (i, j, k \text{ verschieden}).$$

Also

$$G_{ij} + G_{ji} = 0.$$

Dann gelten die Kommutatorrelationen

$$[G_{ij}, G_{jk}] = G_{ik},$$
$$[G_{ij}, G_{kl}] = 0 \quad \text{(wenn alle Indizes verschieden sind).}$$

Definiert man

$$F_{i0}x = \tfrac{1}{2}e_i x, \qquad F_{0i} = -F_{i0}, \quad (i \neq 0),$$
$$F_{ij}x = \tfrac{1}{2}e_j(e_i x), \quad (i \neq j,\ i \neq 0, j \neq 0),$$

so gilt auch wieder

$$F_{ij} + F_{ji} = 0$$

und weiter aufgrund der Vertauschungsrelationen (1.5.1):

$$\begin{aligned}
[F_{i0}, F_{0j}]x &= \tfrac{1}{4}e_j(e_i x) - \tfrac{1}{4}e_i(e_j x) = \tfrac{1}{2}e_j(e_i x) \\
&= F_{ij}x, \\
[F_{ij}, F_{kl}]x &= -\tfrac{1}{4}e_l(e_k(e_j(e_i x))) + \tfrac{1}{4}e_j(e_i(e_l(e_k x))) \\
&= \cdots = 0, \\
[F_{ij}, F_{jk}]x &= \tfrac{1}{4}e_j(e_i(e_k(e_j x))) - \tfrac{1}{4}e_k(e_j(e_j(e_i x))) \\
&= \cdots = \tfrac{1}{2}e_k(e_i x) = F_{ik}x.
\end{aligned}$$

Die Relation

$$G_{ij} \to F_{ij}$$

erzeugt also einen Automorphismus, den wir π nennen,

$$\pi G_{ij} = F_{ij}.$$

Es muß ein äußerer Automorphismus sein, denn die G_{ij} mit der Determinante 0 werden auf die F_{ij} mit der Determinante 1 abgebildet.

Setzen wir

$$Kx = \bar{x},$$

so ist für $A \in \mathbf{D}_4$

$$A \to KAK$$

ebenfalls ein Automorphismus, den wir κ nennen,

$$\kappa A = KAK.$$

Aus

$$\kappa G_{i0} = -G_{i0}, \ \kappa G_{ij} = G_{ij}$$

ergibt sich, daß κ den Raum $\mathbf{D}_4$ mit der Determinante -1 abbildet, also ein äußerer Automorphismus ist.

Eine nähere Betrachtung des Schemas 1.5.13 lehrt:

$$\begin{aligned} (2.2.1) \qquad 2F_{70} &= +G_{70} - G_{61} - G_{52} - G_{34}, \\ 2F_{61} &= -G_{70} + G_{61} - G_{52} - G_{34}, \\ 2F_{52} &= -G_{70} - G_{61} + G_{52} - G_{34}, \\ 2F_{34} &= -G_{70} - G_{61} - G_{52} + G_{34}. \end{aligned}$$

π bildet also den von den G_{70}, G_{61}, G_{52}, G_{34} erzeugten kommutativen Unterring $\mathbf{H}$ auf sich selbst ab, und die Matrix dieser Abbildung ist

$$(2.2.2) \qquad \pi \text{ in } \mathbf{H}: \ \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die von κ ist

$$(2.2.3) \qquad \kappa \text{ in } \mathbf{H}: \ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

π und κ erzeugen in **H** eine Gruppe $\mathfrak{S}$:

$$(2.2.4) \qquad \pi\kappa = \lambda = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda^2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$(2.2.5) \qquad \kappa^2 = 1, \qquad \lambda^3 = 1, \qquad \lambda\kappa = \kappa\lambda^2 \quad (\text{in } \mathbf{H})$$

und hieraus folgt, daß die Gruppe $\mathfrak{S}$ isomorph ist der symmetrischen in drei Permutanden ($\kappa \to (12)$, $\lambda \to (123)$).

2.2.6. Denselben Schluß kann man in analogen Untergruppen ziehen, die bzw. G_{i0} ($i = 1, \ldots, 6$) enthalten, und hieraus ergibt sich, daß der Zusatz 'in **H**' bei (2.2.5) weggelassen werden kann.

2.2.7. Die Wurzelformen für den Unterring **H** der

$$\alpha_0 G_{70} + \alpha_1 G_{61} + \alpha_2 G_{52} + \alpha_3 G_{34}$$

sind die

$$(\pm\alpha_\mu \pm \alpha_\nu)i \text{ (alle Vorzeichenkombinationen)};$$

z.B. rechnet man nach, daß zur Wurzelform

$$\begin{aligned} (\alpha_0 + \alpha_1)i \quad &\text{gehört} \quad +G_{76} + G_{10} + iG_{71} + iG_{06} \\ (-\alpha_0 + \alpha_1)i \quad &\text{gehört} \quad -G_{76} + G_{10} - iG_{71} + iG_{06} \\ (\alpha_0 - \alpha_1)i \quad &\text{gehört} \quad +G_{76} - G_{10} - iG_{71} + iG_{06} \\ (-\alpha_0 - \alpha_1)i \quad &\text{gehört} \quad -G_{76} - G_{10} + iG_{71} + iG_{06} \end{aligned}$$

(die natürlich komplex sind).

Die Transformationen von $\mathfrak{S}$ lassen alle Elemente von **H** mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ invariant, insbesondere also die Wurzelformen $\pm(\alpha_1 - \alpha_2)i$, $\pm(\alpha_2 - \alpha_3)i$, $\pm(\alpha_3 - \alpha_1)i$. Die anderen werden durch λ folgendermaßen permutiert:

$$\lambda\colon (\alpha_\nu + \alpha_0)i \to (\alpha_\nu - \alpha_0)i \to -(\alpha_\mu + \alpha_\rho)i \to (\alpha_\nu + \alpha_0)i.$$

κ vertauscht $\pm\alpha_0$ und permutiert die Wurzelformen entsprechend.

2.3. Dasselbe (und noch mehr) erhält man hiervon unabhängig auch folgendermaßen:

Wir definieren außer

$$L_a x = ax \qquad \text{und} \qquad R_a x = xa$$

noch

$$T_a = L_a + R_a .$$

Man kann dann (1.4.9) schreiben:

(2.3.1) $\quad L_a x \cdot y + x \cdot R_a y = T_a(xy).$

Für $a = e_i$ $(i \neq 0)$ ist

$$L_a x = e_i x = 2F_{i0} x$$

und

$$\begin{aligned} T_a x = e_i x + x e_i &= 2e_i && \text{für } x = e_0 \\ &= -2e_0 && \text{für } x = e_i \\ &= 0 && \text{für } x = e_j \ (j \neq i), \end{aligned}$$

also $L_a = 2F_{i0}$, $T_a = 2G_{i0}$. Aber dann gilt auch allgemein

(2.3.2) $\quad \pi T_a = L_a \quad$ für Re $a = 0$.

Weiter ist

(2.3.3) $\quad \kappa L_a = -R_a \quad$ für Re $a = 0$.

Auch

$$L_a \to R_a \quad \text{für Re } a = 0$$

erzeugt einen Automorphismus von $\mathbf{D}_4$, den wir vorläufig π_1 nennen, von dem sich aber später zeigt, daß er mit λ identisch ist,

(2.3.4) $\quad \pi_1 L_a = R_a \quad$ für Re $a = 0$.

Wir können nun (2.3.1) auch schreiben:

(2.3.1a) $\quad L_a x \cdot y + x \cdot (\pi_1 L_a) y = \pi^{-1} L_a(xy).$

Betrachten wir einen Augenblick die direkte Summe $\mathfrak{C} + \mathfrak{C} + \mathfrak{C}$ dreier Exemplare von $\mathfrak{C}$ und hierin die direkte Summe Q_a von L_a, $\pi_1 L_a$, $\pi^{-1} L_a$, also

$$Q_a(x, y, z) = (L_a x, \pi_1 L_a y, \pi^{-1} L_a z),$$

so besagt (2.3.1a) daß

(2.3.5) $\quad xy - z = 0$

invariant gegenüber der infinitesimalen Transformation Q_a ist. Da die L_a (Re $a = 0$) ganz $\mathbf{D}_4$ erzeugen, wird durch $L_a \to Q_a$ eine Darstellung von $\mathbf{D}_4$ gegeben, die ebenfalls (2.3.5) invariant läßt. Also gilt für alle $A \in \mathbf{D}_4$

(2.3.6) $\quad Ax \cdot y + x \cdot (\pi_1 A)y = (\pi^{-1} A)(xy).$

Wir haben daher das

INFINITESIMALE PRINZIP DER TRIALITÄT IN DER $\mathbf{D}_4$. *Zu jedem $A \in \mathbf{D}_4$ gibt es genau ein B und genau ein $C \in \mathbf{D}_4$, sodaß*

$$Ax \cdot y + x \cdot By = C(xy)$$

gilt.

Das 'genau' müssen wir noch beweisen: Ist nämlich

$$x \cdot B_1 y = C_1(xy), \quad B_1, C_1 \in \mathbf{D}_4,$$

so hat man für x resp. $y = e_0$ mit $Be_0 = a$

$$B_1 y = C_1 y \qquad \text{und} \qquad C_1 x = xa,$$

also

$$x(ya) = (xy)a,$$

was nur für Ve $a = 0$ identisch in x, y möglich ist, während die Antisymmetrie von C_1 gerade Re $a = 0$ erfordert. Also $B_1 = C_1 = 0$, woraus die Behauptung folgt.

Bemerkung. Bei der Formulierung des Trialitätsprinzips kann man natürlich auch von B oder C statt A ausgehen.

Wir können nun auch (1.4.4) verwenden mit x, a, y statt a, b, x und schreiben

$$x \cdot L_a y + L_a(xy) = T_a x \cdot y,$$

also

$$T_a x \cdot y - x \cdot L_a y = L_a(xy).$$

Aus (2.3.6) folgt nun

$$-L_a = \pi_1 T_a, \qquad L_a = \pi^{-1} T_a.$$

Zusammen mit (2.3.2), (2.3.3) und (2.3.4) ergibt das wegen $T_a = L_a + R_a$ für Re $a = 0$:

$$\pi\colon L_a \to T_a \to L_a, \qquad R_a \to -R_a \to R_a;$$
$$\pi_1\colon L_a \to R_a \to -T_a \to L_a;$$
$$\kappa\colon L_a \to -R_a \to L_a, \qquad T_a \to -T_a \to T_a.$$

Hieraus folgt: $\pi_1 = \pi\kappa$, also $\pi_1 = \lambda$.

Die Isomorphie von $\mathfrak{S}$ mit der $\mathfrak{S}_3$ hat sich auch von neuem ergeben. In der durch L_a und R_a in $\mathbf{D}_4$ bestimmten Ebene ist $\mathfrak{S}$ dargestellt in der Form

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \kappa = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \lambda\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\lambda^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^2\kappa = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Statt (2.3.6) können wir nun schreiben:

(2.3.7) $\quad Ax \cdot y + x \cdot \lambda Ay = \pi A(xy).$

Hier ist $\pi A = \kappa\lambda^2 A = K(\lambda^2 A)K$. Bildet man von (2.3.7) das innere Produkt mit $\bar{z}$, so erhält man wegen (1.3.5)–(1.3.6) und der Antisymmetrie von $\kappa\lambda^2 A$:

$$\mathrm{Re}(Ax \cdot y \cdot z) + \mathrm{Re}(x \cdot \lambda Ay \cdot z) = (\pi A(xy), \bar{z})$$
$$= -(K(xy), \lambda^2 AK\bar{z}) = -(\overline{xy}, \lambda^2 Az),$$

also

(2.3.8) $\quad \mathrm{Re}((Ax \cdot y)z + (x \cdot (\lambda A)y)z + (xy \cdot (\lambda^2 A)z) = 0.$

2.4. Wir können dasselbe auch erreichen durch Betrachtungen in der Gruppe $\mathbf{D}_4$ selbst statt im Infinitesimalring. Wir knüpfen an 1.6 an.

Sei $\Phi \in \mathbf{B}_3$, also eine orthogonale Transformation von $\mathfrak{C}$ mit $\Phi e_0 = e_0$, $\det \Phi = 1$. Von der orthonormalen Basis $e_0, \ldots, e_7$ ausgehend, findet man die neue: $\Phi e_0, \ldots, \Phi e_7$. Die durch

$$e_i \to L_{e_i} \qquad \text{und} \qquad e_i \to L_{\Phi e_i}$$

erzeugten Darstellungen von $\mathfrak{U}$ sind beide orthogonal und einander äquivalent. Es gibt also ein $\hat{\Phi}$ mit

(2.4.1) $\quad L_{\Phi e_i} = \hat{\Phi} L_{e_i} \hat{\Phi}^{-1}.$

Da der von den L_{e_i} erzeugte Ring ganz $\mathbf{D}_4$ ist, sind die Darstellungen sogar irreduzibel, und daher ist $\hat{\Phi}$ bis auf einen Zahlenfaktor bestimmt, und da $\hat{\Phi}$ als reell und orthogonal vorausgesetzt werden kann, ist dieser Faktor ± 1.

Aus (2.4.1) folgt durch lineare Kombination

$$L_{\Phi x} = \hat{\Phi} L_x \hat{\Phi}^{-1} \tag{2.4.2}$$

und hieraus ergibt sich wieder, daß

$$\Phi \to \pm \hat{\Phi} \tag{2.4.3}$$

eine zweideutige Darstellung von $\mathbf{B}_3$ durch eine andere Untergruppe von $\mathbf{D}_4$ ist.

(Differenziert man $\Phi e_0 = e_0$ in $\mathbf{B}_3$ bei $\Phi = 1$, so erhält man $Ce_0 = 0$; differenziert man (2.4.2)–(2.4.3) bei $\Phi = 1$, so erhält man einen Homomorphismus der zugehörigen Infinitesimalringe

$$C \to \hat{C}$$

$$L_{Cx} = [\hat{C}, L_x].$$

Die letzte Gleichung lautet ausführlicher

$$Cx \cdot y + x \cdot \hat{C}y = \hat{C}(xy); \tag{2.4.4}$$

also ist für $Ce_0 = 0$:

$$\pi_1 C = \lambda C = \hat{C}.)$$

Schreibt man (2.4.2) in der Form

$$\Phi x \cdot \hat{\Phi} y = \hat{\Phi}(xy), \tag{2.4.5}$$

so hat man das 'endliche' Analogon der infinitesimalen Formel (2.4.4).

Das ist schon ein spezieller Fall der 'endlichen' Formulierung für das

PRINZIP DER TRIALITÄT IN DER $\mathbf{D}_4$. *Zu jedem* $\Theta \in \mathbf{D}_4$ *gibt es bis aufs Vorzeichen genau ein* Θ_1 *und genau ein* Θ_2, *so daß*

$$\Theta x \cdot \Theta_1 y = \Theta_2(xy) \tag{2.4.6}$$

gilt.

(Man kann auch wieder von Θ_1 oder Θ_2 ausgehen.) Für ein Θ mit $\Theta e_0 = e_0$ haben wir die Existenz schon bewiesen; hat nun Θ die Form $\Theta = L_a$ ($|a| = 1$), so folgt aus (1.4.15)

$$L_a x \cdot R_a y = L_a R_a(xy),$$

also $\Theta_1 = R_a$, $\Theta_2 = L_a R_a$.

Ein beliebiges $\Theta \in \mathbf{D}_4$ können wir in der Form $\Theta = L_a \Phi$ schreiben mit $a = \Theta e_0$, $\Phi \in \mathbf{B}_3$, und dann ist

$$\Theta_1 = R_a \hat{\Phi}, \qquad \Theta_2 = L_a R_a \hat{\Phi}.$$

Da $\Theta \to \Theta_1$ und $\Theta_2 \to \Theta_2$ (mehrdeutige) Automorphismen sind, brauchen wir die (bis auf einen Faktor ± 1 eindeutige) Bestimmtheit nur für den Fall $\Theta = 1$ zu beweisen. Man kann dann (2.4.6) auch schreiben: $L_x \Theta_1 = \Theta_2 L_x$; da die L_x eine irreduzibele Gruppe erzeugen, ist $\Theta_1 = \Theta_2 = \gamma 1$, und da $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathbf{D}_4$ sind ist $\gamma = \pm 1$.

2.4.7. Daß die Automorphismen π, λ usw. im Großen 2-2-deutig sind, kann man bekanntlich auch infinitesimal sehen: Ist

$$H = \alpha_0 G_{70} + \alpha_1 G_{61} + \alpha_2 G_{52} + \alpha_3 G_{34},$$

und setzen wir

$$E_{ij} e_i = e_i, \; E_{ij} e_j = e_j, \; E_{ij} e_k = 0 \quad (k \neq i, \neq j),$$

so wird

$$H^2 = -\alpha_0^2 E_{70} - \alpha_1^2 E_{61} - \alpha_2^2 E_{52} - \alpha_3^2 E_{34},$$

also

$$\exp H = \cos \alpha_0 E_{70} + \cos \alpha_1 E_{61} + \cos \alpha_2 E_{52} + \cos \alpha_3 E_{34} + \sin \alpha_0 G_{70} + \sin \alpha_1 G_{61} + \sin \alpha_2 G_{52} + \sin \alpha_3 G_{34},$$

die Gitterpunkte $\alpha_\nu = m_\nu \cdot 2\pi$ werden also durch die exp-Funktion auf die Gruppen-Eins abgebildet. Die Automorphismen π, λ usw. führen aber nicht dieses Gitter in sich selber über, sondern nur das Teilgitter mit $\Sigma m_\nu \equiv 0 \mod 2$. Ein Gitterpunkt mit $\Sigma m_\nu \equiv 1 \mod 2$ geht bei λ, π usw. in einen halbzahligen über, für den $\exp H = -1$ ist.

3. $\mathbf{G}_2$

3.1. SATZ. *Die (kontinuierliche) Automorphismengruppe von* $\mathfrak{C}$ *ist die* $\mathbf{G}_2$ *(in der Cartanschen Klassifikation).*

Man kann dies aus dem Früheren durch eine einfache Parameterabzählung ableiten, aber es ist auch nicht schwierig, explizit das Wurzelsystem auf zu stellen:

3.2. Ein Automorphismus Φ von $\mathfrak{C}$ ist notwendig linear und erfüllt

(3.2.1) $\Phi(x) \cdot \Phi(y) = \Phi(xy)$.

$|\Phi(x)|$ ist also ein neuer absoluter Betrag für die Elemente von $\mathfrak{C}$, der ebenfalls bei Linksmultiplikationen mit a ($|a| = 1$) invariant bleibt: da diese eine irreduzibele Gruppe erzeugen, muß $|\Theta(x)| = \alpha |x|$ sein mit festem α, und da

(3.2.2) $\Theta(e_0) = e_0$

ist, ist $\alpha = 1$. Also ist $\Theta \in \mathbf{D}_4$.

Nach dem Trialitätsprinzip (2.4.6) folgt aus (3.2.1), daß $\Phi = \pm\Phi_1 = \pm\Phi_2$ sein muß, und wegen (3.2.2) spezieller:

(3.2.3) $\hat{\Phi} = \lambda\Phi = \pm\Phi$.

Geht man in den Infinitesimalring über, so hat man statt (3.2.1)–(3.2.3) für einen infinitesimalen Automorphismus A:

(3.2.4) $Ax \cdot y + x \cdot Ay = A(xy)$,

(3.2.5) $Ae_0 = 0$,

(3.2.6) $\lambda A = A$.

Schreibt man einen Automorphismus in der Form

$$\sum \alpha_{ij} G_{ij} \quad (\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0),$$

so muß wegen (3.2.5) gelten $\alpha_{i0} = 0$ und wegen (3.2.6): $\Sigma\, \alpha_{ij} F_{ij} e_0 = 0$, also

$$\sum \alpha_{ij} e_j e_i = 0.$$

Dem genügen die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&\alpha G_{32} + \beta G_{45} + \gamma G_{76}\\
&\alpha G_{13} + \beta G_{64} + \gamma G_{75}\\
&\alpha G_{21} + \beta G_{65} + \gamma G_{47}\\
&\alpha G_{26} + \beta G_{51} + \gamma G_{73}\\
&\alpha G_{14} + \beta G_{36} + \gamma G_{27}\\
&\alpha G_{42} + \beta G_{53} + \gamma G_{17}\\
&\alpha G_{61} + \beta G_{52} + \gamma G_{34} \quad (\text{alle mit } \alpha + \beta + \gamma = 0)
\end{aligned}$$

und ihre lineare Kombinationen, und hiermit ist die Automorphismengruppe auch erschöpft. Früher wurde bereits gezeigt (2.2.7), daß diese Elemente bei *ganz* $\mathfrak{S}$ invariant sind.

Zur Berechnung der Wurzelformen wählen wir als maximal Abelsche Untergruppe etwa

$$\alpha G_{32} + \beta G_{45} + \gamma G_{67} \quad (\text{mit } \alpha + \beta + \gamma = 0).$$

Zu den Wurzeln

$$\begin{aligned} \pm i(\alpha + \beta) \quad &\text{gehören dann} \quad (G_{42} + G_{53} - 2G_{17}) \\ &\qquad\qquad \pm i(-2G_{16} + G_{52} + G_{34}) \\ \pm i(\alpha - \beta) \quad &\text{gehören dann} \quad (G_{42} - G_{53}) \mp i(G_{52} - G_{34}), \end{aligned}$$

usw, so daß (mit $\alpha + \beta + \gamma = 0$) die

$$\begin{aligned} &\pm i(\alpha + \beta),\ \pm i(\alpha - \beta),\ \pm i(\beta + \gamma), \\ &\pm i(\gamma - \alpha),\ \pm i(\gamma + \alpha),\ \pm(\beta - \gamma) \end{aligned}$$

das Wurzelformensystem bilden, das aber gerade das der $\mathbf{G}_2$ ist.

4. $\mathfrak{J}$, $\mathbf{F}_4$

4.1. Unter $\mathfrak{M}_n$ verstehen wir den Ring der n-mal-n Matrices mit Koeffizienten aus $\mathfrak{C}$.

$A^* = \bar{A}'$ ist die gespiegelt-konjugierte von A,

$\mathfrak{M}_n^+$ die Menge der $A \in \mathfrak{M}_n$ mit $A = A^*$,

$\mathfrak{M}_n^-$ die Menge der $A \in \mathfrak{M}_n$ mit $A + A^* = 0$.

Die Spur von A wird mit $\chi(A)$ bezeichnet.

4.2. Sei $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{M}_n$, $Y = (y_{ij}) \in \mathfrak{M}_n$. Dann ist

$$\chi(XY) = \sum x_{ij} y_{ji} \qquad \text{und} \qquad \chi(X'Y') = \sum x_{ji} y_{ij},$$

also,

(4.2.1) $\quad \chi(XY) = \chi(X'Y').$

Weiter ist wegen (1.3.4)

$$\overline{XY} = \left(\sum_j \overline{x_{ij} y_{jk}}\right) = \left(\sum_j \bar{y}_{jk} \bar{x}_{ij}\right) = (\overline{Y'X'})',$$

also

(4.2.2) $\quad (XY)^* = Y^* X^*.$

4.3. Wir definieren ein inneres Produkt in $\mathfrak{M}_n$:

$$(X, Y)e_0 = \operatorname{Re} \chi(XY);$$

es ist linear in X und Y und auch symmetrisch, denn wegen (1.3.5) ist:

$$\operatorname{Re} \chi(XY) = \operatorname{Re} \sum x_{ij} y_{ji} = \sum \operatorname{Re}(x_{ij} y_{ji}) = \sum \operatorname{Re}(y_{ji} x_{ij}),$$

also

(4.3.1) $\quad (X, Y) = (Y, X).$

Weiter ist

(4.3.2) $\quad (X, X^*) = \sum |x_{ij}|^2 > 0 \quad$ für $X \neq 0,$

also ist das innere Produkt nicht entartet.
Wegen (4.2.2) ist $\operatorname{Re} \chi(XY) = \frac{1}{2}(\chi(XY) + \overline{\chi(XY)}) = \chi(\frac{1}{2}(XY + Y^*X^*))$, also

(4.3.3) $\quad (X, Y)e_0 = \chi(\frac{1}{2}(XY + Y^*X^*)).$

Daher ist

(4.3.4) $\quad (X, Y)e_0 = \chi(\frac{1}{2}(XY + YX))$ für $X, Y \in \mathfrak{M}_n^+$ und für $X, Y \in \mathfrak{M}_n^-$,

$= \chi(\frac{1}{2}(XY - YX))$ für $X \in \mathfrak{M}_n^+, Y \in \mathfrak{M}_n^-$,

also wegen (4.3.1):

(4.3.5) $\quad (X, Y) = 0$ für $X \in \mathfrak{M}_n^+, Y \in \mathfrak{M}_n^-.$

Hieraus folgt:

(4.3.6) $\quad (X, Y)$ nicht entartet auf $\mathfrak{M}_n^+$ und auf $\mathfrak{M}_n^-$.

Weiter gilt:

(4.3.7) $\quad (X, X)$ positiv definit auf $\mathfrak{M}_n^+$

(X, X) negativ definit auf $\mathfrak{M}_n^-$.

4.4. Aus (1.4.9) folgt

$$\chi((AX)Y) + \chi(X(YA)) = \chi(A(XY)) + \chi((XY)A).$$

Übergang zu den Realteilen ergibt wegen (4.3.1):

$$(AX, Y) + (X, YA) = 2(A, XY).$$

Zyklische Vertauschung liefert

$$(XY, A) + (Y, AX) = 2(X, YA).$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt wegen (4.3.1): $(A, XY) = (X, YA)$ oder mit anderen Buchstaben:

(4.4.1) $(XY, Z) = (X, YZ)$ zyklisch symmetrisch in X, Y, Z.

Man hat also

$$(ZX, Y) = (X, YZ) \qquad \text{und} \qquad (XZ, Y) = (X, ZY),$$

also wenn

$$[Z, X] = ZX - XZ$$

den Lieschen Kommutator bezeichnet:

(4.4.2) $([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0.$

Als infinitesimale Transformationen lassen die durch

$$\tilde{Z}X = [Z, X] \text{ mit } Z \in \mathfrak{M}_n$$

definierten $\tilde{Z}$ also das innere Produkt invariant. Man sieht ferner:

(4.4.3) $$[\mathfrak{M}_n^+, \mathfrak{M}_n^+] \subset \mathfrak{M}_n^-,$$
$$[\mathfrak{M}_n^-, \mathfrak{M}_n^-] \subset \mathfrak{M}_n^-,$$
$$[\mathfrak{M}_n^+, \mathfrak{M}_n^-] \subset \mathfrak{M}_n^+.$$

4.5. Wir nehmen von nun an speziell $n = 3$ an. Wir betrachten für $X \in \mathfrak{M}_3^+$

$$X(XX) - (XX)X.$$

Das (i, l)-te Element ist

$$\sum_{j,k} (x_{ij}(x_{jk}\, x_{kl}) - (x_{ij}\, x_{jk})x_{kl}).$$

Nun darf man in einem Produkt $a(bc)$ nach 1.4 assoziativ rechnen, wenn ein Element reell oder zwei Elemente gleich oder konjugiert sind. Da $x_{\mu\mu}$ reell und $x_{\mu\nu} = \bar{x}_{\nu\mu}$ ist, müssen, wenn etwas stehen bleiben soll, i, j, k voneinander verschieden und daher $l = i$ sein. Alle Elementen außerhalb der Hauptdiagonale verschwinden also. Da nach (1.4.16), $(ab)c - a(bc)$ zyklisch symmetrisch ist, steht überall in der Hauptdiagonale dasselbe. Also

(4.5.6) $X(XX) - (XX)X = a \cdot 1$ für $X \in \mathfrak{M}_3$.

$XX \in \mathfrak{M}_3^+$ und nach (4.4.3) ist $a \cdot 1 \in \mathfrak{M}_3^-$ also

(4.5.7) $\operatorname{Re} a = 0.$

Ist $\chi(A) = 0$ und $Z = a \cdot 1$, so ist $(A, Z) = \operatorname{Re} \chi(AZ) = 0$. Ist $\chi(A) = 0$, so ist also (nach (4.4.1) und (4.5.6)) für $X \in \mathfrak{M}_3^+$

$$(AX, XX) = (A, X(XX)) = (A, (XX)X) = (XA, XX),$$

also

$$([A, X], XX) = 0.$$

Polarisieren ergibt in $\mathfrak{M}_3^+$:

$$(4.5.8) \quad ([A, X], YZ + ZY) + ([A, Y], ZX + XZ) + ([A, Z], XY + YX) = 0.$$

Wir definieren nun in $\mathfrak{M}_3^+$ ein kommutatives Produkt

$$(4.5.9) \quad X \circ Y = \tfrac{1}{2}(XY + YX)$$

und nennen $\mathfrak{M}_3^+$ als Ring mit diesem Produkt: $\mathfrak{J}$. Dann ist nach (4.3.4)

$$(4.5.10) \quad (X, Y)e_0 = \chi(X \circ Y),$$

nach (4.4.1):

$$(X \circ Y, Z) = (X, Y \circ Z),$$

also

$$(4.5.11) \quad (X, Y, Z) = \chi(X \circ Y \circ Z) \quad \text{symmetrisch in } X, Y, Z.$$

Nach (4.4.3) läßt $A \in \mathfrak{M}_3^-$, als infinitesimale Transformation aufgefaßt, $\mathfrak{M}_3^+$ invariant:

$$(4.5.12) \quad [A, \mathfrak{M}_3^+] \subset \mathfrak{M}_3^+ \quad \text{für } A \in \mathfrak{M}_3^-.$$

Verstehen wir unter $\mathfrak{K}$ die Menge der $A \in \mathfrak{M}_3^-$ mit $\chi(A) = 0$, so gilt weiter nach (4.4.2) und (4.5.8), daß das durch $\tilde{A}X = [A, X] (X \in \mathfrak{J}, A \in \mathfrak{K})$ definierte $\tilde{A}$ die Bilinear- und Trilinearformen (X, Y) und (X, Y, Z) in $\mathfrak{J}$ invariant läßt:

$$(4.5.13) \quad ([A, X], Y) + (X, [A, Y]) = 0,$$

$$(4.5.14) \quad ([A, X], Y, Z) + (X, [A, Y], Z) + (X, Y, [A, Z]) = 0.$$

4.6. Jede lineare Abbildung δ von $\mathfrak{J}$ in sich, die als infinitesimale Transformation aufgefaßt, (X, Y) und (X, Y, Z) invariant läßt, ist ein infinitesimaler Automorphismus von $\mathfrak{J}$. Denn

$$\begin{aligned}(\delta X \circ Y + X \circ \delta Y - \delta(X \circ Y), Z) \\ &= (\delta X, Y, Z) + (X, \delta Y, Z) - (\delta(X \circ Y), Z) \\ &= (\delta X, Y, Z) + (X, \delta Y, Z) + (X, Y, \delta Z) = 0\end{aligned}$$

für jedes $Z \in \mathfrak{J}$, also

$$\delta X \circ Y + X \circ \delta Y = \delta(X \circ Y).$$

Insbesondere erzeugen die

$$\tilde{A}X = [A, X], \quad A \in \mathfrak{K},$$

einen Infinitesimalring von Automorphismen $\tilde{A}$ von $\mathfrak{J}$, den wir $\tilde{\mathfrak{K}}$ nennen. Es wird sich zeigen, daß $\tilde{\mathfrak{K}}$ der ganze (infinitesimale) Automorphismenring von $\mathfrak{J}$ und mit $\mathbf{F}_4$ identisch ist.

4.7. Für die Idempotente

$$E_1 = \begin{pmatrix} e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{J}$ gilt

$$\begin{aligned}E_i E_j &= E_i \quad \text{für } i = j \\ &= 0 \quad \text{für } i \neq j.\end{aligned}$$

Also gilt für jeden infinitesimalen Automorphismus δ von $\mathfrak{J}$

$$\delta E_i \circ (e \cdot 1 - 2E_i) = 0,$$

$$\delta E_i \circ E_j + E_i \circ \delta E_j = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Eine einfache Rechnung ergibt, daß

$$\delta E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & -\bar{a}_2 \\ -\bar{a}_3 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta E_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & 0 \\ \bar{a}_3 & 0 & a_1 \\ 0 & \bar{a}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\delta E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{a}_2 \\ 0 & 0 & -a_1 \\ a_2 & -\bar{a}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

sein muß. Setzt man also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & \bar{a}_2 \\ -\bar{a}_3 & 0 & a_1 \\ -a_2 & -\bar{a}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist $A \in \mathfrak{R}$,

$$[A, E_i] = \delta E_i,$$

also

$$(\delta - \tilde{A})X = \delta X - [A, X] = 0 \quad \text{für } X = E_i.$$

Wollen wir zeigen, daß $\tilde{\mathfrak{R}}$ die infinitesimalen Automorphismen von $\mathfrak{J}$ erschöpft, so können wir uns jetzt auf δ-s beschränken mit

$$\delta X = 0 \quad \text{für } X = E_i.$$

Setzen wir

$$F_1^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3^a = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ \bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$E_i \circ F_i^a = 0, \qquad \text{also } E_i \circ \delta F_i^a = 0,$$
$$E_j \circ F_i^a = \tfrac{1}{2} F_i^a \ (i \neq j), \quad \text{also } (2E_j - 1) \circ \delta F_i^a = 0,$$

und heraus ergibt sich für die Menge $\mathfrak{F}_i$ der F_i^a:

$$\delta \mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_i.$$

Wir definieren nun $\delta_i a$ durch

$$\delta F_i^a = F_i^{\delta_i a},$$

so daß $\delta_i a$ linear in a ist. Da

$$F_i^a \circ F_i^b = 0 \bmod E_1, E_2, E_3$$

ist, ergibt sich

$$F_i^{\delta_i a} \circ F_i^b + F_i^a \circ F_i^{\delta_i b} = 0,$$

also

$$\delta_i a \cdot \bar{b} + b \cdot \overline{\delta_i a} + a \cdot \overline{\delta_i b} + \delta_i b \cdot \bar{a} = 0,$$

also

$$(\delta_i a, b) + (a, \delta_i b) = 0,$$

d.h. $\delta_i \in \mathbf{D}_4$. Aus

$$F_i^{2a} \circ F_{i+1}^{2b} = F_{i+2}^{2(\overline{ab})} \quad \text{(mit } i \text{ zyklisch gerechnet)}$$

leitet man ab:

$$F_i^{2\bar{\delta}_i a} \circ F_{i+1}^{2b} + F_i^{2a} \circ F_{i+1}^{2\delta_{i+1} b} = F_{i+2}^{2\delta_{i+2}\overline{ab}},$$

also

$$\overline{\delta_i a \cdot b} + \overline{a \cdot \delta_{i+1} b} = \delta_{i+2}(\overline{ab}),$$

und das zeigt nach dem Trialitätssatz, daß

$$\delta_{i+1} = \lambda \delta_i$$

ist.

Da $\delta_1 \in \mathbf{D}_4$ ist, darf man

$$\delta_1 a = pa \text{ oder } \delta_1 a = q(pa), \text{ Re } p = \text{Re } q = (p, q) = 0$$

voraussetzen. Im ersten Falle setze man

$$A_p = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

so daß

$$[A_p, F_1^a] = F_1^{pa}, [A_p, F_2^a] = F_2^{ap}, [A_p, F_3^a] = F_3^{-pa-ap}$$

und daher

$$\tilde{A}_p X = [A_p, X] = \delta X$$

auch für $X = F_i^a$, also allgemein gilt. Im zweiten Fall setze man mit derselben Bezeichnung

$$2\Delta X = [A_q, [A_p, X]] - [A_p, [A_q, X]],$$

und dann ergibt sich

$$2\Delta F_1^a = F_1^{q(pa)} - F_1^{p(qa)} = 2F_1^{q(pa)} \text{ usw.},$$

so daß $\Delta = \delta$ ist.

Damit hat sich gezeigt:

4.8. *Der Infinitesimalring der Automorphismen von* $\mathfrak{J}$ *wird erzeugt von den durch*

$$\tilde{A}X = [A, X] \text{ mit } A \in \mathfrak{K} \text{ (d.h. } A \in \mathfrak{M}_3^-,\ \chi(A) = 0)$$

definierten $\tilde{A}$. *Die Elemente des Automorphismenringes lassen sich auch eindeutig schreiben in der Form*

$$\tilde{A} = \Delta + \tilde{A}_0, \tag{4.8.1}$$

wo $A_0 \in \mathfrak{K}$ *in der Hauptdiagonale Nullen hat, und* Δ *ein infinitesimaler Automorphismus ist, der die* E_ν ($\nu = 1, 2, 3$) *invariant läßt. Alle Transformationen* (4.8.1) *sind umgekehrt auch infinitesimale Automorphismen von* $\mathfrak{J}$. *Sie lassen die Bilinear- und die Trilinearform* (X, Y) *und* (X, Y, Z) *invariant und sind durch diese Eigenschaft gekennzeichnet. Diejenigen, die die* E_ν ($\nu = 1, 2, 3$) *invariant lassen, transformieren jedes* $\mathfrak{F}_i$ *in sich und geben da und in* $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3$ *eine Darstellung der* $\mathbf{D}_4$:

$$\delta F_i^a = F_i^{\delta_{ia}},\ \delta_{i+1} = \lambda\delta_i.$$

4.9. Ist das allgemeine Element von $\mathfrak{J}$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad (x_{ij} = \overline{x_{ji}})$$

und δ ein infinitesimaler Automorphismus, der die E_ν invariant läßt, so kann man δX auch schreiben

$$\delta X = \begin{pmatrix} \delta_{11}x_{11} & \delta_{12}x_{12} & \delta_{13}x_{13} \\ \delta_{21}x_{21} & \delta_{22}x_{22} & \delta_{23}x_{23} \\ \delta_{31}x_{31} & \delta_{32}x_{32} & \delta_{33}x_{33} \end{pmatrix} \tag{4.9.1}$$

wenn man

$$\delta_{12} = \delta_3,\ \delta_{23} = \delta_1,\ \delta_{31} = \delta_2$$

und $\delta_{ji}x = \overline{\delta_{ij}\bar{x}}$, also

$$\delta_{ij} = \kappa\delta_{ji} \text{ und } \delta_{ii} = 0$$

definiert. In dieser Schreibweise lautet das infinitesimale Trialitätsprinzip

$$\delta_{ij}x \cdot y + x \cdot \delta_{jk}y = \delta_{ik}(xy) \quad (i, j, k \text{ verschieden}). \tag{4.9.2}$$

δX ist nun in der Definition (4.9.1) sinnvoll für *alle* $X \in \mathfrak{M}_3$. Setzen wir $X \in \mathfrak{M}_3^r$, wenn alle Hauptdiagonalelementen von X rein reell (d.h. reelle Vielfache von e_0) sind! Mit

$$A_p = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{Re}\ p = 0)$$

ist dann wieder

$$\tilde{A}_p X = [A_p, X] = \begin{pmatrix} 0 & -px_{12} - x_{12}p & -px_{13} \\ px_{21} + x_{21}p & 0 & px_{23} \\ x_{31}p & -x_{32}p & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $\tilde{A}_p$ ein δ gemäß (4.9.1). Ebenso sieht man, daß alle δ von den $\tilde{A}_p$ erzeugt werden können.

Definiert man für $X, Y \in \mathfrak{M}_3^r$

$$X \circ Y = \tfrac{1}{2}(XY + Y^*X^*) \quad (= \tfrac{1}{2}(XY + YX) \text{ in } \mathfrak{J}),$$

so ist wieder

(4.9.3) $$\delta X \circ Y + X \circ \delta Y = \delta(X \circ Y).$$

Denn

$$\delta_{ij} x_{ij} \cdot y_{jk} + x_{ij} \cdot \delta_{jk} y_{jk} = \delta_{ik}(x_{ij} y_{jk})$$

gilt nach (4.9.2) für paarweise verschiedene i, j, k und trivialerweise für $i = j \neq k$ und $i \neq j = k$, da x_{ii} reell und $\delta_{ii} = 0$ resp. y_{kk} reell und $\delta_{kk} = 0$ ist. Infolgedessen ist

$$Z = (\delta X)Y + X(\delta Y) - \delta(XY)$$

eine Diagonalmatrix, deren i-tes Element lautet:

$$\sum_j (\delta_{ij} x_{ij} \cdot y_{ji} + x_{ij} \cdot \delta_{ji} y_{ji}).$$

Darum ist $\delta X \circ Y + X \circ \delta Y - \delta(X \circ Y) = \tfrac{1}{2}(Z + Z^*)$ auch Diagonalmatrix mit dem i-ten Element

$$\sum_j \mathrm{Re}(\delta_{ij} x_{ij} \cdot y_{ji} + x_{ij} \cdot \delta_{ji} y_{ji}) = \sum_j (\delta_{ij} x_{ij}, \overline{y_{ji}}) + (x_{ij}, \overline{\delta_{ij} y_{ji}}) = 0$$

wegen $\overline{\delta_{ji} y_{ji}} = \delta_{ij} \overline{y_{ji}}$ und der Antisymmetrie von $\delta_{ij} \in \mathbf{D}_4$. Also ist $\tfrac{1}{2}(Z + Z^*) = 0$, also (4.9.3) richtig.

Für $X,\ Y \in \mathfrak{J}$ ist (4.9.3) nichts neues. Für $X \in \mathfrak{J}$ und $Y = A \in \mathfrak{K}$ mit Nullen in der Hauptdiagonale kann man es auch schreiben (wegen $A + A^* = 0$)

$$[\delta A,\ X] + [A,\ \delta X] = \delta[A,\ X],$$

oder

$$\delta\tilde{A} - \tilde{A}\delta = (\delta A)^{\sim}$$

oder

(4.9.4) $$[\delta,\ \tilde{A}] = (\delta A)^{\sim}.$$

4.10. Um die Struktur des Automorphismenringes von $\mathfrak{J}$ näher zu bestimmen, wählen wir als maximal abelschen Unterring $\mathbf{H}$ denselben wie in 2.2 für $\mathbf{D}_4$; d.h. wir setzen

$$\delta_j = \alpha_0^{(j)} G_{70} + \alpha_1^{(j)} G_{61} + \alpha_2^{(j)} G_{52} + \alpha_3^{(j)} G_{34},$$

wobei der Vektor $\alpha^{(j+1)}$ aus dem Vektor $\alpha^{(j)}$ durch Anwendung der Matrix λ (siehe (2.2.4)) ensteht. Als Wurzelformen finden wir allererst diejenigen, die wir bereits von der $\mathbf{D}_4$ her kennen (siehe 2.2.7), nämlich

$$(\pm\alpha_\mu \pm \alpha_\nu)i,$$

(wobei wir den oberen Index weglassen, da es keine Rolle spielt, welchen wir wählen; das Wurzelsystem ist ja bei λ invariant) mit Eigenelementen entsprechend den dort angebenen. Weitere Eigenelemente werden wir wegen (4.8.1) unter A mit Nullen in der Hauptdiagonale suchen. In der Tat gehören die

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = e_0 \mp ie_7,\ e_1 \mp ie_6,\ e_2 \mp ie_5,\ e_4 \mp ie_3$$

bezw. zu den Wurzelformen $\pm\alpha_0^{(1)}i,\ \pm\alpha_1^{(1)}i,\ \pm\alpha_2^{(1)}i,\ \pm\alpha_3^{(1)}i$. Die

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = e_0 \mp ie_7 \text{ usw.}$$

gehören entsprechend zu Wurzelformen $\pm\alpha_0^{(2)}i$ usw. und die

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -\bar{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = e_0 \mp ie_7 \text{ usw.}$$

zu Wurzeln $\pm\alpha_0^{(3)}i$ usw. Als Gesamtheit der Wurzelformen findet man also (siehe (2.2.4))

$$\pm i\alpha_\nu,\ \pm i\alpha_\mu \pm i\alpha_\nu,\ \tfrac{1}{2}(\pm i\alpha_0 \pm i\alpha_1 \pm i\alpha_2 \pm i\alpha_3)$$

(wobei stets alle Kombinationen $\pm$ der Vorzeichen zulässig sind). Das ist aber gerade das Wurzelsystem der Ausnahmegruppe $\mathbf{F}_4$.

Nun ist der Automorphismenring von $\mathfrak{J}$ irreduzibel im Teilraum $\chi(X) = 0$, wie man leicht nachrechnet. Die Einskomponente der Automorphismengruppe ist also direktes Produkt einfacher Gruppen und wegen der Übereinstimmung der Wurzelformen gerade die $\mathbf{F}_4$. (Man kann das auch leicht direkt nachweisen, wenn man die Struktur noch weiter ausrechnet.) Gäbe es noch eine weitere Komponente $\omega\mathbf{F}_4$, so müßte ω einen äußeren Automorphismus von $\mathbf{F}_4$ erzeugen (aber den gibt es nicht; Cartan [5]), oder es müßte, wegen der Irreduzibilität im Teilraum $\chi(X) = 0$, $\omega = -1$ sein (aber das ist kein Automorphismus von $\mathfrak{J}$). Es gilt also

4.11. SATZ. *Die Automorphismengruppe von* $\mathfrak{J}$ *ist die* $\mathbf{F}_4$.

4.12. Die Automorphismengruppe von $\mathfrak{J}$ läßt $E_1 + E_2 + E_3 = 1$ invariant. Die Untergruppe, die E_ν ($\nu = 1, 2, 3$) invariant läßt, war der $\mathbf{D}_4$ isomorph (im kleinen). Die Untergruppe, die *ein* E_ν (etwa E_1) invariant läßt, ist eine 16-dimensionale Darstellung der $\mathbf{B}_4$ (Drehungsgruppe des 9-dim. Raumes). Denn die Invarianz von E_1 hat zur Folge, daß das A_0 in (4.8.1) von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix}$$

sein muß. Außer den Wurzelformen von $\mathbf{D}_4$ bleiben also nur die $\pm\alpha_\nu^{(1)}i$ erhalten. Zusammen sind das gerade die der $\mathbf{B}_4$.

4.13. Die infinitesimalen Automorphismen δ von $\mathfrak{J}$, die alle rein reellen Elemente von $\mathfrak{J}$ invariant lassen, müssen $\delta_i e_0 = 0$ (siehe 4.8) erfüllen, also nach 3.2 zu $\mathbf{G}_2$ gehören.

Mit $A, B \in \mathfrak{K}$ und $X \in \mathfrak{J}$ darf man assoziativ rechnen, sobald X rein reell ist. Dann gilt die Jacobi-Relation

$$[A, [B, X]] - [B, [A, X]] = [[A, B], X].$$

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] - [A, B]^{\sim} + \tfrac{1}{3}\chi([A, B])$$

ist ein infinitesimaler Automorphismus von $\mathfrak{J}$, der, angewandt auf ein reelles X, null ergibt, also durch ein Element von $\mathbf{G}_2$ erzeugt wird. Also gilt

$$[A, B]^{\sim} \equiv [\tilde{A}, \tilde{B}] + \tfrac{1}{3}\chi([A, B])$$
$$\text{mod Automorphismus von } \mathfrak{C}.$$

Man sieht übrigens, daß dim $\mathbf{F}_4 = 52 = \dim \mathfrak{K} + \dim \mathbf{G}_2 = 38 + 14$ ist.

5. Π

5.1. HAUPTACHSENTRANSFORMATION IN $\mathfrak{J}$. *Die Elemente von* $\mathfrak{J}$ *lassen sich durch Transformationen von* $\mathbf{F}_4$ *auf die Hauptdiagonalform (kurz: Hauptform) bringen; die Diagonalelemente (Eigenwerte) sind dann bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt, und charakteristisch für die Äquivalenzklasse.*

Eine Folgerung des Hauptachsensatzes, die wir vorwegnehmen, lautet: *Ist* $X_1 \in \mathfrak{J}$ *und induktiv* $X_{n+1} = X_1 \circ X_n$, *so ist* $X_i \circ X_j = X_{i+j}$.

Denn da $X_i \circ X_j = X_{i+j}$ für ein Hauptelement X_1 gilt und diese Beziehung $\mathbf{F}_4$-invariant ist, gilt sie allgemein.

Beweis. Die $\mathbf{F}_4$ als (kontinuierliche) Automorphismengruppe von $\mathfrak{J}$ ist in der allgemeinen linearen Gruppe abgeschlossen, und als Drehgruppe also kompakt. Nennen wir Elemente von $\mathfrak{J}$ äquivalent, wenn sie durch Transformationen von $\mathbf{F}_4$ in einander übergeführt werden können, so sind die Äquivalenzklassen abgeschlossen und kompakt. Unter den

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

einer Äquivalenzklasse suchen wir ein Element mit maximalem $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Wir behaupten, daß dieses Element X_0 die Hauptform besitzt. Sei nämlich im Widerspruch hierzu etwa $x_1^{(0)} \neq 0$. Wir betrachten die durch X_0 gehende Kurve X_τ, die definiert ist durch die Differentialgleichung

$$(5.1.1) \qquad \frac{dX_\tau}{d\tau} = [A, X_\tau], \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix}$$

und die wegen $A \in \mathbf{F}_4$ auf der Äquivalenzklasse von X_0 liegt. Ausführlicher lautet die Differentialgleichung

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = 0, \qquad \frac{d\xi_2}{d\tau} = 2(a, x_1), \qquad \frac{d\xi_3}{d\tau} = -2(a, x_1)$$

$$\frac{dx_1}{d\tau} = a(\xi_3 - \xi_2) \text{ usw.}$$

Nun ist $d(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = 4(a, x_1)(\xi_2 - \xi_3)\, d\tau$, und das muß für alle a verschwinden bei $\tau = 0$; also (da $x_1 \neq 0$) $\xi_2 = \xi_3$ bei $\tau = 0$. Aus den ersten drei Differentialgleichungen folgt längs der Kurve: $\xi_1 = \text{const}$, $\xi_2 + \xi_3 = \text{const}$, und das bedeutet, daß $\tau = 0$ ein Minimum statt eines Maximums ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Analog behandelt man die Fälle $x_2^{(0)} \neq 0$ und $x_3^{(0)} \neq 0$. Hiermit ist dann gezeigt, daß in jeder Äquivalenzklasse eine Hauptmatrix liegt.

Wir zeigen weiter, daß zwei Hauptmatrizen mit (bis auf die Reihenfolge) übereinstimmenden Diagonalelementen äquivalent sind. Wir brauchen nur anzugeben, wie man mittels einer Transformation von $\mathbf{F}_4$ in einer Hauptmatrix etwa ξ_2 und ξ_3 vertauscht. Wir erreichen dies wieder längs der durch (5.1.1) definierten Kurve. Aus der Differentialgleichung folgt

$$\frac{d^2(\xi_2 - \xi_3)}{d\tau^2} = 4\left(a, \frac{dx_1}{d\tau}\right) = -4(a, a)(\xi_3 - \xi_2)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\frac{d(\xi_2 - \xi_3)}{d\tau} = 0 \quad \text{für } \tau = 0.$$

Die Lösung

$$\xi_2 - \xi_3 = (\xi_2^{(0)} - \xi_3^{(0)})\cos 2|a|\tau$$

wird für $\tau = \pi/2|a|$:

$$\xi_2 - \xi_3 = -(\xi_2^{(0)} - \xi_3^{(0)}),$$

während andererseits $\xi_2 + \xi_3$ längs der ganzen Kurve konstant ist. Für $\tau = \pi/2|a|$ sind die ursprünglichen ξ_2, ξ_3 also wirklich vertauscht.

Die eindeutige Bestimmtheit der Hauptdiagonalelemente (Eigenwerte) in jeder Äquivalenzklasse ergibt sich sogleich.

5.2. Statt $X \circ X$ resp $X \circ X \circ X$ schreiben wir nun auch X^2 resp X^3. Bei $\mathbf{F}_4$ ist $e_0 \cdot 1$, (X, X) und (X, X, X) invariant, also auch $\chi(X) = (X, e_0 \cdot 1)$, $\chi(X^2)$ und $\chi(X^3)$. Also sind

$$\chi(X) = \sum \rho_\nu,\ \chi(X^2) = \sum \rho_\nu^2,\ \chi(X^3) = \sum \rho_\nu^3, \tag{5.2.1}$$

wenn ρ_1, ρ_2, ρ_3, die Diagonalelemente einer mit X äquivalenten Hauptmatrix sind. Durch (5.2.1) sind aber die ρ_ν bis auf die Reihenfolge bestimmt, und hieraus ergibt sich der Rest von Satz 5.1.

Eine Hauptmatrix X genügt ihrer charakteristischen Gleichung $\varphi(\rho) \equiv \Pi(\rho_\nu - \rho) = 0$. Da aber $\mathbf{F}_4$ Automorphismengruppe von $\mathfrak{J}$ ist, bleibt die Relation $\varphi(X) = 0$ gegenüber $\mathbf{F}_4$ invariant, d.h. jedes $X \in \mathfrak{J}$ genügt seiner charakteristischen Gleichung. Wir berechnen diese noch genauer:

$$\varphi(\rho) = -\rho^3 + (\sum \rho_\nu)\rho^2 - (\sum \rho_\nu \rho_\mu)\rho + (\rho_1 \rho_2 \rho_3);$$

hierbei ist $\Sigma\, \rho_\nu = \chi(X)$, $\Sigma\, \rho_\mu \rho_\nu = \frac{1}{2}(\chi(X)^2 - \chi(X^2))$; das Produkt $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ bezeichnen wir vorläufig mit $\det X$.

Man rechnet leicht nach:

$$\chi(X^2) = \sum \xi_\nu^2 + 2 \sum x_\nu \bar{x}_\nu \tag{5.2.2}$$

$$\begin{aligned}\chi(X^3) = \sum \xi_\nu^3 + 3(&\xi_1(x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3) + \xi_2(x_3 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_1) \\ &+ \xi_3(x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2)) + 6\ \mathrm{Re}(x_1 x_2 x_3).\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Nimmt man in

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= -X^3 + \chi(X)X^2 - \tfrac{1}{2}(\chi(X)^2 - \chi(X^2))X + \det X \cdot 1 \cdot e_0 \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

die Spur, so erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned}\det X &= \tfrac{1}{3}\chi(X^3) - \tfrac{1}{2}\chi(X^2)\chi(X) + \tfrac{1}{6}\chi(X)^3 \\ &= \xi_1 \xi_2 \xi_3 - \xi_1 x_1 \bar{x}_1 - \xi_2 x_2 \bar{x}_2 - \xi_3 x_3 \bar{x}_3 + 2\ \mathrm{Re}(x_1 x_2 x_3).\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Das ist eine sinngemäße Verallgemeinerung der gebräuchlichen Determinanten-Definition.

Die Determinante ist natürlich auch $\mathbf{F}_4$-invariant.

5.3. $\Pi \subset \mathfrak{J}$ sei die Menge der irreduzibelen Idempotente; d.h. $X \in \Pi$ dann und nur dann, wenn gilt:

(5.3.1) $\quad X = X \circ X \neq 0$

(5.3.2) $\quad$ Ist $X = X_1 + X_2$, $X_\mu \circ X_\nu = 0\ (\mu \neq \nu)$
$= X_\mu\ (\mu = \nu)$,
so ist $X_1 = 0$ oder $X_2 = 0$.

Die Relation (5.3.1) ist $\mathbf{F}_4$-invariant und für eine Hauptmatrix nur möglich, wenn alle Eigenwerte 0 oder 1 sind; nimmt man (5.3.2) hinzu, so bleibt nur die Möglichkeit 0, 0, 1 übrig, also

(5.3.3) $\quad \chi(X) = \chi(X^2) = \chi(X^3) = 1 \quad$ für $X \in \Pi$.

Ist umgekehrt (5.3.3) erfüllt, so ist X einer Hauptmatrix mit 0, 0, 1 äquivalent, also $X = X^2 \neq 0$; und falls $X = X_1 + X_2$ usw. gilt, so haben die X_1, X_2 alle Eigenwerte 0 oder 1 und es ist $1 = \chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2)$, also mindestens ein $\chi(X_\nu) = 0$, also mindestens ein $X_\nu = 0$.

Die Gleichungen (5.3.3) charakterisieren also die Elemente von Π.

Ebenso sieht man, daß die Elemente X von Π durch

$$X = X \circ X, \chi(X) = 1$$

charakterisiert sind.

5.4. Die Gleichung $X^2 = X$ kann ausführlicher geschrieben werden

(5.4.1) $\quad \xi_i = \xi_i^2 + x_{i+1}\bar{x}_{i+1} + x_{i+2}\bar{x}_{i+2} \quad$ (zyklisch)
$x_i = x_{i+2}\bar{x}_{i+1} + (\xi_{i+1} + \xi_{i+2})x_i \quad$ (zyklisch).

Wegen $\Sigma\, \xi_\nu = 1$ folgt für $X \in \Pi$:

$$\xi_i \bar{x}_i = x_{i+1}x_{i+2}\,.$$

(5.4.2) $\quad \xi_i x_i \bar{x}_i = x_i(x_{i+1}x_{i+2}) = \mathrm{Re}(x_i x_{i+1}x_{i+2})$,

und da das zyklisch symmetrisch ist:

$\xi_i x_i \bar{x}_i$ unabhängig von i.

Ferner, da $\xi_i x_i \bar{x}_i = \xi_i \bar{x}_i x_i$ ist

(5.4.3) $\quad x_i(x_{i+1}x_{i+2}) = (x_{i+1}x_{i+2})x_i = \xi_i x_i \bar{x}_i \quad$ unabhängig von i.

Die $x_i \bar{x}_i$ verhalten sich also wie die $\xi_{i+1}\xi_{i+2}$; Substitution in (5.4.1) liefert den Proportionalitätsfaktor, der 1 ist; also

(5.4.4) $\quad x_i \bar{x}_i = \xi_{i+1}\xi_{i+2}$.

6. $\mathscr{P}$

6.1. Unter einer *ebenen projektiven Geometrie* $\mathscr{P}$ versteht man ein System bestehend aus *Punkten*, *Geraden* und einer *Inzidenzrelation* mit der Eigenschaft: Zu zwei Punkten (Geraden) gibt es *eine* Gerade (*einen* Punkt), die (der) mit beiden inzidiert.

Unter der Voraussetzung, daß das System der Punkte (die '*Ebene*') eine Mannigfaltigkeit ist und das System der Geraden (als Mengen ihrer Punkte aufgefaßt) gewisse Regularitätseigenschaften erfüllt, hat G. Hirsch [9] bewiesen, daß die Ebene nur die Dimensionen 2^n besitzen kann (und die Geraden dann 2^{n-1}-dimensional sind). Die reelle, komplexe, und quaternionale projektive Geometrie sind Beispiele für die Fälle $n = 1, 2, 3$; für den vierten Fall hat G. Hirsch mit topologischen Mitteln ein Beispiel konstruiert, das (sehr indirekt) mit den Oktaven zusammenhängt.

Wir geben in 7 ein algebraisches Beispiel. Ob es (unter Regularitätsvoraussetzungen) das einzig mögliche ist, wissen wir nicht.

6.2. Weiß man, daß eine ebene projektive Geometrie eine Gruppe G von der Art der reellen projektiven Gruppe besitzt, so kann man Punkte, Geraden und Inzidenz auch gruppentheoretisch charakterisieren. Wir betrachten zu einem Punkt p_0 und einer mit ihm inzidenten Geraden l_0 die Untergruppe P bezw. L der Transformationen f von G, die p_0 bzw. l_0 festlassen. Dann ist ein beliebiger Punkt p (eine beliebige Gerade l) gekennzeichnet durch die links-Nebengruppe der Transformationen von G, die p_0 in p (l_0 in l) überführen. Daß p und l inzidieren, äußert sich dann so, daß die zugehörigen Nebengruppen aP und bL einen nicht leeren Durchschnitt haben.

Diese Erwägungen führen zu folgender *gruppentheoretischen* Definition der projektiven Geometrie:

Gegeben sei eine Gruppe G mit zwei Untergruppen P und L. Die Links-Nebengruppen von P und L heißen *Punkte* bzw. *Geraden*. Die Beziehung $aP \cap bL$ nicht leer heißt *Inzidenz*.

(Man beachte: ist $aP \cap bL$ nicht leer, so ist es eine Linksnebengruppe von $P \cap L$, denn mit $c,\ d \in aP \cap bL$ ist $c^{-1}d \in P$, $c^{-1}d \in L$, also $c^{-1}d \in P \cap L$, und mit $c \in aP \cap bL$ und $u \in P \cap L$ ist $cu \in aP \cap bL$.)

6.3. Wir interpretieren nun die Inzidenzaxiome.

6.3.1. *Durch zwei Punkte geht mindestens eine Gerade:* Die durch P gehenden Geraden müssen die Ebene überdecken. Wir können sie in der Form aL schreiben mit $a \in P$. Die Menge PL muß also alle cP treffen. Oder:

$$PLP = G.$$

Man sieht leicht, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

6.3.2. *Zwei Geraden besitzen mindestens einen Schnittpunkt:* Analog ergibt sich

$$LPL = G$$

als notwendige und hinreichende Bedingung.

6.3.3. *Durch zwei Punkte geht höchstens eine Gerade:* Ist $a_v \in P$, $b_v \in L$ und $a_1 b_1 = b_2 a_2$, so inzidieren die Geraden L und $a_1 L$ mit den Punkten P und $b_2 P$. Das Axiom besagt nun: $a_1 \in L$ oder $b_2 \in P$. Also gilt

$$PL \cap LP \subset P \cup L,$$

wobei die Inklusion auch durch die Gleichheit ersetzt werden darf.

Man sieht leicht, daß die Bedingung auch hinreichend ist.

6.4. G erzeugt in dem so definierten $\mathscr{P}$ eine Transformationsgruppe, wenn einem $a \in G$ die Transformation f_a mit

$$f_a(cP) = acP, f_a(cL) = acL$$

entspricht. Punkte gehen in Punkte über, Geraden in Geraden, Inzidenzen in Inzidenzen. Die Gruppe ist transitiv.

Die Untergruppe, die P festläßt, ist gerade f_P; die, die L festläßt, ist f_L. Die Untergruppe, die aP festläßt, ist $f_{aPa^{-1}}$. Die Untergruppe, die L punktweise festläßt, ist der Durchschnitt aller $f_{aPa^{-1}}$ mit $a \in L$. Die Faktorgruppe von L nach diesen Normalteiler kann man die projektive Gruppe der Geraden in der Geometrie $\mathscr{P}$ nennen.

6.5. Es ist nun unsere Absicht, als Gruppe G die $\mathbf{F}_4$ zu wählen und als Gruppen P und L etwa die Untergruppen von $\mathbf{F}_4$ die E_1 bezw. E_2 festlassen, und die beide der $\mathbf{B}_4$ isomorph sind. Man müßte nun nachprüfen, ob 6.3.1–6.3.3 erfüllt sind; dieser direkte Weg ist allerdings schlecht gangbar. Trotzdem wollten wir die Betrachtungen 6.1–6.4 vorausschicken, um unsern nun folgenden Ansatz plausibel zu machen. Ein Blick auf die Dimensionszahlen (dim $\mathbf{F}_4 = 52$, dim $\mathbf{B}_4 = 36$) lehrt, daß wir hier ein 16-dimensionales $\mathscr{P}$ erwarten müssen (Dimension des Nebengruppenraumes).

Vom Nebengruppenraum G/P können wir in $\mathfrak{J}$ ein Bild entwerfen, nämlich die Äquivalenzklasse von E_1; das ist aber die Menge Π der irreduzibelen Idempotente von $\mathfrak{J}$. Auch als Bild von G/L ist sie brauchbar. Als Inzidenzrelation drängt sich auf: $X \circ Y = 0$. Das ist ja für E_1, E_2 erfüllt und $\mathbf{F}_4$-invariant.

Die nun folgenden Definitionen sind nun heuristisch genügend vorbereitet.

7. $\mathscr{P}(\mathfrak{C})$

7.1. Wir definieren zwei 'Geschlechter' von 'Wesen', das Geschlecht der *Punkte* und das der *Geraden*. Jedes Geschlecht ist in wohlbestimmter Weise eineindeutiges Bild des Systems Π. Ist $X \in \Pi$, so ist 'der Punkt X' eine kurze Bezeichnung für 'den Punkt, der bei der gegebenen Abbildung dem Element X von Π entspricht'.

Zwischen Wesen *verschiedener* Geschlechter ist eine *Inzidenzrelation* möglich, die

$$X \circ Y = 0$$

lautet, d.h. der Punkt X inzidiert mit der Geraden Y, wenn $X \circ Y = 0$ ist.

Das ist die *Oktaven-Ebene*.

7.2. *Notwendig und hinreichend für die Inzidenz des Punktes X und der Geraden Y ist* $(X, Y) = 0$.

Wir brauchen nur zu zeigen:

$$\text{Aus } (X, Y) = \chi(X \circ Y) = 0 \text{ folgt } X \circ Y = 0.$$

Dabei dürfen wir noch annehmen $X = E_1$, also $\chi(X, Y) = \eta_1$, wenn

$$Y = \begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 & \eta_2 & y_1 \\ y_2 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

ist. Also $\eta_1 = 0$ und daher nach (5.4.1): $y_2 = y_3 = 0$. Also

$$(7.2.1) \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & y_1 \\ 0 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

also in der Tat $X \circ Y = 0$.

Wir bemerken noch, daß hier wegen (5.4.1)

$$(7.2.2) \qquad \eta_2 + \eta_3 = 1 \qquad \text{und} \qquad \eta_2 = \eta_2^2 + y_1\bar{y}_1$$

sein muß. Die Punkte der Geraden X sind also bestimmt durch η_2 und y_1, die in der Beziehung

$$(\eta_2 - \tfrac{1}{2})^2 + y_1\bar{y}_1 = \tfrac{1}{4}$$

stehen müssen (man sieht leicht, daß die Bedingung auch hinreicht).

Die Gerade ist also als Punktmenge eine 8-dimensionale Sphäre.

7.3. Wir zeigen: Für $X \in \Pi$, $Y \in \mathfrak{J}$ ist

$$X \circ (X \circ Y) = \tfrac{1}{2}X \circ Y + \tfrac{1}{2}(X, Y)X.$$

Wir brauchen das nur für $X = E_1$ zu beweisen. Dann hat $X \circ Y$ die Form

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \frac{1}{2}y_3 & \frac{1}{2}\bar{y}_2 \\ \frac{1}{2}\bar{y}_3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also $(X, Y) = \chi(X \circ Y) = \eta_1$ und

$$X \circ (X \circ Y) = \begin{pmatrix} \eta_1 & \frac{1}{4}y_3 & \frac{1}{4}\bar{y}_2 \\ \frac{1}{4}\bar{y}_3 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus die Behauptung folgt.

7.4. Sei $X, Y \in \Pi$,

$$Z = X - Y.$$

Dann ist

$$\chi(Z) = \chi(X) - \chi(Y) = 0$$

$$\chi(Z^2) = \chi(X) - 2\chi(X \circ Y) + \chi(Y) = 2(1 - \varepsilon)$$

mit

$$\varepsilon = \chi(X \circ Y).$$

$$\chi(Z^3) = \chi(X) - 3\chi(X \circ Y) + 3\chi(X \circ Y) - \chi(Y) = 0.$$

Also nach (5.2.4):

$$-Z^3 + (1 - \varepsilon)Z + \det Z \cdot 1 \cdot e_0 = 0.$$

Nimmt man hier die Spur, so erhält man $\det Z = 0$, also

$$Z^3 = (1 - \varepsilon)Z,$$

also

$$Z^{2(n+1)} = (1 - \varepsilon)^n Z^2,\ Z^{2n+1} = (1 - \varepsilon)^n Z.$$

Insbesondere

$$\chi(Z^2) = 2(1 - \varepsilon),\ \chi(Z^4) = 2(1 - \varepsilon)^2,\ \chi(Z^6) = 2(1 - \varepsilon)^3.$$

Wir setzen nun

$$W = 1 - \frac{Z^2}{1 - \varepsilon},$$

was sinnvoll ist für $X \neq Y$, da dann $|(X, Y)| < 1$ ist. Dann ist

$$\chi(W) = 3 - 2 = 1.$$

$$\chi(W^2) = \chi(1) - 2\chi\left(\frac{Z^2}{1 - \varepsilon}\right) + \chi\left(\frac{Z}{(1 - \varepsilon)^2}\right) = 3 - 4 + 2 = 1.$$

$$\chi(W^3) = \chi(1) - 3\chi\left(\frac{Z^2}{1 - \varepsilon}\right) + 3\chi\left(\frac{Z}{(1 - \varepsilon)^2}\right) - \chi\left(\frac{Z}{(1 - \varepsilon)^3}\right)$$

$$= 3 - 6 + 6 - 2 = 1.$$

Nach (5.3.3) ist also

$$W \in \Pi.$$

Weiter ist

$$X \circ Z^2 = X \circ (X - 2X \circ Y + Y) = X - 2X \circ (X \circ Y) + X \circ Y,$$

und das ist nach 7.3 gleich

$$X - (X, Y)X = (1 - \varepsilon)X,$$

also

$$X \circ W = 0,$$

und analog

$$Y \circ W = 0.$$

Es hat sich also ergeben:

7.5. Setzen wir für $X, Y \in \Pi, X \neq Y$

$$X \vee Y = 1 - \frac{(X - Y)^2}{1 - \chi(X \circ Y)},$$

so ist

$$X \vee Y \in \pi.$$

$$X \circ (X \vee Y) = Y \circ (X \vee Y) = 0.$$

Das ist aber das *Inzidenzaxiom: Zu zwei Wesen desselben Geschlechtes gibt es mindestens eines des anderen Geschlechts, das mit beiden inzidiert.*

Wir bemerken noch:

(7.5.1) $X \vee Y$ ist ein reelles Vielfaches ($\neq 0$) von $X \circ Y - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}(1 - \chi(X \circ Y))$.

7.6. $X, Y \in \Pi$ *mit* $X \circ Y = 0$ *lassen sich simultan auf die Hauptform bringen.* Wir können nämlich annehmen, daß $X = E_1$ ist. Dann muß

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & y_1 \\ 0 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

sein. Man verfahre nun wie in 5.1, aber dann hinsichtlich der Untergruppe P von $\mathbf{F}_4$, die E_1 festläßt, d.h. man mache $\eta_2^2 + \eta_3^2$ zum Minimum in der P-Äquivalenzklasse von Y. Dieselbe Transformation wie in 5.1 (die ja E_1 invariant läßt) zeigt, daß Y sich dann auf der Hauptform befindet.

7.7. X, Y, Z mit $X \circ Y = Y \circ Z = Z \circ X = 0$ lassen sich simultan auf die Hauptform bringen. Denn wenn X und Y sich bereits auf der Hauptform befinden, ist notwendig $Z = 1 - X - Y$.

7.8. $X, Y, Z_\nu \in \Pi$, $X \circ Z_\nu = Y \circ Z_\nu = 0$, $X \neq Y$. Dann ist $Z_1 = Z_2$. Wir können nach 7.5 nämlich annehmen: $X = E_2$, $Z_1 = E_1$. Wegen $Y \circ E_1 = E_2 \circ Z_2 = 0$ findet man

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & y_1 \\ 0 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \bar{z}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

$Y \circ Z_2$ hat als Element in der 3. Zeile und 3. Spalte $\eta_3 \xi_3 = 0$. Nun würde $\eta_3 = 0$ nach 7.2.1 bedeuten $\eta_2 = 1$, $y_1 = 0$, also $Y = E_2 = X$, während

$X \neq Y$ vorausgesetzt war. Also ist $\xi_3 = 0$, also nach (7.2.1)–(7.2.2) wieder $\xi_1 = 1, z_2 = 0, Z_2 = E_1 = Z_1$.

7.9. Nach 7.8 ist in $X, Y, Z \in \Pi$, $X \neq Y$, $X \circ Z = Y \circ Z = 0$ das Element Z eindeutig bestimmt. Das ist aber gerade das *Inzidenzaxiom: Zu zwei Wesen desselben Geschlechts gibt es höchstens eines des anderen Geschlechts, das mit beiden inzidiert.*

7.10. Aus der kubischen Form det X erhält man durch Polarisieren eine Trilinearform $\det(X, Y, Z)$ die gleichfalls $\mathbf{F}_4$-invariant ist. $\det(X, Y, Z)$ ist definiert als Koeffizient von $6\alpha\beta\gamma$ in $\det(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)$. Aus (5.2.5) ergibt sich für $X, Y, Z \in \Pi$

$$(7.10.1)\quad \det(X, Y, Z) = \tfrac{1}{3}\chi(X \circ Y \circ Z) - \tfrac{1}{6}(\chi(X \circ Y) + \chi(Y \circ Z) + \chi(Z \circ X)) + \tfrac{1}{6}.$$

Wir zeigen nun: *Notwendig und hinreichend für die Kollinearität von drei Punkten X, Y, Z ist* $\det(X, Y, Z) = 0$.

Wir können nämlich die rechte Seite von (7.10.1) auch schreiben:

$$\tfrac{1}{3}(X \circ Y - \tfrac{1}{2}X - \tfrac{1}{2}Y + \tfrac{1}{2}(1 - \chi(X \circ Y)), Z).$$

Das ist aber nach (7.5.1) bis auf einen reellen Faktor ($\neq 0$, falls $X \neq Y$) gleich $(X \vee Y, Z)$.

Nach 7.2 ist das dann und nur dann null, wenn

$$(X \vee Y) \circ Z = 0$$

ist, d.h. wenn Z auf der Geraden durch X und Y liegt, w.z.b.w.

7.11. Drei Punkte einer komplexen projektiven Geraden bestimmen bekanntlich eindeutig eine reelle projektive Gerade, d.h. eine Teilmenge, die gekennzeichnet ist durch die Realität des Doppelverhältnisses zwischen je vier ihrer Punkte; diese reellen Geraden erscheinen im Riemannschen Modell der komplexen projektiven Geraden als Kreise.

Ganz ähnlich verhält es sich in der Oktaven-Geometrie. Sind X, Y, Z drei kollineare Punkte und sucht man alle Punkte

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

auf derselben Geraden mit *reellen* α, β, γ, so wird man auf die Gleichungen

$$(7.11.1)\quad \chi(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$(7.11.2)\quad \chi((\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta(X, Y) + 2\beta\gamma(Y, Z) + 2\gamma\alpha(Z, X) = 1$$

geführt. Statt der dritten Gleichung

$$\chi((\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^3) = 1$$

kann man nach (5.2.5) auch schreiben

$$\det(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0,$$

aber das ist von selber erfüllt, da $\det(X, Y, Z)$ nach Voraussetzung und $\det(X, X, Y)$ usw. trivialerweise verschwinden.

Als Lösung (7.12.1)–(7.12.2) erhält man also einfach den Schnitt der Oktaven-Geraden (8-dim. Sphäre, siehe (7.2.2)) mit der Ebene (im Sinne des 9-dim. Raumes) durch X, Y, Z, also einen Kreis. Wir nennen ihn die *reelle Gerade* durch X, Y, Z.

7.12. Es ist klar, daß der Begriff der reellen Geraden $\mathbf{F}_4$-invariant ist. Er ist aber obendrein invariant bei Perspektivitäten zwischen verschiedenen Oktaven-Geraden.

Um das zu zeigen, lassen wir im Augenblick die Normierung von $\mathfrak{J}$ fallen und begeben uns in die Menge $\Pi^{\#}$ der ρX mit $X \in \Pi$ und ρ reell. Einem Punkte usw. ist also eine Menge $\{\rho X\}$ zugeordnet. Die Verbindungsgerade $X \vee Y$ schreibt man nun homogen

$$(7.12.1) \quad X \vee Y = \chi(X)\chi(Y) - \chi(X \circ Y) - \chi(X)Y - \chi(Y)X + 2X \circ Y.$$

Projiziert man den auf der Oktaven-Geraden A laufenden Punkt X aus dem festen Punkte Y (außerhalb A), so erhält man ein Büschel $X' = X \vee Y$. Beschränkt man sich auf die Punkte

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$$

der *reellen* Geraden durch X_1, X_2, X_3, so gilt wegen der Linearität von (7.12.1) für die zugehörigen Büschelgeraden dieselbe Relation

$$X' = \alpha_1 X'_1 + \alpha_2 X'_2 + \alpha_3 X'_3 .$$

Schneidet man das Büschel mit einer anderen Geraden B, so erhält man Punkte $X'' = B \vee X'$, die auch wieder die Relation

$$X'' = \alpha_1 X''_1 + \alpha_2 X''_2 + \alpha_3 X''_3$$

erfüllen. Diese Relation charakterisiert aber gerade die Punkte einer reellen Geraden.

7.13. Als Kegelschnitte aufgefaßt (siehe 7.11 Ende) werden die reellen Geraden durch die Perspektivitäten projektiv abgebildet. Hieraus folgt, daß

auch die Oktavengeraden, als Quadriken des projektiven 9-dim. Raumes aufgefaßt (7.11 Ende) projektiv abgebildet werden.

Die Oktavengerade E_1 hat in homogener Schreibweise die Gleichung

$$(7.13.1) \quad \xi_2 \xi_3 - x_1 \overline{x_1} = 0.$$

Nennt man die von Perspektivitäten erzeugten Selbstabbildungen einer Oktavengeraden *Prospektivitäten*, so bilden die Prospektivitäten von E_1 eine Untergruppe der zu (7.13.1) gehörenden Form der $\mathbf{D}_5$. Später ergibt sich, daß diese Untergruppe mit der 1-Komponente der Invarianzgruppe von (7.13.1) zusammenfällt. (Siehe 8.2.)

7.14 Man kann auf der Oktaven-Geraden auch noch *komplexe projektive Geraden* betrachten: man sagt, daß X_i $(i = 1, \ldots, 5)$ auf einer komplexen projektiven Geraden liegen, wenn sie reell linear abhängig sind. Auch dieser Begriff ist $\mathbf{F}_4$-invariant. Die komplexen projektiven Geraden auf E_1 sind nichts Anderes als die Schnitte von (7.13.2) mit 3-dim. projektiven Unterräumen des 9-dim. projektiven Raumes der ξ_2, ξ_3, x_1. Die Prospektivitäten der Geraden E_1 sind also auf einer komplexen projektiven Geraden aus E_1 projektive Abbildungen der gewöhnlichen komplexen projektiven Geraden (Möbius-Gruppe).

Insbesondere folgt hieraus:

Liegen X_i $(i = 1, \ldots, 4)$ auf einer Oktaven-Geraden und werden bei einer gewissen Prospektivität dieser Oktaven-Geraden X_1 und X_2 vertauscht und X_3 und X_4 festgelassen, so liegen X_i $(i = 1, \ldots, 4)$ sogar auf einer reellen Geraden und zwar harmonisch.

Denn X_i $(i = 1, \ldots, 4)$ liegen sicher auf einer komplexen Geraden und auf dieser gilt die Behauptung.

7.15. Wir nennen eine projektive Geometrie *harmonisch*, wenn zu einem geordneten Punktetripel auf einer Geraden der vierte harmonische (nach der üblichen Konstruktion, siehe Figur 3) eindeutig bestimmt ist (d.h. unabhängig von der Wahl der Hilfspunkte A, B). (Man nennt das auch den (speziellen) Vierseit-Satz.) Es genügt übrigens zu fordern, daß der vierte Harmonische unabhängig ist von einer Verschiebung von A längs der Geraden AB.

Wir zeigen: *Die Oktaven-Geometrie ist harmonisch.*

Beweis. Projektion aus B auf CD und danach Projektion von A aus zurück führt X_1, X_2, X_3, X_4 über in X_2, X_1, X_3, X_4, ist also eine Prospek-

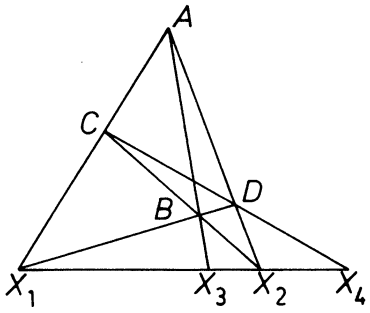


Fig. 3

tivität, die den Bedingungen von 7.14 (Ende) genügt. X_4 liegt also bereits auf der *reellen* Geraden X_1, X_2, X_3 und ist da durch sein Doppelverhältnis zu X_1, X_2, X_3 eindeutig festgelegt.

7.16. *Bemerkung.* $\mathscr{P}(\mathfrak{C})$ ist nicht-Desarguessch, da eine Desarguessche Geometrie notwendig eine Geometrie über einem Schiefkörper ist, der hier obendrein im kleinen Euklidisch sein muß, also der reelle, der komplexe oder der quaternionale Körper. Die Oktaven-Geometrie kommt hierunter nicht vor.

8. $\mathbf{E}_6$

8.1. Wir suchen die Gruppe $\mathfrak{T}$ der linearen Transformationen von $\mathfrak{J}$ in sich, die

$$\det X = \tfrac{1}{3}\chi(X \circ X \circ X) - \tfrac{1}{2}\chi(X)\chi(X \circ X) + \tfrac{1}{6}\chi(X)^3,$$

also auch die Trilinearform

$$\det(X, Y, Z) = \tfrac{1}{3}\chi(X \circ Y \circ Z) - \tfrac{1}{6}\{\chi(X)\chi(Y \circ Z) + \chi(Y)\chi(X \circ Z) + \chi(Z)\chi(X \circ Y)\} + \tfrac{1}{6}\chi(X)\chi(Y)\chi(Z)$$

invariant lassen. $\mathfrak{T}$ ist jedenfalls eine Übergruppe der $\mathbf{F}_4$, die ja obendrein noch (X, Y) invariant läßt.

Wir zeigen erst: Alle

$$(8.1.1) \qquad X \to T \circ X = \tfrac{1}{2}(TX + X^*T^*) \quad \text{mit } T \in \mathfrak{M}_3,\ \chi(T) = 0$$

gehören zum Infinitesimalring $\mathfrak{T}$. Wir dürfen annehmen, daß $T \in \mathfrak{M}_3^+$ ist, denn für $T \in \mathfrak{M}_3^-$ ist $X \to TX - XT = [T, X]$ eine Transformation aus der $\mathbf{F}_4$.

Bei Anwendung von (8.1.1) erfährt det X die infinitesimale Änderung

$$\begin{aligned}&\chi(X \circ X \circ (T \circ X)) - \tfrac{1}{2}\chi(T \circ X)\chi(X \circ X)\\ &\quad - \chi(X)\chi(X \circ (T \circ X)) + \chi(X)^2\chi(T \circ X)\\ &= (X \circ X \circ X - \tfrac{1}{2}\chi(X \circ X)X\\ &\quad - \chi(X)X \circ X + \chi(X)^2 X, T)\\ &= (\det X \cdot 1, T) = \det X \cdot \chi(T) = 0.\end{aligned}$$

Sei nun ein beliebiges infinitesimales $\Phi \in \mathfrak{T}$ gegeben. Wir setzen

$$T = \Phi 1.$$

Dann ist $T \in \mathfrak{M}_3^+$, $\chi(T)$ ist bis auf einen positiven Faktor gleich $\det(\Phi 1, 1, 1) = 0$.

$$\Phi X = T \circ X, \text{ für } X = 1.$$

Φ_1, das durch

$$\Phi_1 X = \Phi X - T \circ X$$

definiert ist, gehört auch zu $\mathfrak{T}$, und es ist

$$\Phi_1 1 = 0.$$

Das bedeutet aber, daß Φ_1 nicht nur $\det(X, Y, Z)$ invariant läßt, sondern auch (siehe (7.10.1))

$$\begin{aligned}\det(X, Y, 1) &= -\tfrac{1}{6}(\chi(X \circ Y) - \chi(X)\chi(Y))\\ &= -\tfrac{1}{6}(\chi(X, Y) - \chi(X)\chi(Y))\end{aligned}$$

und

$$\det(X, 1, 1) = \tfrac{1}{3}\chi(X),$$

also auch $\chi(X)$, $\chi(Y)$, und (X, Y). Φ_1 ist daher in $\mathbf{F}_4$.

Hieraus folgt:

Der Infinitesimalring der linearen Transformationen von $\mathfrak{J}$, die $\det X$ invariant lassen, wird erzeugt von den

$$X \to T \circ X \quad \text{mit } \chi(T) = 0;$$

jedes seiner Elemente ist eindeutig zu schreiben als Summe eines

$$X \to T \circ X \quad \text{mit } T \in \mathfrak{M}_3^+, \chi(T) = 0$$

und eines infinitesimalen Automorphismus von $\mathfrak{J}$, oder auch als Summe eines $\Delta \in \mathbf{D}_4$ und eines

$$X \to T \circ X$$

mit $T \in \mathfrak{M}_3^r$ (d.h., $T \in \mathfrak{M}_3$ mit reeller Diagonale) und $\chi(T) = 0$. (Wegen 4.8.)

Aus (4.9.3) folgt übrigens

$$\Delta(T \circ X) - T \circ (\Delta X) = (\Delta T) \circ X,$$

also

$$[\Delta, T]^{\sim} = (\Delta T)^{\sim}.$$

Diese Überlegung kann man auch bei den Gruppen selber anstellen. Erst einige Vorbemerkungen:

8.1.2. $X > 0$ (*positiv definit*) für $X \in \mathfrak{J}$ bedeute: alle Eigenwerte von X sind positiv.

8.1.3. $X > 0$ dann und nur dann wenn $\chi(X \circ Y \circ Y) > 0$ identisch in $Y \in \mathfrak{J}$. Man darf nämlich X in der Hauptform mit Diagonalelementen λ_ν voraussetzen, und mit der Bezeichnung aus 7.2 gilt dann

$$\chi(X \circ Y \circ Y) = \lambda_1(\eta_1^2 + y_2\bar{y}_2 + y_3\bar{y}_3) + \lambda_2(\eta_2^2 + y_3\bar{y}_3 + y_1\bar{y}_1) + \lambda_3(\eta_3^2 + y_1\bar{y}_1 + y_2\bar{y}_2),$$

woraus die Behauptung folgt.

8.1.4. Die Menge $\mathfrak{J}_{\text{pos}}$ der $X > 0$ ist konvex. Folgt aus 8.1.3.

8.1.5. Ist $\mathfrak{T}_0$ die 1-Komponente der (endlichen) Gruppe $\mathfrak{T}$, so ist $\mathfrak{T}_0 1 \subset \mathfrak{J}_{\text{pos}}$. Denn für $\varphi \in \mathfrak{T}_0$ hängen die Eigenwerte von $\varphi 1$ stetig von φ ab und können wegen $\det \varphi 1 = \det 1 = 1$ nie verschwinden.

8.1.6. Ist $\tilde{T}$ die infinitesimale Transformation $X \to T \circ X$ und $\tilde{\mathfrak{J}}$ die Menge der $\tilde{T}$ mit $T \in \mathfrak{J}$, so ist $\mathfrak{J}_{\text{pos}} \subset \exp(\tilde{\mathfrak{J}})1$. Denn wenn $X \in \mathfrak{J}_{\text{pos}}$ die Hauptform mit Diagonalelementen ξ_ν besitzt, setzen wir T als Hauptmatrix mit Diagonalelementen $\log \xi_\nu$ an und erhalten $(\exp \tilde{T})1 = X$. Durch eine Transformation aus $\mathbf{F}_4$ können wir den allgemeinen Fall hierauf zurückführen.

8.1.7. $\mathfrak{T}_0 1 = \mathfrak{J}_{\text{pos}}$. Folgt aus 8.1.5–8.1.6.

8.1.8. Ebenso sieht man, daß $\mathfrak{T}_0$ angewandt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Menge der Elemente von $\mathfrak{J}$ mit genau zwei negativen Eigenwerten liefert.

8.1.9. Jedes endliche $\varphi \in \mathfrak{T}$ muß $\mathfrak{J}_{\text{pos}}$ invariant lassen oder mit der Menge aus 8.1.8 vertauschen. Das letzte ist nicht möglich, da $\mathfrak{J}_{\text{pos}}$ nach 8.1.2 konvex ist und die Menge 8.1.8 sicher nicht konvex sein kann.

Also ist $\mathfrak{T}1 = \mathfrak{J}_{\text{pos}} = \exp(\tilde{\mathfrak{J}})1$.

8.1.10. Da die Menge der $\varphi \in \mathfrak{T}$ mit $\varphi 1 = 1$ gerade $\mathbf{F}_4$ ist (siehe 4.11 und 8.1.1), folgt hieraus

$$\mathfrak{T} = \mathbf{F}_4 \cdot \exp(\tilde{\mathfrak{J}}).$$

$\mathfrak{T}$ besitzt also nur eine Komponente.

8.2. Wir betrachten die Elemente von $\mathfrak{T}$, die die Gerade E_1 invariant lassen. Sie lassen auch

$$\det(E_1, X, X) = -\tfrac{1}{2}\chi(X \circ X) + \tfrac{1}{2}\chi(X)^2 = \xi_2 \xi_3 - x_1 \bar{x}_1$$

invariant und bilden einen Unterring $\mathbf{G}$ von $\mathbf{D}_5$. Nach 8.1.1 (Ende) lassen sie sich als Summe eines $\Delta \in \mathbf{D}_4$ und eines $\tilde{T}$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & t_{23} \\ 0 & t_{32} & \tau_3 \end{pmatrix}$$

schreiben. Eine Dimensionsabzählung $(28 + 17 = 45)$ ergibt, daß (infinitesimal) $\mathbf{G} = \mathbf{D}_5$ ist, also die Prospektivitäten von E_1 enthält (siehe 7.13).

8.3. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{T}$ die $\mathbf{E}_6$ der Cartanschen Klassifikation ist.

Wir machen Gebrauch von der Zerlegung von $\mathfrak{T}$ von 8.1.1, Ende.

Als maximal Abelschen Unterring $\mathbf{H}$ verwenden wir denselben wie bei der $\mathbf{D}_4$ und $\mathbf{F}_4$ (siehe 4.10) ergänzt mit den Elementen $\tilde{S}$, die durch

$$S = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,$$

$$\tilde{S}X = S \cdot X$$

definiert sind. ($\mathbf{H}$ ist also 6-dimensional.) Für $\delta \in \mathbf{D}_4$ ist $\delta E_\nu = 0$, also $\delta S = 0$, also (8.1.1 Ende) $[\delta, \tilde{S}] = 0$, also jedes δ mit jedem S vertauschbar und insbesondere $\mathbf{H}$ Abelsch. Sei $F^a_{\mu\nu}$ die Matrix mit einem a im Schnitt-

punkt der μ-ten Reihe und ν-ten Spalte und übrigens Nullen. Dann ist (siehe (4.9.2))

$$(8.3.1) \qquad \delta F^a_{\mu\nu} = F^{\delta_{\mu\nu} a}_{\mu\nu}.$$

Weiter ist, da S reelle Matrixelemente hat und man darum mit ihm assoziativ rechnen darf

$$(8.3.2) \qquad [\tilde{S}, \tilde{F}^a_{\mu\nu}] = \tfrac{1}{2}[S, F^a_{\mu\nu}]^{\sim} = \tfrac{1}{2}(\xi_\nu - \xi_\mu)\tilde{F}^a_{\mu\nu}.$$

Genau wie in 4.10 bestimmt man nun die Wurzelformen, die aber außer von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jetzt noch von ξ_1, ξ_2, ξ_3 ($\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$) abhängen. Die Abhängigkeit von den α ist wegen (8.3.1) dieselbe wie in 4.10, die von den ξ ergibt sich aus (8.3.2). Die Wurzelformen lauten $\pm\alpha_\nu i \pm \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_3)$, $\pm\alpha_\mu i \pm \alpha_\nu i$,

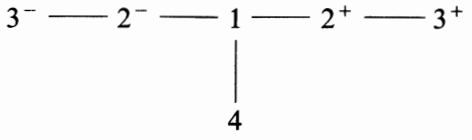
$$\tfrac{1}{2}(\pm\alpha_0 i \pm \alpha_1 i \pm \alpha_2 i \pm \alpha_3 i) \pm \tfrac{1}{2}\begin{cases}(\xi_3 - \xi_1)\\(\xi_1 - \xi_2)\end{cases},$$

wobei im letzten Ausdruck gemäß (2.2.4) bei einer geraden Anzahl positiver Zeichen vor den α der obere, bei einer ungeraden Anzahl der untere Summand gilt, und wobei übrigens alle Zeichenkombinationen zulässig sind.

Es ist nicht evident, daß dieses Wurzelsystem dem der Cartanschen $\mathbf{E}_6$ isomorph ist. Die Transformationsformeln sind zwar leicht abzuleiten, aber übrigens uninteressant. Man kann jedoch die Isomorphie ohne Rechnung einsehen, wenn man sich der Dynkinschen [7] Darstellung bedient. Man bestimme ein System irreduzibler positiver Wurzelformen (die also nicht als Summen anderer positiver Wurzelformen geschrieben werden können).

(1) $\alpha_2 i - \alpha_3 i$
(2±) $\alpha_3 i \pm (\xi_2 - \xi_3)$
(3±) $\frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)i \pm (\xi_1 - \xi_2)$
(4) $\alpha_1 i - \alpha_2 i.$

Das Dynkinsche Schema wird dann



wobei Wurzelformen, deren Summe wieder eine ist, verbunden sind. Das ist aber gerade das Schema der $\mathbf{E}_6$.

8.4. Eine analoge Betrachtung wie in 4.13 zeigt, falls $\chi(T_1) = \chi(T_2) = 0$,

$$[T_1, T_2]^{\sim} \equiv 2[\tilde{T}_1, \tilde{T}_2] + \tfrac{1}{3}\chi([T_1, T_2])^{\sim}$$

mod. Automorphismus von $\mathfrak{J}$ (von einem Element von $\mathbf{G}_2$ erzeugt).

Wieder ist

$$\begin{aligned}\dim E_6 &= 78\\ &= \dim \text{der Menge der } T + \dim \mathbf{G}_2\\ &= 64 + 14.\end{aligned}$$

9. A

Wir zeigen hier: *Die Automorphismengruppe von $\mathscr{P}(\mathfrak{C})$ ist eine Darstellung der $\mathbf{E}_6$.* Dabei ergibt sich wie in der reellen und in der quaternionalen Geometrie (im Gegensatz zur komplexen) die Stetigkeit der Automorphismen von selber.

$\mathbf{F}_4$ spielt in $\mathscr{P}(\mathfrak{C})$ die Rolle der elliptischen, $\mathbf{E}_6$ die der projektiven Gruppe.

Die Untergruppe vom Index 16 der $\mathbf{E}_6$, die einen Punkt von $\mathscr{P}(\mathfrak{C})$ invariant läßt, findet sich übrigens schon bei E. Cartan ([2, p. 152, Zeile 3]).

Hier folgen nun die Beweise.

9.1. Die Elemente $X \in \Pi^{\#}$ (siehe 7.12) sind gekennzeichnet durch: $\det(X, X, Y) = 0$ identisch in Y.

Beweis. Wegen (7.10.1) ist

$$\det(X, X, Y) = \chi(X \circ X \circ Y) - \tfrac{1}{2}(\chi(X \circ X)\chi(Y) + 2\chi(X \circ Y)\chi(X) + \tfrac{3}{2}\chi(X)^2\chi(Y)).$$

Für $X \in \Pi^{\#}$ ist $X \circ X = \alpha X$, $\chi(X) = \alpha$, $\chi(X^2) = \alpha^2$, also $\det(X, X, Y) = 0$.

Sei umgekehrt $\det(X, X, Y) = 0$ insbesondere für $Y = 1$, so ist $\chi(X \circ X) = \chi(X)^2$, und gilt das auch für $Y = X$, so ist $\chi(X \circ X \circ X) = \chi(X)^3$, und hieraus folgt $X \in \Pi^{\#}$.

9.2. $\Pi^{\#}$ ist invariant bei $\mathbf{E}_6$. Folgt aus 9.1.

9.3. Da $\mathbf{E}_6$ die Mengen $\{\rho X\}$ untereinander vertauscht, darf sie als Transformationsgruppe in $\mathscr{P}(\mathfrak{C})$ aufgefaßt werden. Da $\det(X, Y, Z) = 0$ nach 7.11 die Kollinearität der Punkte X, Y, Z charakterisiert und diese Gleichung bei $\mathbf{E}_6$ invariant ist, ist $\mathbf{E}_6$ Untergruppe der Automorphismengruppe $\mathbf{A}$ von

$\mathscr{P}(\mathfrak{C})$. Wir zeigen nun: $\mathbf{A} = \mathbf{E}_6$. Dieser Beweis ist einfacher als der ursprüngliche, der übrigens eine kleine Lücke enthielt.

9.4. Wir konstruieren ein (endliches) Element $\varphi \in \mathbf{E}_6$, mit

$$\varphi E_2 \sim E_2, \ \varphi E_3 \sim E_3, \ \varphi A \sim E_1,$$

wo A ein vorgegebener Punkt ist, der nicht auf der Geraden E_1 liegt. Sei

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung

$$X \to PXP^*$$

ist (auch ohne Klammern sinnvoll und) ein (endliches) Element von $\mathbf{E}_6$, das die Punkte E_2, E_3 invariant läßt. Ist in

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 & \alpha_2 & a_1 \\ a_2 & \bar{a}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$a_3 \neq 0$ (also nach (5.4.4) auch $\alpha_1 \neq 0$), so wähle man $p = -\alpha_1^{-1}\bar{a}_3$. Ist $a_3 = 0$, so wähle man $p = 0$. Dann wird in

$$B = PAP^*$$

das Element $b_3 = 0$.

Man wende nun mit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformation

$$X \to QXQ^*$$

an, die auch zu $\mathbf{E}_6$ gehört und die Punkte E_2, E_3 invariant läßt. So bringt man bei geeigneter Wahl von q in

$$C = QBQ^*$$

auch das c_3 zum Verschwinden. C hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & a_1 \\ 0 & \bar{a}_1 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

wo (nach (5.4.4)) γ_1 oder a_1 verschwindet. $\gamma_1 = 0$ würde bedeuten, daß C auf der die Punkte E_2 und E_3 enthaltenden Geraden E_1 liegt; aber dann läge da auch A, was verboten war. Also ist $a_1 = 0$ und (nach 5.4.4)) auch $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Also $C \sim E_1$.

$$X \to Q(PXP^*)Q^*$$

ist das gewünschte φ.

9.5. Es gibt ein (endliches) Element $\varphi \in \mathfrak{E}_6$, das einen gegebenen Punkt A und eine gegebene Gerade B (nicht in Inzidenz) bzw. in den Punkt E_1 und die Gerade E_1 überführt.

Man führe nämlich erst durch ein Element $\varphi_1 \in \mathbf{F}_4$ die Gerade B in die Gerade E_1 über, und dann durch φ_2 (gemäß 9.4) den Punkt $\varphi_1 A$ in den Punkt E_1, wobei die Gerade E_1 als Ganzes festbleibt.

9.6. Geometrisch sieht man leicht ein: Es gibt höchstens eine Transformation aus **A**, die den Punkt A und alle Punkte der Geraden B (nicht in Inzidenz mit A) festläßt und einen Punkt C in einen Punkt D überführt.

9.7. Die Involution

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 & -x_3 & -\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ -x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

läßt det X invariant, gehört also zu $\mathbf{E}_6$ und läßt den Punkt E_1 und alle Punkte der Geraden E_1 invariant. Punkt und Bildpunkt liegen harmonisch zum Punkte E_1 und zur Geraden E_1.

9.8. Nach 9.6 ist die Involution, die den Punkt A und alle Punkte der Geraden B (nicht in Inzidenz mit A) festläßt, durch A und B eindeutig bestimmt. Nach 9.5 und 9.7 ist das System S aller dieser Involutionen in $\mathbf{E}_6$ enthalten; da die harmonische Lage **A**-invariant ist, ist auch S **A**-invariant. Die von S erzeugte Untergruppe G von $\mathbf{E}_6$ ist also Normalteiler von A, also auch von $\mathbf{E}_6$, und wegen der Einfachheit von $\mathbf{E}_6$ ist $G = \mathbf{E}_6$, also $\mathbf{E}_6$ Normalteiler von A.

9.9. Mit den Transformationen φ von $\mathscr{P}(\mathbb{C})$ sind Transformationen φ^* der Geraden dual verknüpft. Der Zusammenhang ist

$$(\varphi X, U) = (X, \varphi^* U).$$

Bei den infinitesimalen $\Phi \in \mathbf{E}_6$ konstatiert man für $\Phi \in F_4$:

$$(\Phi X, U) + (X, \Phi U) = 0$$

nach 4.4.2, für $\Phi = \tilde{T}$ mit $T = T^*$:

$$(\Phi X, U) = \tfrac{1}{2}(T, X, U) = \tfrac{1}{2}(X, T, U) = (X, \Phi U).$$

Also

$$\Phi^* = -\Phi \quad \text{für } \Phi \in \mathbf{F}_4$$

$$\Phi^* = \Phi \quad \text{für } \Phi = \tilde{T} \text{ mit } T = T^*.$$

Allgemein zieht

$$\Phi\colon X \to T \circ X$$

nach sich

$$\Phi^*\colon X \to X \circ T.$$

$\Phi \to -\Phi^*$ ist wesentlich der einzige äußere Automorphismus von $\mathbf{E}_6$. (Siehe Cartan [5].)

9.10. Erzeugt $\omega \in \mathbf{A}\backslash\mathbf{E}_6$ einen äußeren Automorphismus von $\mathbf{E}_6$, so darf man annehmen, daß es der aus 9.9 ist. Erzeugt ω einen inneren Automorphismus, so darf man annehmen, daß es mit allen Elementen von $\mathbf{E}_6$ kommutiert. Jedenfalls kommutiert ω mit allen Elementen von $\mathbf{F}_4$. Wir betrachten die maximale Untergruppe G von $\mathbf{F}_4$, die den Punkt X festläßt. Für $\varphi \in G$ ist

$$\varphi\omega X = \omega\varphi X = \omega X.$$

Also läßt G auch ωX invariant. Hieraus folgt $\omega X = X$ für alle X, also $\omega = 1$ im Widerspruch zu $\omega \in \mathbf{A}\backslash\mathbf{E}_6$. Also ist $A = \mathbf{E}_6$.

10. ? ?

Wir stellen einige Probleme zusammen:

10.1. Mit welchen Geometrien hängen die $\mathbf{E}_7$ und $\mathbf{E}_8$ zusammen?

10.2. Eine ebene projektive Geometrie heiße k-mal differenzierbar resp. analytisch, wenn die Punkte eine k-mal differenzierbare resp. analytische

Mannigfaltigkeit bilden, und wenn Schnittpunkte und Verbindungsgeraden k-mal differenzierbar resp. analytisch von den gegebenen Größen abhängen mit einer Funktionalmatrix von maximalem Rang.

10.3. Gibt es ∞-mal differenzierbare nicht-harmonische $\mathscr{P}$ in den Dimensionen 2, 4, 8, 16?

10.4. In welchen Dimensionen gibt es k-mal differenzierbare $\mathscr{P}$? (Für den Satz von G. Hirsch, der diese Dimensionen auf Potenzen von 2 beschränkt, braucht man wohl mindestens $k = 1$.)

10.5. Ist jedes analytische $\mathscr{P}$ auch harmonisch?

10.6. Ist (in den Dimensionen 4, 8) jedes stetige harmonische $\mathscr{P}$ auch Desarguessch?

LITERATUR

1. Albert, A. A., 'A Structure Theory for Jordan Algebras', *Ann. Math.* (2) **48** (1947), 546–567.
2. Cartan, E., 'Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu', *Amer. J. Math.* **18** (1896), 1–61.
3. Cartan, E., 'Sur la structure des groupes de transformations finis et continus', Thèse Sci., Paris, 1894.
4. Cartan, E., 'Les groupes réels simples et continus', *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **31** (1914), 263–355, spez. 298.
5. Cartan, E., 'Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples', *Bull. Sci. Math.* (2) **XLIX** (1re partie) (1925), 361–374.
6. Chevalley, C. and Schafer, R. D., 'The Exceptional Simple Lie Algebras F_4 and E_6', *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **36** (1950), 137–141.
7. Dynkin, E., 'Classification of the Simple Lie Groups (Russisch), *Mat. Sbornik N.S.* **18** (60) (1946), 347–352.
8. Eckmann, B., 'Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen', *Comment. Helvet.* **15** (1942–1943), 358–366.
9. Hirsch, G., 'La géométrie projective et la topologie des espaces fibrés', *Topologie Algébrique*, 35–42. Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique no. 12. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1949.
10. Jacobson, N., 'Abstract Derivation and Lie Algebras', *Trans. Amer. Math. Soc.* **42** (1937), 206–224.
11. Jacobson, N., 'Cayley Numbers and Normal Simple Lie Algebras of Type G_2', *Duke Math. J.* **5** (1939), 775–783.
12. Moufang, R., 'Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit (D_9)', *Abh. Math. Sem. Hamburg* **9** (1933), 207–222.
13. Moufang, R., 'Zur Struktur von Alternativkörpern', *Math. Ann.* **110** (1934), 416–430.
14. Weyl, H., 'Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen: Kap. III', *Math. Z.* **24** (1926), 353–376.
15. Zorn, M., 'Alternativkörper und quadratische Systeme', *Abh. Math. Sem. Hamburg* **9** (1933), 395–402.

Sur le groupe exceptionnel E_7 [1953b]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56 (1953), 81–89
[Zbl 0052.02404; MR 0054609]

(Communicated at the meeting of February 28, 1953)

Dans une étude polycopiée [1]) je me suis occupé des groupes exceptionnels G_2, F_4, E_6 de la classification de E. Cartan. Parmi d'autres résultats j'ai trouvé l'interprétation géométrique de F_4 et E_6 comme le groupe elliptique et projectif d'une géométrie projective plane à 16 dimensions. En essayant d'étendre mes recherches aux autres groupes exceptionnels, je me suis heurté à une erreur gênante dans les énoncés de la thèse de CARTAN [2]), qui a été reprise par tous les auteurs qui ont traité les groupes exceptionnels (parfois avec quelques modifications qui ne sont pas des améliorations). [3]) Je me propose de reprendre ces recherches.

1. Tous les tenseurs qui apparaîtront dans ce qui suit [4]), seront des grandeurs de l'espace affin à 8 dimensions et antisymétriques dans leurs indices covariants ainsi que dans leurs indices contravariants. J'adopte en général la convention usuelle d'omettre le signe de sommation.

$$I^{j_1\dots j_p}_{i_1\dots i_p} = \text{signe de la permutation } \binom{i_1\dots i_p}{j_1\dots j_p}$$
$$= 0, \text{ si les ensembles } (i_1\dots i_p) \text{ et } (j_1\dots j_p) \text{ sont différents.}$$

Si les indices $i_1 \dots i_p$ (ou $j_1 \dots j_p$) du symbole I sont les nombres $1 \dots 8$ dans l'ordre naturel, nous les omettrons.

La montée et la descente des indices seront définies par

$$a_{i_1\dots i_q} = \frac{1}{p!} I_{i_1\dots i_q\, j_1\dots j_p} a^{j_1\dots j_p}, \text{ si } p+q=8,$$

tel que par exemple

$$a_{1234} = a^{5678}.$$

Au numéro 8 nous démontrerons la formule auxiliaire

$$a^{\varrho\sigma ij} b_{\varrho\sigma kl} - b^{\varrho\sigma ij} a_{\varrho\sigma kl} = \tfrac{1}{3} a^{\varrho\sigma\tau\alpha} b_{\varrho\sigma\tau\gamma} (I^{ij}_{\alpha\beta} I^{\gamma\beta}_{kl} - \tfrac{1}{4} I^{ij}_{kl} I^{\gamma}_{\alpha}). \tag{1.1}$$

[1]) Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Math. Inst. d. Rijksuniversiteit te Utrecht (1951).

[2]) Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Paris, 1894), spécialement p. 144, l. 2–3 et l. 9–10.

[3]) On remarque immédiatement certaines symétries dans les formules de structure (25) qui manquent dans l'invariant biquadratique J et inversement. Dans l'invariant J les coefficients et les signes ont été mal choisis et quelques termes nécessaires manquent. De plus le contenu des lignes 9–10 ne s'accorde ni avec la forme J de Cartan ni avec la forme correcte.

[4]) A une exception près, au no. 7.

Par sommation sur $i = k$ on en déduit au no. 9:

$$a^{\varrho\sigma\tau j}\, b_{\varrho\sigma\tau l} + b^{\varrho\sigma\tau j}\, a_{\varrho\sigma\tau l} = \tfrac{1}{4}\, a^{\varrho\sigma\tau\nu}\, b_{\varrho\sigma\tau\nu}\, I^j_l. \tag{1. 2}$$

2. Le E_7 sera introduit par sa représentation linéaire dans l'espace (à 56 dimensions) des paires de bivecteurs x^{ij} et y_{ij} de l'espace à 8 dimensions. On a deux espèces de transformations infinitésimales:

$$(P) \qquad \begin{cases} dx^{ij} = I^{ij}_{\alpha\beta}\, p^\alpha_\gamma\, x^{\gamma\beta} = p^i_\gamma\, x^{\gamma j} - p^j_\gamma\, x^{\gamma i}, \\ dy_{ij} = -I^{\alpha\beta}_{ij}\, p^\gamma_\alpha\, y_{\gamma\beta} = -p^\gamma_i\, y_{\gamma j} + p^\gamma_j\, y_{\gamma i}, \end{cases}$$

où

$$p^k_k = 0,$$

et

$$(\Theta) \qquad \begin{cases} dx^{ij} = \vartheta^{ij\alpha\beta}\, y_{\alpha\beta}, \\ dy_{ij} = -\vartheta_{ij\alpha\beta}\, x^{\alpha\beta}. \end{cases}$$

La transformation infinitésimale générale est la combinaison linéaire de ces deux [1]).

En se servant de la notation du calcul des matrices, on peut écrire (P) sous la forme

$$dX = PX + XP',$$
$$dY = -P'Y - YP,$$

ce qui répond aux transformations finies

$$f(X) = AXA'$$
$$f(Y) = A'^{-1}YA^{-1},$$

où

$$\det A = 1.$$

D'après Cartan cet E_7 doit être le plus grand groupe simplectique connexe (x^{ij} et y_{ij} étant les variables conjuguées) qui laisse invariante une forme biquadratique. L'expression exacte de cette forme est

$$J = \Delta(X) + \Delta(Y) - \tfrac{1}{4}\chi(XYXY) + \tfrac{1}{16}(\chi(XY))^2, \tag{J}$$

où χ désigne la trace d'une matrice et où Δ est sa pfaffienne:

$$\Delta(X) = \frac{1}{16\cdot 4!}\, I_{ijklpqrs}\, x^{ij}\, x^{kl}\, x^{pq}\, x^{rs} = x^{12}\, x^{34}\, x^{56}\, x^{78} + \dots,$$

$$\Delta(Y) = \frac{1}{16\cdot 4!}\, I^{ijklpqrs}\, y_{ij}\, y_{kl}\, y_{pq}\, y_{rs} = y_{12}\, y_{34}\, y_{56}\, y_{78} + \dots.$$

On sait que le carré de la pfaffienne est le déterminant, et qu'elle est multipliée par $\det A$, si l'on y applique la transformation $X \to AXA'$.

Il s'ensuit que J est invariant par rapport aux transformations P.

Il est utile de former des variables à quatre indices:

$$(u) \qquad \begin{cases} x^{ijkl} = \tfrac{1}{8}\, I^{ijkl}_{\mu\nu\varrho\sigma}\, x^{\mu\nu}\, x^{\varrho\sigma}, \\ y_{ijkl} = \tfrac{1}{8}\, I^{\mu\nu\varrho\sigma}_{ijkl}\, y_{\mu\nu}\, y_{\varrho\sigma}, \\ u^{ijkl} = x^{ijkl} + y^{ijkl}. \end{cases}$$

[1]) Ce sont les équations (25) de Cartan, mais sous une forme plus symétrique.

Donc, par exemple

$$u^{1234} = x^{12}x^{34} + x^{13}x^{42} + x^{14}x^{23} + y_{56}y_{78} + y_{57}y_{86} + y_{58}y_{67}.$$

Ces variables sont antisymétriques. De plus on aura besoin des variables

$$(v) \qquad x_\alpha^\gamma = x^{\gamma\beta}y_{\beta\alpha} - \tfrac{1}{8}x^{ij}y_{ij}I_\alpha^\gamma$$

ou, écrites autrement,

$$V = XY - \tfrac{1}{8}\chi(XY)\cdot 1.$$

Le E_7 permet une représentation linéaire au moyen de ces $70 + 63$ variables u^{ijkl} et v_α^γ qui est essentiellement celle du groupe adjoint. J peut être exprimé au moyen de ces variables:

$$(J') \qquad J = \tfrac{1}{144}u^{ijkl}u_{ijkl} - \tfrac{1}{6}v_\alpha^\gamma v_\gamma^\alpha.$$

Les équations

$$(M) \qquad u^{ijkl} = v_\alpha^\gamma = 0$$

définissent une variété à 28 dimensions (ou à 27 dimensions non-homogènes) qui est invariante par rapport aux transformations de E_7 [1]). Par conséquent il y a une réprésentation (non-linéaire) de E_7 dans une variété à 27 dimensions [2]).

Une forme réelle (non unitaire) du groupe E_7 s'obtient en faisant la restriction

$$\bar{x}^{ij} = y_{ij}.$$

Alors les transformations P deviendront les transformations infinitésimales du groupe unitaire à déterminant 1 et les coefficients de Θ seront liés par la relation

$$\bar{\vartheta}^{ijkl} + \vartheta_{ijkl} = 0.$$

Après cette restriction la variété M (inhomogène) peut être décrite par les matrices X

unitaires finies, gauches et à pfaffienne -1,

où l'on doit identifier $\pm X$ et $\pm iX$.

En effet de $V = 0$ et $\overline{X} = Y$ on déduit

$$X\overline{X}' = \tfrac{1}{8}\chi(X\overline{X}')\,1.$$

$\chi(X\overline{X}')$ est positif; donc on peut normer X de telle façon que X soit unitaire. Par conséquent: $|\Delta(X)| = 1$. Mais sur M on a aussi $u^{ijkl} = 0$, donc par exemple

$$\bar{x}^{1234} = y_{1234} = y^{5678} = -x^{5678}.$$

$\Delta(X)$ est une somme de termes

$$x^{1234}x^{5678} < 0;$$

$\Delta(X)$ est donc négatif, c'est-à-dire égale à -1.

[1]) C'est la forme exacte de l'énoncé de Cartan, p. 144, l. 9–10.

[2]) Voir Cartan, p. 152, l. 3.

Inversement, $X\overline{X}' = 1$ implique $V = 0$, et si l'on y ajoute $\Delta(X) = -1$ et l'on fait la substitution en (J) : $J = 0$. Donc d'après (J') : $u^{ijkl}\, u_{ijkl} = 0$. Comme les u^{ijkl} et u_{ijkl} sont conjugués, il en résulte $u^{ijkl} = 0$.

La démonstration des faits énoncés qui va suivre, se bornera quelquefois à une esquisse.

3. Pour vérifier que les transformations P et Θ engendrent un groupe (par combinaison linéaire), nous formons les commutateurs:

Le commutateur deux transformations P (P_1 et P_2) est évidemment une transformation P (P_3), qui se calcule en prenant le commutateur des matrices P respectives:

$$P_3 = [P_1, P_2].$$

Pour le commutateur d'un P et d'un Θ on trouve

$$([P, \Theta]) \qquad dx^{ij} = (p^i_\gamma\, \vartheta^{\gamma j\alpha\beta}\, y_{\alpha\beta} - p^j_\gamma\, \vartheta^{i\gamma\alpha\beta}\, y_{\alpha\beta}) + 2\, \vartheta^{ij\alpha\beta}\, p^\gamma_\alpha\, y_{\gamma\beta},$$

et en posant

$$(\tilde{\vartheta}) \qquad \tilde{\vartheta}^{ijkl} = \tfrac{1}{6}\, I^{ijkl}_{\mu\nu\varrho\sigma}\, \vartheta^{\gamma\nu\varrho\sigma}\, p^\mu_\gamma = \vartheta^{\gamma jkl}\, p^i_\gamma + \vartheta^{i\gamma kl}\, p^j_\gamma + \vartheta^{ij\gamma l}\, p^k_\gamma + \vartheta^{ijk\gamma}\, p^l_\gamma,$$

on a

$$([P, \Theta]) \quad \left\{ \begin{array}{c} dx^{ij} = \tilde{\vartheta}^{ijkl}\, y_{kl}. \\ \text{D'une manière analogue on trouve} \\ dy_{ij} = -\,\tilde{\vartheta}_{ijkl}\, x^{kl}, \end{array} \right.$$

en posant

$$(\tilde{\vartheta}) \qquad \tilde{\vartheta}_{ijkl} = -\,\tfrac{1}{6}\, I^{\mu\nu\varrho\sigma}_{ijkl}\, \vartheta_{\gamma\nu\varrho\sigma}\, p^\gamma_\mu.$$

Pour voir que c'est une transformation Θ il faut montrer que les $\tilde{\vartheta}^{ijkl}$ et $\tilde{\vartheta}_{ijkl}$ s'obtiennent en effet l'un de l'autre par montée et descente des indices. Après l'introduction d'un quadrivecteur auxiliaire a, ce fait est exprimé par

$$a_{ijkl}\, \tilde{\vartheta}^{ijkl} = a^{ijkl}\, \tilde{\vartheta}_{ijk}$$

ou encore

$$a_{\mu\nu\varrho\sigma}\, \tilde{\vartheta}^{\gamma\nu\varrho\sigma}\, p^\mu_\gamma + a^{\mu\nu\varrho\sigma}\, \tilde{\vartheta}_{\gamma\nu\varrho\sigma}\, p^\gamma_\mu = 0$$

ou encore

$$(a^{\varrho\sigma\tau j}\, \tilde{\vartheta}_{\varrho\sigma\tau l} + \tilde{\vartheta}^{\varrho\sigma\tau j}\, a_{\varrho\sigma\tau l})\, p^l_j = 0.$$

D'après 1. 2 il en est bien ainsi puisque la trace de P disparaît.

Enfin nous calculons le commutateur de deux transformations Θ, appelées Θ et H, à coefficients ϑ et η:

$$([\Theta, H]) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx^{ij} = (-\,\eta^{ij\alpha\beta}\, \vartheta_{\alpha\beta kl} + \vartheta^{ij\alpha\beta}\, \eta_{\alpha\beta kl})\, x^{kl} = \\ \qquad = \tfrac{1}{3}\, \vartheta^{\varrho\sigma\tau\alpha}\, \eta_{\varrho\sigma\tau\gamma}\, (I^{ij}_{\alpha\beta}\, I^{\gamma\beta}_{kl} - \tfrac{1}{4}\, I^{ij}_{kl}\, I^\gamma_\alpha)\, x^{kl} \end{array} \right.$$

d'après 1. 2. Donc

$$dx^{ij} = I^{ij}_{\alpha\beta}\, p^\alpha_\gamma\, x^{\gamma\alpha},$$

si nous posons

$$p^\alpha_\gamma = \tfrac{2}{3}\, (\vartheta^{\varrho\sigma\tau\alpha}\, \eta_{\varrho\sigma\tau\gamma} - \tfrac{1}{8}\, \vartheta^{\varrho\sigma\tau\lambda}\, \eta_{\varrho\sigma\tau\alpha}\, I^\alpha_\gamma).$$

Après avoir fait le calcul analogue de dy_{ij}, on aura vérifié que le commutateur de deux Θ est un P.

Il en résulte que nous avons affaire à un groupe infinitésimal G. Son groupe adjoint Γ s'obtient, si $\tilde{v}^a_\gamma$ et $\tilde{u}^{ijkl}$ sont des variables transformées par le groupe adjoint et correspondantes à p^a_γ et ϑ^{ijkl}, sous la forme suivante:

$$(P) \qquad \begin{cases} d\tilde{v}^a_\gamma = p^a_\nu\, \tilde{v}^\nu_\gamma - p^\nu_\gamma\, \tilde{v}^a_\nu \\ d\tilde{u}^{ijkl} = \frac{1}{6}\, I^{ijkl}_{a\varrho\sigma\tau}\, p^a_\gamma\, \tilde{u}^{\gamma\varrho\sigma\tau} \end{cases}$$

$$(\Theta) \qquad \begin{cases} d\tilde{v}^a_\gamma = \frac{2}{5}\,(\vartheta_{\varrho\sigma\tau\gamma}\, \tilde{u}^{\varrho\sigma\tau a} - \frac{1}{8}\,\vartheta_{\varrho\sigma\tau\lambda}\, \tilde{u}^{\varrho\sigma\tau\lambda}\, I^a_\gamma) \\ d\tilde{u}^{ijkl} = -\frac{1}{6}\, I^{ijkl}_{a\varrho\sigma\tau}\, \vartheta^{\gamma\varrho\sigma\tau}\, \tilde{v}^a_\gamma . \end{cases}$$

4. Le groupe G est irréductible. En effet, un espace linéaire invariant étant donné, on y cherche un point (x^{ij}, y_{ij}), dont le nombre de coordonnées différentes de 0 est aussi petit que possible, mais positif. Il est facile de voir que ce nombre doit être 1, car si l'on applique sur un point par exemple la transformation Θ, dont tous les coefficients sont 0 à $\vartheta^{1234} = 1$ près, le résultat sera un point, dont tous les x^{ij} $(ij \neq 1, 2, 3, 4)$ et y_{ij} $(i, j \neq 5, 6, 7, 8)$ disparaissent. Par un raisonnement analogue partant d'un point qui a une seule coordonnée différente de 0, on retrouve tous les autres et par conséquent l'espace entier. Cela démontre l'irréductibilité.

G étant irréductible et dépourvu d'un centre non trivial doit être semi-simple.

Le sous-groupe des P purement diagonaux est abélien et n'est diviseur normal d'aucun sous-groupe plus étendu de G. Donc il est régulier [1]) et il engendre dans le groupe adjoint les formes-racines de G. Les éléments de P étant appelés $\lambda_i = p^i_i$ (non sommé), on tire des équations du groupe adjoint les racines $\lambda_i - \lambda_j$ appartenant à un $\tilde{v}$, dont $\tilde{v}^i_j$ seul est $\neq 0$, et $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l$ appartenant à un $\tilde{u}$, dont $\tilde{u}^{ijkl}$ seul est $\neq 0$. Ce sont justement les formes-racines de E_7 [2]). Donc G représente E_7.

5. Nous allons rechercher de quelle manière se transforment les grandeurs u^{ijkl} et v^γ_a introduits par (u) et (v), du no. 2, si l'on y applique G. Dans ce but nous nous servons de nouveau d'un quadrivecteur auxiliaire a.

$$x^{ijkl}\, a_{ijkl} = \frac{4!}{8}\, a_{\mu\nu\varrho\sigma}\, x^{\mu\nu}\, x^{\varrho\sigma},$$

$$y^{ijkl}\, a_{ijkl} = y_{ijkl}\, a^{ijkl} = \frac{4!}{8}\, a^{\varrho\sigma\mu\nu}\, y_{\mu\nu}\, y_{\varrho\sigma},$$

$$u^{ijkl}\, a_{ijkl} = 3\,(a_{ij\mu\nu}\, x^{ij}\, x^{\mu\nu} + a^{ij\varrho\sigma}\, y_{ij}\, y_{\varrho\sigma}).$$

L'effet que Θ produit dans cette expression est

$$\begin{aligned} d\,(u^{ijkl}\, a_{ijkl}) &= 6\,(a_{ij\mu\nu}\, \vartheta^{ij\varrho\sigma}\, y_{\varrho\sigma}\, x^{\mu\nu} - a^{ij\varrho\sigma}\, \vartheta_{ij\mu\nu}\, x^{\mu\nu}\, y_{\varrho\sigma}) \\ &= 2\,\vartheta^{\nu\varrho\tau\alpha}\, a_{\nu\varrho\tau\gamma}\, (I^{\varrho\sigma}_{\alpha\beta}\, I^{\gamma\beta}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}\, I^{\varrho\sigma}_{\mu\nu}\, I^\gamma_\alpha)\, x^{\mu\nu}\, y_{\varrho\sigma} \end{aligned}$$

d'après 1. 1. C'est égal à

$$\frac{2}{4!}\, \vartheta^{\nu\varrho\tau\alpha}\, I^{ijkl}_{\nu\varrho\tau\gamma}\, a_{ijkl}\, (4 y_{\alpha\beta}\, x^{\gamma\beta} - \tfrac{2}{4}\, x^{\mu\nu}\, y_{\mu\nu}\, I^\gamma_\alpha).$$

---

[1]) Voir par exemple H. FREUDENTHAL, Annals of Math. (2) **42**, 1058–1059 (1941).

[2]) En comparant ce résultat à celui de B. L. VAN DER WAERDEN, Math. Zeitschr. **37**, 446–462 (1935), on doit tenir compte de la condition $\Sigma \lambda_i = 0$.

Donc

$$du^{ijkl} = -\tfrac{1}{8} I^{ijkl}_{\varrho\sigma\tau\gamma}\, \vartheta^{\varrho\sigma\tau\alpha}\, v^{\gamma}_{\alpha}. \tag{5. 1}$$

L'effet de Θ sur v^{γ}_{α} s'obtient par un calcul analogue:

$$\begin{aligned} dv^{\gamma}_{\alpha} &= \vartheta^{\gamma\beta\varrho\sigma}\, y_{\varrho\sigma}\, y_{\beta\alpha} - \vartheta_{\beta\alpha\varrho\sigma}\, x^{\gamma\beta}\, x^{\varrho\sigma} - \tfrac{1}{8}\,(\vartheta^{ij\varrho\sigma}\, y_{\varrho\sigma}\, y_{ji} - \vartheta_{ji\varrho\sigma}\, x^{ij}\, x^{\varrho\sigma})\, I^{\gamma}_{\alpha} \\ &= \tfrac{1}{3}\,(\vartheta^{\gamma\beta\varrho\sigma}\, y_{\varrho\sigma\beta\alpha} - \vartheta_{\beta\alpha\varrho\sigma}\, x^{\gamma\beta\varrho\sigma}) - \tfrac{1}{24}\,(\vartheta^{ij\varrho\sigma}\, y_{\varrho\sigma ji} - \vartheta_{ji\varrho\sigma}\, x^{ij\varrho\sigma})\, I^{\gamma}_{\alpha}. \end{aligned}$$

En vertu de 2. 2 on a

$$\vartheta^{\gamma\beta\varrho\sigma}\, y_{\varrho\sigma\beta\alpha} = -\vartheta_{\varrho\sigma\beta\alpha}\, x^{\gamma\beta\varrho\sigma} - \tfrac{1}{4}\,\vartheta^{ij\varrho\sigma}\, y_{ij\varrho\sigma}\, I^{\gamma}_{\alpha}.$$

Donc

$$\begin{aligned} du^{\gamma}_{\alpha} &= -\tfrac{1}{3}\vartheta_{\varrho\sigma\beta\alpha}(y^{\gamma\beta\varrho\sigma} + x^{\gamma\beta\varrho\sigma}) - \tfrac{1}{12}\vartheta^{ij\varrho\sigma}\, y_{ij\varrho\sigma}\, I^{\gamma}_{\alpha} + \tfrac{1}{24}(\vartheta^{ij\varrho\sigma}\, y_{\varrho\sigma ij} - \vartheta_{ij\varrho\sigma}\, x^{ij\varrho\sigma})\, I^{\gamma}_{\alpha} \\ &= \tfrac{1}{3}\,(\vartheta_{\varrho\sigma\tau\alpha}\, u^{\varrho\sigma\tau\gamma} - \tfrac{1}{8}\,\vartheta_{\varrho\sigma\tau\alpha}\, u^{\varrho\sigma\tau\lambda}\, I^{\gamma}_{\alpha}). \end{aligned} \tag{5. 2}$$

Les formules 5 · 1—2 peuvent être complétées par celles qui décrivent l'effet des P sur les variables u et v. Nous omettrons le calcul qui est assez simple. Nos formules font voir que les variables u et v se comportent comme celles du groupe adjoint: il suffit de remplacer u par $\tilde{u} = 2u$ et v par $\tilde{v} = v$.

Nous ajoutons la formule

$$du_{ijkl} = \tfrac{1}{3}\, I^{\varrho\sigma\tau\gamma}_{ijkl}\, \vartheta_{\varrho\sigma\tau\alpha}\, v^{\alpha}_{\gamma} \tag{5. 3}$$

(effet de Θ) qu'on dérive facilement de 5. 1.

6. Nous posons

$$u^{ijk}\, u_{ijkl} - 24\, v^{\gamma}_{\alpha}\, v^{\alpha}_{\gamma} = 144\, J$$

(voir J') et démontrons que cette expression est invariante par rapport aux Θ, faisant usage de 5. 1—3.

$$\begin{aligned} 144\, dJ &= -\tfrac{1}{3}\, I^{ijkl}_{\varrho\sigma\tau\gamma}\, \vartheta^{\varrho\sigma\tau\alpha}\, v^{\gamma}_{\alpha}\, u_{ijkl} + \tfrac{1}{3}\, u^{ijkl}\, I^{\varrho\sigma\tau\gamma}_{ijkl}\, \vartheta_{\varrho\sigma\tau\alpha}\, v^{\alpha}_{\gamma} \\ &\quad - 24 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{3}\,(\vartheta_{\varrho\sigma\tau\alpha}\, u^{\varrho\sigma\tau\gamma} - \tfrac{1}{8}\,\vartheta_{\varrho\sigma\tau\lambda}\, u^{\varrho\sigma\tau\lambda}\, I^{\gamma}_{\alpha})\, v^{\alpha}_{\gamma} \\ &= -\tfrac{1}{3}\, 4!\, \vartheta^{\varrho\sigma\tau\alpha}\, u_{\varrho\sigma\tau\gamma}\, u^{\gamma}_{\alpha} + \tfrac{1}{3}\, 4!\, \vartheta_{\varrho\sigma\tau\alpha}\, u^{\varrho\sigma\tau\gamma}\, v^{\alpha}_{\gamma} \\ &\quad - 16\, \vartheta_{\varrho\sigma\tau\alpha}\, u^{\varrho\sigma\tau\gamma}\, u^{\alpha}_{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

où le quatrième terme est omis à cause de $v^{\alpha}_{\alpha} = 0$ et le reste disparaît en vertu de 1. 2.

En substituant dans J les définitions de u et v, on trouve

$$\begin{aligned} J &= \tfrac{1}{144} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{8}\,(I^{ijkl}_{pqrs}\, x^{pq}\, x^{rs} + I^{ijkl\mu\nu\varrho\sigma}\, y_{\mu\nu}\, y_{\varrho\sigma}) \cdot \\ &\qquad (I^{\alpha\beta\gamma\delta}_{ijkl}\, y_{\alpha\beta}\, y_{\gamma\delta} + I_{ijklabcd}\, x^{ab}\, x^{cd}) - \tfrac{1}{144} \cdot 24\, \chi\,(V^2) \\ &= \frac{4!}{64 \cdot 144}\,(2 I^{\alpha\beta\gamma\delta}_{pqrs}\, x^{pq}\, x^{rs}\, y_{\alpha\beta}\, y_{\gamma\delta} + I_{pqrsabcd}\, x^{pq}\, x^{rs}\, x^{ab}\, x^{cd} + \\ &\qquad + I^{\mu\nu\varrho\sigma abcd}\, y_{\mu\nu}\, y_{\varrho\sigma}\, y_{ab}\, y_{cd}) - \tfrac{1}{6}\,\chi\,(V^2). \\ &= \frac{1}{64 \cdot 6} \cdot 16 \cdot 4!\,(\Delta\,(X) + \Delta\,(Y)) + \tfrac{1}{192}\, I^{\alpha\beta\gamma\delta}_{pqrs}\, x^{pq}\, x^{rs}\, y_{\alpha\beta}\, y_{\gamma\delta} + \\ &\qquad - \tfrac{1}{6}\,(\chi\,(XYXY) - \tfrac{1}{8}\,(\chi\,(XY))^2). \end{aligned}$$

Pour parvenir au résultat désiré

$$J = \Delta(X) + \Delta(Y) - \tfrac{1}{4}\chi(XYXY) + \tfrac{1}{16}(\chi(XY))^2,$$

il faut montrer que

$$I^{\alpha\beta\gamma\delta}_{pqrs}\, x^{pq}\, x^{rs}\, y_{\alpha\beta}\, y_{\gamma\delta} = -16\,\chi(XYXY) + 8\,(\chi(XY))^2.$$

Le second membre peut être écrit sous la forme

$$-16\, x^{\alpha\beta}\, y_{\beta\gamma}\, x^{\gamma\delta}\, y_{\delta\alpha} + 8\, x^{\alpha\beta}\, y_{\beta\alpha}\, x^{\gamma\delta}\, y_{\delta\gamma}.$$

En ajoutant l'expression

$$-16\, x^{\alpha\beta}\, y_{\gamma\alpha}\, x^{\gamma\delta}\, y_{\delta\beta} + 8\, x^{\alpha\beta}\, y_{\beta\alpha}\, x^{\gamma\delta}\, y_{\delta\gamma}$$

qui provient de la permutation (inessentielle) des indices α et β, on trouve

$$\begin{aligned} &16\, x^{\alpha\beta}\, x^{\gamma\delta}\,(y_{\alpha\beta}\, y_{\gamma\delta} + y_{\alpha\gamma}\, y_{\delta\beta} + y_{\alpha\delta}\, y_{\beta\gamma}) \\ &= \tfrac{1}{8}\cdot 16\, x^{\alpha\beta}\, x_{\gamma\delta}\, I^{rstu}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, y_{rs}\, y_{tu}, \end{aligned}$$

ce qui est en effet le double du premier membre de l'équation qu'il fallait démontrer.

L'invariance de J par rapport aux transformations Θ a apparu au début de ce numéro; celle par rapport aux P est évidente.

7. Nous cherchons le plus grand groupe connexe symplectique $\tilde{G}$ qui laisse invariante la forme J. $\tilde{G}$ est irréductible et dépourvu d'un centre non trivial, donc semi-simple. Chaque transformation symplectique R à variables conjuguées x^{ij}, y_{ij} a la forme

$$(R) \qquad \begin{cases} dx^{ij} = p^{ij}_{kl}\, x^{kl} + \vartheta^{ijkl}\, y_{kl}, \\ dy_{ij} = \eta_{ijkl}\, x^{kl} - p^{kl}_{ij}\, y_{kl}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} p^{ij}_{kl} &= -\,p^{ji}_{kl} = -\,p^{ij}_{lk}, \\ \vartheta^{ijkl} &= -\,\vartheta^{jikl} = \vartheta^{klij}, \\ \eta_{ijkl} &= -\,\eta_{jikl} = \eta_{klij}. \end{aligned}$$

(On ne sait pas encore si les ϑ et η sont antisymétriques dans *tous* leurs indices.)

Nos R doivent annuler J. Mais les termes du 4ème degré en X qui apparaissent après la transformation infinitésimale R, naissent de $\Delta(X)$ par l'application de

$$(R_0) \qquad dx^{ij} = p^{ij}_{kl}\, x^{bl}$$

seul. Cela veut dire que $\Delta(X)$ est invariant par rapport à R_0. On démontre sans peine que les seules transformations infinitésimales qui ont cette propriété, sont celles que nous avons appelées P. Il reste à envisager l'autre partie de R, que nous appelons R_1. Si l'on forme le commutateur d'un P diagonal et de R_1, les ϑ^{ijkl} seront multipliés par $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l$. On en conclut que le groupe des P diagonaux reste maximal abélien dans $\tilde{G}$.

Donc $\tilde{G}$ est toujours du rang 7. Mais le seul groupe semi-simple du rang 7, dont le nombre de paramètres surpasse celui de E_7, est C_7. Cependant le système des formes-racines de C_7 diffère tellement de celui de E_7 que l'un ne peut pas être un sous-groupe de l'autre. Donc G est identique à $\tilde{G}$ et par conséquent le plus grand groupe symplectique laissant invariant J.

8. Démonstration [1]) de la formule 1. 1:

$$a^{\varrho\sigma ij}\, b_{\varrho\sigma kl} - b^{\varrho\sigma ij}\, a_{\varrho\sigma kl} = \tfrac{1}{3}\, a^{\varrho\sigma\tau\alpha}\, b_{\varrho\sigma\tau\gamma}\, (I^{ij}_{\alpha\beta}\, I^{\gamma\beta}_{kl} - \tfrac{1}{4}\, I^{ij}_{kl}\, I^{\gamma}_{\alpha}).$$

Il suffit d'envisager les cas:

$$1°.\quad i = 1,\ j = 2,\ k = 3,\ l = 4.$$
$$2°,\quad i = 1,\ j = 2,\ k = 1,\ l = 3.$$
$$3°.\quad i = 1,\ j = 2,\ k = 1,\ l = 2.$$

Ad 1^m: Les termes du premier membre peuvent être ordonnés comme suit:

$$(a^{5612}\, b_{5634} - b^{7812}\, a_{7834}) + (a^{5712}\, b_{5734} - b^{6812}\, a_{6834}) + \text{etc.}$$

Donc le premier membre est 0. Il est évident que le deuxième membre s'annule aussi.

Ad 2^m: Le dernier terme du deuxième membre disparaît toujours. Pour que le premier terme du deuxième membre ne disparaisse pas, il faut poser $\beta = 1$, $\alpha = 2$, $\gamma = 3$. Le résultat en est

$$\tfrac{1}{3}\, a^{\varrho\sigma\tau 2}\, b_{\varrho\sigma\tau 3}.$$

La partie $1 \in (\varrho, \sigma, \tau)$ de cette expression est égale à

$$a^{\varrho\sigma 12}\, b_{\varrho\sigma 13},$$

donc égale au premier terme du premier membre. Quant à la partie $1 \overline{\in} (\varrho, \sigma, \tau)$, nous envisageons un terme typique, par exemple

$$\tfrac{1}{3}\, a^{4782}\, b_{4783},$$

qui y figure 3! fois et qui est égal à

$$-\tfrac{1}{3}\, a_{5613}\, b^{5612}.$$

Le premier membre fait voir

$$-2\, b^{5612}\, a_{5613},$$

ce qui concorde avec le résultat précédent.

Ad 3^m: Dans les deux membres il n'y a que des termes

$$a^{\varkappa\lambda\mu\nu}\, b_{\varkappa\lambda\mu\nu}.$$

On distingue trois types:

$$\text{a)}\quad \varkappa = 3,\ \lambda = 4,\ \mu = 1,\ \nu = 2.$$
$$\text{b)}\quad \varkappa = 1,\ \lambda = 3,\ \mu = 4,\ \nu = 5.$$
$$\text{c)}\quad \varkappa = 5,\ \lambda = 6,\ \mu = 7,\ \nu = 8.$$

[1]) Des démonstrations plus élégantes résulteraient du calcul des déterminants ou du calcul symbolique de la théorie des invariants.

Les coefficients de ces produits dans les deux membres sont

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad 2 = \tfrac{1}{3}((1-\tfrac{1}{4}) + (1-\tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4})3!\,, \\ &\text{b)} \quad 0 = \tfrac{1}{3}((1-\tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4})3!\,, \\ &\text{c)} \quad -2 = \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4})3!\,, \end{aligned}$$

où les quatre termes mis en évidence proviennent des choix respectifs $\alpha = \gamma = 1, 2, 3, 4$.

L'accord entre les deux membres de 1. 1. est alors complet.

9. Nous faisons dans 1. 1 la sommation par rapport à $i = k$:

$$a^{\varrho\sigma\tau j} b_{\varrho\sigma\tau l} - b^{\varrho\sigma\tau j} a_{\varrho\sigma\tau l} = \tfrac{1}{3} a^{\varrho\sigma\tau\alpha} b_{\varrho\sigma\tau\gamma} (I^{\nu j}_{\alpha\beta} I^{\gamma\beta}_{\nu l} - \tfrac{7}{4} I^{j}_{l} I^{\gamma}_{\alpha}).$$

Les seuls termes différents de 0, où $\alpha \neq \gamma$, sont ceux où $\alpha = j$, $\gamma = l$. Ils contribuent

$$6 \cdot \tfrac{1}{3} a^{\varrho\sigma\tau j} b_{\varrho\sigma\tau l}.$$

Par soustraction de cette expression, on trouve

$$- a^{\varrho\sigma\tau j} b_{\varrho\sigma\tau l} - b^{\varrho\sigma\tau j} a_{\varrho\sigma\tau l} = \tfrac{1}{3} a^{\varrho\sigma\tau\alpha} b_{\varrho\sigma\tau\gamma} (I^{\nu j}_{\alpha\beta} I^{\gamma\beta}_{\nu l} - 6\, I^{j}_{\alpha} I^{\gamma}_{l} - \tfrac{7}{4} I^{j}_{l} I^{\gamma}_{\alpha}).$$

Le facteur entre les parenthèses s'annule pour $j \neq l$ et devient $-\frac{3}{4}$ pour $j = l$, ce qui démontre 1. 2.

Sur des invariants caractéristiques des groupes semi-simples
[1953c]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56 (1953), 90–94
[Zbl 0052.02403; MR 0054611]

(Communicated at the meeting of March 28, 1953)

1. Le produit intérieur défini dans un groupe de Lie G au moyen de la forme quadratique de Cartan est un invariant du groupe adjoint:

$$([A, B], C) = (A, [B, C]).$$

Par conséquent la forme cubique

$$(A, B, C) = ([A, B], C)$$

est antisymétrique dans toutes ses variables. Elle est aussi invariante par rapport aux transformations du groupe adjoint:

$$\begin{aligned} &([D, A], B, C) + (A, [D, B], C) + (A, B, [D, C]) \\ &= ([D, A], [B, C]) + ([D, B], [C, A]) + ([D, C], [A, B]) \\ &= (D, [A, [B, C]]) + (D, [B, [C, A]]) + (D, [C, [A, B]]) = 0. \end{aligned}$$

2. Théorème I: Si G est semi-simple et dépourvu de facteurs directs de rang 1 (c'est-à-dire localement isomorphes au groupe linéaire spécial de deux variables), le plus grand groupe linéaire connexe conservant la forme gauche cubique (A, B, C) est le groupe adjoint de G.

Si le rang de G est 1, la forme cubique équivaut au déterminant, qui est invariant par rapport à toutes les transformations spéciales linéaires à trois dimensions; donc dans ce cas le théorème cesse d'être vrai.

La démonstration est contenue dans les numéros 3—8.

3. Soit $\mathfrak{G}$ le groupe infinitésimal de G. Nous choisissons un sous-groupe régulier maximal abélien $\mathfrak{H}$ et, en faisant usage des notations bien connues[1]), nous écrivons les lois de $\mathfrak{G}$ sous la forme

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{H}, \mathfrak{H}] = 0 \ , \ [H, E_\alpha] = \alpha E_\alpha \ , \ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha \ , \\ &[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha + \beta \neq 0), \\ &(H_\alpha, H_\beta) = -(\alpha, \beta) \ , \ (H, E_\alpha) = 0, \qquad (E_\alpha, E_{-\alpha}) = -1, \\ &N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta} \ . \end{aligned}$$

---

[1]) H. Weyl, Math. Zeitschr. 24, 366, 374 (1926); B. L. v. d. Waerden, Math. Zeitschr. 37, 446–448 (1933).

On en déduit pour la forme cubique:

$$(H_\alpha, E_\beta, E_{-\beta}) = -(\alpha, \beta)$$
$$(E_\alpha, E_\beta, E_\gamma) = -N_{\alpha,\beta} \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 0),$$

les autres combinaisons étant nulles.

Comme il n'y a pas de facteurs de rang 1, on peut trouver pour chaque forme-racine α une forme-racine indépendante β, tel que $(\alpha, \beta) \neq 0$.

4. Soit f une transformation linéaire qui laisse invariante la forme cubique. Il suffit de démontrer que f fait partie du groupe adjoint, pour des f d'un voisinage (aussi petit qu'on veut) de l'identité.

Les éléments généraux de $\mathfrak{G}$ remplissant un ensemble dense ouvert, on peut choisir H_0 tel que H_0 et $f(H_0)$ sont généraux. $\mathfrak{H}$ sera supposé d'être le groupe maximal abélien contenant H_0.

La relation

$$(A, B, C) = 0 \text{ pour des } A, B \text{ fixes et tous les } C$$

équivaut à

$$[A, B] = 0$$

parce que le produit intérieur est non-dégénéré. Donc la commutativité est une relation invariante par rapport à f et par conséquent $f(\mathfrak{H})$ est aussi un sous-groupe régulier maximal abélien. Si f ne diffère pas beaucoup de l'identité, il y a une transformation g du groupe adjoint, qui transforme $\mathfrak{H}$ en $f(\mathfrak{H})$. Alors $g^{-1}f$ conserve la forme cubique et le groupe $\mathfrak{H}$. Il est permis de supposer que f possède déjà cette propriété.

5. Le plan engendré par E_α et $E_{-\alpha}$ est appelé $\mathfrak{E}_\alpha$. Les éléments A de $\bigcup_\alpha (\mathfrak{H} + \mathfrak{E}_\alpha)$ sont caractérisés par la propriété suivante:

Les $H \in \mathfrak{H}$ qui satisfont à $[H, A] = 0$, remplissent un espace à $l - 1$ ou l dimensions, l étant le rang de $\mathfrak{G}$.

Ce fait implique l'invariance de $\bigcup_\alpha (\mathfrak{H} + \mathfrak{E}_\alpha)$ par rapport à f et par conséquent celle de chaque $\mathfrak{H} + \mathfrak{E}_\alpha$ individuel, si f se trouve dans un voisinage assez petit de l'identité. Donc

$$f(H_\lambda) = H_{\lambda'}. \tag{1}$$

$$f(E_\alpha) = p_\alpha E_\alpha + q_\alpha E_{-\alpha} + H_{\tilde{\alpha}}, \tag{2}$$

où λ, λ', $\tilde{\alpha}$ sont des combinaisons linéaires de formes-racines.

6. Il est permis de supposer que

$$|p_\alpha| > \tfrac{2}{3}, \ |q_\alpha| < \tfrac{2}{3}, \tag{3}$$

pour tous les α, donc

$$p_\alpha p_{-\alpha} - q_\alpha q_{-\alpha} \neq 0. \tag{4}$$

En appliquant la transformation (1) — (2) à

$$(H_\lambda, E_\alpha, E_{-\alpha}) = -(\lambda, \alpha)$$

on trouve

$$-(p_\alpha p_{-\alpha} - q_\alpha q_{-\alpha})\,(\lambda', \alpha) = -(\lambda, \alpha), \tag{5}$$

donc, à cause de (4):

$$(\lambda, \alpha) = 0 \text{ implique } (\lambda', \alpha) = 0 \text{ pour tous les } \alpha.$$

Par conséquent

$$\lambda' = \varrho\lambda,$$

où ϱ est un constant dont on peut supposer que

$$|1 - \varrho| < \tfrac{1}{3}. \tag{6}$$

(1) peut être remplacé par

$$f(H) = \varrho H \tag{1'}$$

et (5) par

$$(p_\alpha p_{-\alpha} - q_\alpha q_{-\alpha})\varrho = 1. \tag{5'}$$

7. Le même raisonnement appliqué à

$$(E_\alpha, E_\beta, E_{-\beta}) = 0$$

conduit à

$$(p_\beta p_{-\beta} - q_\beta q_{-\beta})\,(\tilde{\alpha}, \beta) = 0,$$

si α et β sont des racines indépendantes, donc (voir (4))

$$(\tilde{\alpha}, \beta) = 0. \tag{7}$$

α étant donné, on peut trouver une forme-racine γ, tel que $\alpha + \gamma$ est une forme-racine (voir la fin de 3). On a

$$(\tilde{\alpha}, \gamma) = 0, \quad (\tilde{\alpha}, \alpha + \gamma) = 0,$$

donc

$$(\tilde{\alpha}, \alpha) = 0.$$

Par conséquent (7) vaut pour chaque forme-racine β. Puisque $\tilde{\alpha}$ disparaît, (2) peut être simplifié:

$$f(E_\alpha) = p_\alpha E_\alpha + q_\alpha E_{-\alpha}. \tag{2'}$$

De plus, si $\mathfrak{G}$ est composé, chaque facteur individuel est invariant par rapport à f, donc $\mathfrak{G}$ peut être supposé simple et d'un rang $l > 1$.

8. Les mêmes considérations appliquées à

$$(E_\alpha, E_\beta, E_\gamma) = -N_{\alpha,\beta}, \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 0)$$
$$(E_\alpha, E_\beta, E_{-\gamma}) = 0$$

conduisent à

$$p_\alpha p_\beta p_\gamma + q_\alpha q_\beta q_\gamma = 1, \tag{8}$$

$$p_\alpha p_\beta q_{-\gamma} + q_\alpha q_\beta p_{-\gamma} = 0. \tag{9}$$

Donc, tenant compte de (5'):

$$p_\alpha p_\beta = \varrho p_{-\gamma}, \quad q_\alpha q_\beta = -\varrho q_{-\gamma}. \tag{10}$$

Par conséquent, si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et si l'un des q_α, q_β, q_γ disparaît, tous les trois disparaissent. $\mathfrak{G}$ étant simple, on peut relier deux formes-racines quelconques par une chaîne de formes-racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, tel que pour tous les i, $\alpha_i + \alpha_{i+1}$ est une forme-racine. Donc $q_\alpha = 0$ pour un α spécial implique $q_\alpha = 0$ pour tous les α.

Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a

$$q_\alpha q_\beta = -\varrho q_{-\gamma}, \quad q_\alpha q_\gamma = -\varrho q_{-\beta},$$

donc

$$\varrho q_\alpha q_\beta q_{-\beta} = \varrho q_\alpha q_\gamma q_{-\gamma}$$

et si $q_\alpha \neq 0$:

$$q_\beta q_{-\beta} = q_\gamma q_{-\gamma}, \tag{11}$$

donc $q_\alpha q_{-\alpha}$ est indépendant de α.

En multipliant $q_\alpha q_\beta = -\varrho q_{-\gamma}$ et $q_{-\alpha} q_{-\beta} = -\varrho q_\gamma$, et en tenant compte de (11), on trouve

$$q_\alpha q_{-\alpha} = \varrho^2.$$

A cause de (3) et (6) on sait que

$$|q_\alpha q_{-\alpha}| < \tfrac{4}{9}, \quad |\varrho^2| > \tfrac{4}{9},$$

ce qui est contradictoire. Donc tous les q_α disparaissent et f a la forme

$$f(H) = \varrho H, \quad f(E_\alpha) = p_\alpha E_\alpha,$$

où, d'après (7) et (8),

$$p_\alpha p_{-\alpha} = \tfrac{1}{\varrho}, \quad p_\alpha p_\beta p_\gamma = 1 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 0).$$

Mais alors

$$\varrho^3 = 1,$$

donc

$$\varrho = 1.$$

Cela veut dire que f est un automorphisme (à savoir l'automorphisme trivial).

9. La forme binaire, biquadratique et symétrique

$$([A, B], [A, B]) \tag{12}$$

est un invariant du groupe adjoint:

$$([[C, A], B], [A, B]) + ([A, [C, B]], [A, B]) = ([C, [A, B]], [A, B]) = 0.$$

Théorème II: Les conditions du théorème I étant remplies, le plus grand groupe linéaire connexe conservant la forme (12) est le groupe adjoint de G.

La démonstration est contenue au numéro suivant:

10. Si f conserve (12), il conserve aussi

$$([A, B], [A, C]) = -([A, [A, B]], C).$$

Donc

$$[A, [A, B]] = 0$$

est une relation invariante.

Soient H_0 et $f(H_0)$ généraux et $\mathfrak{H}$ le sous-groupe maximal abélien contenant H_0. $\mathfrak{H}$ est caractérisé comme l'ensemble des solutions A de

$$[H_0, [H_0, A]] = 0.$$

Donc $f(\mathfrak{H})$ est le sous-groupe maximal abélien contenant $f(H_0)$. $\mathfrak{H}$ et $f(\mathfrak{H})$ sont réguliers, et l'on peut supposer $f(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$.

$\bigcup_\alpha (\mathfrak{H} + \mathfrak{E}_\alpha)$ est l'ensemble des A tels que

$$[H, [H, A]] = 0, \quad H \in \mathfrak{H}$$

ait au moins $l - 1$ solutions H indépendantes. Donc chaque $\mathfrak{H} + \mathfrak{E}_\alpha$ est invariant par rapport à f.

$$f(H_\lambda) = H_\lambda, \quad ,$$
$$f(E_\alpha) = p_\alpha E_\alpha + q_\alpha E_{-\alpha} + H_{\tilde{\alpha}}.$$

Le principe d'invariance appliqué à

$$([H_\lambda, E_\alpha], [H_\lambda, E_{-\alpha}]) = (\lambda, \alpha)^2$$

donne

$$(p_\alpha p_{-\alpha} + q_\alpha q_{-\alpha})(\lambda', \alpha)^2 = (\lambda, \alpha)^2$$

et, en répétant le raisonnement de 6:

$$f(H) = \varrho H,$$
$$(p_\alpha p_{-\alpha} + q_\alpha q_{-\alpha})\varrho^2 = 1.$$
$$([H, E_\alpha], [H, E_\alpha]) = 0$$

conduit à

$$2\varrho\alpha^2 p_\alpha q_\alpha = 0,$$
$$q_\alpha = 0,$$

donc

$$p_\alpha p_{-\alpha} = \tfrac{1}{\varrho^2}.$$

De l'invariance de la relation

$$[E_\alpha, [E_\alpha, E_\gamma]] = 0,$$

il résulte que

$$[f(E_\alpha), [f(E_\alpha), f(E_\gamma)]] = 0.$$

En calculant le coefficient de E_γ, on trouve

$$(\tilde{\alpha}, \gamma)^2 = 0,$$

ce qui implique de nouveau

$$\tilde{\alpha} = 0.$$

On a donc

$$f(H) = \varrho H, \quad f(E_\alpha) = p_\alpha E_\alpha, \quad p_\alpha p_{-\alpha} = \tfrac{1}{\varrho^2}.$$

En substituant ces formules dans la transformée de

$$([E_\alpha, E_{-\alpha}], [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = -(\alpha, \alpha),$$

on voit que

$$(p_\alpha p_{-\alpha})^2 = 1,$$

donc

$$p_\alpha p_{-\alpha} = \varrho = 1.$$

$$([H + E_\alpha, E_\beta + E_\gamma], [H + E_\alpha, E_\beta + E_\gamma]) = (\beta - \gamma)N_{\beta,\gamma} \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 0)$$

conduit à

$$p_\alpha p_\beta p_\gamma = 1,$$

donc f est un automorphisme.

Sur le groupe exceptionnel E_8 [1953d]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56 (1953), 95–98
[Zbl 0051.25905; MR 0054610]

(Communicated at the meeting of March 28, 1953)

Nous nous proposons de donner une représentation du groupe exceptionnel E_8 plus symétrique que celle de E. CARTAN.

1. Les tenseurs qui apparaîtront dans ce qui suit, seront des grandeurs de l'espace affin à 9 dimensions et antisymétriques dans leurs indices covariants et dans leurs indices contravariants. Nous adoptons la convention usuelle d'omettre le signe de sommation. Parfois nous remplacerons des indices par des points qui doivent être considérés comme des indices identifiés dans l'ordre où ils apparaissent. Par exemple

$$ {}^1/_2 I^{\bullet\bullet\bullet}_{ijk} p^{\bullet}_{\bullet} x_{\bullet\bullet\bullet} \text{ veut dire } {}^1/_2 I^{\alpha\beta\gamma}_{ijk} p^{\delta}_{\alpha} x_{\beta\gamma\delta} . $$

2. $$ I^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} = \text{signe de la permutation } \binom{i_1 \ldots i_p}{j_1 \ldots j_p}, $$
$$ = 0, \text{ si les ensembles } (i_1 \ldots i_p) \text{ et } (j_1 \ldots j_p) $$
sont différents.

Si les indices $i_1 \ldots i_p$ (ou $j_1 \ldots j_p$) du symbole I sont les nombres $1 \ldots 9$ dans l'ordre naturel, nous les omettrons.

3. Nous introduisons trois espèces de variables:

$$ \begin{aligned} &X : (x^i_j) \quad \text{où} \quad x^i_i = 0, \\ &X_* : (x_{ijk}), \\ &X^* : (x^{ijk}). \end{aligned} $$

Il sera entendu que Y a les coordonnées y^i_j, que A_* a les coordonnées a_{ijk} etc.

Nous définissons des commutateurs de ces variables:

$$ \begin{aligned} &[X, Y] = Z : z^i_j = x^{\bullet}_j y^i_{\bullet} - y^{\bullet}_j x^i_{\bullet} . \\ &[X, Y_*] = Z_* : z_{ijk} = {}^1/_2 I^{\bullet\bullet\bullet}_{ijk} x^{\bullet}_{\bullet} y_{\bullet\bullet\bullet} . \\ &[X, Y^*] = Z^* : z^{ijk} = -{}^1/_2 I^{ijk}_{\bullet\bullet\bullet} x^{\bullet}_{\bullet} y^{\bullet\bullet\bullet} . \\ &[X^*, Y_*] = Z : z^i_j = {}^1/_2 (x^{i\bullet\bullet} y_{j\bullet\bullet} - {}^1/_9 x^{\bullet\bullet\bullet} y_{\bullet\bullet\bullet} I^i_j) . \\ &[X^*, Y^*] = Z_* : z_{ijk} = {}^1/_{36} I_{ijk\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet} x^{\bullet\bullet\bullet} y^{\bullet\bullet\bullet} . \\ &[X_*, Y_*] = Z^* : z^{ijk} = {}^1/_{36} I^{ijk\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet} x_{\bullet\bullet\bullet} y_{\bullet\bullet\bullet} . \end{aligned} $$

4. Pour démontrer que ces relations définissent un groupe infinitésimal Γ, il faut vérifier les égalités de JACOBI.

$$[X[Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

est évident.

On remarque que

$$dZ_* = [X, Z_*],$$
$$dZ^* = [X, Z^*]$$

définissent une représentation linéaire du groupe linéaire spécial des X dans l'espace des Z_* (ou Z^*). Par conséquent on a

$$[[X, Y], Z_*] = [X, [Y, Z_*]] - [Y, [X, Z_*]],$$
$$[[X, Y], Z^*] = [X, [Y, Z^*]] - [Y, [X, Z^*]].$$

De plus on sait que la contraction d'indices est une opération invariante par rapport au groupe linéaire. Donc

$$[X, [Y^*, Z_*]] = [[X, Y^*], Z_*] + [Y^*, [X, Z_*]].$$

Enfin la montée d'indices est une opération invariante par rapport au groupe linéaire spécial, donc

$$[X, [Y^*, Z^*]] = [[X, Y^*], Z^*] + [Y^*, [X, Z^*]],$$
$$[X, [Y_*, Z_*]] = [[X, Y_*], Z_*] + [Y_*, [X, Z_*]].$$

Les quatre égalités qui restent, seront démontrées au numéro 6 — 7.

5. Nous définissons les produits intérieurs

$$(X, Y) = x^i_j y^j_i \ ,$$
$$(X^*, Y_*) = {}^1/_6\, x^{ijk} y_{ijk} \ .$$

On voit que

(1) $(X^*, [Y^*, Z^*])$ est antisymétrique

et que

(2) $(X_*, [Y_*, Z_*])$ est antisymétrique.

De l'invariance du produit intérieur par rapport au groupe linéaire, il résulte que

(3) $([X, Y^*], Z_*) + (Y^*, [X, Z_*]) = 0.$

(4) $([X, Y^*], Z_*) + (X, [Y^*, Z_*]) = 0$

se vérifie en calculant le premier terme

$$-{}^1/_{12}\, I^{ijk}_{\bullet\bullet\bullet} x^{\bullet}_{\bullet} y^{\bullet\bullet\bullet} z_{ijk} = -{}^1/_2\, z_{\bullet\bullet\bullet} x^{\bullet}_{\bullet} y^{\bullet\bullet\bullet}$$

et le second

$${}^1/_2\, x^i_j (y^{j\bullet\bullet} z_{i\bullet\bullet} - y^{\bullet\bullet\bullet} z_{\bullet\bullet\bullet} I^i_j) = {}^1/_2\, z_{\bullet\bullet\bullet} x^{\bullet}_{\bullet} y^{\bullet\bullet\bullet} \ .$$

Enfin on a la relation

(5) $([A^*, B^*], [C^*, D^*]) = ([A^*, D^*], [B^*, C^*]) - ([A^*, C^*], [B^*, D^*])$

qu'on vérifie comme il suit: Le premier membre est égal à

$$^1/_6 \cdot ^1/_{36} I_{ijk\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet} a^{\bullet\bullet\bullet} b^{\bullet\bullet\bullet} {}^1/_{36} I^{ijk\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet} c_{\bullet\bullet\bullet} d_{\bullet\bullet\bullet} = {}^1/_{6^4} I^{pqrstu}_{\alpha\beta\gamma\mu\nu\varrho} a^{\alpha\beta\gamma} b^{\mu\nu\varrho} c_{pqr} d_{stu} \ ,$$

le second est égal à

$$^1/_4 (a^{i\bullet\bullet} d_{j\bullet\bullet} - a^{\bullet\bullet\bullet} d_{\bullet\bullet\bullet} I^i_j)(b^{j\bullet\bullet} c_{i\bullet\bullet} - b^{\bullet\bullet\bullet} c_{\bullet\bullet\bullet} I^j_i)$$
$$- {}^1/_4 (a^{i\bullet\bullet} c_{j\bullet\bullet} - a^{\bullet\bullet\bullet} c_{\bullet\bullet\bullet} I^i_j)(b^{j\bullet\bullet} d_{i\bullet\bullet} - b^{\bullet\bullet\bullet} d_{\bullet\bullet\bullet} I^j_i) \ .$$

L'égalité s'obtient en comparant les termes correspondants. Par exemple le coefficient de

$a^{123} b^{456} c_{123} d_{456}$ au premier membre est 1,
au deuxième membre $- {}^1/_4 (- {}^1/_9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 - {}^1/_9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot + {}^1/_{81} \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6)$.

Pour $a^{123} b^{456} c_{126} d_{453}$ ces coefficients sont -1 et $- {}^1/_4 \cdot 4$,
pour $a^{123} b^{156} c_{123} d_{156}$, ils sont 0 et $- {}^1/_4 (4 - {}^1/_9 \cdot 6 \cdot 6 - {}^1/_9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot + {}^1/_{81} \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6)$,
etc.

6. Nous appliquons (5)

$$([X^*, Y^*], [Z_*, A_*]) = ([X^*, A_*], [Y^*, Z_*]) - ([X^*, Z_*], [Y^*, A_*])$$

et transformons le premier membre au moyen de (1) et le deuxième au moyen de (4):

$$(A_*, [[X^*, Y^*], Z_*]) = -([[[Y^*, Z_*], X^*], A_*) + ([[X^*, Z_*], Y^*], A_*).$$

C'est une identité en A_*, donc

$$[[X^*, Y^*], Z_*] + [[Y^*, Z_*], X^*] + [[Z_* X^*], Y^*]$$

est un multiple de la matrice-unité, mais puisque sa trace disparaît, c'est zéro.

D'une manière analogue:

$$([A^*, X^*], [Y_*, Z_*]) = ([A^*, Z_*], [X^*, Y_*]) - ([A^*, Y_*], [X^*, Z_*]),$$
$$([X^*, [Y_*, Z_*]], A^*) = -([[X^*, Y_*], A^*], Z_*) + ([[X^*, Z_*], A^*], Y_*)$$
$$= (A^*, [[X^*, Y_*], Z_*]) - (A^*, [[X^*, Z_*], Y_*]),$$
$$[X^*, [Y_* Z_*]] + [Y_*, [Z_*, X^*]] + [Z_*, [X^*, Y_*]] = 0.$$

7. La forme

$$(X^*, [Y^*, Z^*])$$

est invariante par rapport au groupe spécial linéaire, donc

$$([A, X^*], [Y^*, Z^*]) + (X^*, [[AY^*], Z^*]) + (X^*, [Y^*, [A, Z^*]]) = 0.$$

En y appliquant (1), on trouve

$$([A, Y^*], [Y^*, Z^*]) + ([AY^*], [Z^*X^*]) + ([A, Z^*], [X^*, Y^*]) = 0$$

et enfin au moyen de (4)

$$-(A, [X^*, [Y^*, Z^*]) - (A, [Y^*, [Z^*, X^*]]) - (A, [Z^*, [X^*, Y^*]]) = 0.$$

Donc

$$[X^*, [Y^*, Z^*]] + [Y^*, [Z^*, X^*]] + [Z^*, [X^*, Y^*]] = 0$$

et d'une manière analogue:

$$[X_*, [Y_*, Z_*]] + [Y_*, [Z_*, X_*]] + [Z_*, [X_*, Y_*]] = 0.$$

8. Les transformations du groupe adjoint sont:

$$\begin{aligned} A &: dX = [A, X],\ dX^* = [A, X^*],\ dX_* = [A, X_*], \\ A^* &: dX = [A^*, X_*],\ dX^* = [A^*, X],\ dX_* = [A^*, X^*], \\ A_* &: dX = [A_*, X^*],\ dX^* = [A_*, X_*],\ dX_* = [A_*, X]. \end{aligned}$$

La forme

$$(X, X) - 2(X^*, X_*)$$

est invariante par rapport aux transformations du groupe adjoint. C'est évident pour les A; quant aux A^*, on a

$$2([A^*, X_*], X) - 2([A^*, X], X_*) - 2(X^*, [A^*, X^*]) = 0$$

à cause de (1) et (4), et quant aux A_*, on a

$$2([A_*, X^*], X) - 2([A_*, X_*], X_*) - 2(X^*, [A_*, X]) = 0$$

à cause de (2) et (4).

9. Cette forme quadratique étant non-dégénérée, le groupe Γ, qui est dépourvu d'un centre non-trivial, doit être semi-simple. On voit aisément que les X diagonaux forment un sous-groupe régulier maximal abélien. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_9$ les éléments dans la diagonale ($\lambda_1 + \ldots + \lambda_9 = 0$), et soient E^{ijk} resp. E_{ijk} des X^* resp. X_*, dont toutes les coordonnées s'annulent à x^{ijk} resp. x_{ijk} près. Alors E_{ijk} et E^{ijk} appartiennent aux formes-racines $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ et $-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$. Jointes aux formes-racines $\lambda_i - \lambda_j$ du groupe spécial linéaire, elles forment le système de racines E_8. Donc Γ est une représentation de E_8.

10. Γ peut être caractérisé au moyen de l'un des invariants que nous avons traités dans la note précédente [1]). Nous renonçons à en donner la forme explicite.

[1]) Sur des invariants caractéristiques des groupes semi-simples. Ces Proceedings, p. 90.

Zur ebenen Oktavengeometrie [1953e]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56 (1953), 195–200
[Zbl 0053.01503; MR 0056306]

(Communicated at the meeting of April 25, 1953)

Wir leiten im Folgenden einige unserer früheren [1]) oktavengeometrischen Ergebnisse in vereinfachter Darstellung ab. Die Kenntnis unserer früheren Arbeit wird *nicht* vorausgesetzt.

1. Projektive Räume werden gebräuchlicherweise analytisch beschrieben, indem man in einem linearen Raum die Geraden durch den Ursprung als projektive Punkte ansieht und allgemein die linearen Unterräume als projektive Teilräume.

Man kann aber auch von einem linearen Raum R_{n+1} mit innerem Produkt ausgehen und die linearen Unterräume E beschreiben mittels der zugehörigen orthogonalen Projektionsoperatoren P_E (= orthogonale Projektion von R_{n+1} auf E), d.h. mittels der idempotenten symmetrischen linearen Operatoren (Eigenwerte 0 und 1). $E_1 \subset E_2$ wird dann wiedergegeben durch $P_{E_1} P_{E_2} = P_{E_1}$. Die Punkte und Teilräume des zugehörigen n-dimensionalen projektiven Raumes werden also durch die nicht verschwindenden idempotenten symmetrischen linearen Operatoren beschrieben mit $PQ = P$ als Inklusionsrelation $P \subset Q$. Die projektiven Transformationen werden beschrieben durch $P \to APA'$ mit $|\det A| = 1$.

Die symmetrischen linearen Operatoren bilden keinen Ring. Wohl wird das der Fall sein, wenn man das Produkt symmetrisch definiert:

$$P \circ Q = \tfrac{1}{2}(PQ + QP)$$

Aber dieser Ring ist nicht assoziativ. Es ist ein sogen. Jordanscher Ring, mit dem Gesetz

$$(P \circ P) \circ (P \circ Q) = P \circ ((P \circ P) \circ Q).$$

Statt im reellen kann man auch im komplexen oder im Quaternionen-Körper arbeiten und die *hermiteschen* Operatoren betrachten: $P = P^*$ $(= \overline{P'})$. Man erhält dann projektive komplexe und Quaternionen-Geometrien.

In der Ebene pflegt man Punkte und Geraden durch Zahlentripel x resp. u zu beschreiben, mit denen man „bis auf einen Faktor" rechnet. Die Inzidenzrelation ist da $(x, u) = 0$. In der Quaternionengeometrie musz man dann Klassen linksproportionaler Zahlentripel als Punkte und Klassen rechtsproportionaler als Geraden ansehen.

[1]) Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Mathematisch Instituut Rijksuniversiteit Utrecht (1951).

2. Es gibt nun noch ein hyperkomplexes Zahlensystem, das mit dem reellen, komplexen und Quaternionen-Körper viel gemeinsam hat, das der Oktaven. Man erhält es so:

Sei $\mathfrak{C}$ ein hyperkomplexes System über dem reellen Körper, also ein endlich dimensionaler linearer Raum (Punkte = lateinische Buchstaben, reelle Zahlen = griechische Buchstaben) mit distributiver Multiplikation.

2. 1. $\mathfrak{C}$ besitze eine Eins.

2. 2. In $\mathfrak{C}$ existiere ein reelles definites inneres Produkt (x, y) mit den üblichen Eigenschaften.

2. 3. Es gelte $|x\,y| = |x| \cdot |y|$ (wenn $|x| = \sqrt{(x, x)}$ gesetzt ist).

2. 4. Man weisz, dasz $\mathfrak{C}$ nur die Dimensionen 1, 2, 4, 8 bezitzen kann; man erhält so den reellen, komplexen, Quaternionen- und Oktavenkörper. Der letzte ist nicht mehr assoziativ. In ihm gelten die Alternativgesetze

$$a(ax) = a^2x,\ (xa)a = xa^2,\ (ax)a = a(xa) = axa \text{ (Definition)},$$

die man auch so aussprechen kann:

2. 5. Je zwei Elemente von $\mathfrak{C}$ erzeugen einen Assoziativkörper.

In $\mathfrak{C}$ kann man das Konjugierte jedes Elementes a definieren durch

2. 6. $(ax, y) = (x, \bar{a}y)$ identisch in x und y.

2. 7. Weiter $Re\ a = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$.

2. 8. Die $Re\ a$ sind die Vielfachen der Eins und machen das Zentrum von $\mathfrak{C}$ aus (auszer für dim = 2). Wir brauchen weiter noch:

2. 9. $a\bar{a} = |a|^2$.

2. 10. $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$.

2. 11. $Re((xy)z) = Re(x(yz)) = Re((yz)x) = Re(xyz)$ (Definition).

2. 12. $(ax)\,(ya) = a(xy)a$.

3. Auf den Oktaven kann man eine ebene projektive Geometrie aufbauen, wie schon nach den Untersuchungen von Ruth Moufang [2]) und G. Hirsch [3]) zu erwarten ist. Das gelingt nicht auf die gebräuchliche Weise (siehe Ende von 1) infolge der Nichtassoziativität, wohl aber mittels der hermiteschen Oktavenmatrizen (siehe 1).

4. $\mathfrak{H}$ sei die Menge dieser Matrizen. Also

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = X(\xi, x) \in \mathfrak{H},$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 sein reell, x_1, x_2, x_3 Oktaven.

χ bezeichnet die Spur. Also

4. 2. $$\chi(X) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

---

[2]) Abh. Math. Sem. Hamburg **9**, 207–222 (1932); Math. Ann. **110**, 416–430 (1934).

[3]) In "Topologie algébrique, Colloques internationaux du Centre de la Recherche Scientifique, no. 12 (1949)".

X^2 ist sinnvoll und wieder in $\mathfrak{J}$.

4. 3. $$\chi(X^2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 2|x_3|^2.$$

Wir definieren

4. 4. $\det X = \xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1|x_1|^2 + \xi_2|x_2|^2 + \xi_3|x_3|^2) + 2Re(x_1 x_2 x_3)$ (siehe 2.11).

4. 5. $$\varphi(\lambda) \equiv \det(X - \lambda) = -\lambda^3 + (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)\lambda^2 + (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 - \xi_2\xi_3 - \xi_3\xi_1 - \xi_1\xi_2)\lambda + \det X.$$

Wenn x_1, x_2, x_3, einen Assoziativkörper erzeugen, genügt X der Gleichung

4. 6. $$\varphi(X) = 0.$$ [4])

Man rechnet das leicht nach:

$$Y = X^2 - (\xi_1+\xi_2+\xi_3)X - (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 - \xi_2\xi_3 - \xi_3\xi_1 - \xi_1\xi_2) =$$

4. 7. $$= \begin{pmatrix} \xi_2\xi_3 - |x_1|^2 & \bar{x}_2\bar{x}_1 - \xi_3 x_3 & x_3 x_1 - \xi_2\bar{x}_2 \\ x_1 x_2 - \xi_3\bar{x}_3 & \xi_3\xi_1 - |x_2|^2 & \bar{x}_3\bar{x}_2 - \xi_1 x_1 \\ \bar{x}_1\bar{x}_3 - \xi_2 x_2 & x_2 x_3 - \xi_1\bar{x}_1 & \xi_1\xi_2 - |x_3|^2 \end{pmatrix},$$

d.h. die Matrix der zweireihigen Unterdeterminanten von X. Daher

$$XY = \det X \cdot 1.$$

Also gilt unter diesen Voraussetzungen 4. 6. Nimmt man die Spur, so erhält man nach 4. 2–3 und 4. 5

$$-\chi(X^3) + \chi(X)\,\chi(X^2) + \tfrac{1}{2}(\chi(X^2) - \chi(X)^2)\,\chi(X) + 3\det X = 0,$$

also

4. 8. $$\det X = \tfrac{1}{3}\chi(X^3) - \tfrac{1}{2}\chi(X^2)\,(\chi(X) + \tfrac{1}{6}\chi(X)^3.$$

5. Man kann innerhalb $\mathfrak{J}$ jedes Element auf die Hauptdiagonale bringen mittels einer Reihe „unitärer" Transformationen U,

$$UU^* = 1,$$
$$X \to UXU^*.$$

Zum Beweise setzen wir erst

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad U^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad |a| = 1,$$

und erhalten

$$X_1 = UXU^* = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3\bar{a} & \bar{x}_2 a \\ a\bar{x}_3 & \xi_2 & a x_1 a \\ \bar{a}x_2 & \bar{a}\bar{x}_1\bar{a} & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3' & \bar{x}_2' \\ \bar{x}_3' & \xi_2 & x_1' \\ x_2' & \bar{x}_1' & \xi_3 \end{pmatrix}$$

[4]) Dies gilt sogar allgemein, wenn X^3 als $X^2 \circ X$ interpretiert wird; aber wir haben das hier nicht nötig.

(das ist wegen 2.5 sinnvoll). Wir wählen nun (falls $x_3 \neq 0$ ist) $a = x_3/|x_3|$, so dasz x_3' reell wird. Eine reelle orthogonale Transformation T bringt nun

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3' \\ x_3' & \xi_2 \end{pmatrix}$$

auf die Hauptdiagonale und nach Anwendung von

$$U_1 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$X_2 = U_2 X_1 U_2^*$$

ist $x_3'' = 0$ geworden.

Wir wiederholen nun den ersten Schritt mit x_2'' (falls es $\neq 0$ ist), und wir erhalten eine Matrix, in der höchstens noch *eine* nicht reelle Oktave vorkommt, also wesentlich eine gewöhnliche hermitesche Matrix, die man bekanntlich unitär auf die Hauptdiagonale bringen kann.

6. Bei all diesen Transformationen bleiben

$$\chi(X),\ \chi(X^2),\ \det X$$

invariant.

Beim ersten Schritt ist das klar hinsichtlich $\chi(X)$ und $\chi(X^2)$ (siehe 2. 3 und 2. 9–10). Was $\det X$ anbelangt, brauchen wir nur $Re(x_1\, x_2\, x_3)$ zu betrachten:

$$\begin{aligned} Re(x_1'\, x_2'\, x_3') &= Re(ax_1a \cdot \bar{a}x_2 \cdot x_3\bar{a}) \\ &= Re(ax_1a \cdot \bar{a}(x_2x_3)\bar{a}) && \text{wegen 2. 12} \\ &= Re((ax_1)a \cdot \bar{a} \cdot (x_2x_3)\bar{a}) \\ &= Re(ax_1 \cdot (x_2x_3)\bar{a}) && \text{wegen 2. 5 und 2. 9} \\ &= Re(\bar{a} \cdot ax_1 \cdot x_2x_3) && \text{wegen 2. 11} \\ &= Re(x_1x_2x_3) && \text{wegen 2. 5 und 2. 9.} \end{aligned}$$

Beim zweiten Schritt ist U_1 reell. Man hat daher für ein $Z \in \mathfrak{J}$:

$$\chi(U_1ZU_1^*) = \chi(U_1^*U_1Z) = \chi(Z)$$

und das gilt nun, da mit X_1 assoziativ gerechnet werden kann, für $Z = X_1, X_1^2, X_1^3$. Also bleiben $\chi(X_1)$, $\chi(X_1^2)$, $\chi(X_1^3)$ und wegen 4. 8 auch $\det X_1$ beim zweiten Schritt invariant.

Mit dem dritten Schritt steht es wie mit dem ersten, und für den vierten ist die Aussage trivial.

Die Gruppe der linearen Transformationen von $\mathfrak{J}$, die $\chi(X)$, $\chi(X^2)$, $\det X$ invariant lassen, ist eine reelle Form der $\mathfrak{F}_4$ [5]). Man kann sie auch als *elliptische Gruppe* der Oktavenebene interpretieren.

7. Wir schreiben

$$(X, X) = \chi(X^2)$$

[5]) a.a. O. p. 44.

und (linearisiert) $(X, Y) = \frac{1}{2}\chi(XY + YX)$. Weiter definieren wir die symmetrische Trilinearform (X, Y, Z) durch

$$(X, X, X) = \det X.$$

Diese Form ist invariant gegenüber den Transformationen von 6.

Gewisse Elemente von $\mathfrak{J}$ sollen als Punkte der Oktavenebene aufgefaszt werden, und $(X, Y, Z) = 0$ soll dann die Kollinearitätsrelation sein. Es liegt also auf der Hand, Punkte zu erklären durch die Relation

$$(X, X, A) = 0 \text{ identisch in } A,$$

die wir auch schreiben als

$$X \in \mathfrak{P}.$$

Wir definieren für je zwei Elemente A, B von $\mathfrak{J}$ ein Produkt $A \times B$, das invariant ist bei den Transformationen von 6, durch

$$(A \times B, C) = (A, B, C) \text{ identisch in } C.$$

$X \in \mathfrak{P}$ ist also dasselbe wie $X \times X = 0$.

Man verifiziert, dasz $X \times X$ für beliebiges X gerade die Matrix 4. 7. ist. Aus ihr erhält man durch Bilinearisieren

7. 1.

$$X \times Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi_2\eta_3+\xi_3\eta_2-2Re(x_1\bar{y}_1) & \bar{x}_2\bar{y}_1+\bar{y}_2\bar{x}_1-\xi_3y_3-\eta_3x_3 & x_3y_1+y_3x_1-\xi_2\bar{y}_2-\eta_2\bar{x}_2 \\ x_1y_2+y_1x_2-\xi_3\bar{y}_3-\eta_3\bar{x}_3 & \xi_3\eta_1+\xi_1\eta_3-2Re(x_2\bar{y}_2) & \bar{x}_3\bar{y}_2+\bar{y}_3\bar{x}_2-\xi_1y_1-\eta_1x_1 \\ \bar{x}_1\bar{y}_3+\bar{y}_1\bar{x}_3-\xi_2y_2-\eta_2x_2 & x_2y_3+y_2x_3-\xi_1\bar{y}_1-\eta_1\bar{x}_1 & \xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1-2Re(x_3\bar{y}_3) \end{pmatrix}.$$

$X \in \mathfrak{P}$ ist äquivalent mit den Relationen

$$\xi_2\xi_3 = |x_1|^2, \quad \xi_3\xi_1 = |x_2|^2, \quad \xi_1\xi_2 = |x_3|^2,$$

7. 2.

$$\xi_3\bar{x}_3 = x_1x_2, \quad \xi_1\bar{x}_1 = x_2x_3, \quad \xi_2\bar{x}_2 = x_3x_1.$$

Die Elemente $X \neq 0$ von $\mathfrak{P}$, mit denen bis auf einen reellen Faktor gerechnet werden soll, fassen wir als Punkte und als Geraden auf. Inzidenz des Punktes X und der Geraden U wird definiert durch

$$(X, U) = 0.$$

Wir zeigen: $(X, U) = 0$ $(X, U \in \mathfrak{P}, U \neq 0)$ dann und nur dann, wenn es ein $V \in \mathfrak{P}$ gibt mit $X = U \times V$.

„Dann" ist klar. — Sei $(X, U) = 0$. Wir dürfen U nach 6 in der Diagonalform annehmen. Aber dann ist nach 7. 2. etwa

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist in X das Element $\xi_1 = 0$, also nach 7. 2. auch $x_2 = x_3 = 0$. Nun ist aber nach 7. 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & x_1 \\ 0 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3 & -x_1 \\ 0 & -\bar{x}_1 & \xi_2 \end{pmatrix},$$

wobei der letzte Faktor in $\mathfrak{P}$ ist. Also $X = U \times V$.

Ebenso zeigt man, indem man U speziell annimmt:
Aus $U, V \in \mathfrak{P}$ folgt $U \times V \in \mathfrak{P}$. Ist $U \times V = 0$, so sind U, V skalare Vielfachen voneinander.

Nun ergeben sich die Inzidenzaxiome:

Sind U, V verschiedene Geraden, so ist $U \times V$ ein Punkt, der mit beiden inzidiert.

Sind X, Y verschiedene Punkte, so ist $X \times Y$ eine Gerade, die mit beiden inzidiert.

Ist U eine Gerade, die mit den verschiedenen Punkten X, Y inzidiert, so ist $U = X \times Y$.

Was das Letzte betrifft, nehmen wir U wieder in der speziellen Form, also

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & x_1 \\ 0 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & y_1 \\ 0 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}.$$

Dann wird nach 7. 1

$$X \times Y = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 - 2\,Re(x, \bar{y}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und das ist in der Tat ein Vielfaches von U.

8. Die Menge der Punkte, die mit der speziellen Geraden U inzidieren, wird durch die Parameter ξ_2, ξ_3, x_1 mit

$$\xi_2 \xi_3 = |x_1|^2$$

beschrieben. An der Form

$$4|x_1|^2 - (\xi_2 - \xi_3)^2 = (\xi_2 + \xi_3)^2$$

sieht man, dasz die Gerade eine 8-dimensionale Sphäre ist.

Wir erwähnen noch, dasz in der Oktavengeometrie der Satz vom Vierseit gilt, und dasz ihre projektive Gruppe eine reelle Form der $\mathfrak{E}_6$ ist [6]).

[6]) a.a. O. p. 38, 44.

Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. I [1954b]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954), 218–230
[Zbl 0055.02001; MR 0063358]

(Communicated at the meeting of April 24, 1954)

1. *Definitionen und Formeln.* [1])

$\mathfrak{J}$ ist der Ring der (hermitesch) symmetrischen 3-3-Oktavenmatrizen; $X \circ Y$ das symmetrisierte Matrixprodukt von $X, Y \in \mathfrak{J}$. Die Automorphismengruppe von $\mathfrak{J}$, die wir Aut $(\mathfrak{J})$ nennen, ist eine reelle Form der $\mathfrak{F}_4$. Die Grössen $\chi(X)$ und $\det X$ sind Invarianten dieser Gruppe. Das symmetrische innere Produkt (X, Y) wird definiert durch

$$(X, Y) = \chi(X \circ Y).$$

Die symmetrische Trilinearform (X, Y, Z) wird definiert durch

$$(X, X, X) = \det X. \tag{1.1}$$

Das Produkt $X \times Y$ wird definiert durch

$$(X \times Y, Z) = 3(X, Y, Z) \quad \text{(identisch in } Z\text{)} \; [2]). \tag{1.2}$$

Man hat (*EO* 4.7)

$$X \times X = X \circ X - \chi(X)X + \tfrac{1}{2}(\chi(X)^2 - \chi(X \circ X)) \tag{1.3}$$

und nach Bilinearisierung:

$$X \times Y = X \circ Y - \tfrac{1}{2}\chi(X)Y - \tfrac{1}{2}\chi(Y)X + \tfrac{1}{2}(\chi(X)\chi(Y) - \chi(X \circ Y)). \tag{1.4}$$

Speziell

$$2 \times X = \chi(X) - X, \tag{1.5}$$

$$\chi(X \times X) = \tfrac{1}{2}(\chi(X)^2 - \chi(X \circ X)), \tag{1.6}$$

$$X \times X - \chi(X \times X) = X \circ X - \chi(X)\, X. \tag{1.7}$$

---

[1]) Als bekannt vorausgesetzt werden die Arbeiten des Verf.s:
OAO: Oktaven, Ausnahmegruppen, Oktavengeometrie. Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht (1951).
E_7 : Sur le groupe exceptionnel E_7. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **A56**, 81–89 (1953) = Indagationes Math. **15**, 81–89 (1953).
E_8 : Sur le groupe exceptionnel E_8. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **A56**, 95–98 (1953) = Indagationes Math. **15**, 95–98 (1953).
Inv.: Sur des invariants caractéristiques des groupes semi-simples. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **A56**, 90–94 (1953) = Indagationes Math. **15**, 90–94 (1953).
EO : Zur ebenen Oktavengeometrie. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **A56**, 195–200 (1953) = Indagationes Math. **15**, 195–200 (1953).

[2]) In *EO*, p. 199, fehlt bei dieser Gleichung rechts der Faktor 3.

Weiter (*EO* 4.7):

$$(X \times X) \circ X = \det X \tag{1.8}$$

und nach Trilinearisierung:

$$(X \times Y) \circ Z + (Y \times Z) \circ X + (Z \times X) \circ Y = 3(X, Y, Z). \tag{1.9}$$

Speziell:

$$2(X \times Y) \circ Y + X \circ (Y \times Y) = 3(X, Y, Y). \tag{1.10}$$

Die Elemente X bzw. $U \in \mathfrak{J}$ mit $X \times X = U \times U = 0$ verwendet man als Punkte bzw. Geraden der Oktavenebene, indem man mit ihnen „bis auf einen skalaren Faktor" rechnet; die Inzidenzrelation ist

$$X \circ U = 0. \tag{1.11}$$

Die Verbindungsgerade von X und Y ist $X \times Y$, der Schnittpunkt von U und V ist $U \times V$. (Siehe etwa *EO*.) Die Invarianzgruppe von det X, die wir mit Inv (det X) bezeichnen, spielt die Rolle der projektiven Gruppe der Oktavenebene (*OAO*, p. 44–46); sie ist eine reelle Form der $\mathfrak{E}_6$. Zu einem infinitesimalen $\phi \in$ Inv (det X) wird das kontragrediente ϕ' definiert durch

$$(\phi X, U) + (X, \phi' U) = 0 \text{ identisch in } X, U \in \mathfrak{J}. \tag{1.12}$$

Wegen der Invarianz von det X, also auch von (X, Y, Z) hat man

$$(\phi X, Y, Z) + (X, \phi Y, Z) + (X, Y, \phi Z) = 0, \tag{1.13}$$

also

$$(\phi X \times Y + X \times \phi Y - \phi'(X \times Y), \quad Z) = 0,$$

also

$$\phi'(X \times Y) = \phi X \times Y + X \times \phi Y. \tag{1.14}$$

Ebenso

$$\phi(X \times Y) = \phi' X \times Y + X \times \phi' Y. \tag{1.15}$$

Die Inv (det X) zerfällt linear in die antisymmetrischen Elemente mit $\phi - \phi' = 0$, die die elliptische Gruppe der Oktavenebene und eine reelle Form der $\mathfrak{F}_4$ bilden, und die symmetrischen mit $\phi + \phi' = 0$. Die letzten erhält man sämtlich in der Form (*OAO*, p. 44–46 [3]))

$$\phi X = S \circ X \text{ mit } S \in \mathfrak{J},\ \chi(S) = 0. \tag{1.16}$$

Der Kommutator zweier symmetrischen Elemente von Inv (det X) ist ein antisymmetrisches.

In $\mathfrak{J}$ kann man jedes Element durch Transformationen von Aut ($\mathfrak{J}$) auf die Hauptachsen transformieren (*OAO*, p. 26). Da Aut ($\mathfrak{J}$) ausserdem die $\circ$- und $\times$-Multiplikationen invariant lässt, darf man zum Beweise von Relationen ein Element von $\mathfrak{J}$ in der Hauptdiagonalform annehmen.

[3]) Am Schlusse von *OOA* hat sich hier ein Vorzeichenfehler eingeschlichen.

So beweist man z.B.

$$(1.17) \qquad (X \times X) \times (X \times X) = \det X \cdot X,$$

indem man X in der Hauptdiagonalform annimmt.

Zwei Elementen $X, U \in \mathfrak{J}$ ordnen wir ein Element $\langle X, U\rangle$ von Inv (det X) zu mittels

$$(1.18) \quad \langle X, U\rangle A = U \circ (X \circ A) - X \circ (U \circ A) - (X \circ U) \circ A + \tfrac{1}{3}(X, U)\, A$$

(identisch in A). Die ersten zwei Summanden bilden ein Element von Aut($\mathfrak{J}$) (Kommutator!), der Rest ist ein symmetrisches Element von Inv (det X). Hieraus ergibt sich:

$$(1.19) \qquad \langle X, U\rangle + \langle U, X\rangle' = 0.$$

Wenn man die X gemäss Inv (det X) und die U kontragredient transformiert, transformieren die $\langle X, U\rangle$ sich gemäss der adjungierten Gruppe von Inv (det X), d.h. es gilt die Formel

$$(1.20) \quad [\phi, \langle X, U\rangle] = \langle \phi X, U\rangle + \langle X, \phi' U\rangle \text{ für } \phi \in \text{Inv (det } X).$$

Man beweist sie mittels der Formel

$$(1.21) \qquad U \times (X \times A) = \tfrac{1}{2}\langle X, U\rangle A + \tfrac{1}{4}(A, U) X + \tfrac{1}{12}(X, U) A,$$

die nachher abgeleitet wird. In der Tat hat man (1.14 – 15)

$$\phi(U \times (X \times A)) = \phi' U \times (X \times A) + U \times (\phi X \times A) + U \times (X \times \phi A);$$

ersetzt man diese vier Terme gemäss 1.21, so erhält man automatisch 1.20.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch, dass der von den $\langle X, U\rangle$ aufgespannte lineare Raum ein Normalteiler von Inv (det X) ist, also wegen der Einfachheit von $\mathfrak{E}_6$ mit Inv (det X) zusammenfällt. Unter den $\langle X, U\rangle$ kommen also genau 78 linear unabhängige vor.

Wir brauchen noch die Formel

$$(1.22) \qquad (\langle X, U\rangle S, T) = (\langle S, T\rangle X, U),$$

die sich ergibt, wenn man die Definition von $\langle X, U\rangle$ aus 1.18 in $(\langle X, U\rangle S, T)$ einsetzt und bemerkt, dass das Resultat

$$(X \circ S,\ U \circ T) - (X \circ T,\ U \circ S) - (X \circ U,\ S \circ T) + \tfrac{1}{3}(X, U)\,(S, T)$$

sich bei der Ersetzung $X \leftrightarrow S$, $U \leftrightarrow T$ nicht ändert.

Hieraus leiten wir ab:

$$(1.23) \qquad 2\langle X, A \times X\rangle + \langle A, X \times X\rangle = 0,$$

indem wir für beliebige $S, T \in \mathfrak{J}$ das Verschwinden beweisen von

$$(1.24) \qquad \begin{aligned} &\big((2\langle X, A \times X\rangle + \langle A, X \times X\rangle) S, T\big) = \\ &\qquad (2\langle S, T\rangle X, A \times X) + (\langle S, T\rangle A, X \times X). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (\langle S, T\rangle A, X \times X) &= -(A, \langle T, S\rangle (X \times X)) \quad \text{nach 1.19} \\ &= -(A, 2X \times \langle S, T\rangle X) \quad \text{nach 1.14} \\ &= -2(A \times X, \langle S, T\rangle X), \end{aligned}$$

und daher verschwindet 1.24.

Wir geben noch einen Ausdruck an für die Spur von $\phi\phi$ in $\mathfrak{I}$ ($\phi \in \mathrm{Inv}$ (det X)).

Wir können Elemente von Inv (det X) darstellen in der Form

$$\phi = \sum \langle X_i, U_i \rangle, \quad \psi = \sum \langle S_j, T_j \rangle. \tag{1.25}$$

Wir definieren

$$(\phi, \psi)^* = \sum (\langle X_i, U_i \rangle S_j, T_j).$$

Wegen 1.22 ist das symmetrisch und unabhängig von der Wahl der Darstellung. Wegen 1.20 ist es invariant gegenüber der adjungierten Gruppe von Inv (det X), also

$$(\phi, \psi)^* = \gamma \chi(\phi\psi).$$

Wir berechnen γ, indem wir

$$X = U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi = \psi = \langle X, U \rangle$$

wählen. Dann wird $\langle X, U \rangle$ die Muliplikation mit

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\langle X, U \rangle \langle X, U \rangle$ multipliziert die Diagonalkoeffizienten mit $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{9}$, die anderen mit $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{9}$, hat also die Spur $\frac{6}{9} + 8 \cdot \frac{6}{36} = 2$.
($\langle X, U \rangle X, U$) wird $-\frac{2}{3}$, also $\gamma = -\frac{1}{3}$. Also

$$\chi(\phi\psi) = -3(\phi, \psi). \tag{1.26}$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} \chi(\langle X, U \rangle \langle X, U \rangle) &= -3(\langle X, U \rangle X, U) \\ &= -6(X \times X, U \times U) + 2(X, U)^2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

bei Benutzung von 1.21.

Zum nun noch ausstehenden Beweise von 1.21 verifiziere man erst

$$(X \times X) \times U = \tfrac{1}{2}(X \circ X) \circ U - X \circ (X \circ U) + \tfrac{1}{2}(X, U)X, \tag{1.28}$$

woraus man durch Bilinearisieren und Einsetzen von 1.18 leicht 1.21 erhält. Die Verifikation von 1.28 vollzieht man mit diagonalem X (Eigenwerte ξ_1, ξ_2, ξ_3) und beliebigem U ($= U(\alpha, u)$). Dann ist $X \times X$ auch diagonal, mit Eigenwerten $\xi_2\xi_3$, $\xi_1\xi_3$, $\xi_1\xi_2$. Die Stelle (11) von 1.28 lautet nun (siehe EO 7.1)

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3)\xi_1 = \tfrac{1}{2}\xi_1^2\alpha_1 - \xi_1^2\alpha_1 + \tfrac{1}{2}(\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3)\xi_1;$$

die Stelle (12)

$$-\tfrac{1}{2}\xi_1\xi_2 u_3 = \tfrac{1}{4}(\xi_1^2 + \xi_2^2)u_3 - \tfrac{1}{4}(\xi_1 + \xi_2)^2 u_3 + 0;$$

und analog die übrigen. Hiermit ist 1.28 erwiesen.

2. *Die Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}$.

Wir betrachten den 56-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}$ der Grössen P mit den Komponenten

$$X, U, \xi, \omega$$

($X, U \in \mathfrak{Z}$; ξ, ω reell), und in $\mathfrak{R}$ das Gleichungssystem:

$$\chi(X \circ U - \xi\omega) = 0, \tag{2.0}$$

$$X \times X - \omega U = 0, \tag{2.1}$$

$$U \times U - \xi X = 0, \tag{2.2}$$

$$\langle X, U \rangle = 0, \tag{2.3}$$

$$X \circ U - \xi\omega = 0. \tag{2.4}$$

Die Gleichungen sind nicht unabhängig.

(2.5) Für $\omega \neq 0$ folgen aus 2.0 – 1 die übrigen.

Beweis: Man wende $X\circ$ auf 2.1 an und berücksichtige 1.8:

$$\omega X \circ U = \det X.$$

Man bilde die Spur und berücksichtige 2.0:

$$\xi\omega^2 = \det X. \tag{2.6}$$

Also

$$X \circ U = \xi\omega.$$

Aus 2.1 folgt auch

$$(X \times X) \times (X \times X) = \omega^2 U \times U,$$

also nach 1.17 und 2.6

$$\xi\omega^2 X = \omega^2 U \times U,$$

also auch 2.3.

Setzt man schliesslich in 1.18 $X \times X$ für U ein, so erhält man wegen 1.8

$$(X \times X) \circ (X \circ A) - X \circ ((X \times X) \circ A) - (\det X - \tfrac{1}{3}(X, X \times X))A.$$

Der letzte Summand verschwindet nach 1.1 – 2. Dass

$$(X \times X) \circ (X \circ A) = X \circ ((X \times X) \circ A)$$

ist, folgt aus der Definition der Jordanschen Ringe (*OE*, p. 195) oder durch Ausrechnen, wenn man X in der Hauptdiagonalform ansetzt. Wir haben also

$$\langle X, X \times X \rangle = 0$$

und damit auch 2.3.

2.6. Für $\xi \neq 0$ folgen aus 2.0, 2.2 die übrigen.

Beweis analog.

2.7. Für $\xi = \omega = 0$ folgen aus 2.0 – 2 die übrigen.

Beweis: Dann ist nämlich $X \times X = U \times U = (X, U) = 0$ und dürfen wir X und U in der Hauptdiagonalform annehmen, etwa mit den Eigenwerten (1, 0, 0) bzw. (0, 1, 0). Nun ergeben 2.3 – 4 sich unmittelbar.

2.8 Aus 2.3 folgt die Erfüllbarkeit von 2.0, 1, 2, 4.

Beweis: $\langle X, U\rangle = 0$ zerfällt in

$$X \circ U - \tfrac{1}{3}(X, U) = 0$$

und

$$U \circ (X \circ A) - X \circ (U \circ A) = 0.$$

Ist $(X, U) \neq 0$, so setze man hier $X \times X$ für A ein. Nach dem Gesetz der Jordanschen Ringe ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \det X \cdot U &= (X \times X) \circ (X \circ U) \\ &= \tfrac{1}{3}(X, U)\,(X \times X), \end{aligned}$$

so dass 2.1 mit $\omega = 3(X, U)^{-1} \det X$ erfüllt wird. Analog wird 2.2 mit $\xi = 3(X, U)^{-1} \det U$ erfüllt. Man darf nun X und U in der Hauptdiagonalform annehmen und verifiziert, dass auch 2.0 und 2.4 erfüllt sind. — Ist dagegen $(X, U) = 0$, so nimmt man X gleich in der Hauptdiagonalform an und verifiziert die Behauptung.

2.9. Die Lösungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ (projektiv) [4]) von $2.0-3$ ist regulär und 27-dimensional in jedem Punkte mit $\xi, \omega \neq 0{,}0$. (Das ergibt sich aus 2.1 oder 2.2.) Dass sie überall diese Eigenschaft besitzt, folgt später aus der Tatsache, dass $\mathfrak{M}$ eine transitive Liesche Gruppe gestattet.

2.10. $\mathfrak{M}$ ist zusammenhängend.

Beweis: Jeder Punkt (X, U, ξ, ω) mit $\omega \neq 0$ kann in $\mathfrak{M}$ mit $(0, 0, 0, \omega)$ durch die Kurve $(\tau X, \tau^2 U, \tau^3 \xi, \omega)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ verbunden werden. Jeder Punkt $(X, U, \xi, 0)$ mit $X \neq 0$ kann in $\mathfrak{M}$ mit $(X, 0, 0, 0)$ verbunden werden durch die Kurve $(X, \tau U, \tau^2 \xi, 0)$. Der Punkt $(X, 0, 0, 0)$ wird dann noch mit $(0, 0, 0, \omega)$ verbunden durch $(\tau X, 0, 0, (1-\tau)\omega)$. Jeder Punkt $(0, U, \xi, 0)$ ist analog verbindbar mit $(0, 0, \xi, 0)$ oder $(0, U, 0, 0)$ und diese mit einem $(X_0, 0, \xi, 0)$ bzw. $(X_0, U, 0, 0)$ mit $X_0 \neq 0$, also letzten Endes mit $(0, 0, 0, \omega)$.

3. *Die Gruppe* Inv $(\mathfrak{M})$.

Wir suchen die projektiven Transformationen von $\mathfrak{R}$, die $\mathfrak{M}$ invariant lassen. Wir nennen ihre Gruppe Inv $(\mathfrak{M})$.

Wir setzen ein infinitesimales Element Θ von Inv $(\mathfrak{M})$ an in der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} dX &= L_1(X) + L_2(U) + A_1\xi + A_2\omega, \\ dU &= M_1(X) + M_2(U) + B_1\xi + B_2\omega, \\ d\xi &= l_1(X) + l_2(U) + \alpha_1\xi + \alpha_2\omega, \\ d\omega &= m_1(X) + m_2(U) + \beta_1\xi + \beta_2\omega. \end{aligned}$$

Hier sind L_1, L_2, M_1, M_2 lineare Selbstabbildungen von $\mathfrak{J}$; A_1, A_2, B_1, $B_2 \in \mathfrak{J}$; l_1, l_2, m_1, m_2 lineare Funktionale auf $\mathfrak{J}$; α_1, α_2, β_1, β_2 reell.

Die Transformation

$$f_\varrho\colon\ X \to X,\ U \to \varrho U,\ \xi \to \varrho^2 \xi,\ \omega \to \varrho^{-1}\omega$$

[4]) Dieselbe wie in E_7.

lässt $2.0-3$ jedenfalls invariant. Transformiert man Θ mittels f_ϱ, so erhält man wieder ein Element von Inv $(\mathfrak{M})$, nämlich $f_\varrho^{-1}\Theta f_\varrho$:

$$\begin{aligned} dX &= L_1(X) &&+\varrho L_2(U) &&+\varrho^2 A_1 + \varrho^{-1}A_2\omega, \\ dU &= \varrho^{-1}M_1(X) + M_2(U) &&+\varrho B_1 &&+\varrho^{-2}B_2\omega, \\ d\xi &= \varrho^{-2}l_1(X) &&+\varrho^{-1}l_2(U) + \alpha_1\xi &&+\varrho^{-3}\alpha_2\omega, \\ d\omega &= \varrho m_1(X) &&+\varrho^2 m_2(U) + \varrho^3\beta_1 &&+\beta_2\omega. \end{aligned}$$

Oder kurz:

$$dP = \sum_{-3}^{3} \varrho^i \Theta_i P.$$

Wenn man nun $f_\varrho^{-1}\Theta f_\varrho$ für verschiedene ϱ betrachtet und mit geeigneten Koeffizienten linear kombiniert, kann man jedes Θ_i isolieren, und es ergibt sich, dass jedes der $\Theta_i (i = -3, \ldots, +3)$ zu Inv $(\mathfrak{M})$ gehört.

Wir wenden diese Θ_i nun auf $2.0-3$ an.

Θ_{-3}: [5]) $d\chi(X \circ U - \xi\omega) = -\chi(\alpha_2\omega^2)$ muss auf $\mathfrak{M}$ identisch verschwinden; das geht aber nur, wenn $\alpha_2 = 0$, also $\Theta_{-3} = 0$ ist. Ebenso zeigt man, dass $\Theta_3 = 0$ ist.

Θ_{-2}: $d(X \times X - \omega U) = -\omega^2 B_2$ kann nur verschwinden, wenn $B_2 = 0$ ist. Dann wird aber Θ_{-2}: $d(U \times U - \xi X) = -l_1(X)\, X$, also $l_1 = 0$. Also $\Theta_{-2} = 0$. Ebenso $\Theta_2 = 0$.

Θ_{-1}: $d(X \times X - \omega U) = 2\omega A_2 \times X - \omega M_1(X) = 0$ auf $\mathfrak{M}$, also

$$M_1(X) = 2A_2 \times X \text{ identisch in } X. \tag{3.1}$$

Θ_{-1}: $d(X \circ U - \xi\omega) = \omega A_2 \circ U + X \circ M_1(X) - \omega l_2(U) = 0$ auf $\mathfrak{M}$, also wegen 2.1 und 3.1:

$A_2 \circ (X \times X) + 2(A_2 \times X) \circ X - l_2(X \times X) = 0$ identisch in X. Wegen 1.10 ist dann

$$(A_2, X \times X) - l_2(X \times X) = 0.$$

also

$$l_2(U) = (A_2, U). \tag{3.2}$$

Θ_{-1} hat demnach die Form

$$\begin{aligned} dX &= \omega A, \\ dU &= 2A \times X, \\ d\xi &= (A, U), \\ d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man: Θ_1 hat die Form

$$\begin{aligned} dX &= 2B \times U, \\ dU &= \xi B, \\ d\xi &= 0, \\ d\omega &= (B, X). \end{aligned}$$

[5]) Die Schreibweise bedeutet, dass Θ_{-3} als Differentialoperator auf eine Funktion angewandt wird. Ebenso später!

$\det X - \xi\omega^2 = 0$ ist ebenfalls invariant bei Inv $(\mathfrak{M})$ (siehe 2.6). Daher

Θ_0: $d\ (\det X - \xi\omega^2) = 0$,

Θ_0: $d\ \det X - (\alpha_1 + 2\beta_2)\xi\omega^2 = 0$,

$(\Theta_0 - \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\beta_2))$: $d\ \det X = 0$.

Also definiert

$$L_1(X) - \tfrac{1}{3}(\alpha_1 + 2\beta_2)X = \phi(X)$$

ein Element $\phi \in$ Inv $(\det X)$. Ebenso definiert

$$M_2(U) - \tfrac{1}{3}(\beta_2 + 2\alpha_1)U = \phi_1(U)$$

ein Element $\phi_1 \in$ Inv $(\det X)$.

Θ_0: $d\chi(X \circ U - \xi\omega) = 0$,

$$(\phi(X) + \tfrac{1}{3}(\alpha_1 + 2\beta_2)X,\ U) + (X,\ \phi_1(U) + \tfrac{1}{3}(\beta_2 + 2\alpha_1)U) - 3(\alpha_1 + \beta_2)\xi\omega = 0,$$

also

$$(\phi(X),\ U) + (X,\ \phi_1(U)) = 0,$$

und daher

$$\phi_1 = \phi'.$$

Die Spur von Θ_0 ist nun $2(\alpha_1 + \beta_2)$; da wir $\mathfrak{M}$ projektiv behandeln, dürfen wir uns auf infinitesimale Transformationen mit der Spur 0 beschränken. Also $\alpha_1 + \beta_2 = 0$. Wir schreiben ϱ statt β_2 und erhalten für Θ_0 die Form:

$$\begin{aligned} dX &= (\phi + \tfrac{1}{3}\varrho)X, \\ dU &= (\phi' - \tfrac{1}{3}\varrho)U, \\ d\xi &= \quad -\tfrac{1}{3}\varrho\xi, \\ d\omega &= \quad \tfrac{1}{3}\varrho\omega. \end{aligned}$$

Die nun erhaltenen Transformationen der Form Θ_0, Θ_1, Θ_{-1} bilden einen $78 + 1 + 27 + 27 = 133$-dimensionalen Raum, der Inv $(\mathfrak{M})$ enthält. Dass er sogar mit Inv $(\mathfrak{M})$ zusammenfällt, kann man umgekehrt leicht einsehen. Wir werden im Folgenden noch ein schärferes Resultat beweisen.

4. *Das System* $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \subset \mathfrak{L}$.

Wir betrachten den 133-dimensionalen Raum $\mathfrak{L}$ der Grössen Θ mit den Komponenten

$$\phi,\ \varrho,\ A,\ B,$$

wo $\phi \in$ Inv $(\det X)$, ϱ reell, $A, B \in \mathfrak{J}$ sind.

Wir definieren für dies Θ und ein

$$P = (X,\ U,\ \xi,\ \omega) \in \mathfrak{R}$$

ein Produkt

$$\Theta P = \begin{pmatrix} \phi + \frac{1}{3}\varrho & 2B\times & 0 & A \\ 2A\times & \phi' - \frac{1}{3}\varrho & B & 0 \\ 0 & A, & -\varrho & 0 \\ B, & 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ U \\ \xi \\ \omega \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

[6]

[6]) Mit einigen wohl ohne weiteres verständlichen Abkürzungen.

so dass also (mit den Bezeichnungen aus 3) gilt:

$$\begin{aligned}\Theta_0 &: dP = (\phi,\ \varrho,\ 0,\ 0)\,P,\\ \Theta_{-1}&: dP = (0,\ 0,\ A,\ 0)\,P,\\ \Theta_1 &: dP = (0,\ 0,\ 0,\ B)\,P.\end{aligned}$$

Wir definieren weiter

$$P \times P \in \mathfrak{L}$$

mit den Komponenten

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{cases}\phi_1 = \langle X,\ U\rangle,\\ \varrho_1 = -\frac{1}{4}\chi(X \circ U - \xi\omega),\\ A_1 = -\frac{1}{2}(U \times U - \xi X),\\ B_1 = \frac{1}{2}(X \times X - \omega U),\end{cases}$$

wobei X, U, ξ, ω die Komponenten von P sind. Man beachte, dass diese Ausdrücke im Wesentlichen die linken Seiten der Gleichungen 2.0 – 3 sind. Man kann die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ nun beschreiben durch die Gleichung

$$P \times P = 0.$$

Wir definieren schliesslich ein symmetrisches bilineares Produkt $P \times Q$, das für $P = Q$ mit $P \times P$ zusammenfällt. Wir wenden nun die $\Theta_i (i = 0, -1, 1)$ auf die Komponenten von $P \times P$ an.

$$\begin{aligned}\Theta_0:\quad & d\phi_1 = [\phi, \phi_1], \qquad \text{(siehe 1.20)}\\ & d\varrho_1 = 0,\\ & dA_1 = (\phi - \tfrac{2}{3}\varrho)A_1,\\ & dB_1 = (\phi' + \tfrac{2}{3}\varrho)B_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{-1}:\quad & d\phi_1 = \langle \omega A,\ U\rangle + \langle X,\ 2A \times X\rangle = -\langle A,\ X \times X - \omega U\rangle \text{ nach 1.23}\\ & \qquad = -2\langle A,\ B_1\rangle,\\ & d\varrho_1 = -\tfrac{1}{4}\chi(\omega A \circ U + X \circ (2A \times X) - (A,\ U)\omega)\\ & \qquad = -\tfrac{1}{4}(A,\ -2\omega U + 2X \times X)\\ & \qquad = -(A,\ B_1),\\ & dA_1 = -\tfrac{1}{2}(4(A \times X) \times U - (A,\ U)X - \xi\omega A)\\ & \qquad = -\langle X,\ U\rangle A - \tfrac{1}{6}\chi(X \circ U - \xi\omega)A \text{ nach 1.21}\\ & \qquad = -(\phi_1 - \tfrac{2}{3}\varrho_1)A.\\ & dB_1 = 0.\end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}\Theta_1:\quad & d\phi_1 = 2\langle A_1,\ B\rangle,\\ & d\varrho_1 = (A_1,\ B),\\ & dA_1 = 0,\\ & dB_1 = -(\phi_1 + \tfrac{2}{3}\varrho_1)B.\end{aligned}$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen für $\Theta = \Theta_0 + \Theta_{-1} + \Theta_1$:

$$\text{(4.3)}\qquad \begin{cases}d\phi_1 = [\phi, \phi_1] + 2\langle A_1,\ B\rangle - 2\langle A,\ B_1\rangle,\\ d\varrho_1 = (A_1,\ B) - (A,\ B_1),\\ dA_1 = (\phi - \frac{2}{3}\varrho)A_1 - (\phi_1 - \frac{2}{3}\varrho_1)A,\\ dB_1 = (\phi' + \frac{2}{3}\varrho)B_1 - (\phi_1' + \frac{2}{3}\varrho_1)B.\end{cases}$$

Aus 4.3 folgt nun auch, dass die Transformationen 4.1 in der Tat $\mathfrak{M}$ invariant lassen.

Es liegt auf der Hand, zu vermuten, dass 4.3 (wenn man da $\phi_1, \varrho_1, A_1, B_1$ nun frei variieren lässt) die Gruppe Inv ($\mathfrak{M}$) im Raum $\mathfrak{L}$ darstellen, und dass diese Darstellung die adjungierte Gruppe von Inv ($\mathfrak{M}$) ist. Rechnet man die Kommutatoren von Inv ($\mathfrak{M}$) aus, so erhält man in der Tat für

$$\begin{aligned} \Theta &= (\phi, \varrho, A, B) \\ \Theta_1 &= (\phi_1, \varrho_1, A_1, B_1)\ ^{7}) \\ [\Theta, \Theta_1] = \Theta_2 &= (\phi_2, \varrho_2, A_2, B_2)\ ^{7}) \end{aligned}$$

die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \phi_2 &= [\phi, \phi_1] + 2\langle A_1, B\rangle - 2\langle A, B_1\rangle, \\ \varrho_2 &= (A_1, B) - (A, B_1), \\ A_2 &= (\phi - \tfrac{2}{3}\varrho)A_1 - (\phi_1 - \tfrac{2}{3}\varrho_1)A, \\ B_2 &= (\phi' + \tfrac{2}{3}\varrho)B_1 - (\phi_1' + \tfrac{2}{3}\varrho_1)B, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit 4.3.

Der Ausdruck $P \times P$ wird also gemäss der adjungierten Gruppe von Inv ($\mathfrak{M}$) transformiert. Hieraus folgt

$$[\Theta, P_1 \times P_2] = \Theta P_1 \times P_2 + P_1 \times \Theta P_2. \tag{4.4}$$

Inv ($\mathfrak{M}$) lässt in $\mathfrak{R}$ eine antisymmetrische Bilinearform

$$\{P_1, P_2\} = (X_1, U_2) - (X_2, U_1) + \xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1 \tag{4.5}$$

invariant, wie man ohne Mühe nachrechnet. Also

$$\{\Theta P_1, P_2\} + \{P_1, \Theta P_2\} = 0. \tag{4.6}$$

Wir wenden Θ nun auf $(P \times P)P$ an:

$$\left\{ \begin{aligned} \Theta\colon\ d((P \times P)\, P) &= 2(\Theta P \times P)P + (P \times P)\Theta P \\ &= [\Theta, P \times P]P + (P \times P)\Theta P \\ &= \Theta(P \times P)P. \end{aligned} \right. \tag{4.7}$$

Die $(P \times P)P$ transformieren sich bei Inv ($\mathfrak{M}$) also wie die P.

$$J = \tfrac{1}{6}\{(P \times P)P, P\} \tag{4.8}$$

ist daher eine Invariante von Inv ($\mathfrak{M}$).

Eine Rechnung, die keine Schwierigkeiten bietet, zeigt, dass man J auch schreiben kann:

$$J = (X \times X, U \times U) - \xi \det X - \omega \det U - \tfrac{1}{4}((X, U) - \xi\omega)^2. \tag{4.9}$$

Inv ($\mathfrak{M}$) lässt sich auch charakterisieren als die Gruppe, die J invariant lässt [8]).

J lässt sich noch ausdrücken mittels der Spur von $\Theta\Theta$ in $\mathfrak{R}$:

$$J = -\tfrac{1}{15}\chi((P \times P)\,(P \times P)). \tag{4.10}$$

---

[7]) Die Indizes 1 und 2 bei Θ haben hier nichts mit denen von früher zu machen.

[8]) J ist im Wesentlichen dieselbe Form wie in E_7. Siehe auch C. CHEVALLEY, Math. Reviews **14**, 948 (1953).

Zum Beweise berechne man $\chi(\Theta\Theta)$, was keine Schwierigkeiten bietet. Wir behandeln beispielsweise den Beitrag in $\Theta\Theta$, der herrührt von

$$Z \to 2B \times (2A \times Z) = 2\langle B, A\rangle Z + (A, Z)B + \tfrac{1}{3}(A, B)Z$$

(nach 1.21); die Spur von $\langle B, A\rangle$ verschwindet, die aus dem zweiten Summand ist (A, B), die aus dem dritten $27 \cdot \frac{1}{3}(A, B)$; zusammen $10(A, B)$.

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\chi(\Theta\Theta) = 2\chi(\phi\phi) + 24(A, B) + 8\varrho^2.$$

Einsetzen von $P \times P$ für Θ gemäss 4.2 ergibt bei Berücksichtigung von 1.27

$$\begin{aligned}\chi(\Theta\Theta) = &-12(X \times X,\ U \times U) + 4(X, U)^2 \\ &- 6(U \times U - \xi X,\ X \times X - \omega U) + \tfrac{1}{2}\chi(X \circ U - \xi\omega)^2 \\ = &-18J.\end{aligned}$$

5. Inv $(\mathfrak{M})$ *ist* $\mathfrak{E}_7$.

Inv $(\mathfrak{M})$ ist irreduzibel. Um das einzusehen, suchen wir den von

$$P = (X, U, \xi, \omega)$$

erzeugten invarianten Teilraum $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$. Wir wenden auf P

$$\Theta = (0, 3, 0, 0)$$

an:

$$\Theta P = (X, -U, -3\xi, 3\omega) \in \mathfrak{R}',$$

$$\Theta\Theta P = (X, \quad U, \quad 9\xi, 9\omega) \in \mathfrak{R}'.$$

Lineare Kombination ergibt ein P mit nur einer nicht verschwindenden Komponente. Ist das etwa

$$P_1 = (X,\ 0,\ 0,\ 0),$$

so gibt

$$\Theta_1 = (0,\ 0,\ 0,\ X):$$

$$\Theta_1 P_1 = (0,\ 0,\ 0,\ (X, X)) \in \mathfrak{R}'.$$

Ist dagegen

$$P_1 = (0,\ U,\ 0,\ 0),$$

so gibt

$$\Theta_1 = (0,\ 0,\ 0,\ B):$$

$$\Theta_1 P_1 = (2B \times U,\ 0,\ 0,\ 0) \in \mathfrak{R}'$$

und $\neq 0$ für geeignetes B, also schliesslich wieder

$$(0,\ 0,\ 0,\ 1) \in \mathfrak{R}'.$$

Ist endlich

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1,\ 0) \in \mathfrak{R}',$$

so gibt

$$\Theta_1 = (0,\ 0,\ A,\ 0):$$

$$\Theta_1 P_1 = (A,\ 0,\ 0,\ 0) \in \mathfrak{R}',$$

und also auch wieder

$$(0,\ 0,\ 0,\ 1) \in \mathfrak{R}'.$$

Ebenso zeigt man

$$(0,\ 0,\ 1,\ 0) \in \mathfrak{R}'.$$

Hieraus schliesst man nun ohne weiteres auf $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$.

Aus der Irreduzibilität und $\chi(\Theta)=0$ für $\Theta \in \mathrm{Inv}\,(\mathfrak{M})$ folgt die Halbeinfachheit. Wir bestimmen die Wurzelformen.

Als reguläre abelsche Untergruppe wählen wir die von Inv (det X) (siehe *OAO*, p. 41) erweitert mit

$$(0,\ \varrho,\ 0,\ 0).$$

Als Wurzelformen erhält man (wenn man die Abhängigkeit von ϱ vernachlässigt) erstens die von Inv (det X) [9])

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \pm\alpha_\mu i \pm \alpha_\nu i \\ \pm\alpha_\nu i \pm \tfrac{1}{2}(\xi_2-\xi_3) \\ \tfrac{1}{2}(\pm\alpha_0 i \pm \alpha_1 i \pm \alpha_2 i \pm \alpha_3 i) \pm \tfrac{1}{2}\begin{matrix}(\xi_3-\xi_1)\\(\xi_1-\xi_2)\end{matrix} \end{cases}$$

(oberer Summand bei gerader Anzahl von Pluszeichen in den α, unterer bei ungerader). Ferner die Gewichte von Inv (det X)

$$(5.2)\qquad \begin{cases} \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \\ \pm\alpha_\nu i + \tfrac{1}{2}(\xi_2+\xi_3) \\ \tfrac{1}{2}(\pm\alpha_0 i \pm \alpha_1 i \pm \alpha_2 i \pm \alpha_3 i) + \tfrac{1}{2}\begin{matrix}(\xi_3+\xi_1)\\(\xi_1+\xi_2)\end{matrix} \end{cases}$$

und die der kontragredienten Gruppe

$$(5.3)\qquad \begin{cases} -\xi_1,\ -\xi_2,\ -\xi_3 \\ \pm\alpha_\nu i - \tfrac{1}{2}(\xi_2+\xi_3) \\ \tfrac{1}{2}(\pm\alpha_0 i \pm \alpha_1 i \pm \alpha_2 i \pm \alpha_3 i) - \tfrac{1}{2}\begin{matrix}(\xi_3+\xi_1)\\(\xi_1+\xi_2)\end{matrix} \end{cases}$$

Hierbei ist immer $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$.

Berücksichtigt man die Abhängigkeit von ϱ, so muss man nach 4.1 alle Ausdrücke 5.2 mit einem Summand $-\frac{2}{3}\varrho$ korrigieren, alle Ausdrücke 5.3 mit einem Summand $\frac{2}{3}\varrho$. Statt dessen kann man ξ_i durch $\xi_i+\frac{2}{3}\varrho$ ersetzen. Das bedeutet, dass 5.1–3 die Wurzelformen von Inv (det X) sind: die Einschränkung $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$ erlischt.

Als System irreduzibler positiver Wurzelformen (d.h. die nicht Summe anderer positiver Wurzelformen sind), nehme man

(1) ξ_3, (2) ξ_2, (3) ξ_1, (4) $\alpha_3 i-\frac{1}{2}(\xi_2+\xi_3)$,
(5) $\alpha_2 i-\alpha_3 i$, (6) $\alpha_1 i-\alpha_2 i$, (7) $\frac{1}{2}(\alpha_0 i-\alpha_1 i-\alpha_2 i-\alpha_3 i)-\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2)$.

Dann findet man das Coxeter-Schema [10])

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & - & 7 & - & 2 & - & 4 & - & 5 & - & 6 \\ & & & & & & | & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \end{array}$$

der $\mathfrak{E}_7$.

Also ist Inv $(\mathfrak{M})$ eine reelle Form der $\mathfrak{E}_7$.

6. *Transitivität von* Inv $(\mathfrak{M})$ *auf* $\mathfrak{M}$.

Sei
$$P=(X,\ U,\ \xi,\ \omega) \in \mathfrak{M},$$
$$\Theta=(0,\ 0,\ A,\ 0).$$

[9]) In *OAO* 8.3.2 und weiterhin fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.
[10]) In *OAO* sprach ich fälschlich von "Dynkin-Schema".

Dann ist (4.1)

$$(6.1)\quad (\exp \Theta)P = P + (\omega A,\ \ 2A \times X + 2\omega A \times A,\ (A, U) + 2(A, A \times X) + 6\omega \det A,\ 0).$$

Sei $\omega \neq 0$. Mit $A = -\omega^{-1}X$ erhält man dann in Inv $(\mathfrak{M}) \cdot P$ ein Element $(0, \ldots, \ldots, \ldots)$ von $\mathfrak{M}$, das wegen $2.0-3$ sogar von der Form

$$(0,\ 0,\ 0,\ \omega) \in \mathrm{Inv}\,(\mathfrak{M}) \cdot P$$

sein muss. Alle P mit $\omega \neq 0$ befinden sich also *einer* Transitivitätsschicht. Analog alle P mit $\xi \neq 0$. Ist nun $\xi = \omega = 0$, aber $X \neq 0$, so wähle man A in 6.1 so, dass $(A, A \times X) + (A, U) \neq 0$ ist; man findet dann in Inv $(\mathfrak{M}) \cdot P$ ein Element mit $\xi \neq 0$. Analog verfährt man für $\xi = \omega = 0$, $U \neq 0$. Hieraus folgt Inv $(\mathfrak{M})\ P = \mathfrak{M}$.

Wir verwenden die Transitivität von Inv $(\mathfrak{M})$ auf $\mathfrak{M}$ zum Beweise der Formel

$$(6.1)\quad (P \times P_1)P_2 - (P \times P_2)P_1 = \tfrac{1}{4}\{P_1, P_2\}P + \tfrac{1}{8}\{P, P_2\}P_1 + \tfrac{1}{8}\{P_1, P\}P_2.$$

Es genügt, diese Formel zu beweisen für

$$(6.2)\qquad P = (0,\ 0,\ 0,\ 1);$$

sie gilt dann für alle $P \in \mathfrak{M}$. Da Inv $(\mathfrak{M})$ irreduzibel ist, ist der kleinste lineare Teilraum von $\mathfrak{R}$, der $\mathfrak{M}$ enthält, $\mathfrak{R}$ selber; also gilt 6.1 dann für alle $P \in \mathfrak{R}$.

Mit (6.2) wird

$$\begin{aligned}
P \times P_1 &= 0,\ \tfrac{3}{8}\xi,\ 0,\ -\tfrac{1}{4}U_1.\\
(P \times P_1)P_2 &= \tfrac{1}{8}\xi_1 X_2 - \tfrac{1}{2}U_1 \times U_2,\ -\tfrac{1}{8}\xi_1 U_2 - \tfrac{1}{4}\xi_2 U_1,\ -\tfrac{3}{8}\xi_1\xi_2,\\
&\qquad -\tfrac{1}{4}(U_1, X_2) + \tfrac{3}{8}\xi_1\omega_2.\\
(P \times P_1)P_2 - (P \times P_2)P_1 &= \tfrac{1}{8}(\xi_1 X_2 - \xi_2 X_1),\ \tfrac{1}{8}(\xi_1 U_2 - \xi_2 U_1),\ 0,\\
&\qquad \tfrac{1}{4}(U_2, X_1) - \tfrac{1}{4}(U_1, X_2) + \tfrac{3}{8}(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1).\\
\tfrac{1}{4}\{P_1, P_2\}P &= 0,\ 0,\ 0,\\
&\qquad \tfrac{1}{4}((X_1, U_2) - (X_2, U_1) + \xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1).\\
\tfrac{1}{8}\{P, P_2\}P_1 &= -\tfrac{1}{8}\xi_2 X_1,\ -\tfrac{1}{8}\xi_2 U_1,\ -\tfrac{1}{8}\xi_1\xi_2,\ -\tfrac{1}{8}\xi_2\omega_1.\\
\tfrac{1}{8}\{P_1, P\}P_2 &= \tfrac{1}{8}\xi_1 X_2,\ \tfrac{1}{8}\xi_1 U_2,\ \tfrac{1}{8}\xi_1\xi_2,\ \tfrac{1}{8}\xi_1\omega_2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt 6.1.

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. II [1954c]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954), 363–368
[Zbl 0058.26101; MR 0068549]

(Communicated at the meeting of May 29, 1954)

7. *Eine Form der* $\mathfrak{E}_8$.

Wir bilden das direkte Produkt von Inv $(\mathfrak{M})$ mit einem Exemplar $\mathfrak{Z}$ der $\mathfrak{A}_3$ (Basiselemente Γ, $\underline{\Delta}$, $\overline{\Delta}$; $[\Gamma, \underline{\Delta}]=2\underline{\Delta}$, $[\Gamma, \overline{\Delta}]=2\overline{\Delta}$, $[\Delta, \overline{\Delta}]=\Gamma$). Ferner nehmen wir zwei Exemplare $\underline{\mathfrak{R}}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ und bilden ihre direkte Summe.

Wir stellen Inv $(\mathfrak{M}) \times \mathfrak{Z}$ dar in $\underline{\mathfrak{R}}+\overline{\mathfrak{R}}$:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}, \quad \underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

angewandt auf

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

mit $P_1 \in \underline{\mathfrak{R}}$, $P_2 \in \overline{\mathfrak{R}}$. (Die Nullen und Einsen sind lineare Operatoren in $\underline{\mathfrak{R}}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$; die doppelte Bedeutung von Θ veranlasst keine Schwierigkeiten.)

Die Summe der linearen Räume Inv $(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{Z}$, $\underline{\mathfrak{R}}$, $\overline{\mathfrak{R}}$ machen wir zu einem Infinitesimalring $\mathfrak{R}$ durch folgende besondere Festsetzungen

$$[\Lambda, Q] = \Lambda Q \text{ für } \Lambda \in \text{Inv}\,(\mathfrak{M})+\mathfrak{Z},\ Q \in \underline{\mathfrak{R}}+\overline{\mathfrak{R}}.$$

Weiter mit der Bezeichnung

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix}:$$

$$[\underline{P}_1, \overline{P}_2] = P_1 \times P_2 - \tfrac{1}{8}\{P_1, P_2\}\Gamma,$$
$$[\underline{P}_1, \underline{P}_2] = \tfrac{1}{4}\{P_1, P_2\}\underline{\Delta},$$
$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2] = -\tfrac{1}{4}\{P_1, P_2\}\overline{\Delta}.$$

Von den zu erhärtenden Jacobi-Relationen beruhen die meisten auf der Tatsache, dass Inv $(\mathfrak{M})+\mathfrak{Z}$ in $\underline{\mathfrak{R}}+\overline{\mathfrak{R}}$ dargestellt ist, und dass $\{\ldots, \ldots\}$ und $\times$ gegenüber Inv $(\mathfrak{M})$ invariante Operationen sind. Übrig bleiben die zwischen

$$\underline{P}_1, \underline{P}_2, \overline{P}_3$$

und zwischen

$$\overline{P}_1, \overline{P}_2, P_3,$$

die aber unmittelbar aus 6.1 folgen.

Die Einfachheit des Lie-Ringes $\mathfrak{R}$ ist leicht einzusehen. Wir ermitteln

die Wurzelformen. Als reguläre abelsche Untergruppe nehmen wir die von Inv ($\mathfrak{M}$), ergänzt mit Γ. Wir vernachlässigen vorläufig die Abhängigkeit der Wurzelformen von dem Koeffizienten γ von Γ. Als Wurzelformen erhalten wir erstens die von Inv ($\mathfrak{M}$) (5.1—3)

$$(7.1)\qquad \begin{cases} \pm \xi_1, \pm \xi_2, \pm \xi_3 \\ \pm \alpha_\mu i \pm \alpha_\nu i \\ \pm \alpha_\nu i \pm \tfrac{1}{2}(\xi_2 \pm \xi_3) \\ \tfrac{1}{2}(\pm \alpha_0 i \pm \alpha_1 i \pm \alpha_2 i \pm \alpha_3 i) \pm \tfrac{1}{2} \begin{matrix} (\xi_3 \pm \xi_1) \\ (\xi_1 \pm \xi_2). \end{matrix} \end{cases}$$

Ferner (doppelt) die Gewichte von Inv ($\mathfrak{M}$), die man aus 4.1 feststellt; nämlich die von Inv (det X) mit einem Extrasummand $\frac{1}{3}\varrho$, die kontragredienten mit einem Summand $-\frac{1}{3}\varrho$, und ausserdem die zu ξ und ω gehörenden, $\pm \varrho$. Hier ersetze man wieder ξ_ν durch $\xi_\nu + \frac{2}{3}\varrho$ und berücksichtige $\xi_1+\xi_2+\xi_3 = -2\varrho$. So erhält man

$$(7.2)\qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\pm \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3) \\ \quad \pm \alpha_\nu i \pm \tfrac{1}{2}\xi_1 \\ \tfrac{1}{2}(\pm \alpha_0 i \pm \alpha_1 i \pm \alpha_2 i \pm \alpha_3 i) \pm \tfrac{1}{2} \begin{matrix} \xi_2' \\ \xi_3. \end{matrix} \end{cases}$$

Berücksichtigt man nun die Abhängigkeit von γ, so tritt zu den (7.2) der Summand $\pm \gamma$, und schliesslich hat man noch die zwei Gewichte

$$(7.3)\qquad \pm 2\gamma.$$

Symmetrischer wird das System, wenn man 2γ durch ξ_0 ersetzt:

$$\begin{aligned} &\pm \xi_\nu \\ &\tfrac{1}{2}(\pm \xi_0 \pm \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3) \\ &\pm \alpha_\nu i \pm \tfrac{1}{2}(\xi_0 \pm \xi_1), \ \pm \alpha_\nu i \pm (\xi_2 \pm \xi_3) \\ &\tfrac{1}{2}(\pm \alpha_0 i \pm \alpha_1 i \pm \alpha_2 i \pm \alpha_3 i) \pm \tfrac{1}{2} \begin{matrix} (\xi_0 \pm \xi_2) \text{ oder } (\xi_1 \pm \xi_3) \\ (\xi_0 \pm \xi_3) \text{ oder } (\xi_1 \pm \xi_2) \end{matrix} \\ &\pm \alpha_\mu i \pm \alpha_\nu i. \end{aligned}$$

Als irreduzibles Wurzelformensystem findet man:

(1) ξ_3, (2) ξ_2, (3) ξ_1, (4) $\frac{1}{2}(\xi_0 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3)$, (5) $\alpha_3 i - \frac{1}{2}(\xi_0 + \xi_1)$, (6) $\alpha_2 i - \alpha_3 i$,
(7) $\alpha_1 i - \alpha_2 i$, (8) $\frac{1}{2}(\alpha_0 i - \alpha_1 i - \alpha_2 i - \alpha_3 i) - \frac{1}{2}(\xi_0 + \xi_2)$,

mit dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccc} 7 & - & 6 & - & 5 & - & 3 & - & 4 & - & 2 & - & 8, \\ & & & & & & & & \mid & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & \end{array}$$

das zur $\mathfrak{E}_8$ gehört. $\mathfrak{R}$ ist also eine Form der $\mathfrak{E}_8$.

8. *Weitere Eigenschaften von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.*

8.1. Sei $\{P_i, P_j\} = 0$. Dann ist $(P_1 \times P_2)\, P_3$ symmetrisch in 1, 2, 3. (Folgt aus 6.1.)

8.2. Sei $P \in \mathfrak{M}$, $\{P, P_1\}=0$. Dann ist $(P \times P_1)\, P=0$. (Folgt aus 8.1.)

8.3. Sei $P \in \mathfrak{M}$. Dann ist $((P_1 \times P_2)\, P) \times P=0$.

Denn wegen $P_1 \times P_2 \in \mathfrak{L}$ und 4.4 ist

$$2((P_1 \times P_2)\, P) \times P=[P_1 \times P_2,\ P \times P]=0.$$

8.4. Sei $P_1, P_2 \in \mathfrak{M}$, $\{P_1, P_2\}=0$ und $(P_1 \times P_2)P=P_3$. Dann ist $\{P_1, P_3\}=\{P_2, P_3\}=0$.

Denn wegen 4.4 ist

$$\{(P_1 \times P_2)\, P, P_1\}=-\{P, (P_1 \times P_2)\, P_1\}=0 \text{ (wegen 8.3).}$$

8.5. Sei $P_1, P_2 \in \mathfrak{M}$, $\{P_1, P_2\}=0$. Dann ist

$$(P_1 \times P_2)\,(P_1 \times P_2)\, P=0 \text{ für alle } P.$$

Denn wegen 8.4 können wir 8.1 anwenden und erhalten

$$(P_1 \times P_2)(P_1 \times P_2)P=(\,(\,(P_1 \times P_2)\, P) \times P_2)\, P_1,$$

weiter wegen 6.1

$$=\big(\,(\,(P_1 \times P)\, P_2+\tfrac{1}{4}\{P_2, P\}P_1+\tfrac{1}{8}\{P_1, P\}P_2+\tfrac{1}{8}\{P_2, P_1\}P\big) \times P_2\big)\, P_1,$$

wo nach Auflösung der Klammer die verschiedenen Summanden nach Voraussetzung oder nach 8.2–3 verschwinden.

8.6. Sei $P_1, P_2 \in \mathfrak{M}$, $\{P_1, P_2\}=0$. Dann ist $(P_1 \times P_2)\, \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$.

Denn nach 4.4 ist

$$(\,(P_1 \times P_2)\, P) \times (\,(P_1 \times P_2)\, P)=[P_1 \times P_2, (\,(P_1 \times P_2)\, P) \times P]- \\ -(\,(P_1 \times P_2)(P_1 \times P_2)\, P) \times P.$$

Für $P \in \mathfrak{M}$ verschwindet nach 8.3 der erste Summand; der zweite verschwindet nach 8.5.

8.7. Sei $P_i \times P_j=0$ $(i, j=1, 2, 3)$ und alle $P_i \in \mathfrak{M}$. Dann sind die P_i linear abhängig.

Beweis: Ist erst einmal

$$P_1=(X_1, U_1, 0, 0),$$
$$P_2=(X_2, U_2, 0, 0),$$

so ist $X_1 \times X_1=X_1 \times X_2=X_2 \times X_2=0$. Also stellen X_1, X_2 Punkte der Oktavenebene dar und zwar beide denselben, sind also abhängig. Dasselbe gilt hinsichtlich U_1, U_2. Wir können von P_1, P_2 also zu linearen Kombinationen

$$P_1=(X_1, 0, 0, 0),$$
$$P_2=(0, U_2, 0, 0)$$

übergehen. Ist weiter

$$P_3=(X_3, U_3, \xi_3, \omega_3),$$

so muss $0 \cdot X_3=\omega_3 U_2$ sein, also $\omega_3=0$. Ebenso $\xi_3=0$. Nun sind wieder

$X_1 \times X_1 = X_1 \times X_3 = X_3 \times X_3 = 0$, also X_1 und X_3 abhängig. Ebenso U_2, U_3 abhängig. Also hängt P_3 von P_1 und P_2 ab.

Von nun an dürfen wir voraussetzen

$$\begin{aligned} P_1 &= (X_1, U_1, 0, \omega_1) \quad , \quad \omega_1 \neq 0, \\ P_2 &= (X_2, U_2, \xi_2, 0) \quad , \quad \xi_2 \neq 0, \\ P_3 &= (X_3, U_3, 0, 0). \end{aligned}$$

Hier sind wieder X_2 und X_3 abhängig, ebenso U_1 und U_3. Man kann also durch linear Kombinieren entweder X_2 oder U_1 zum Verschwinden bringen. Wir nehmen an: $X_2 = 0$. Dann wird $\omega_1 U_2 = 0$, also $U_2 = 0$. Aus $U_2 \times U_3 = \frac{1}{2}\xi_2 X_3$ folgt weiter $X_3 = 0$, aus $X_1 \times X_3 = \frac{1}{2}\omega_1 U_3$ auch noch $U_3 = 0$. Also $P_3 = 0$. Also sind P_1, P_2, P_3 linear abhängig.

8.8. Sei $(P_1 \times P_2) P_3 = 0$, $P_i \in \mathfrak{M}$, $\{P_i, P_j\} = 0$. Dann sind die $P_i \times P$ zu je zweien linear abhängig.

Beweis: Wir dürfen nach 6 annehmen:

$$P_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Dann wird in $(i = 1, 2)$

$$\begin{gathered} P_i = (X_i, U_i, \xi_i, \omega_i): \\ \xi_1 = \xi_2 = 0, \\ U_1 \times U_1 = U_2 \times U_2 = 0, \\ U_1 \times U_2 - \tfrac{1}{2}(\xi_1 X_2 + \xi_2 X_1) = 0, \\ \chi(X_1 \circ U_2 + X_2 \circ U_1 - \xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1) = 0, \end{gathered}$$

also U_1, U_2 abhängig und wegen

$$P_i \times P_3 = (0, 0, 0, -\tfrac{1}{2} U_i)$$

auch $P_1 \times P_2$ und $P_1 \times P_3$ abhängig. Analog für die übrigen.

8.9. Sei $(P_1 \times P_2) P_3 \neq 0$, $P_i \in \mathfrak{M}$, $\{P_i, P_j\} = 0$. Dann gibt es im Wesentlichen genau ein $Q \in \mathfrak{M}$ mit $P_i \times Q = \{P_i, Q\} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Beweis: Nach 8.1–6 erfüllt $Q = (P_1 \times P_2) P_3$ die Bedingungen. Sei R eine weitere Lösung. Nun ist

$$\begin{aligned} 0 &= [P_1 \times P_2,\ P_3 \times R] + [P_3 \times R,\ P_1 \times P_2] \\ &= ((P_1 \times P_2) P_3) \times R + ((P_1 \times P_2) R) \times P_3 + ((P_3 \times R) P_1) \times P_2 + \\ &\qquad + ((P_3 \times R) P_2) \times P_1 \\ &= Q \times R \text{ (wegen 8.1).} \end{aligned}$$

Wir haben also

$$P_i \times Q = P_i \times R = Q \times R = 0.$$

Nach 8.7 sind für jedes i die P_i, Q, R linear abhängig. Hieraus folgt die Abhängigkeit der Q, R.

8.10. Sei $((P_1 \times P_2) P_3) \times P_4 = 0$, $P_i \in \mathfrak{M}$, $\{P_i, P_j\} = 0$. Dann sind die $(P_i \times P_j) P_k$ zu je zweien linear abhängig.

Beweis: Ist $P=(P_1 \times P_2)\, P_3=0$, so sind nach 8.8 schon die $P_i \times P_j$ $(i=1, 2, 3)$ zu je zweien abhängig. Sei $P \neq 0$. Dann sind nach 8.9: $P \times P_i=0$ $(i=1, 2, 3, 4)$, $(P_i \times P_j)P_k$ abhängig von P, also untereinander abhängig.

8.11. Von 8.5 gilt die Umkehrung:

Sei $\Theta \in \mathfrak{L}$, $\Theta\Theta P=0$ für alle $P \in \mathfrak{M}$. Dann ist Θ darstellbar in der Form

$$\Theta=P_0 \times P_1,\ P_i \in \mathfrak{M},\ \{P_0, P_1\}=0.$$

8.12. Wir beweisen erst:

Ist $\phi \in \mathrm{Inv}\ (\det X)$ und $\phi\phi X=0$ für alle $X \in \mathfrak{X}$, so ist $\phi=0$.

Beweis:

$$\phi\phi(U \times V)=0,$$

also

$$\phi' U \times \phi' V=0,$$

speziell

$$\phi' U \times \phi' U=0.$$

Die $\phi' U$ stellen also *eine* Oktavengerade dar.

$$\phi' U=\beta_U U_0=(X_0, U)\, U_0.$$

Aus

$$(\phi X, U)+(X, \phi' U)=0$$

folgt

$$\phi X=-(X, U_0)\, X_0,$$
$$(X_0, U_0)=0.$$

Nun ist $\phi'(X \times X)$ einerseits

$$=(X_0, X \times X)\, U_0,$$

andererseits

$$=-2(X, U_0)X_0 \times X.$$

Wäre $U_0 \neq 0$, so könnten wir X so wählen, dass $(X, U_0) \neq 0$ und $X_0 \times X$ unabhängig von U_0 wäre, im Widerspruch zur abgeleiteten Gleichung. Also ist $U_0=0$, $\phi'=0$, $\phi=0$.

8.13. Beweis von 8.11:

Sei $P \in \mathfrak{M}$. Dann ist nach 4.4

$$2(\Theta P) \times P=[\Theta, P \times P]=0,$$
$$(\Theta P) \times (\Theta P)=[\Theta, (\Theta P) \times P]+(\Theta\Theta P) \times P=0,$$

also $\Theta P \in \mathfrak{M}$. Ist $\Theta\mathfrak{M}=0$, so ist $\Theta=0$ und nichts zu beweisen. Wir dürfen daher wegen $\Theta\Theta\mathfrak{M}=0$ annehmen, dass ein nicht triviales $P_0 \in \mathfrak{M}$ existiert mit

$$\Theta P_0=0$$

und nach 6 sogar, dass es die Form

$$P_0=(0, 0, 0, 1)$$

besitzt. Dann ist

$$\Theta=(\phi, 0, 0, B).$$

Mit

$$P_1=(X, 0, 0, 0)$$

ist

$$\Theta P_1=(\phi X, 0, 0, (B, X)),$$
$$\Theta\Theta P_1=(\phi\phi X, 0, 0, (B, \phi X)),$$

also $\phi\phi=0$ und nach 8.12: $\phi=0$.

Mit

$$P_1=(0, 0, 1, 0)$$

ist

$$\Theta P_1=(0, B, 0, 0),$$
$$\Theta\Theta P_1=(2B \times B, \phi' B, 0, 0),$$

also

$$B \times B=0.$$

Also

$$\Theta=(0, 0, 0, B) \quad \text{mit } B \times B=0.$$

Mit

$$P_1=(0, -4B, 0, 0)$$

wird

$$\{P_0, P_1\}=0, P_0, P_1 \in \mathfrak{M},$$
$$P_0 \times P_1=(0, 0, 0, B)=\Theta.$$

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. III [1955a]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 58 (1955), 151–157
[Zbl 0068.14104; MR0068550]

(Communicated at the meeting of January 29, 1955)

9. *Die Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{N}$.

Statt $\Theta^2=0$ sagen wir nun $\Theta \in \mathfrak{N}$.

9.1. Nach 8.11 gilt $\Theta \in \mathfrak{N}$ dann und nur dann, wenn $\Theta = P_0 \times P_1$ mit geeigneten $P_i \in \mathfrak{M}$ und $\{P_0, P_1\}=0$. Der Beweis zeigt, dass man hier $P_0 \neq 0$ mit $\Theta P_0 = 0$ beliebig vorschreiben darf. Ist nun auch $\Theta P_2 = 0$, $\{P_i, P_2\}=0$, so ist nach 8.8 $P_0 \times P_2$ abhängig von $P_0 \times P_1$. So fährt man fort mit einem P_3 und findet, dass

$$P \times Q = \alpha \Theta \text{ für alle } P, Q \text{ mit } \Theta P = \Theta Q = 0,\ \{P, Q\}=0.$$

9.2. Dann und nur dann ist $\Theta P = 0$ ($\Theta \in \mathfrak{N}$, $P \in \mathfrak{M}$), wenn für geeignetes $P_1 \in \mathfrak{M}$ gilt: $P = \Theta P_1$.

Beweis: "Dann" ist klar. — Wir wählen irgendein $P_1 \in \mathfrak{M}$ mit $\Theta P_1 \neq 0$, $P \times P_1 = 0$ (also auch $\{P, P_1\}=0$). Nach 4.4. ist $\Theta P \times P_1 + P \times \Theta P_1 = 0$, also

$$P \times \Theta P_1 = 0.$$

Ausserdem

$$P \times P_1 = 0,$$
$$P_1 \times \Theta P_1 = 0$$

(wegen 8.2). Nach 8.7 gibt es dann eine Relation

$$\alpha P + \beta P_1 + \gamma \Theta P_1 = 0.$$

Hierauf Θ angewandt wird $\beta = 0$. Also nach geeigneter Normierung $\Theta P_1 = P$.

9.3. Wendet man Θ^2 mit

$$\Theta = (\phi, \varrho, A, B) \in \mathfrak{N}$$

nach 4.1. auf

$$P = (0, 0, 0, 1) \text{ und } (0, 0, 1, 0)$$

an, so erhält man die Beziehungen

$$A \times A = B \times B = 0, \tag{9.3.1}$$

$$(A, B) = -\varrho^2, \tag{9.3.2}$$

$$(\phi + \tfrac{1}{3}\varrho)\, A = (\phi' - \tfrac{1}{3}\varrho)\, B = 0. \tag{9.3.3}$$

Weiter bei Anwendung von Θ^2 auf

$$(X, 0, 0, 0) \text{ und } (0, U, 0, 0):$$

$$\begin{aligned} (\phi + \tfrac{1}{3}\varrho)^2\, X + 4B \times (A \times X) + (B, X)\, A = 0, \\ (\phi' - \tfrac{1}{3}\varrho)^2\, U + 4A \times (B \times U) + (A, U)\, B = 0 \end{aligned} \tag{9.3.4}$$

identisch in X, U. Ferner

$$2A \times (\phi+\tfrac{1}{3}\varrho)\, X+(\phi'-\tfrac{1}{3}\varrho)\ (2A \times X)=0,$$

was man nach 1.14 und 9.3.3 auch schreiben kann als

$$(9.3.5)\qquad \begin{cases} A \times \phi\, X=\tfrac{2}{3}\varrho A \times X, \\ B \times \phi' U=-\tfrac{2}{3}\varrho B \times U. \end{cases}$$

Die übrigen Relationen bringen nichts Neues. 9.3.1–5 sind also notwendig und hinreichend für $\Theta \in \mathfrak{N}$.

Ist $A=0$ oder $B=0$, so ist nach 9.3.2 auch $\varrho=0$, also (nach 9.2.4) $\phi^2=0$ und dann auch 8.12: $\phi=0$.

9.4. $\mathfrak{N}$ ist natürlich invariant gegenüber der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{E}_7$. Wir zeigen, dass es (projektiv betrachtet) *transitiv* transformiert wird, d.h., dass wir mittels der Gruppe ein gegebenes

$$\Theta_1=(\phi_1, \varrho_1, A_1, B_1) \in \mathfrak{N}$$

bis auf einen skalaren Faktor in jedes andere Element von $\mathfrak{N}$ überführen können.

Zuerst können wir erreichen, dass $\varrho_1 \neq 0$ wird, und zwar durch Anwendung eines exp $(0, 0, A, B)$, für das $(A_1, B)-(A, B_1) \neq 0$ ist (siehe 4.3). Wir setzen also $\varrho_1 \neq 0$ voraus. Wir berechnen mit

$$(9.4.1)\qquad \Theta=(0, 0, A, 0)$$

die Kommutatoren

$$(9.4.2)\qquad \begin{cases} [\Theta, \Theta_1] =(-2\langle A,B_1\rangle, -(A,B_1), -(\phi_1-\tfrac{2}{3}\varrho_1)\, A, 0), \\ [\Theta, [\Theta, \Theta_1]]=(\ 0\ ,\ 0\ , (2\langle A, B_1\rangle-\tfrac{2}{3}(A, B_1))\, A, 0) \\ \qquad\qquad =(\ 0\ ,\ 0\ , -2(A, B_1)\, A, 0) \end{cases}$$

(wegen 1.21). Die weiteren Kommutatoren verschwinden.

Wir setzen nun speziell

$$A=-\varrho_1^{-1}A_1$$

und erhalten unter Berücksichtigung von 9.3.3:

$$(9.4.3)\qquad \begin{cases} \Theta_2=(\exp\Theta)\cdot\Theta_1\cdot\exp(-\Theta)=\Theta_1+[\Theta, \Theta_1]+\tfrac{1}{2}[\Theta, [\Theta, \Theta_1]]= \\ \qquad\qquad =(\phi_1+2\varrho_1^{-1}\langle A_1, B_1\rangle, \varrho_1+\varrho_1^{-1}(A_1, B_1), 0, B_1). \end{cases}$$

Hieraus folgt nach 9.3, Ende:

$$(9.4.4)\qquad \Theta_2=(0,\ 0,\ 0,\ B_1).$$

Wendet man hierauf ein

$$\exp(\phi,\ 0,\ 0,\ 0)$$

mit geeignetem $\phi \in \mathrm{Inv}\ (\det X)$ an, so geht Θ_2 über in ein

$$\Theta_3=(0,\ 0,\ 0,\ B)$$

mit (bis auf skalaren Faktor) beliebig vorgeschriebenen B $(B \times B=0)$.

So ergibt sich die zu beweisende Transitivität.

9.5. Nebenbei ergibt sich aus 9.4.1–2, dass $[\Theta, [\Theta, \Theta_1]]$ ein Vielfaches von Θ ist. Da wegen der Transitivität Θ typisch ist für ein Element von $\mathfrak{N}$, darf man diese Behauptung für beliebige $\Theta, \Theta_1 \in \mathfrak{N}$ aussprechen. Der auftretende Faktor muss eine bilineare Invariante φ der adjungierten Gruppe sein. φ ist symmetrisch, denn in

$$[\Theta_1, [\Theta, [\Theta, \Theta_1]]] = \varphi(\Theta, \Theta_1)\,[\Theta_1, \Theta],$$
$$[\Theta, [\Theta_1, [\Theta, \Theta]]] = \varphi(\Theta_1, \Theta)\,[\Theta, \Theta_1]$$

verschwindet die Summe der linken Seiten (Jacobi-Relation!), also $\varphi(\Theta, \Theta_1) - \varphi(\Theta_1, \Theta) = 0$. Infolgedessen ist φ bis auf einen Zahlenfaktor gleich der Spur von $\Theta\Theta_1$ in $\mathfrak{N}$. Der Faktor lässt sich aus 4, Ende, feststellen:

$$[\Theta, [\Theta, \Theta_1]] = -\tfrac{1}{12}\,\chi(\Theta\Theta_1)\,\Theta \quad \text{für } \Theta, \Theta_1 \in \mathfrak{N}. \tag{9.5.1}$$

Man kann das auch schreiben:

$$\Theta\,\Theta_1\,\Theta = \tfrac{1}{6}\,\chi(\Theta\,\Theta_1)\,\Theta \quad \text{für } \Theta, \Theta_1 \in \mathfrak{N}.$$

9.6. Ferner ergibt sich noch aus 9.4.3–4:

$$\varrho\phi = -2\,\langle A, B\rangle \tag{9.6.1}$$

für $\varrho \neq 0$, aber das gilt auch für $\varrho = 0$, da dann $\langle A, B\rangle = 0$ ist, wie sich sogleich ergeben wird (siehe 9.7.3).

9.7. Statt $X \times X = 0$, $X \in \mathfrak{S}$ schreiben wir $X \in \mathfrak{P}$ (für $X \neq 0$ stellt das geometrisch einen Punkt der Oktavenebene dar).

Aus 1.21 folgt

$$\langle A, U\rangle\,A = -\tfrac{2}{3}\,(A, U)\,A \quad \text{für } A \in \mathfrak{P}. \tag{9.7.1}$$

$$B \times (A \times X) = \tfrac{1}{4}\,(X, B)\,A \quad \text{für } A, B \in \mathfrak{P},\ (A, B) = 0 \tag{9.7.2}$$

sieht man bis auf die genaue Form des skalaren Faktors geometrisch ein, wenn man noch $X \in \mathfrak{P}$ voraussetzt. Den Faktor legt man durch spezielle Wahl der Variablen fest. Durch lineare Kombination erhält man schliesslich die Formel allgemein.

$$\langle A, B\rangle\,X = 0 \quad \text{für } A, B \in \mathfrak{P},\ (A, B) = 0 \tag{9.7.3}$$

folgt nun aus 9.7.2 und 1.21.

$$A \times (U \times (A \times X)) = \tfrac{1}{4}\,(A, U)\,A \times X \quad \text{für } A \in \mathfrak{P} \tag{9.7.4}$$

erschliesst man ähnlich wie 9.7.2.

9.8. Für $\varrho \neq 0$ genügen die Gleichungen 9.3.1–2, 9.6.1 mit übrigens beliebigen $\phi \in \mathrm{Inv}\,(\det X)$, $A, B \in \mathfrak{S}$ zur Beschreibung der $\Theta \in \mathfrak{N}$.

Beweis: 9.3.3 ergibt sich unmittelbar bei Anwendung von 9.7.1. Wir leiten der ersten Teil von 9.3.5 ab:

$$-\tfrac{1}{2}\,\varrho\,\phi\,X \times A = (\langle A, B\rangle\,X) \times A = 2A \times (B \times (A \times X)) - \tfrac{1}{6}\,(A, B)\,(A \times X)$$
$$\text{(nach 1.21)}$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(A, B)\,A \times X \quad \text{(nach 9.7.4).}$$

Analog ergibt sich der zweite Teil. 9.3.4 erfordert einige Rechnung, die wir weglassen.

Es hat sich also gezeigt, dass wir für ein $\Theta \in \mathfrak{N}$ mit $\varrho \neq 0$ die Komponenten A, B under der Bedingung

$$A, B \in \mathfrak{P}\ ,\ (A, B) \leqq 0$$

beliebig vorschreiben und danach ϱ und ϕ durch 9.3.2 und 9.6.1 zweideutig bestimmen können. Die Bedingung $(A, B) \leqq 0$ können wir auch durch

$$\chi\,(A \times B) \leqq 0 \tag{9.8.1}$$

ersetzen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir für ein festes $A \neq 0$ $(A \in \mathfrak{P})$ und $\beta \neq 0$ die 16-dimensionale Mannigfaltigkeit der $B \in \mathfrak{P}$ mit $\chi(B) = \beta$; durch die 8-dimensionale Menge der B mit $(A, B) = 0$ wird sie nicht zerlegt. $\chi(A)\,\chi(B)\,(A, B)$ wechselt also das Zeichen nicht, wenn B variiert; für $B = \chi\,(A)\,A$ ist der Ausdruck positiv, also gilt

$$\chi\,(A)\,\chi\,(B)\,(A, B) \geqq 0.$$

Nun ist

$$|(A, B)| \leqq |\chi\,(A)\,\chi\,(B)|,$$

also ist (siehe 1.6) in der Tat:

$$2\,\chi\,(A \times B)\,(A, B) = (\chi\,(A)\,\chi\,(B) - (A, B))\,(A, B) \geqq 0.$$

Der Raum der Paare A, B $(A, B \in \mathfrak{P})$ wird durch 0, 0 in vier Komponenten zerlegt, von denen nur zwei zulässig sind.

Wir hatten 9.8.1 unter der Voraussetzung $\varrho \neq 0$ abgeleitet. Aus Stetigkeitsgründen (siehe die Transitivität) bleibt es auch für $\varrho = 0$ gültig. Es vereinfacht sich dann wegen $(A, B) = 0$ nach 1.6 zu

$$\chi\,(A)\,\chi\,(B) \leqq 0. \tag{9.8.2}$$

9.9. Wir untersuchen nun die $\Theta \in \mathfrak{N}$ mit $\varrho = 0$, also $(A, B) = 0$. Die Beziehungen 9.3.1–5 vereinfachen sich dann. Wir schliessen $A = 0$ und $B = 0$ aus, da diese Fälle trivial sind. Für

$$P_1 = (A, 0, 0, 0)$$

gilt

$$P_1 \in \mathfrak{M},\ \Theta P_1 = 0.$$

Für

$$P_2 = (0, L, 0, 0)$$

mit $L \in \mathfrak{P}$ ist $P_2 \in \mathfrak{M}$ und

$$\Theta P_2 = (2B \times L,\ \phi' L,\ (A, L),\ 0),$$

$$P_1 \times \Theta P_2 = (\tfrac{1}{2}\langle A, \phi' L\rangle,\ -\tfrac{1}{8}(A, \phi' L),\ \tfrac{1}{4}(A, L)\,A,\ A \times (B \times L)).$$

Nach 9.1 ist das ein Vielfaches von Θ, also

$$\langle A, \phi' L\rangle = \tfrac{1}{2}(A, L)\,\phi.$$

Setzen wir

$$\phi' L = -M, \quad (A, L) = \zeta,$$

so wird demnach

(9.9.1) $$\zeta\phi = -2\langle A, M\rangle.$$

Aus 9.3.5 und 1.12 folgt nun

(9.9.2) $$M \times B = 0.$$

Ferner $M \times M = \phi' L \times \phi' L = \phi(L \times \phi' L) - \phi'^2 L \times L =$
$= \phi(0) + 2(A, L)\, B \times L = 2\,\zeta\, B \times L$
wegen 9.3.4 und 9.7.2. Also nach 9.7.2

(9.9.3) $$A \times (M \times M) = \tfrac{1}{2}\,\zeta^2 B.$$

Aus 9.9.1–2 sehen wir, wie wir ϕ durch A und B ausdrücken können mittels geeigneter M und ζ.

9.10. Seien umgekehrt ganz beliebige

(9.10.1) $$A, B \in \mathfrak{P} \text{ mit } (A, B) = 0,\ \chi(A \times B) \leqq 0$$

und $A \neq 0$, $B \neq 0$ gegeben. Dann lässt sich bei beliebigem M, das 9.9.2 genügt mit $A \times (M \times M) \neq 0$, gemäss 9.9.1, 9.9.3 ein ϕ bestimmen, so dass $(\phi, 0, A, B) \in \mathfrak{N}$.

Beweis: Wir setzen 9.9.2, 9.10.1 voraus. Nach 1.21 ist

$$\langle B, A\rangle\, M = -\tfrac{1}{2}\,(A, M)\, B,$$

andererseits verschwindet es nach 9.7.3. Also

(9.10.2) $$(A, M) = 0.$$

Nach 1.10 ist $(M \times M) \circ B = 0$, also det $(M \times M) = 0$, also det $M = 0$, also nach 1.17 $(M \times M) \times (M \times M) = 0$, also

(9.10.3) $$M \times M \in \mathfrak{P}.$$

$M \times M$ lässt sich nach 9.10.2–3 auffassen als Punkt auf der Geraden B (oder $M = 0$). Daher gibt es ein γ mit

(9.10.4) $$A \times (M \times M) = \gamma B.$$

Um das sicher notwendige (9.9.3) mit geeignetem ζ befriedigen zu können, wollen wir zeigen, das $\gamma \geqslant 0$ ist. Wir multiplizieren 9.10.4 innen mit B und setzen

$$C = A \times B\ (\in \mathfrak{P}).$$

Dann wird

(9.10.5) $$(C, M \times M) = \gamma(B, B),$$

und wir müssen noch zeigen, dass

(9.10.6) $$(C, M \times M) \geqq 0$$

ist.

Nun folgt aus 1.10

$$C \circ (C \times M) = 0$$

und aus 1.4

(9.10.7) $$C \times (C \times M) = -\tfrac{1}{2}\,\chi(C)\, C \times M + \tfrac{1}{2}\,(\chi(\,(C) - C)\,\chi(C \times M).$$

Bilden wir hier das innere Produkt mit M, und berücksichtigen wir $(C, M)=(A \times B, M)=(A, B \times M)=0$, so erhalten wir

$$(C \times M, C \times M)=-\tfrac{1}{2}\chi(C)\,(C \times M, M)+\tfrac{1}{2}\chi(C)\,\chi(M)\,\chi(C \times M).$$

Nun ist die linke Seite $\geqq 0$ und nach 1.6

$$\tfrac{1}{2}\chi(C)\,\chi(M)\,(C \times M)=\tfrac{1}{4}\chi(C)^2\,\chi(M)^2 \geqslant 0,$$

ferner (nach 9.10.1) $\chi(C) \leqslant 0$, also in der Tat

$$\chi(C \times M, M) \geqslant 0,$$

so dass 9.10.6 sich bestätigt.

Wir bestimmen nun ϕ und ζ entsprechend 9.9.1 und 9.9.3 (siehe auch 9.10.4):

(9.10.8) $$\zeta\phi=-2\langle A, M\rangle, \quad A \times (M \times M)=\tfrac{1}{2}\zeta^2 B.$$

Wir haben noch 9.3.1–5 zu verifizieren. Wir beschränken uns auf den zweiten Teil von 9.3.5 und den ersten von 9.3.4:

$B \times \zeta\phi' U=2B \times \langle M, A\rangle U=2B \times (A \times (M \times U))$ wegen 1.21, 9.9.2, 9.10.2

$$=\tfrac{1}{2}(B, M \times U)\,A \text{ wegen } 9.7.3,$$

und das verschwindet wegen 9.9.2. Weiter:

$\zeta^2\phi^2 X=4\langle A, M\rangle\langle A, M\rangle X=$
$=-\tfrac{1}{2}(M, 2M \times (A \times X)-\tfrac{1}{2}(X, M)\,A)\,A$ wegen 1.21.9.10.1, 9.7.4, 9.10.2
$=-(A \times (M \times M), X)\,A$ wegen 9.10.1
$=-\tfrac{1}{2}\zeta^2(X, B)\,A$ wegen 9.10.8.

Analog beweist man die andern Gleichungen.

9.11. Verschiedene M können nach 9.10.8 dasselbe ϕ bestimmen. Wir wollen die M nun noch so beschränken, dass zu *einem* ϕ nur *ein* M gehört.

Wir bemerken zunächst, dass ein skalarer Faktor und (wegen 9.9.2) ein Summand βB bei M das Resultat ϕ nicht beeinflusst. Wir können daher von vornherein M die Bedingung

(9.11.1) $$(M, B)=0$$

auferlegen. Diese Bedingung hat zur Folge, dass in 9.10.7 bei innerer Multiplikation mit B die linke Seite verschwindet, und dass $\chi(C \times M)=0$ wird, so dass man 9.10.7 einfacher

(9.11.2) $$C \times (C \times M)=-\tfrac{1}{2}\chi(C)\,C \times M$$

schreiben kann.

Wir machen nun Gebrauch von der Formel

(9.11.3) $$\langle X, Y \times Z\rangle+\langle Y, Z \times X\rangle+\langle Z, X \times Y\rangle=0,$$

die aus 1.23 durch Bilinearisieren folgt. Dann wird

$$\begin{aligned}\langle A, C \times (C \times M)\rangle &= -\langle C, (C \times M) \times A\rangle - \langle C \times M, A \times C\rangle \\ &= -\tfrac{1}{4}\langle C, (A, M)\, C\rangle \quad -\tfrac{1}{4}(A, A)\langle C \times M, B\rangle \\ &= \tfrac{1}{4}(A, A)(\langle B \times C, M\rangle + \langle M \times B, C\rangle) \\ &= \tfrac{1}{16}(A, A)(B, B)\langle A, M\rangle.\end{aligned}$$

$C \times (C \times M)$ führt also zum selben ϕ wie M, und nach 9.11.2 gilt das Gleiche für $C \times M$.

Beschränkt man sich auf die M der Form $C \times N$ mit $B \times N = 0$, $(B, N) = 0$, so gehört zu jedem ϕ genau ein M. Wir zeigen nämlich, dass

$$\langle A, M\rangle = 0 \tag{9.11.4}$$

dann nur von $M = 0$ befriedigt wird:

Gilt 9.11.4, so gilt auch $\langle M, A\rangle = 0$ und

$$\langle M, A\rangle\, M = 0,$$

also nach 9.10.2 und 1.21

$$2\, A \times (M \times M) = 0.$$

Wegen 9.10.3 ist also

$$M \times M = \alpha A. \tag{9.11.5}$$

Mit $M = C \times N$ ist

$$(C \times N) \times (C \times N) = \alpha A.$$

Bilinearisieren von 1.17 liefert für die linke Seite

$$\tfrac{1}{6}(N \times N, C)\, C,$$

also $\alpha = 0$ und nach 9.11.5: $M \times M = 0$. Das zusammen mit $M \times B = 0$ und $(M, B) = 0$ ergibt $M = 0$, was zu beweisen war.

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. IV [1955b]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 58 (1955), 277–285
[Zbl 0068.14104; MR 0068551]

(Communicated at the meeting of January 29, 1955)

10. *Kommutativität in* $\mathfrak{R}$.

10.1. $[\Theta,\Theta_1]=0$ für $\Theta, \Theta_1 \in \mathfrak{R}$ dann und nur dann, wenn ein $P \in \mathfrak{M}$ existiert mit $\Theta P=\Theta_1 P=0,\ P\neq 0$.

Beweis: "Dann": $\Theta_1=P\times P'$ mit geeignetem $P'\in\mathfrak{M}$ wegen 9.1. Wegen 4.4 ist $[\Theta,\Theta_1]=\Theta P\times P'+P\times\Theta P'=P\times\Theta P'$. Nun sind P und $P_1=\Theta P'$ in $\mathfrak{R}$, $\Theta P=\Theta P_1=0$, und wegen 4.6 auch $\{P,P_1\}=\{P,\Theta P'\}=$ $=-\{\Theta P,P'\}=0$. Also ist $[\Theta,\Theta_1]=P\times\Theta P'$ Vielfaches von Θ. Ebenso ist $[\Theta,\Theta_1]$ Vielfaches von Θ_1. Daher verschwindet es.

"Nur dann": Wir können annehmen, dass ein P_0 existiert mit etwa $\Theta_1 P_0\neq 0$. Ist nun $\Theta\Theta_1 P_0=0$, so setzen wir $P=\Theta_1 P_0$. Denn $\Theta P=\Theta\Theta_1 P_0=0$, $\Theta_1 P=\Theta_1\Theta_1 P_0=0$. Ist $\Theta\Theta_1 P_0\neq 0$, so leistet $P=\Theta\Theta_1 P_0$ das Gewünschte. Denn $\Theta P=\Theta^2\Theta_1 P_0=0$ und $\Theta_1 P=\Theta_1\Theta\Theta_1 P_0=\Theta_1[\Theta,\Theta_1]P_0=0$.

10.2. $[\Theta,\Theta_1]$ findet sich explizit ausgerechnet in 4.3 (siehe auch den dort anschliessenden Text). Es zeigt sich aber, dass schon das Nullsetzen der zweiten und dritten Zeile ausreicht, d.h. für die Kommutativität von

$$\Theta=(\phi,\varrho,A,B) \text{ und } \Theta_1=(\phi_1,\varrho_1,A_1,B_1)$$

ist (notwendig und) hinreichend, sobald $\Theta, \Theta_1\in\mathfrak{R}$ gilt:

$$(\phi-\tfrac{2}{3}\varrho)\,A_1=(\phi_1-\tfrac{2}{3}\varrho_1)\,A, \tag{10.2.1}$$

$$(A_1,B)=(A,B_1). \tag{10.2.2}$$

Beweis: Wenden wir $[\Theta,\Theta_1]$ auf

$$P=(0,0,0,1)\in\mathfrak{M}$$

an, so erhalten wir nach 10.2.1–2

$$[\Theta,\Theta_1]P=0.$$

Ist $\Theta P=\Theta_1 P=0$, so sind wir nach 10.1 fertig. Sei etwa $P_1=\Theta P\neq 0$. Ist ausser $\Theta P_1=0$ auch noch $\Theta_1 P_1=0$, so sind wir wieder fertig. Sei also $P_2=\Theta_1 P_1\neq 0$. Dann ist $\Theta_1 P_2=0$ und ausserdem $\Theta P_2=\Theta\Theta_1 P_1=\Theta\Theta_1\Theta P=$ $=\Theta[\Theta_1,\Theta]\,P=0$, also wieder nach 10.1: $[\Theta,\Theta_1]=0$.

10.3. Allgemeiner kann man das Vorstehende so formulieren: Ist $\Theta, \Theta_1\in\mathfrak{R}$ und gilt für ein $P\ (\neq 0)\in\mathfrak{M}$: $[\Theta,\Theta_1]\,P=0$, so gilt $[\Theta,\Theta_1]\,\mathfrak{M}=0$.

11. *Perspektivitäten in der Oktavenebene.*

11.1. Wir definieren Perspektivitäten $\Pi^{\varkappa}_{A,B}$ mit Scheitel A, Achse B und Doppelverhältnis $\varkappa$. (Vorläufig sollen Scheitel und Achse nicht

inzidieren.) Wir fordern, dass X und $\Pi^{\varkappa}_{A,B} X$ auf einer *reellen* Geraden (siehe *OAO* 7.7.12) liegen mit A und dem Punkt $B \times (A \times X)$, in dem die Verbindungsgerade $A \times X$ von A mit X die Achse B schneidet. Wir fordern weiter, dass das Doppelverhältnis dieser vier Punkte (unabhängig von X) $\varkappa$ ist, und zwar in der Reihenfolge, dass einander entsprechen die Punkte

$$A,\ B \times (A \times X),\ X,\ X'$$

und die projektiven Koordinaten auf der reellen Geraden:

$$0,\ \infty,\ 1,\ \varkappa.$$

11.2. Zur Berechnung der Doppelverhältnisse betrachten wir allgemein eine reelle projektive Gerade in der Oktavenebene mit den Fundamentalpunkten

$$X_0,\ X_\infty,\ X_1.$$

Ihre Punkte sind

$$X = \alpha X_0 + \beta X_\infty + \gamma X_1.$$

$X \times X = 0$ liefert für die α, β, γ die Bedingungsgleichung

$$\beta\gamma X_\infty \times X_1 + \gamma\alpha X_1 \times X_0 + \alpha\beta X_0 \times X_\infty = 0.$$

Da die drie Punkte auf einer Oktavengeraden U liegen, gilt

$$X_\infty \times X_1 = \lambda U,\ X_1 \times X_0 = \mu U,\ X_0 \times X_\infty = \nu U,$$

also

$$\lambda\beta\gamma + \mu\gamma\alpha + \nu\alpha\beta = 0 \tag{11.2.1}$$

Die reelle projektive Gerade erscheint als ein Kegelschnitt (ein Kreis auf der 8-dimensionalen Sphäre, die die Oktavengerade ist). Auf diesem Kegelschnitt haben wir das Doppelverhältnis der vier Punkte

$$(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1),\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

zu berechnen. Eine einfache Rechnung liefert für das Doppelverhältnis:

$$-\frac{\lambda\beta}{\mu\alpha}.$$

11.3 Dies Resultat wenden wir auf die Frage von 11.1 an:

$$\begin{aligned} \lambda U &= X \times (B \times (X \times A)) = \tfrac{1}{4}\,(X,\ B)\ A \times X, \\ \mu U &= A \times X, \\ \nu U &= A \times (B \times (A \times X)) = \tfrac{1}{4}\,(A,\ B)\ A \times X. \end{aligned}$$

Also, wenn wir $U = \frac{1}{4}\, A \times X$ setzen:

$$\lambda = (X,\ B),\ \mu = 4,\ \nu = (A,\ B). \tag{11.3.1}$$

Fordern wir, dass das Doppelverhältnis $\varkappa$ ist, so ergibt sich

$$4\alpha\varkappa = -\beta\ (X,\ B). \tag{11.3.2}$$

Aus 11.2.1 wird nun:

$$(X,\ B)\ \beta\gamma + 4\gamma\alpha + (A,\ B)\ \alpha\beta = 0,$$

also nach 11.3.2

$$-4\,\varkappa\,\alpha\gamma+4\,\alpha\gamma+(A,\,B)\,\alpha\beta=0,$$
$$4\,\alpha(1-\varkappa)=-\beta\,(A,\,B),$$

und zusammen mit (11.3.2) für $\beta=4$:

$$\alpha=-\frac{(X,B)}{\varkappa},\qquad \gamma=-\frac{(A,B)}{1-\varkappa}.$$

Wir haben also

$$\Pi^{\varkappa}_{A,B}\,X=-\frac{(X,B)}{\varkappa}\,A+4\,B\times(A\times X)-\frac{(A,B)}{1-\varkappa}\,X. \tag{11.3.3}$$

Das dies wirklich eine Projektivität ist, sehen wir so: Wir betrachten alle X auf einer festen Geraden V und zeigen, dass die $\Pi^{\varkappa}X$ auf einer festen Geraden U liegen. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir 11.3.3 innen mit irgeneinem U und erhalten:

$$\begin{aligned}(\Pi^{\varkappa}_{A,B}\,X,\,U)&=-\frac{1}{\varkappa}\,(X,\,B)\,(A,\,U)+4\,(B\times U,\,A\times X)-\frac{1}{1-\varkappa}\,(A,B)\,(X,U)=\\&=\Big(X,\,-\frac{1}{\varkappa}(A,\,U)\,B+4\,A\times(B\times U)-\frac{1}{1-\varkappa}\,(A,\,B)\,U\Big)=\\&=(X,\,\Pi^{\varkappa}_{B,A}\,U).\end{aligned}$$

Setzen wir nun speziell

$$U=(\Pi^{\varkappa}_{B,A})^{-1}\,V,$$

so verschwindet das und ergibt sich für alle X mit $(X,\,V)=0$:

$$(\Pi^{\varkappa}_{A,B}\,X,\,U)=0.$$

Dass U wirklich eine Gerade darstellt, ist klar, da man es ebenso interpretieren kann wie den Ausdruck 11.3.3.

11.4. Es ist zweckmässig, $\Pi^{\varkappa}_{A,B}$ so zu normieren, dass

$$\Pi^{\varkappa}_{A,B}\,\Pi^{\varkappa_1}_{A,B}=\Pi^{\varkappa\varkappa_1}_{A,B} \tag{11.4.1}$$

genau — nicht nur bis auf einen skalaren Faktor — gilt. Wir setzen darum

$$\Pi^{\varkappa}_{A,B}\,X=X+\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\,\frac{(X,B)}{(A,B)}\,A-\frac{4(1-\varkappa)}{(A,B)}\,B\times(A\times X). \tag{11.4.2}$$

Wir verifizieren die Gültigkeit von 11.4.1, indem wir dies nach $\varkappa$ differenzieren und die Gruppeneigenschaft so nachweisen.

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{d\varkappa}\,\Pi^{\varkappa}_{A,B}\,X=-\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{(X,B)}{(A,B)}\,A+\frac{4}{(A,B)}\,B\times(A\times X),\\&\Big(\frac{d}{d\varkappa}\,\Pi^{\varkappa}_{A,B}X\Big)_{\varkappa=1}=-\frac{(X,B)}{(A,B)}\,A+\frac{4}{(A,B)}\,B\times(A\times X),\\&\Pi^{\varkappa}_{A,B}\Big(\frac{d}{d\varkappa}\,\Pi^{\varkappa}_{A,B}\Big)_{\varkappa=1}X=-\frac{(X,B)}{(A,B)}\,A+\frac{4}{(A,B)}\,B\times(A\times X)-\\&-\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\,\frac{(X,B)}{(A,B)}\,A-\frac{4(1-\varkappa)}{(A,B)}-\frac{4}{(A,B)}\,B\times(A\times(B\times(A\times X)))\\&\qquad=\varkappa\,\frac{d}{d\varkappa}\,\Pi^{\varkappa}_{A,B}X\qquad\text{(siehe 9.7.4).}\end{aligned}\right. \tag{11.4.3}$$

Für die infinitesimale Perspektivität dieser Gruppe erhalten wir nach Anwendung von 1.21 auf 11.4.2:

$$\frac{2\langle A,B\rangle}{(A,B)}+\frac{1}{3}.$$

Den Summand $\frac{1}{3}$, der projektiv keine Rolle spielt, hätten wir noch entfernen können, wenn wir in 11.4.2 einen weiteren Normierungsfaktor $\varkappa^{-\frac{1}{3}}$ angebracht hätten.

11.5. Es liegt nun auf der Hand, die $\Theta\in\mathfrak{N}$ aus 9 (mit $\varrho\neq 0$) geometrisch zu interpretieren mit Hilfe der hier behandelten Perspektivitäten der Oktavenebene. Mit der dortigen Schreibweise (siehe 9.6.1, 9.3.2) stellen die infinitesimalen Perspektivitäten sich dar in der Form

$$\left(\frac{d}{d\varkappa}\,\Pi^{\varkappa}_{A,B}\right)_{\varkappa=1}=\varrho^{-1}\,\phi. \tag{11.5.1}$$

Also

$$\Pi^{e^{\lambda}}_{A,B}=\exp\left(\lambda\varrho^{-1}\,\phi\right),$$

und für $\lambda=\varrho$:

$$\Pi^{\varkappa}_{A,B}=\exp\phi \qquad \text{mit } \varrho=\log\varkappa, \tag{11.5.2}$$

also

$$DV\,(e^{\phi})=e^{\varrho}, \tag{11.5.3}$$

wo $DV\,(\Pi_{\varkappa})$ das für Π typische Doppelverhältnis $\varkappa$ bezeichnet.

11.6. Wir besprechen nun Perspektivitäten der Oktavenebene mit inzidenten Scheitel A und Achse B. Wir gehen aus von den bisher behandelten Perspektivitäten 11.3.3, die wir nach 1.21 auch in der Form

$$\Pi^{\varkappa}_{A,B}\,X=2\,\langle A,B\rangle\,X+\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)(X,B)\,A-\frac{\varkappa+2}{3(1-\varkappa)}\,(A,B)\,X \tag{11.6.1}$$

schreiben können. Wir ersetzen die Achse B nun durch die benachbarte

$$B+\tau M+\tfrac{1}{2}\,\tau^2 N \tag{11.6.2}$$

mit

$$(A,B)=0,\ M\times B=0,\ B\times N+M\times M=0, \tag{11.6.3}$$

die B im Punkte $M\times M$ schneidet. (Um 11.6.3 zu erfüllen, können wir etwa N als ein Vielfaches von A wählen.) Aus 11.6.3 ergibt sich mit den Bezeichnungen von 9.10.8:

$$\tfrac{1}{2}\zeta^2 B=A\times(M\times M)=-A\times(B\times N)=-\tfrac{1}{4}\,(A,N)\,B,$$

also

$$(A,N)=-2\zeta^2. \tag{11.6.4}$$

Das Doppelverhältnis $\varkappa$ wählen wir so, dass

$$1-\varkappa=\tfrac{1}{2}\,\tau$$

gilt, und lassen τ nach 0 gehen, nachdem wir 11.6.2 für B in 11.6.1 eingesetzt haben. Wir erhalten unter Verwendung von 11.6.4:

$$\Pi^{\varkappa}_{A,B}\,X=2\tau\,\langle A,M\rangle\,X-\frac{\tau}{2\varkappa}\,(X,B)\,A+\frac{2\tau(\varkappa+2)}{3}\,\zeta^2 X+O(\tau^2).$$

Nach Division durch τ liefert der Grenzübergang:

$$\Gamma X = 2\langle A, M\rangle X - \tfrac{1}{2}(X, B)\, A + 2\,\zeta^2 X. \tag{11.6.5}$$

Dass ΓX wirklich einen Punkt der Oktavenebene darstellt, sieht man durch eine Rechnung, bei der man von den Resultaten von 9 Gebrauch machen darf:

$$\begin{aligned}\Gamma X \times \Gamma X = \quad & \zeta^2 \phi X \times \phi X = 2\zeta^2\,(X, B)\, A \times X \\ & = -\zeta^2 \phi^2 X \times X - 2\zeta^2 (X, B)\, A \times X = 0 \text{ (nach 9.3.4).}\end{aligned}$$

Dass wir eine Projektivität vor uns haben, sieht man wie oben, und ebenso zeigt man, dass es eine Perspektivität mit vereinigten Scheitel und Achse ist, d.h. hier einfach, dass B punktweise und A geradenweise festbleibt. Dass alle derartigen Projektivitäten erhalten werden, ergibt sich etwa aus einer Dimensionsabzählung: die Perspektivität ist festgelegt, wenn Scheitel, Achse und das Bild eines allgemeinen Punktes gegeben sind. Ebenso viel Parameter stehen seitens A, B, M zur Verfügung, wenn man 9.11 berücksichtigt.

Um die *infinitesimalen* Perspektivitäten mit $(A, B) = 0$ festzustellen, ersetzen wir bei festen M, ζ die A, B durch τA, τB und differenzieren wir nach τ bei $\tau = 0$. Dann ergibt sich als infinitesimale Perspektivität

$$\langle A, M\rangle.$$

Hiermit ist auch für die $\Theta \in \mathfrak{N}$ mit $\varrho = 0$ die geometrische Bedeutung aufgezeigt.

Wir bemerken noch, dass diese Art von Perspektivitäten bei *festem* Scheitel (oder fester Achse) eine *kommutative* Gruppe ist: Es ist

$$4\langle A, M\rangle \langle A, N\rangle X = -(\tfrac{1}{2} M \times N, A \times X)\, A$$

symmetrisch in M und N.

11.7. Nun noch die geometrische Bedeutung der Kommutativität in $\mathfrak{N}$! In 10.2.1 ersetzen wir $\phi, \phi_1, \varrho, \varrho_1$ gemäss 9.3.2, 9.6.1, wobei wir $\varrho \neq 0$, $\varrho_1 \neq 0$ voraussetzen, und machen wir von 1.21 Gebrauch:

$$\begin{aligned}&\varrho_1(2\langle A, B\rangle - \tfrac{2}{3}(A, B))\, A_1 = \varrho(2\langle A_1, B_1\rangle - \tfrac{2}{3}(A_1, B_1))\, A, \\ &\varrho_1[4B \times (A \times A_1) - (A_1, B)\, A - (A, B)\, A_1] = \varrho[4B_1 \times (A \times A_1) \cdot \\ &\qquad\qquad - (A, B_1)\, A_1 - (A_1, B_1) A], \\ &4\varrho_1 B \times (A \times A_1) - (A_1, \varrho_1 B + \varrho B_1)\, A + (A, \varrho_1 B + \varrho B_1)\, A_1 - \\ &\qquad\qquad 4\,\varrho B \times (A \times A_1) = 0.\end{aligned} \tag{11.7.1}$$

Das bedeutet, dass die zwei Scheitel A, A_1 mit den zwei Punkten $B \times (A \times A_1)$, $B_1 \times (A \times A_1)$, in denen ihre Verbindungsgerade $A \times A_1$ die Achsen B, B_1 schneidet, auf einer *reellen* Geraden liegen.

Die Forderung 10.2.2 sagt etwas aus über das Doppelverhältnis dieser vier Punkte in seiner Beziehung zur Normierung der Paare A, B und A_1, B_1.

12. *Inzidenzrelationen in* $\mathfrak{N}$.

12.1. Wir nennen nun die Elemente von $\mathfrak{N}$ (projektiv aufgefasst): *Punkte*. "Zwei Punkte Θ, Θ_1 sind *verbindbar*" bedeute: Θ, Θ_1 kommutieren. Eine maximale Menge paarweise verbindbarer Punkte heisst *Ebene*. Durchschnitte von Ebenen heissen, wenn sie aus mehr als einem Punkte bestehen: *Geraden*.

12.2. Die Ebenen werden eineindeutig beschrieben durch die $P \in \mathfrak{M}$, in dem Sinne, dass

$$\Theta P = 0$$

die Inzidenzrelation ist: "der Punkt Θ liegt auf der Ebene P".

Beweis: Sei $\{\Theta\}$ eine Ebene. In $\{\Theta\}$ wählen wir ein endliches Teilsystem $\{\Theta\}'$, von dem $\{\Theta\}$ linear abhängt. Sei $P_0 \neq 0$ irgendwie in $\mathfrak{M}$ gewählt. Sei $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ ein maximales Teilsystem von $\{\Theta\}'$ mit der Eigenschaft, dass $P = \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_k P_0 \neq 0$ ist. Dann ist wegen der Kommutativität $\Theta P = 0$ für alle $\Theta \in \{\Theta\}'$, also auch für alle $\Theta \in \{\Theta\}$. — Umgekehrt ist nach 10.1: $[\Theta, \Theta_1] = 0$ für je zwei $\Theta, \Theta_1 \in \mathfrak{N}$ mit $\Theta P = \Theta_1 P = 0$ bei gegebenem $P \in \mathfrak{M}$, $P \neq 0$.

12.2. Die Ebenen haben die Struktur der Oktavenebene (die Geraden stimmen mit den alten überein). Zwei Ebenen schneiden sich entweder nicht oder in einem Punkte oder in einer (Oktaven-) Geraden.

Beweis: Wir nehmen beispielsweise die Ebene

$$P = (0, 0, 1, 0)$$

Ihre Punkte sind die

$$\Theta = (0, 0, A, 0) \text{ mit } A \in \mathfrak{P}.$$

Ist $\{P, P_1\} \neq 0$, so haben wir keinen Schnittpunkt. Ist $\{P, P_1\} = 0$, aber $P \times P_1 \neq 0$, so ist das der einzige Schnittpunkt. $P \times P_1 = 0$ bedeutet in diesem Beispiel

$$P_1 = (0, U, 1, 0) \quad \text{mit } U \times U = 0.$$

Die Schnittpunkte der Ebenen P und P_1 sind also die

$$\Theta = (0, 0, A, 0) \quad \text{mit } (A, U) = 0.$$

Das zeigt, dass die Ebene P die Struktur der Oktavenebene hat.

12.3. Hieraus folgt: Zu zwei verbindbaren Punkten gibt es genau eine sie enthaltende Gerade. Der Durchschnitt beliebig vieler Ebenen ist leer, ein Punkt oder eine Gerade.

12.4. Es gibt ∞^{33} Punkte, ∞^{27} Ebenen, ∞^{42} Geraden. Ferner ∞^1 Ebenen durch eine Gerade, ∞^{25} Punkte, die mit einem gegebenen verbindbar sind, ∞^{17} Geraden durch einen Punkt.

Beweis: Die Anzahl der Punkte und Ebenen ergibt sich aus einfacher Abzählung der Parameter. Die Ebenen durch eine Gerade besitzen paarweise die Eigenschaft $P \times P' = 0$, nach 8.7 sind darum je drei linear abhängig. Die Kommutativität besteht nach 10 aus 8 unabhängigen

Bedingungen; daraus folgt die Anzahl der mit einem Punkt verbindbaren Punkte und die Anzahl der Geraden durch einen Punkt. Die Dimension der Mannigfaltigkeit aller Geraden überhaupt wird daher

$$33+25-16=42=27+16-1.$$

12.5. Aus $\Theta_1\Theta_2=0$, $\Theta_i \in \mathfrak{N}$ folgt Abhängigkeit zwischen Θ_1, Θ_2. Denn jede Ebene $\Theta_2 P$ durch Θ_2 geht wegen $\Theta_1\Theta_2 P=0$ auch durch Θ_1.

12.6. Für drei paarweise verbindbare Punkte ist $\Theta_1\Theta_2\Theta_3=0$ die Bedingung der Kollinearität.

Wir dürfen nämlich (wie in 12.2) annehmen, dass die drei Punkte in der Ebene (0, 0, 1, 0) liegen und daher die Form (0, 0, A_1, 0) ($A_1 \in \mathfrak{P}$) besitzen. Kollinearität bedeutet dann die Kollinearität der $A_1 \in \mathfrak{P}$, also det $(A_1, A_2, A_3)=0$. Andererseits zeigt eine einfache Rechnung, dass $\Theta_1\Theta_2\Theta_3 P=0$ (identisch in P) auf dasselbe hinauskommt.

12.7. Für drei paarweise verbindbare Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, erhält man die gemeinsame Ebene in der Form $\Theta_1\Theta_2\Theta_3 P$ ($P \in \mathfrak{M}$).

Denn $\Theta_i(\Theta_1\Theta_2\Theta_3) P=0$ und nach 12.6: $\Theta_1\Theta_2\Theta_3 P$ nicht identisch $=0$.

12.8. Alle Ebenen P durch die verbindbaren Punkte Θ_1, Θ_2 sind in der Form $\Theta_1\Theta_2 P'$ ($P' \in \mathfrak{M}$) erhältlich.

Denn wenn Θ_3 ein dritter Punkt in P, aber nicht auf der Geraden durch Θ_1, Θ_2 ist, so ist für geeignetes $P_0 \in \mathfrak{M}$ nach 12.7: $P=\Theta_1\Theta_2\Theta_3 P_0$; dann leistet $\Theta_3 P_0=P'$ das Gewünschte.

12.9. Liegt der Punkt Θ nicht auf der Ebene P, so kann man ΘP deuten als *die* Ebene durch Θ, die P in einer Geraden schneidet.

Beweis: Wegen 4.4 ist $\Theta P \times P=0$. Wir müssen also noch zeigen, dass aus $P_1 \in \mathfrak{M}$, $P \times P_1=0$, $\Theta P_1=0$ die lineare Abhängigkeit von ΘP und P_1 folgt.

P_1 hat die Form ΘP_2. Also $P \times \Theta P_2=0$. Also auch $\Theta P \times \Theta P_2=0$. Schliesslich $P \times \Theta P=0$. Also nach 8.7: $\alpha\Theta P+\beta\Theta P_2+\gamma P=0$. Multiplikation mit Θ ergibt $\gamma=0$. Also ΘP und ΘP_2 abhängig.

12.10. Ist ein Punkt mit zwei Punkten einer Geraden verbindbar, so liegen Punkt und Gerade in einer Ebene.

12.11. Sind zwei Punkte Θ_1, Θ_2 nicht verbindbar, so gibt es zu jeder Geraden durch Θ_1 genau eine durch Θ_2, die die erste trifft.

Man nehme nur eine Ebene P durch die erste Gerade, schneide P mit $\Theta_2 P$ und schneide die Schnittgerade (siehe 12.9) mit der gegebenen Geraden. Der Schnittpunkt ist mit Θ_2 verbindbar. — Eine zweite Lösung kann es nicht geben, denn sonst wäre Θ_2 mit zwei Punkten der gegebenen Geraden verbindbar, also nach 12.10 auch mit Θ_1 verbindbar.

12.12. Seien Θ_1, Θ_2 nicht verbindbar, und sei Θ mit beiden verbindbar. Dann bilden die Θ', die mit Θ, Θ_1, Θ_2 verbindbar sind, einen Kegel (eindimensionale Geradenschar) mit der Spitze Θ.

Beweis: Die allgemeine Ebene $\Theta_1\Theta P$ durch Θ und Θ_1 wird von der Ebene $\Theta_2\Theta_1\Theta P$ durch Θ_2 in einer Geraden geschnitten (12.9), deren Punkte gerade alle Punkte von Θ_1 ΘP sind, die mit Θ_2 verbindbar sind. $\Theta_1\Theta P$ variiert in einer eindimensionalen Schar; die Schnittgeraden, die alle durch Θ gehen, bilden den Kegel.

12.13. Seien Θ_1, Θ_2 nicht verbindbar. Die Menge der Punkte, die mit beiden verbindbar sind, ist 17-dimensional. Sie wird von einer Kegelschar überdeckt. Jeder mit Θ_1, Θ_2 verbindbare Punkt ist in der Form $\Theta_1 P \times \Theta_2 P$ ($P \in \mathfrak{M}$) darstellbar.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus 12.11 und 12.4, die zweite aus 12.12. — Die Punkte Θ_i und $\Theta = \Theta_1 P \times \Theta_2 P$ ($\neq 0$) liegen in $\Theta_i P$, sind also verbindbar. Θ ist also mit Θ_1, Θ_2 verbindbar. Wählt man umgekehrt P als Ebene durch ein gegebenes mit Θ_1, Θ_2 verbindbares Θ, aber so dass P keine Erzeugende des Kegels mit der Spitze Θ (siehe 12.12) enthält, so wird in der Tat $\Theta_1 P \times \Theta_2 P \neq 0$ und ein Vielfaches von Θ.

12.14. Ist $P_i \in \mathfrak{M}$, $P_1 \times P_2 = 0$, so erhält man alle Schnittpunkte von P_1, P_2 in der Form $\Theta P_1 \times P_2$ mit $\Theta \in \mathfrak{N}$.

Beweis: Jeder Punkt Θ ist mit einem Punkte der Schnittgeraden von P_1, P_2 verbindbar und bei geeigneter Wahl von Θ sogar mit genau einem vorgeschriebenen, Θ_0. Nun schneiden die Ebenen P_2 und $\Theta_0 P_2$ sich in einer Geraden (12.9), die in P_2 liegt, also auch die Schnittgerade von P_1, P_2 schneidet. Der Schnittpunkt ist $\Theta P_1 \times P_2$ und muss andererseits mit Θ_0 zusammenfallen als dem einzigen auf der Schnittgeraden von P_1 und P_2, der mit Θ verbindbar ist.

12.15. Sind Θ_i ($i = 1, 2, 3$) kollinear, so sind die $\Theta_i\Theta_j$ zu je zweien linear abhängig.

Beweis: Wir müssen etwa zeigen, dass $\Theta_1\Theta_3 P$ und $\Theta_2\Theta_3 P$ für jedes $P \in \mathfrak{M}$ dieselbe Ebene darstellen. $\Theta_2\Theta_3 P$ enthält Θ_1 wegen $\Theta_1\Theta_2\Theta_3 P = 0$ (siehe 12.6); $\Theta_2\Theta_3 P$ schneidet $\Theta_3 P$ in einer Geraden (12.9). Die Ebene durch Θ_1, die $\Theta_3 P$ in einer Geraden schneidet, ist (12.9) aber auch $\Theta_1\Theta_3 P$.

12.16. Sind Θ_1, Θ_2, Θ_3 paarweise verbindbar und ist $\Theta_1\Theta_3 = \gamma\Theta_2\Theta_3$, so sind die Punkte kollinear (Klar nach 12.6.)

12.17. Die Geraden werden beschrieben durch die Ausdrücke $\Omega = \Theta\Theta'$ mit Θ, $\Theta' \in \mathfrak{N}$, $[\Theta, \Theta'] = 0$, Θ, Θ' auf Ω. (Folgt aus 12.5, 12.15, 12.16.)

12.18. ΩP($P \in \mathfrak{M}$) durchläuft alle Ebenen durch die Gerade Ω. (Folgt aus 12.8.)

12.19. Die Inzidenz einer Geraden Ω und eines Punktes Θ wird durch $\Theta\Omega = 0$ beschrieben.

Denn "$\Theta\Omega P = 0$ für alle $P \in \mathfrak{M}$" bedeutet, dass Θ mit jeder Ebene ΩP durch Ω (12.18) inzidiert.

12.20. Das Schneiden einer Geraden Ω und einer Ebene P wird durch $\Omega P = 0$ beschrieben.

Beweis: Wenn Ω und P sich in Θ schneiden, so ist $\Omega = \Theta'\Theta$ und $\Theta P = 0$, also $\Omega P = 0$. Ist umgekehrt $\Omega P = 0$ und $\Omega = \Theta\Theta'$, so ist entweder $\Theta' P = 0$ und Θ' ein gemeinsamer Punkt, oder $\Theta' P = P_1 \neq 0$ und $\Theta P_1 = \Theta' P_1 = 0$, also Ω in P_1; nun ist $P \times \Theta' P = 0$, also schneiden P und P_1 sich in einer Geraden, und diese schneidet Ω in einem Punkte, der auf P und Ω liegt.

12.21. Dass der Punkt Θ mit der Geraden Ω punktweise verbindbar sei, wird beschrieben durch $\Omega\Theta = \Theta\Omega$.

Beweis: Ist $\Omega = \Theta_1\Theta_2$ und Θ verbindbar mit Θ_1, Θ_2, so ist

$$\Theta\Theta_1\Theta_2 = \Theta_1\Theta\Theta_2 = \Theta_1\Theta_2\Theta.$$

Umgekehrt ist $\Omega\Theta P = \Theta\Omega P \neq 0$ eine Ebene durch Ω und durch Θ. Verschwindet es identisch, so geht Θ nach 12.19 durch Ω.

12.22. Das Schneiden zweier Geraden wird durch $\Omega\Omega' = 0$ beschrieben.

Beweis: Ist Θ_0 Schnittpunkt, so ist $\Omega = \Theta\Theta_0$, $\Omega' = \Theta_0\Theta'$, also $\Omega\Omega' = 0$. Ist umgekehrt $\Omega\Omega' P = 0$, so durchläuft $\Omega' P \neq 0$ alle Ebenen durch Ω' (12.18) und schneidet dabei Ω (12.20). Gibt es *zwei* solche Schnittpunkte Θ_1, Θ_2 bei variablem P, so sind Θ_1, Θ_2 untereinander und mit Ω' verbindbar, und Ω, Ω' liegen in einer Ebene. Ist der Schnittpunkt fest, so liegt er in allen $\Omega' P$, also auf Ω', aber ausserdem auf Ω. Jedenfalls schneiden Ω und Ω' einander.

12.23. Ist $\Omega\Omega' = \Omega'\Omega$, so ist $\Omega\Omega' = 0$. Denn $\Omega\Omega' P = \Omega'\Omega P \neq 0$ wäre nach 12.18 eine Ebene, die Ω und Ω' enthielte, also müssten Ω, Ω' sich schneiden, was 12.22 widerspricht.

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. V [1959b]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 62 (1959), 165–179
[Zbl 0128.15302]

(Communicated at the meeting of February 28, 1959)

13. *Ergänzungen und Berichtigungen zu* 1–12.[1])

13.1. Die in 11.3 algebraisch dargestellten Perspektivitäten erschöpfen die Perspektivitäten der Oktavenebene, d.h. die Projektivitäten mit einer punktweise invarianten Geraden B, der Achse, und einem geradenweise invarianten Punkt A, dem Scheitel von $\Pi^{\varkappa}_{A,B}$.

Man braucht das nur zu beweisen für nichtinzidente A, B. Fasst man B als uneigentliche Gerade einer affinen Oktavenebene auf, so ist die Aussage äquivalent mit der, dass die Multiplikationen in der affinen Oktavenebene nur dann Affinitäten sind, wenn der Multiplikationsfaktor $\varkappa$ reell ist. Das ist eine bekannte Tatsache.

Ohne Berufung darauf beweist man es direkt folgendermassen:

Als A und B nehmen wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \bar{\xi}_3 \end{pmatrix}.$$

$F \times G$ schneidet B in

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Pi_{A,B}F$ liegt auf $A \times F$, also etwa

$$\Pi_{A,B}F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & a \\ 0 & \bar{a} & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

$\Pi_{A,B}G = (A \times G) \times (H \times \Pi_{A,B}F)$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{a} & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

[1]) Siehe I–IV in Proceed. Kon. Akad. Wet., **A 57** (1954), 218–230, 363–368; **58** (1955), 151–157, 277–285.

$K=(F\times X)\times B, \qquad L=(G\times X)\times B.$

$$K=\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3-\bar{x}_2 & 0\\ \bar{x}_3-x_2 & \xi_2+\xi_3-2Re\,x_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix}\xi_1+\xi_3-2Re\,x_2 & x_3-\bar{x}_1 & 0\\ \bar{x}_3-x_1 & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$\Pi_{A,\,B}X$ liegt auf $A\times X$, auf $K\times\Pi_{A,\,B}F=K'$ und auf $L\times\Pi_{A,\,B}G=L'$.

$$K'=\begin{pmatrix}\alpha_3(\xi_2+\xi_3-2Re\,x_1) & -\alpha_3(x_3-\bar{x}_2) & (x_3-\bar{x}_2)a\\ -\alpha_3(\bar{x}_3-x_2) & \alpha_3\xi_1 & -\xi_1 a\\ \bar{a}(\bar{x}_3-x_2) & -\xi_1\bar{a} & \alpha_2\xi_1\end{pmatrix},$$

$$L'=\begin{pmatrix}\alpha_3\xi_2 & -\alpha_3(x_3-\bar{x}_1) & -\xi_2 a\\ -\alpha_3(\bar{x}_3-x_1) & (\xi_1+\xi_3-2Re\,x_2)\alpha_3 & (\bar{x}_3-x_1)a\\ -\xi_2\bar{a} & \bar{a}(x_3-\bar{x}_1) & \alpha_2\xi_2\end{pmatrix}.$$

K', L' und $A\times X$ müssen durch einen Punkt gehen.

$$K'\times(A\times X)=\begin{pmatrix}\xi_1^2\alpha_2 & \xi_1\alpha_2 x_3 & \xi_1\bar{x}_2 a\\ \xi_1\alpha_2\bar{x}_3 & \xi_1\xi_2\alpha_2 & \bar{x}_3(\bar{x}_2 a)\\ \xi_1\bar{a}x_2 & (\bar{a}x_2)x_3 & \xi_1\xi_3 a\end{pmatrix},$$

$$L'\times(A\times X)=\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2\alpha_2 & \xi_2\alpha_2 x_3 & x_3(x_1 a)\\ \xi_2\alpha_2\bar{x}_3 & \xi_2\alpha_2 & \xi_2 x_1\bar{a}\\ (\bar{a}\bar{x}_1)\bar{x}_3 & \xi_2 a\bar{x}_1 & \xi_2\xi_3\alpha_3\end{pmatrix}.$$

Damit das dieselben Punkte sind (für alle X), muss a reell sein.

In der komplexen und in der Quaternionen-Ebene gilt die Behauptung nicht. Nennen wir Perspektivitäten mit reellem Doppelverhältnis *hermitesch* [1]), so gilt in der reellen und in der Oktaven-Ebene, aber nicht in der komplexen und Quaternionen-Ebene, dass alle Perspektivitäten hermitesch sind.

13.2. Die in 3 definierte Darstellung Inv ($\mathfrak{M}$) der $\mathfrak{E}_7$ ist transitiv über den Paaren P_1, P_2 von Ebenen mit leerem Durchschnitt, d.h. mit $\{P_1, P_2\}\neq 0$.

Beweis: In 6 war die Invarianz über $\mathfrak{M}$ gezeigt. Wir dürfen daher annehmen

$$P_1=(0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$P_2=(X,\ U,\ \xi,\ \omega) \qquad \text{mit } \omega\neq 0$$

und uns begnügen mit der Angabe eines $f\in\mathrm{Inv}\ (\mathfrak{M})$, so dass

$$fP_1=P_1, \quad fP_2=(0,\,0,\,0,\,\omega)$$

ist. Das leistet $f=\exp\,\tau\,\Theta$ mit gewissen τ und

$$\Theta=\exp\ (0,\ 0,\ -X/\omega,\ 0).$$

[1]) In Anlehnung an eine Titssche Terminologie bei Polaritäten.

Nämlich

$$\begin{aligned}
\Theta P_2 &= (-X, \quad -2U, \quad -(X, U)/\omega, \quad 0),\\
\Theta^2 P_2 &= (0, \quad 2U, \quad 2(X, U)/\omega, \quad 0),\\
\Theta^3 P_2 &= (0, \quad 0, \quad -2(X, U)/\omega, \quad 0),\\
\Theta^4 P_2 &= (0, \quad 0, \quad 0, \quad 0),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

13.3 [1]). In 1, Z. 5, füge man ein hinter $\chi(X)$ «,$\chi(X^2)$».

In 1, S. 220, Z. 4 v.u. statt "$-$" «$+$».

In 1.26, statt $-3(\varphi, \psi)$ «$-3(\varphi, \psi)^*$».

In 3, letzte zwei Formeln, statt $-\frac{1}{3}\varrho\xi$ «$-\varrho\xi$», statt $\frac{1}{3}\varrho\omega$ «$\varrho\omega$».

In 4, vor (4.3), Formel für Θ_1, statt $dB_1 = -(\phi_1 + \frac{2}{3}\varrho_1)B$ «$dB_1 = -(\phi_1' + \frac{2}{3}\varrho_1)B$».

In 5, S. 228, Z. 7 v.u., statt $(0, 0, A, 0)$ «$(0, 0, 0, B)$».

In 5, S. 228, Z. 6 v.u., statt $(A, 0, 0, 0)$ «$(0, B, 0, 0)$».

In 7, Z. 3, statt $\mathfrak{A}_3$ «$\mathfrak{A}_1$».

In 7, Z. 3, statt $2\overline{\Delta}$ «$-2\overline{\Delta}$».

In 7, Z. 3, statt Δ «$\underline{\Delta}$».

In 7, S. 363, Z. 3 v.u., statt P_3 «$\underline{P}_3$».

In 7.1, 2, 3 fehlt die Bemerkung, dass der obere Summand zu der geraden, der untere zu der ungeraden Anzahl von Pluszeichen gehört.

In 8.4, statt 8.3 «8.2».

In 8.8, Z. 2, statt P «P_f».

In 8.12, letzter Absatz, füge man ein hinter "Wäre $U_0 \neq 0$" «und $X_0 \neq 0$», und schliesse man entsprechend weiter.

In 9, Z. 2, füge man ein hinter $\Theta^2 = 0$ «, $\Theta \neq 0$,».

In 9.3 vorletzte Z., statt 9.3.4 «9.2.4».

In 9.4 füge man hinter Formel 9.4.1 ein «$A \times A = 0$».

In 9.5, Z. 7, statt $[\Theta, [\Theta_1, [\Theta, \Theta]]]$ «$[\Theta, [\Theta_1, [\Theta_1, \Theta]]]$».

In 9.5.1 statt $-1/12$ «$-1/6$».

In 9.5, letzte Zeile, statt $1/6$ «$1/12$».

In 9.5 präzisiere man den Beweis in leicht ersichtlicher Weise.

In 9.8, S. 154, Z. 5, statt $(A, B) \leqq 0$ «$(A, B) < 0$».

In 9.8.1, statt $\chi(A \times B) \leqq 0$ «$\chi(A)\chi(B) < 0$».

In 9.8, S. 154, Z. 13–14, statt "für $B = \chi(A)A$" «ist B Vielfaches von A, so».

In 9.8, S. 154, Z. 15, statt $\geqq$ "$>$".

In 9.8, S. 154 ersetze man Z. 16–24 durch: «Daraus folgt die Behauptung. Bis jetzt haben wir $\varrho \neq 0$ vorausgesetzt. Für $\varrho = 0$ hat man nichts an $(A, B) \leqq 0$, aber aus Stetigkeitsgründen (siehe die Transitivität) gilt auch dann:»

In 9.10.1 statt $\chi(A \times B) \leqq 0$ «$\chi(A)\chi(B) \leqq 0$».

In 9.10 ersetze man den Text von S. 155, Z. 12 v.u., "Wir multi-

[1]) Diese Korrekturen verdanke ich zum grossen Teil Herrn F. D. Veldkamp.

plizieren . . .'' bis S. 156, Z. 8 ''. . . bestätigt'' durch: «Wir nehmen die Spur

$$(A\times 1,\ M\times M)=\gamma\chi(B).$$

Nach 1.5 ist

$$\chi(A)\chi(M\times M)-(A,\ M\times M)=2\gamma\chi(B),$$

ferner nach 1.6

$$\chi(M\times M)\leqq 0,$$
$$\chi(A)\chi(B)\chi(M\times M)\geqq 0,$$

und wegen $M\times M\in\mathfrak{P}$

$$|(A,\ M\times M)|\leqq|\chi(A)\chi(M\times M)|,$$
$$|\chi(B)(A,\ M\times M)|\leqq|\chi(A)\chi(B)\chi(M\times M)|,$$
$$\chi(B)(\chi(A)\chi(M\times M-(A,\ M\times M))\geqq 0,$$

also $\gamma\geqq 0$.».

In 9.10, Z. 4 v.u., statt des ersten $-1/2$ «-2».

In 9.10, Z. 3 v.u., statt ''$-$'' «-4».

In 9.10, Z. 2 v.u., statt $-1/2$ «-2».

In 10.1, Beweis, Z. 3, statt $\mathfrak{N}$ «$\mathfrak{M}$».

In 11.6, Z. 2 nach 11.6.3, statt Vielfaches «$\times$-Vielfaches».

In 11.7.1 laute die letzte Formel

$$\text{«}4\varrho_1 B\times(A\times A_1)-(A_1,\ \varrho_1 B-\varrho B_1)A+$$
$$+(A,\ \varrho B_1-\varrho_1 B)A_1-4\varrho B_1\times(A\times A_1)=0\text{»}.$$

In 12.2 findet sich eine ernsthafte Lücke. Man muss auch zeigen, dass unabhängige P_0, P_1 verschiedene Ebenen darstellen. Man darf

$$P_0=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$$

annehmen. Folgte für alle $\Theta\in\mathfrak{N}$ aus $\Theta P_0=0$ auch $\Theta P_1=0$, so ergäbe sich für alle

$$\Theta=(0,\ 0,\ A,\ 0),\ A\times A=0,$$
$$P_1=(X_1,\ U_1,\ \xi_1,\ \omega_1)$$

aus

$$\Theta P_1=(\omega_1 A,\ 2A\times X_1,\ (A,\ U_1),\ 0)=(0,\ 0,\ 0,\ 0):$$
$$\omega_1=X_1=U_1=0,\ \text{also } P_1 \text{ abhängig von } P_0.$$

In 12.2, Z. 4 v.u., statt 1 «ξ».

14. *Die Elemente von $\mathfrak{M}$ als Polaritäten der Oktavenebene.*

Die Worte Punkt, Gerade, Ebene und verbunden [1]) werden im Sinne von 12 gebraucht.

14.1 Sind P, Q zwei zueinander fremde Ebenen, so bezeichnen wir mit

$$P\to Q$$

[1]) Statt ''verbindbar'' wollen wir ''verbunden'' sagen.

die Abbildung, die einem Punkte Θ aus P die Gerade $\Theta Q \cap Q$ aus Q zuordnet (also die Menge der mit Θ verbundenen Punkte aus Q), und die einer Geraden aus P den mit dieser Geraden punktweise verbundenen Punkt aus Q zuordnet.

$P \to Q$ ist eine projektive Korrelation von P auf Q.

Sind $P_1, \ldots, P_n$ Ebenen, so dass jeweils P_{i+1} zu P_i fremd ist, so schreiben wir

$$(P_{n-1} \to P_n)(P_{n-2} \to P_{n-1}) \ldots (P_1 \to P_2) = P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n.$$

14.2. Seien P_1, P_2, P_3 paarweise fremde Ebenen.

Dann ist $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$ eine *Polarität* von P_1 auf sich.

Beweis: Nach 13.1 darf man annehmen

$$P_1 = (0, 0, 1, 0),$$
$$P_2 = (0, 0, 0, 1),$$
$$P_3 = (X, U, \xi, \omega).$$

Sei Θ in P_1, also

$$\Theta = (0, 0, A, 0) \text{ mit } A \times A = 0.$$

Dem entspricht in P_2 die Gerade $\Theta P_2 \cap P_2$. Durch sie legen wir die Ebene

$$R = \alpha P_2 + \Theta P_2 = (A, 0, 0, \alpha),$$

die P_3 trifft (und zwar im Punkte $\Theta' = (P_1 \to P_2 \to P_3)\Theta$).

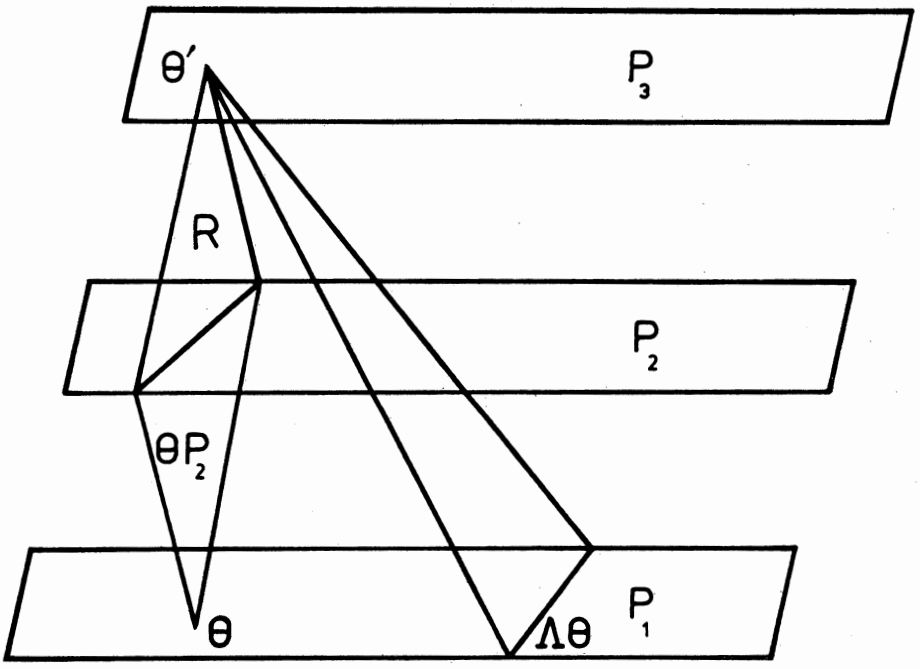


Fig. 1

Wir bestimmen also α so, dass $\{P_3, R\}=0$ wird, also

$$(A, U)=\alpha\xi.$$

Nun wird

$$\Theta'=2\xi P_3\times R=(*, *, *, {}^1/_2(2\xi A\times X-(A, U)U)).$$

Nach 12.2 finden wir die Gerade $(P_1\to P_2\to P_3\to P_1)\Theta$ aus

$$(\xi R\times P_3)P_1=(0, *, 2\xi A\times X-(A, U)U, 0)$$

in der Form

$$\Lambda A=2\xi A\times X-(A, U)U, \tag{14.2.1}$$

oder auch wegen $U\times U=\xi X$,

$$\Lambda A=2(U\times U)\times A-(A, U)U. \tag{14.2.2}$$

Man bemerkt, dass wegen der paarweisen Fremdheit der P_i gilt: $\xi\neq 0$, $\omega\neq 0$, also det $X\neq 0$, det $U\neq 0$.

Es ist hier

$$(\Lambda A, A_1)=(A, \Lambda A_1).$$

Also, wenn A_1 auf ΛA liegt, geht ΛA_1 durch A. Es liegt daher eine Polarität vor.

14.3 Man kann natürlich auch direkt zeigen, dass 14.2.1 für jedes $U\in\mathfrak{H}$ mit det $U\neq 0$ eine Polarität $\Lambda=\Lambda_U$ definiert. Diese Polaritäten haben die spezielle Eigenschaft:

14.3.1. A, A_1 und die Schnittpunkte von $A\times A_1$ mit ΛA und ΛA_1 liegen auf einer *reellen* projektiven Geraden.

Denn

$$\begin{aligned}&(U, A_1)(A\times A_1)\times\Lambda A-(U, A)(A\times A_1)\times\Lambda A_1\\&=2\xi(U, A_1)(A\times A_1)\times(X\times A)-2\xi(U, A)(A\times A_1)\times(X\times A_1)\\&=\tfrac{1}{2}\xi(A, A_1, X)((U, A_1)A-(U, A)A_1)\end{aligned}$$

(nach 1.17).

Wir wollen Polaritäten mit dieser Eigenschaft mit J. Tits [1]) *hermitesch* nennen.

14.4. Wir zeigen, dass alle hermiteschen Polaritäten die Form 14.2.1–2 besitzen.

Wir bemerken zunächst, dass bei einer projektiven Transformation Φ der Ebene Polaritäten in Polaritäten und hermitesche in hermitesche übergehen, weiter dass die Polarität Λ_U übergeht in die Polarität Λ_{ϕ^*U} (wo Φ^* die zu Φ gehörige Transformation der Geradenebene angibt); es ist nämlich

$$\begin{aligned}\Phi^*\Lambda\Phi^{-1}A_1&=2(\Phi^*U\times\Phi^*U)\times\Phi\Phi^{-1}A_1-(\Phi^{-1}A_1, U)\Phi^*U\\&=2(\Phi^*U\times\Phi^*U)\times A_1-(A_1, \Phi^*U)\Phi^*U.\end{aligned}$$

[1]) Siehe etwa Mém. Acad. Belg. **29** (1955), No. 3, 56–57.

Zu gegebener hermitescher Polarität Λ wählen wir einen Punkt E_1, der nicht mit seiner Bildgeraden inzidiert, und auf dieser einen Punkt E_2 mit derselben Eigenschaft (das ist, wie man leicht sieht, möglich). Die Punkte E_1, E_2, $E_3 = \Lambda E_1 \times \Lambda E_2$ und die Geraden ΛE_1, ΛE_2, $E_1 \times E_2$ können wir nach Obigem bzw. in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

annehmen. Nimmt man weiter

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und setzt man U in der Form

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

an, so wird

$$\Lambda_U E_i = -\lambda_i E_i \qquad \text{für } i = 1, 2, 3$$

und

$$\Lambda_U E_0 = -\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_3 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & \lambda_2\lambda_3 \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix},$$

und das durchläuft alle (nicht durch die Punkte E_1, E_2, E_3 gehenden) Geraden der von E_0, E_1, E_2, E_3 bestimmten reellen projektiven Ebene, wenn die λ_i alle reellen Zahlen $\neq 0$ durchlaufen; dabei nimmt $\Lambda_U E_0$ alle Werte an, die mit der Forderung 14.3.1 verträglich sind.

Es ist noch zu zeigen, dass zwei solche hermiteschen Polaritäten, Λ, Λ_1, die in den $E_i (i = 0, 1, 2, 3)$ übereinstimmen, identisch sind. Die Projektivität $\Lambda\Lambda_1$ besitzt die Fixpunkte $E_i (i = 0, 1, 2, 3)$, wird also von einem Automorphismus ϑ des Oktavenkörpers erzeugt [1]). Also $\Lambda_1 = \Lambda\vartheta$. Für Λ können wir Λ_U nehmen. Auf die Punkte

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ \bar{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wenden wir $\Lambda\vartheta$ an:

$$\Lambda\vartheta F = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2\lambda_1 & 0 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda\vartheta A = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2\vartheta a & 0 \\ \lambda_1\lambda_2\vartheta\bar{a} & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1]) Siehe OAO, Anhang.

Die Forderung, dass diese Punkte mit F und A auf einer reellen Geraden liegen, ergibt: $1, a, \vartheta a$ sind reell abhängig. Für rein imaginäre a folgt hieraus die Reell-Abhängigkeit von a und ϑa, also $\vartheta a = a$ für alle a. Demnach ist ϑ die Identität.

14.5. Bei der hermiteschen Polarität Λ_U findet man für die Punkte A, die mit ihrem Bilde inzidieren:

$$(A, U) = 0.$$

Das ist höchstens eine 15-dimensionale Mannigfaltigkeit der Oktavenebene, ein sogen. *Kegelschnitt.*

14.6. Man erhält (einfach) *entartete Polaritäten*, wenn man in 14.2 zulässt, dass P_1, P_3 sich in einem Punkt treffen. Man hat dann $\omega = 0$, also $X \times X = 0$, also det $U = 0$. Der Treffpunkt von P_1 und P_3 ist X. Die Abbildung Λ (siehe 14.2.1–2) ist für alle Punkte $\neq X$ definiert; X heisst die *Singularität* von Λ. Alle Bildgeraden gehen durch X. Zwei Punkte auf derselben Geraden durch X haben dieselbe Bildgerade. Wie bei nichtentarteten Polaritäten gilt: Liegt A_1 auf dem Bild von A, so liegt A auf dem Bild von A_1.

Sei ausser der entarteten Polarität Λ eine Gerade B, nicht durch X, gegeben. Dann gibt es eine nichtentartete hermitesche Polarität Λ', die auf B mit Λ übereinstimmt. (Man nehme nämlich durch die Gerade $(P_1 \to P_2 \to P_3)B$ eine Ebene P_3', die $P_1 \cup P_2$ nicht trifft und definiere $\Lambda' = P_1 \to P_2 \to P_3' \to P_1$.)

Unter einer entarteten *hermiteschen* Polarität mit der Singularität X verstehen wir eine Abbildung Λ, bei der jedem Punkte $\neq X$ der Ebene eine Gerade durch X entspricht, bei der aus der Inzidenz von A_1 mit ΛA die von A mit ΛA_1 folgt, und die auf einer nicht durch X gehenden Geraden mit einer geeigneten nichtentarteten hermiteschen Polarität übereinstimmt.

Man sieht ohne weiteres, dass das angegebene Verfahren genau alle entarteten hermiteschen Polaritäten liefert.

15. *Die Elemente von $\mathfrak{N}$ als Perspektivitäten der Oktavenebene.*

15.1. P_1, P_2, P_3, P_4 seien vier Ebenen, derart dass sich P_1 und P_3, ebenso P_2 und P_4 in einer Geraden schneiden, und im Übrigen die Durchschnitte leer sind. Dann ist $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_1$ eine Perspektivität Π von P_1 mit der Achse $P_1 \cap P_3$ und mit demjenigen Punkte von P_1 als Scheitel, der mit $P_2 \cap P_4$ punktweise verbunden ist.

Wir rechnen $\Pi\Theta$ aus, indem wir

$$P_1 = (0, 0, 1, 0), \qquad P_2 = (0, 0, 0, 1),$$
$$P_3 = \Theta_1 P_1, \qquad P_4 = \text{Ebene durch } P_2 \cap \Theta_1 P_2, \text{ die } \Theta_0 P_1 \text{ trifft},$$
$$\Theta_1 = (\Phi_1, \varrho_1, A_1, B_1), \qquad \Theta_0 = (\Phi_0, \varrho_0, A_0, B_0),$$
$$\Theta = (0, 0, A, 0), \qquad \Theta, \Theta_1, \Theta_0 \in \mathfrak{N}, \Theta \in P_1$$

wählen.

Wir müssen erst die Ebene

$$\alpha P_2+\beta\Theta P_2=(\beta A,\ 0,\ 0,\ \alpha)$$

so bestimmen, dass sie $P_3=(0,\ B_1,\ -\varrho_1,\ 0)$ trifft.

$$\{\alpha P_2+\beta\Theta P_2,\ P_3\}=0$$

ergibt

$$\beta(A,\ B_1)+\alpha\varrho_1=0.$$

Das führt zur Ebene

$$(\varrho_1,\ A,\ 0,\ 0,\ -(A,\ B_1)).$$

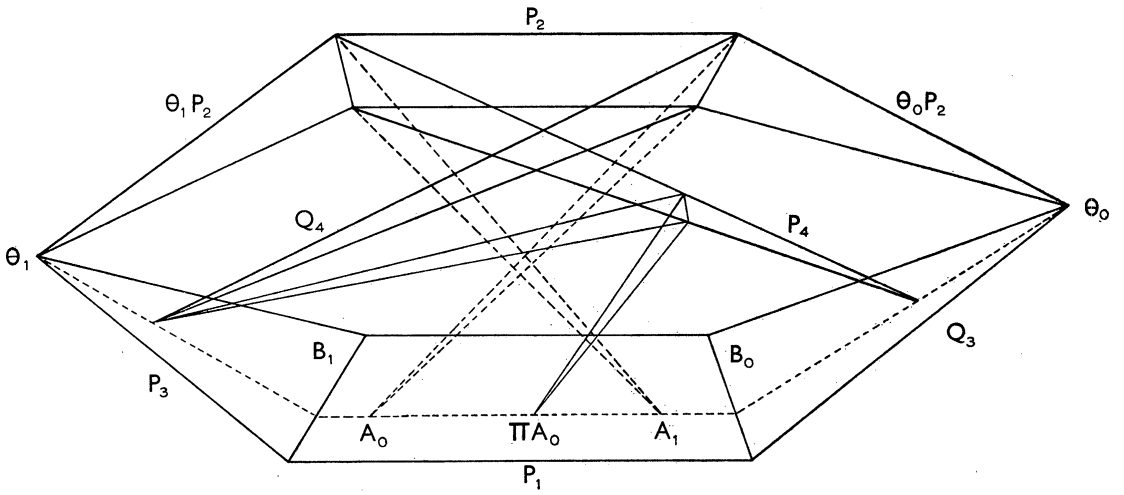


Fig. 2

Sie trifft P_3 in

$$\Theta'=(\tfrac{1}{2}\varrho_1\langle A,\ B_1\rangle,\ \tfrac{1}{4}\varrho_1(A,\ B_1),\ -\tfrac{1}{4}\varrho_1{}^2A,\ \tfrac{1}{4}(A,\ B_1)B_1)=(P_1\to P_2\to P_3)\Theta.$$

$$P_4=(\varrho_0A_1,\ 0,\ 0,\ -(A_1,\ B_0)).$$

$$\Theta'P_4=(\tfrac{1}{2}\varrho_1\varrho_0\langle A,\ B_1\rangle A_1+\tfrac{1}{12}\varrho_1\varrho_0(A,\ B_1)A_1+\tfrac{1}{4}\varrho_1{}^2(A_1,\ B_0)A,$$
$$-\tfrac{1}{2}\varrho_1{}^2\varrho_0A\times A_1,\ 0,\ -\tfrac{1}{4}\varrho_1(A_1,\ B_0)(A,\ B_1)\ -\tfrac{1}{4}\varrho_1{}^2\varrho_0(A,\ B_1)).$$

Wir bestimmen die Ebene

$$\lambda P_4+\mu\Theta'P_4$$

so, dass sie P_1 trifft.

$$\{\lambda P_4+\mu\Theta'P_4,\ P_1\}=0$$

ergibt etwa

$$\lambda=\varrho_1{}^2\varrho_0(A,\ B_1)+\varrho_1(A_1,\ B_0)(A,\ B_1),$$
$$\mu=-4(A_1,\ B_0).$$

Vom Treffpunkt braucht nur die dritte Komponente berechnet zu werden. Sie lautet

$$\varrho_1\varrho_0(A,\ B_1)(\varrho_1\varrho_0+(A_1,\ B_0))A_1-2\varrho_1\varrho_0(A_1,\ B_0)\langle A,\ B_1\rangle A_1$$
$$-3\varrho_1\varrho_0(A_1,\ B_0)(A,\ B_1)A_1-\varrho_1{}^2(A_1,\ B_0)^2A.$$

Nach einfacher Umformung erhält man für $\Pi\Theta$ den Ausdruck

$$(15.1.1) \qquad \Pi^{\varkappa}_{A_1, B_1} A = -\frac{(A, B_1)}{\varkappa} A_1 + 4B_1 \times (A_1 \times A) - \frac{(A_1, B_1)}{1-\varkappa} A$$

mit

$$(15.1.2) \qquad \frac{1}{\varkappa} = \frac{\varrho_1 \varrho_0}{(A_1, B_0)} + 1, \qquad \frac{1}{1-\varkappa} = \frac{(A_1, B_0)}{\varrho_1 \varrho_0} + 1.$$

Nach 11.3.3 ist $\varkappa$ das Doppelverhältnis der Perspektivität.

15.2. Einem Punkt $\Theta_1 \in \mathfrak{N}$ in allgemeiner Lage wird also eine Perspektivität der Oktavenebene P zugeordnet. Das war schon in 11 geschehen, allerdings rein algebraisch, während wir es nun durch eine geometrische Konstruktion getan haben. Dem Punkte

$$\Theta_1 = (\Phi_1, \varrho_1, A_1, B_1)$$

ist die Perspektivität mit Scheitel A_1, Achse B_1 und Doppelverhältnis $\varkappa$ (siehe 15.1.2) zugeordnet. Wir nennen sie auch

$$\Pi^{\Theta_1, \Theta_0}.$$

Sie hängt noch vom "Aufpunkt" Θ_0 ab.

15.3. Die Verbundenheit der Punkte Θ_1, Θ_0 drückt sich nach 10.2.2 und 11.7.1 durch

$$4\varrho_1 B_0 \times (A_0 \times A_1) - (A_1, \varrho_1 B_0 - \varrho_0 B_1) A_0 + (A_0, \varrho_0 B_1 - \varrho_1 B_0) A_1 - 4\varrho_0 B_1 \times (A_0 \times A_1) = 0$$

und

$$(A_1, B_0) = (A_0, B_1)$$

aus. Hieraus folgt (siehe (15.1.1))

$$\Pi^{\varkappa}_{A_1, B_1} A_0 = 4\frac{\varrho_1}{\varrho_0} B_0 \times (A_1 \times A_0).$$

Umgekehrt rechnet man leicht aus, dass diese Bedingung auch hinreichend für die Verbundenheit von Θ_1 und Θ_0 ist. Anders gesagt:

Notwendig und hinreichend für die Verbundenheit von

$$\Theta_1 = (\Phi_1, \varrho_1, A_1, B_1)$$

und

$$\Theta_0 = (\Phi_0, \varrho_0, A_0, B_0)$$

ist im Allgemeinen, das Π^{Θ_1, Θ_0} den zu Θ_0 gehörigen Scheitel abbildet auf einen Punkt der zu Θ_0 gehörigen Achse.

15.4. Das "im Allgemeinen" bedarf näherer Erläuterung. Zunächst müssen wir, um Perspektivitäten mit nichtinzidentem Scheitel und Achse zu erhalten, verlangen, dass

$$(15.4.1) \qquad (A_0, B_0) \neq 0, \qquad (A_1, B_1) \neq 0$$

ist, oder auch

(15.4.2) durch Θ_i geht keine Gerade, die P_1 und P_2 trifft.

Damit die angegebene Konstruktion von Π möglich sei, müssen wir weiter fordern:

$$\Theta_0 \notin P_1 \cup P_2 \ , \ \Theta_1 \notin P_1 \cup P_2 \ , \ P_2 \cap \Theta_1 P_2 \cap Q_3 \text{ leer},$$
$$P_2 \cap P_3 \text{ leer}, \quad P_1 \cap P_4 \text{ leer}, \quad P_3 \cap P_4 \text{ leer}.$$

Forderungen 1, 2, 4 sind nach Obigem schon erfüllt, 3 und 5 lassen sich durch

(15.4.3) $$(A_1, B_0) \neq 0$$

erfüllen, 6 durch

(15.4.4) $$(A_1, B_0) \neq -\varrho_0 \varrho_1.$$

Zu den Betrachtungen von 15.3 braucht man noch

(15.4.5) $$A_0 \times A_1 \neq 0.$$

Zu (15.4.4) bemerkt man noch: Ist $(A_1, B_0) + \varrho_0 \varrho_1 = 0$, so ergibt sich aus 11.7.1

(15.4.6) $$B_0 \times (A_0 \times A_1) \sim B_1 \times (A_0 \times A_1),$$

d.h. B_0 und B_1 gehen durch denselben Punkt von $A_0 \times A_1$.

Man kann also die Aussage von 15.4 so präzisieren:

Man setze voraus: $\Theta_0 \notin P_1 \cup P_2$, $\Theta_1 \notin P_1 \cup P_2$; es gibt kein inzidentes Paar C (Punkt), D (Gerade), so dass A_0, A_1 auf D liegen und B_0, B_1 durch C gehen.

Dann und nur dann sind Θ_0, Θ_1 verbunden, wenn $\Pi^{\Theta_1, \Theta_0} A_0 \in B_0$ sinnvoll und richtig ist.

16. *Axiome für Sy(5, ok).*

Wir sind nun so weit, dass wir die in 12 algebraisch auseinandergesetzte Geometrie axiomatisch aufbauen können.

16.1. Legen wir statt des Oktavenbereichs den der reellen Zahlen zugrunde, so ist jene Geometrie mit ihren Punkten und ihrer Verbundenheitsrelation gerade die 5-dim. reelle symplektische Geometrie – statt "verbunden" pflegt man dort "konjugiert" zu sagen. Die Darstellung der $\mathfrak{C}_3$, die bei uns zum Vorschein kam, ist aber nicht die übliche, π_1, im 6-dim. Vektorraum, sondern $2\pi_1$, in einem 21-dim. Vektorraum. Die Punktmenge der Geometrie ist also nicht direkt der 5-dim. projektive Raum, sondern eine diesem isomorphe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$ in 21 Dimensionen; die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der Ebenen ist in 14 Dimensionen eingebettet, mit der Darstellung π_2.

Es ist nun ganz natürlich, bei Zugrundelegung des Körpers der komplexen Zahlen, Quaternionen, Oktaven von der

fünfdimensionalen symplektischen Geometrie

über dem betreffenden Körper zu sprechen. Statt "symplektische Geometrie" sagen wir auch Symplekton [1]).

[1]) Besser wäre "Symplexis", aber das gestattet in vielen Sprachen keine angenehme Mehrzahlform.

Wir kürzen ab:

$$\mathrm{Sy}(5, \mathrm{re}),\ \mathrm{Sy}(5, \mathrm{ko}),\ \mathrm{Sy}(5, \mathrm{qu}),\ \mathrm{Sy}(5, \mathrm{ok}).$$

Um vorläufig die algebraisch definierte Geometrie von der zu definierenden axiomatischen unterscheiden zu können, fügen wir noch hinzu: al(algebraisch) oder ax(axiomatisch).

16.2. Die Elemente von Sy ax(5, *) sind

1. eine Menge $\mathfrak{P}$, deren Elemente *Punkte* heissen und meistens mit Θ (mit Indizes) bezeichnet werden,

2. eine zweistellige, reflexive, symmetrische Relation für die Paare aus $\mathfrak{P}$, die *Verbundenheit* heisse.

16.3. Die maximalen Mengen paarweise verbundener Punkte heissen Ebenen; die Menge dieser Ebenen heisse $\mathfrak{M}$; Elemente von $\mathfrak{M}$ werden mit P, Q, R, S bezeichnet.

16.4. Durchschnitte zweier verschiedener solcher Ebenen heissen Geraden, wenn sie aus mehr als einem Punkte bestehen; sie werden mit Ω (mit Indizes) bezeichnet.

Definitionsgemäss gibt es durch jede Gerade wenigstens zwei Ebenen.

16.5. $\mathfrak{M}$ ist sicher nicht leer. Sollte $\mathfrak{P}$ leer sein, so wäre die leere Menge die einzige Ebene. Wir fordern aber:

Axiom A_*: Jede Ebene mit ihren Punkten und Geraden ist eine projektive *-Ebene.

Insbesondere

Axiom A_{ok}: Jede Ebene mit ihren Punkten und Geraden ist eine projektive Oktavenebene.

Wir werden aber auch einige Konsequenzen von A_{re}, A_{ko}, A_{qu} erörtern.

16.6. Seien Θ_0 ein Punkt und P eine Ebene, $\Theta_0 \notin P$. Die Menge der mit Θ_0 verbundenen $\Theta \in P$ heisse Γ. Die Vereinigung von Θ_0 und Γ besteht aus paarweise verbundenen Punkten; also gibt es eine Θ_0 und Γ enthaltende Ebene Q. Nach 16.4 ist $\Gamma = P \cap Q$ leer oder ein Punkt oder eine Gerade. Wir fordern das letzte:

Axiom B: Ist Θ ein Punkt und P eine Ebene, $\Theta \notin P$, so ist die Menge der mit Θ verbundenen Punkte aus P eine Gerade.

16.7. Wir können auch sagen:

Zu Θ und P mit $\Theta \notin P$ gibt es genau eine Ebene durch Θ, die P in einer Geraden schneidet. Diese Ebene nennen wir ΘP.

16.8. Aus A_* folgt noch: Hat die Gerade Ω zwei Punkte Θ_1, Θ_2 in der Ebene P, so liegt sie ganz in P.

Denn $\Omega = P_1 \cap P_2$, $P_1 \neq P_2$. Also etwa $P_1 \neq P$. $\Theta_i \in P_1 \cap P$, $\Theta_i \in P_2 \cap P$. Nun ist $P_1 \cap P$ eine Gerade in P, $P_2 \cap P$ eine Gerade in P oder gleich P; also $P_1 \cap P \subset P_2 \cap P$. Also $P_1 \cap P \subset P_1 \cap P_2 \cap P = \Omega \cap P \subset \Omega$. Nun sind $P_1 \cap P$ und Ω Geraden in P_1, die Θ_1, Θ_2 enthalten. Also $\Omega = P_1 \cap P \subset P$.

16.9. Hieraus folgt: Durch zwei Punkte Θ_1, Θ_2 gibt es höchstens eine Gerade, die wir dann mit $\Theta_1\Theta_2$ bezeichnen.

16.10. Zweckmässig sind noch andere Formulierungen früher erwähnter Tatsachen:

Ist Θ verbunden mit drei nicht-kollinearen Punkten der Ebene P, so liegt Θ in P.

Schneiden die Ebenen P_1, P_2 sich in einer Geraden Ω und sind $\Theta_1 \in P_1$, $\Theta_2 \in P_2$ verbunden, so liegt Θ_1 oder Θ_2 in Ω.

Schneiden P_1 und P_2 sich in einer Geraden und trifft P sowohl P_1 als auch P_2, so liegt $P \cap (P_1 \cup P_2)$ in P_1 oder in P_2.

16.11. Sind die Gerade Ω und die Ebene P zueinander fremd, so gibt es genau einen Punkt Θ in P, der mit Ω punktweise verbunden ist, und genau eine Ebene Q durch Ω, die P trifft.

Denn nimmt man $\Theta_1 \neq \Theta_2$, $\Theta_1, \Theta_2 \in \Omega$, so sind die Geraden $P \cap \Theta_1 P$ und $P \cap \Theta_2 P$ nach 16.10 verschieden; ihr Schnittpunkt ist das gesuchte Θ. Das gesuchte Q wird durch Θ, Θ_1, Θ_2 bestimmt.

Es gilt auch $Q = \Theta_1\Theta_2 P$. Wir bezeichnen diese Ebene mit ΩP.

16.12. Trifft die Gerade Ω die Ebene P in *einem* Punkt Θ_0, so bilden die mit Punkten $\neq \Theta_0$ von Ω verbundenen Punkte von P eine Gerade Ω' durch Θ_0; es gibt dann durch Ω genau eine Ebene Q, die P in einer Geraden (nämlich in Ω') schneidet.

Denn ist $\Theta \in \Omega$, $\Theta \neq \Theta_0$, so liegt Θ_0 auf ΘP; es ist $\Omega' = P \cap \Theta P$.

16.13. Ist Θ ein Punkt und Ω eine Gerade, so ist Θ entweder mit allen Punkten von Ω verbunden oder mit genau einem (sogen. *allgemeine Lage*).

Denn sei P eine Ebene durch Ω. Dann ist entweder $\Theta \in P$ oder $\Theta P \cap P$ eine Gerade, die entweder mit Ω zusammenfällt oder Ω schneidet. In den ersten Fällen liegen Θ und Ω in einer Ebene; im letzten Fall ist der Schnittpunkt der gesuchte Punkt.

16.14. Wenn die Geraden Ω_1 und Ω_2 einander nicht treffen und eine Ebene P_1 durch Ω_1 existiert, die Ω_2 trifft, so existiert eine Ebene P_2 durch Ω_2, die Ω_1 trifft.

Denn nach 16.12 gibt es eine Ebene P_2 durch Ω_2, die P_1 in einer Geraden Ω' schneidet; Ω_1 und Ω' liegen in P_1 und schneiden einander.

16.15. *Allgemeine Lage* von Ω_1 und Ω_2 bedeute, dass Ω_2 keine Ebene durch Ω_1 trifft.

Allgemeine Lage bedeute übrigens: bei zwei Punkten – Nichtverbundenheit; bei zwei Ebenen, einer Ebene und einer Geraden, einer Ebene und einem Punkt – Fremdheit.

"In allgemeiner Lage" wird abgekürzt: i.a.L.

16.16. Zwei Ebenen P_1, P_2 i.a.L. bestimmen eine Abbildung $P_1 \to P_2$, so dass

$$(P_1 \to P_2)\Theta = \Theta P_2 \cap P_2 \qquad \text{für } \Theta \in P_1,$$
$$(P_1 \to P_2)\Omega = \Omega P_2 \cap P_2 \qquad \text{für } \Omega \subset P_1.$$

Diese Abbildung ist eine projektive Korrelation. Wie früher setzen wir

$$(P_{n-1} \to P_n)(P_{n-2} \to P_{n-1}) \cdots (P_1 \to P_2) = P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_n.$$

16.17. *Axiom C*: Seien die Ebenen P_1, P_2, P_3 paarweise i.a.L. Dann ist

$$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$$

eine Polarität von P_1 auf sich (d.h. das Quadrat ist die Identität).

16.18. Dieses Axiom lässt sich auch als Schliessungssatz aussprechen. Die Schliessungsfigur besteht aus drei Punkten Θ_i, drei Geraden Ω_j und neun Ebenen P_{ij} derart, dass Θ_i und Ω_j auf P_{ij} liegen.

16.19. Sind Ω_1, Ω_2 i.a.L., und durchlaufen Q_1, Q_2 die Büschel mit Ω_1 bzw. Ω_2 als Achse, so dass jeweils Q_1 und Q_2 einander treffen, so durchläuft ihr Treffpunkt eine Menge $\Delta(\Omega_1, \Omega_2)$. Der Schliessungssatz sagt, dass $\Delta(\Omega_1, \Omega_2) = \Delta(\Omega_1, \Omega_3)$, sobald sie zwei Punkte Θ_1, Θ_2 gemein haben – allerdings vorläufig nur unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass auch Ω_2, Ω_3 i.a.L. sind.

16.19.1. Sobald wir wissen, dass es durch jede Gerade mindestens drei Ebenen gibt (siehe 17), können wir uns von dieser Voraussetzung befreien. Zunächst bemerkt man, dass Ω_2, Ω_3, wenn sie nicht i.a.L. sind, sich treffen (aber nicht in einer Ebene liegen); andernfalls gäbe es nämlich Ebenen P_i durch Ω_i, so dass P_2 von Ω_3 in Θ_3' und P_3 von Ω_2 in Θ_2' getroffen wird und $\Theta_2' \neq \Theta_3'$ ist, und dann müssten Θ_1, Θ_2 auf $P_2 \cap P_3$ liegen, also verbunden sein.

Man wähle nun $\Theta' \in \Omega_3, \notin \Omega_2$, nenne Θ'' den mit Θ' verbundenen Punkt von Ω_1, und wähle durch $\Theta_1\Theta'$ eine Ebene Q, die weder durch Θ'', noch durch $\Omega_2 \cap \Omega_3$ geht. $\Omega_4 = \Theta_2 Q \cap Q$ trifft weder Ω_1 noch Ω_2, ist also zu beiden i.a.L. Nun sind $\Theta_1, \Theta_2 \in \Delta(\Omega_1, \Omega_2) \cap \Delta(\Omega_1, \Omega_4)$, also $\Delta(\Omega_1, \Omega_2) = \Delta(\Omega_2, \Omega_4)$. Sei $\Theta_3 \in \Delta(\Omega_1, \Omega_2)$, dann $\Theta_3 \in \Delta(\Omega_2, \Omega_4)$, also verbunden mit $\Omega_2 \cap \Omega_3$ und mit $\Omega_3 \cap \Omega_4$, also punktweise mit Ω_3, also $\Theta_3 \in \Delta(\Omega_1, \Omega_3)$. Also $\Delta(\Omega_1, \Omega_2) \subset \Delta(\Omega_1, \Omega_3)$ und ebenso umgekehrt.

Wir haben dann: $\Delta(\Omega_1, \Omega_2)$ ist durch zwei seiner Punkte bestimmt.

16.19.2. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, entartete Polaritäten zu erhalten:

Die Ebenen P_1, P_2 mögen sich in *einem* Punkt treffen, während P_3 sich zu beiden i.a.L. befinde. Die folgenden Abbildungen sind dann sinnvoll für $\Theta_1 \neq P_1 \cap P_2$:

$$(P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1)\Theta_1 = (P_2 \to P_3 \to P_1)\Omega_2 = (P_3 \to P_1)\Theta_3 = \Omega_1,$$
$$(P_1 \to P_3 \to P_2 \to P_1)\Theta_1 = (P_3 \to P_2 \to P_1)\Omega_3 = (P_2 \to P_1)\Theta_2 = \Omega_1$$

wegen des Schliessungssatzes 16.19.1. Also

$$(P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1)\Theta_1 = (P_1 \to P_3 \to P_2 \to P_1)\Theta_1$$

für $\Theta_1 \neq P_1 \cap P_2$.

Das ergibt auch: Ist Θ' auf $(P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1)\Theta$, so geht $(P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1)\Theta'$ durch Θ.

16.20. Sind Θ_1, Θ_2 Punkte i.a.L., und durchlaufen Q_1, Q_2 bzw. die Bündel mit Θ_1 bzw. Θ_2 als Scheitel, so dass jeweils Q_1 und Q_2 einander in einer Geraden schneiden, so durchläuft ihre Schnittgerade eine Menge $\Delta^*(\Theta_1, \Theta_2)$ von Geraden. Der Schliessungssatz sagt, dass $\Delta^*(\Theta_1, \Theta_2)$ durch zwei seiner Elemente i.a.L. bestimmt ist.

16.21. Seien Ω_1, Ω_2 Geraden i.a.L. und sei jeweils $\Theta \in \Omega_1$ verbunden mit $\varphi(\Theta) \in \Omega_2$. Dann ist φ eine Projektivität.

Denn wählt man P_1 durch Ω_1 mit leerem $P_1 \cap \Omega_2$ und weiter P_2 durch Ω_2 mit $P_2 \neq \Omega_2 P_1$, so sind P_1, P_2 i.a.L. und ist $\varphi(\Theta) = \Omega_2 \cap ((P_1 \to P_2)\Theta)$ für $\Theta \in \Omega_1$.

16.22. Sind $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ paarweise i.a.L. und ist φ_{ij} die zu Ω_i, Ω_j nach 16.21 gehörige Projektivität, so ist $\varphi_{31}\varphi_{23}\varphi_{12}$ eine Involution.

Das folgt aus Axiom C, sobald man weiss, dass P_i durch Ω_1 existieren, so dass P_1, P_2, P_3 i.a.L. sind. Wir zeigen das später (siehe 19).

16.23. Zu 16.22 gehört folgende Schliessungsfigur von sechs Punkten $\Theta_i (i = 1, \ldots, 6)$ und neun Geraden:

Θ_i verbunden mit $\Theta_{i-1}, \Theta_{i+1}, \Theta_{i+3}$ (mit i mod 6 gerechnet).

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. VI [1959c]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 62 (1959), 180–191
[Zbl 0128.15302]

(Communicated at the meeting of March 28, 1959)

17. *Der Dreiebenensatz*

17.1. Die Anzahl der Ebenen durch Ω ist von Ω unabhängig.

Denn treffen die Geraden Ω_1, Ω_2 einander in einem Punkt, ohne in einer Ebene zu liegen, so sind ihre Büschel eineindeutig aufeinander bezogen, wenn einer Ebene P_1 durch Ω_1 die Ebene P_2 durch Ω_2 zugeordnet wird, die P_1 in einer Geraden schneidet (siehe 16.12). Sind Ω_1 und Ω_2 beliebig, so schalte man zwischen ihnen eine Gerade Ω_3 ein, die Ω_1 und Ω_2 trifft, ohne mit Ω_1 oder Ω_2 in einer Ebene zu liegen – sind Ω_1, Ω_2 i.a.L., so lasse man (nach 16.13) Ω_3 einen Punkt von Ω_1 mit einem von Ω_2 verbinden; sind Ω_1, Ω_2 in einer Ebene Q, so lege man erst durch $\Theta \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ in Q eine Gerade $\Omega_4 \neq \Omega_1, \neq \Omega_2$, ferner durch Ω_4 eine Ebene $R \neq Q$, und wähle man Ω_3 durch Θ in R, aber $\neq \Omega_4$.

17.2. *Satz*: Durch eine Gerade gibt es mindestens drei Ebenen.

Der Beweis ist recht mühselig. A_{ok} wird wesentlich verwendet; dagegen spielt C keine Rolle. In 18 steht ein Gegenbeispiel under der Annahme A_{re}.

17.3. Wir machen im weiteren Verlauf von 17 die (zu widerlegende) *Annahme*: Durch jede Gerade gehen genau zwei Ebenen.

Nach 17.1 ist 17.2 bewiesen, sobald die "Annahme" widerlegt ist.

17.4. Wir schreiben dim $V = -1, 0, 1, 2$, je nachdem ob V leer, ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene ist.

Hilfssatz: Seien P, Q, R Ebenen mit

$$\dim P \cap Q = 1, \quad 0 \leqslant \dim P \cap R \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant \dim Q \cap R \leqslant 1.$$

Dann ist $\dim P \cap R + \dim Q \cap R = 1$.

Beweis: Nach 16.10 ist etwa $(P \cup Q) \cap R \subset P$, also $Q \cap R \subset P \cap Q$. Wäre $\dim Q \cap R = 1$, so wäre $Q \cap R = P \cap Q$ und P, Q, R wären drei Ebenen durch $P \cap Q$ im Widerspruch zur "Annahme". Also $\dim Q \cap R = 0$. Wäre nun auch $\dim P \cap R = 0$, so wäre $P \cap R = Q \cap R = \Theta \in P \cap Q$. Sei dann S die Ebene durch $P \cap Q$, die R in einer Geraden schneidet (siehe 16.12). $S \neq P$, da $\dim S \cap R = 1$, $\dim P \cap R = 0$. Ebenso $S \neq Q$. Das ergäbe einen Widerspruch zur "Annahme".

17.5. Sei $\mathfrak{S}$ ein zyklisch geordnetes System von Ebenen $P_0, \ldots, P_{n-1}$ (man rechne mit den Indizes mod n). Dann sei $\tau(\mathfrak{S})$ das zyklische geordnete System der Zahlen $\dim P_i \cap P_{i+1}$, und $\sigma(\mathfrak{S})$ die Summe der Zahlen aus $\tau(\mathfrak{S})$.

Hilfssatz: $\sigma(\mathfrak{S})$ ist gerade.

Beweis: Für leeres $\mathfrak{S}$ ist das klar. Wir beschreiben Transformationen, mit denen man $\mathfrak{S}$ schrittweise auf das leere System reduziert, und die jeweils die Parität von $\sigma(\mathfrak{S})$ erhalten:

1. Ist (für gewisses i) $\dim P_i \cap P_{i+1} = 2$ und lässt man P_i aus $\mathfrak{S}$ weg, so fällt in $\tau(\mathfrak{S})$ eine 2 weg und bleibt alles Andere unverändert.

2. Ist $\dim P_i \cap P_{i+1} = -1$ und schaltet man zwischen P_i und P_{i+1} eine Ebene ΘP_i (mit gewissem $\Theta \in P_{i+1}$) ein, so wird in $\tau(\mathfrak{S})$ ein -1 ersetzt durch 1,0, während sich übrigens nichts ändert.

3. Ist $\dim P_i \cap P_{i+1} = \dim P_{i+1} \cap P_{i+2} = 1$, so ist (nach 17.4) $\dim P_i \cap P_{i+2} = 0$ oder $= 2$. Lässt man P_{i+1} aus $\mathfrak{S}$ weg, so wird in $\tau(\mathfrak{S})$ ein Paar 1,1 ersetzt durch 0 oder 2, während sich übrigens nichts ändert.

4. Ist $\dim P_i \cap P_{i+1} = 1$, $\dim P_{i+1} \cap P_{i+2} = 0$, so ist (nach 17.4) $\dim P_i \cap P_{i+2} = 1$. Lässt man P_{i+1} aus $\mathfrak{S}$ weg, so wird in $\tau(\mathfrak{S})$ ein Paar 1,0 durch 1 ersetzt, d.h. eine 0 fällt weg.

Man sieht leicht, dass diese vier Prozesse das Gewünschte leisten.

17.6. P_0 sei eine feste Ebene. Wir nennen P eine 0-Ebene bzw. eine 1-Ebene, je nachdem $\dim P_0 \cap P$ gerade oder ungerade ist.

P_0 ist 0-Ebene und jede P_0 in einer Geraden schneidende Ebene ist 1-Ebene.

17.7. Hilfssatz: Sei P eine i-Ebene und Q eine j-Ebene ($i \neq j$). Dann ist $\dim P \cap Q \equiv i + j \bmod 2$.

Beweis: Klar bei Betrachtung des zyklischen Systems P_0, P, Q.

17.8. Durch jede Gerade gibt es genau eine 0-Ebene und genau eine 1-Ebene.

Klar nach "Annahme" und 17.7.

17.9. Die Menge der i-Ebenen durch Θ heisse $\beta_i(\Theta)$. $\beta_i(\Theta)$ ist unendlich. Denn wenn P eine j-Ebene durch Θ ist mit $j \neq i$, so gibt es durch jede Gerade Ω in P mit $\Theta \in \Omega$ eine i-Ebene, die zu $\beta_i(\Theta)$ gehört.

17.10. Sind Θ_0, Θ_1 nicht verbunden und $P_1, \ldots, P_n \in \beta_i(\Theta_0)$, so gibt es unendlich viel $Q \in \beta_j(\Theta_1)$ ($j \neq i$) mit leerem $Q \cap \bigcup P_i$.

Denn man braucht nur $Q \in \beta_j(\Theta_1)$, $\neq \Theta_1 P_m$ (für alle m mit $1 \leqslant m \leqslant n$) zu wählen. Dann ist $\dim Q \cap P_m \neq 1$ und ungerade, also $= -1$.

17.11. Ist ein Punkt Θ_0 gegeben, so wähle man ein mit Θ_0 nicht verbundenes Θ_1, und zu zwei Ebenen $Q, R \in \beta_j(\Theta_0)$ ein $P \in \beta_i(\Theta_1)$ ($i \neq j$) mit leerem $P \cap (Q \cup R)$. $\varphi = Q \to P \to R$ ist eine Projektivität. $\varphi(\Theta_0) = \Theta_0$. Für $\Theta \in Q$, $\Theta \neq \Theta_0$ ist $\Theta\Theta_0 P$ eine i-Ebene, die R mindestens in Θ_0, also in einer Geraden schneidet, nämlich der Geraden $\varphi(\Theta_0\Theta)$. Also liegen

$\Theta_0\Theta$ und $\varphi(\Theta_0\Theta)$ in einer Ebene. Also sind Θ_0, Θ, $\varphi\Theta$ verbunden. φ bildet das Geradenbüschel (Θ_0, Q) projektiv ab auf das Geradenbüschel (Θ_0, R).

17.12. Sind Q, R j-Ebenen durch Θ_0, so wird $\beta_i(\Theta_0)$ $(i \neq j)$ durch f mit

$$f(S) = S \cap Q \text{ für } S \in \beta_i(\Theta_0)$$

abgebildet auf das Geradenbüschel (Θ_0, Q) und durch g mit

$$g(S) = S \cap R \text{ für } S \in \beta_i(\Theta_0)$$

auf das Geradenbüschel (Θ_0, R). Nach 17.11 ist fg^{-1} projektiv.

Durch f^{-1} können wir die projektive Struktur des Büschels (Θ_0, Q) übertragen auf $\beta_i(\Theta_0)$. Von der Wahl von Q ist die so definierte Struktur in $\beta_i(\Theta_0)$ unabhängig. Die projektive Struktur von $\beta_i(\Theta_0)$ ist die der projektiven Oktavengeraden.

17.13. Sei P eine i-Ebene, $\Theta_0 \notin P$. Durch h mit

$$h(S) = P \cap S \text{ für } S \in \beta_i(\Theta_0)$$

wird $\beta_i(\Theta_0)$ eineindeutig abgebildet auf $P \cap \Theta_0 P$. h ist projektiv.

Beweis: Man nehme P_0 durch Θ_0 mit $\dim P_0 \cap P = -1$ (siehe 17.10) und setze

$$f(S) = P_0 \cap S \quad \text{für } S \in \beta_i(\Theta_0).$$

Dann ist fh^{-1} auf $\Theta_0 P \cap P$ identisch mit $P \to P_0$, also projektiv. Also ist auch h projektiv.

17.14. Seien Θ_0, Θ_1 nicht verbunden. Durch

$$\psi(S) = \Theta_1 S \quad \text{für } S \in \beta_i(\Theta_0)$$

wird eine projektive Abbildung von $\beta_i(\Theta_0)$ auf $\beta_j(\Theta_1)$ $(i \neq j)$ definiert.

Beweis: Man nehme eine j-Ebene P durch Θ_0 und eine i-Ebene Q durch Θ_1, so dass $\dim P \cap Q = -1$ (siehe 17.10). Man setze

$$\Omega_1 = \Theta_0 Q \cap Q \ , \ \Omega_0 = \Theta_1 P \cap P.$$

Wegen der Nichtverbundenheit von Θ_0, Θ_1 ist

$$\Theta_0 \notin \Omega_0 \ , \ \Theta_1 \notin \Omega_1.$$

Für $S \in \beta_i(\Theta_0)$ setze man

$$f_1(S) = S \cap P, \ f_2 f_1 S = f_1(S) \cap \Omega_0,$$

$$g_1\psi(S) = \psi(S) \cap Q, \ g_2 g_1 \psi(S) = g_1\psi(S) \cap \Omega_1.$$

$f_2 f_1 S \in \Omega_0$, also mit Θ_1 verbunden; andererseits $f_2 f_1 S \in S$, also $f_2 f_1 S \in \Theta_1 S$, also $\in S \cap \Theta_1 S$. Ebenso $g_2 g_1 \psi(S) \in S \cap \Theta_1 S$. Also $f_2 f_1 S$ und $g_2 g_1 \psi(S)$ verbundene Punkte von Ω_0 bzw. Ω_1. Also $\varphi f_2 f_1 S = g_2 g_1 \psi(S)$, wo φ die Projektivität aus 16.21 ist. f_1, g_1 sind nach 17.12 Projektivitäten, f_2, g_2 sind es trivialerweise. Also ist ψ eine Projektivität.

17.15. Man nehme nichtverbundene Punkte Θ_0, Θ_1 (siehe Fig. 3), und durch Θ_i zwei i-Ebenen P_i, Q_i, so dass $(P_0 \cup Q_0) \cap (P_1 \cup Q_1)$ leer ist (siehe 17.10).

$$f = P_0 \to P_1 \to Q_0, \quad g = Q_0 \to Q_1 \to P_0$$

sind Projektivitäten. gf lässt Θ_0 invariant und

$$\Omega_0 = \Theta_1 P_0 \cap P_0$$

als Ganzes invariant. Da Θ_0, Θ_1 nicht verbunden sind, ist $\Theta_0 \notin \Omega_0$. Für $\Theta \in P_0$, $\Theta \neq \Theta_0$, $\Theta \notin \Omega_0$ ist nach 17.11 Θ verbunden mit $f\Theta$ und $f\Theta$ verbunden mit $gf\Theta$. Weiter sind Θ und $gf\Theta \in P_0$, also verbunden, und alle drei sind mit Θ_0 verbunden. Sie liegen in einer Ebene, die P_0 in $\Theta_0\Theta$ schneidet. Also liegen Θ_0, Θ, $gf\Theta$ auf einer Geraden. gf ist demnach eine Perspektivität mit Θ_0 als Scheitel und Ω_0 als Achse.

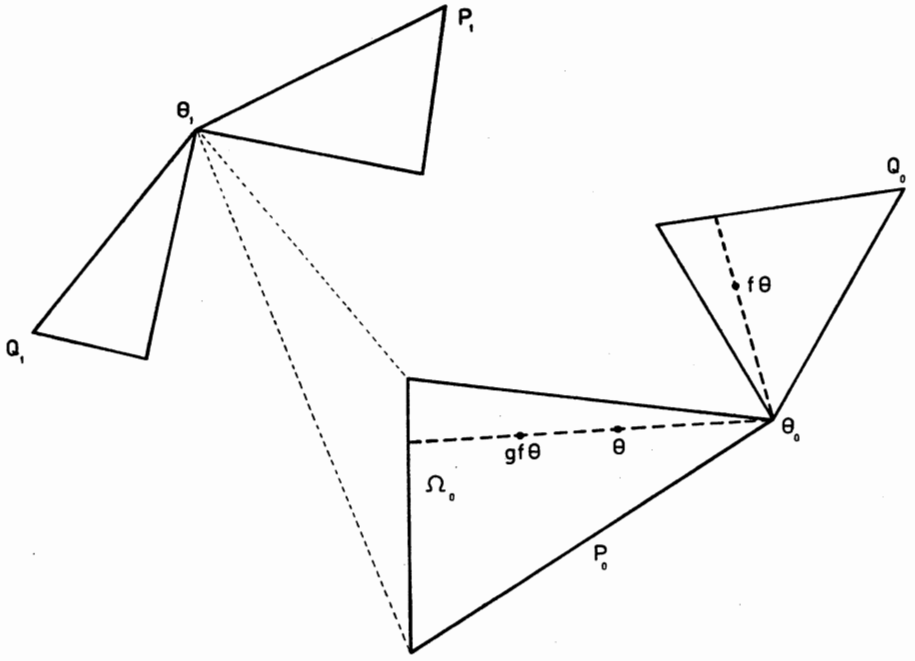


Fig. 3

Q_1 variiere in $\beta_1(\Theta_1)$. Bei festem Θ ist $(f\Theta)Q_1$ projektiv abhängig von Q_1 (17.14). Als 0-Ebene trifft $(f\Theta)Q_1$ die 0-Ebene P_0, und zwar in $gf\Theta$; nach 17.13 ist der Schnittpunkt projektiv abhängig von $(f\Theta)Q_1$. Also hängt $gf\Theta$ bei festem Θ projektiv ab von Q_1, durchläuft also bei variablem Q_1 die projektive *Oktaven*gerade $\Theta_0\Theta$ (die Punkte Θ_0 bzw. $\Theta_0\Theta \cap \Omega_0$ bzw. Θ ergeben sich, wenn man zulässt, dass Q_1 die Ebene Q_0 bzw. P_0 trifft, bzw. mit P_1 zusammenfällt). Als Bildpunkt bei der Perspektivität gf darf $gf\Theta$ aber nur eine reelle projektive Gerade durchlaufen. Damit hat sich ein Widerspruch ergeben.

18. *Ein Gegenbeispiel im Falle A_{re}*

Um den Widerspruch in 17 zu erhalten, wurde ganz am Schluss wesentlich A_{ok} gebraucht. Aus A_{re} lässt der Dreiebenensatz sich nicht erschliessen. Das zeigt folgendes Beispiel.

18.1. $$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2$$
definiert eine 4-dim. projektive Quadrik $\mathfrak{Q}$. Wir fassen die ξ bzw. ω zu Vektoren x, u zusammen. Die Gleichung von $\mathfrak{Q}$ lautet dann

$$(x, x)=(u, u).$$

Verbundenheit von Punkten von $\mathfrak{Q}$ wird im üblichen Sinn definiert. Ebenen auf $\mathfrak{Q}$ lassen sich in der Form

$$u=Ax,\ A \text{ orthogonal},$$

schreiben; wir deuten solch eine Ebene einfach mit A an. Wir setzen weiter fest:

A ist 0-Ebene bzw. 1-Ebene, wenn $\det A=1$ bzw. -1 ist. Die gemeinsamen Punkte zweier Ebenen A, B erhält man durch Lösung der Gleichung $Ax=Bx$ oder

$$A^{-1}Bx=x.$$

Das orthogonale C hat zum Eigenwert 1 einen Eigenraum der projektiven Dimension

$$\begin{aligned} 0 \text{ oder } 2 \quad & \text{für } \det C=\ \ 1,\\ -1 \text{ oder } 1 \quad & \text{für } \det C=-1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Gültigkeit von 17.7.

18.2 Durch die Gerade $\xi_1=\omega_1,\ \xi_2=\omega_2,\ \xi_3=\omega_3=0$ gehen, wie man leicht sieht, nur die Ebenen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

18.3. Gültigkeit des Axioms B: Gegeben eine Ebene A und ein Punkt x_0, u_0 von $\mathfrak{Q}$ mit $u_0\neq Ax_0$. Dann ist

$$y_0=A^{-1}u_0\neq x_0.$$

Sei C die Spiegelung an der Halbierungsebene des Winkels $x_0 0 y_0$, und

$$B=AC.$$
$$Bx_0=ACx_0=Ay_0=u_0.$$

Die Ebene B geht durch x_0, u_0 und schneidet A in einer Geraden, da C zweimal den Eigenwert 1 hat.

19. *Weitere Existenzsätze*

Unter der Annahme, es gebe durch eine Gerade mindestens $p+1$

Ebenen, beweist man ohne Mühe (am besten in dieser Reihenfolge) die Sätze:

19.1. Zu p Ebenen gibt es eine von allen verschiedene Ebene.

19.2. Zu p Ebenen gibt es einen Punkt und eine Gerade, die auf keiner liegen.

19.3. Zu den Ebenen $P_1, \ldots, P_p$ und der Geraden Ω, die in keiner der Ebenen liegt, gibt es eine Ebene P durch Ω mit $\dim P \cap P_i \leqslant 0$ $(i=1, \ldots, p)$. (Man bestimme für jedes i mit $\dim \Omega \cap P_i = 0$ die Ebene Q_i durch Ω so, dass $\dim Q_i \cap P_i = 1$ und wähle $P \neq Q_i$ für alle diese i.)

19.4. Zu den Ebenen $P_1, \ldots, P_p$ und der Geraden Ω, die kein P_i trifft, gibt es eine Ebene P durch Ω, die kein P_i trifft. (Man verfahre wie in 19.3 aber mit $Q_i = \Omega P_i$.)

19.5. Zu den Ebenen $P_1, \ldots, P_p$ und dem Punkte Θ, der auf keinem P_i liegt, gibt es eine Ebene P durch Θ, die kein P_i trifft. (Man wähle erst eine beliebige Gerade durch Θ, wende 19.3 an, wähle in der neuen Ebene eine Gerade, die keinen Schnittpunkt mit einem P_i enthält und wende schliesslich 19.4 an.)

20. *Die Hermitizität der Polaritäten* $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$.

20.1. Bei der Polarität

$$\Lambda = P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0 \qquad (P_i \cap P_j \text{ leer für } i \neq j)$$

ist $\Lambda\Theta$ inzident mit Θ dann und nur dann, wenn es eine Gerade durch Θ gibt, die P_1 und P_2 trifft.

20.2. Seien P_0, P_1, Q, Q' Ebenen, so dass $Q \cap Q'$ eine Gerade Ω^* ist und im Übrigen paarweise allgemeine Lage herrscht. (Siehe Fig. 4.)

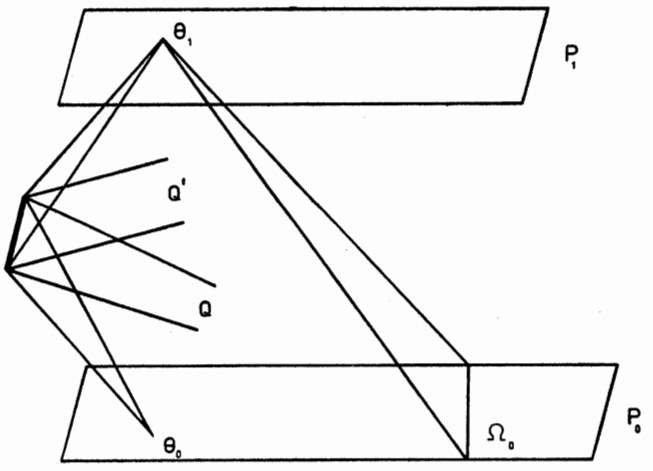


Fig. 4

Sei

$$\Lambda = P_0 \to Q \to P_1 \to P_0,\ \Lambda' = P_0 \to Q' \to P_1 \to P_0,$$
$$\Theta_i = \Omega^* P_i,\ \Omega_0 = \Theta_1 P_0 \cap P_0.$$

Dann ist $\Lambda'\Lambda = P_0 \to Q \to P_1 \to Q' \to P_0$ eine Perspektivität von P_0 mit dem Scheitel Θ_0 und der Achse Ω_0.

Beweis: $\Lambda\Theta_0 = \Lambda'\Theta_0 = \Omega_0$, also $\Lambda'\Lambda\Theta_0 = \Theta_0$, $\Lambda'\Lambda\Omega_0 = \Omega_0$. – Weiter, wenn Ω eine Gerade durch Θ_0 in P_0 ist: $(P_0 \to Q)\Omega \in \Omega^*$, also $\in Q'$. Also $(P_0 \to Q')\Omega = (P_0 \to Q)\Omega$, also $\Lambda\Omega = \Lambda'\Omega$, also $\Lambda'\Lambda\Omega = \Omega$. – Für den Fall $\Theta_0 \in \Omega_0$ beweise man noch analog: $\Lambda'\Lambda\Theta = \Theta$ für $\Theta \in \Omega_0$.

20.3. Satz: Seien P_0, P_1, Q paarweise fremd. Sei $\Lambda = P_0 \to Q \to P_1 \to P_0$. Ferner Θ_0, $\Theta \in P_0$, $\Lambda\Theta_0 = \Omega_0$, $\Theta \neq \Theta_0$, $\Theta \notin \Omega_0$; $\Lambda\Theta$, $\Theta_0\Theta$, Ω_0 nicht durch *einen* Punkt. Dann gibt es eine Perspektivität Π mit dem Scheitel Θ_0, der Achse Ω_0, und so dass $\Pi\Theta = \Lambda\Theta \cap \Theta_0\Theta$.

Beweis: 1. Wir konstruieren erst durch $\Omega^* = Q \cap \Theta_0 Q$ eine Ebene Q', so dass bei

$$\Lambda' = P_0 \to Q' \to P_1 \to P_0$$

gilt

$$\Lambda'\Theta \in \Theta.$$

Man setze $\Theta P_1 = R$; wegen $\Theta \notin \Omega_0$ ist $\Omega^* \cap R$ leer. Man setze weiter $\Omega^* R = Q'$. Ist $Q' \cap (P_0 \cup P_1)$ leer, so ist Q' die verlangte Ebene, denn die Geraden $\Theta(R \cap \Omega^* R)$ und $P_1 \cap R$ liegen in R und schneiden einander, also schneidet die erste Gerade Q' und P_1, also ist $\Lambda'\Theta \in \Theta$ (siehe 20.1).

Wäre $Q' \cap P_0$ nicht leer, so wäre $Q' = \Omega^* P_0$, $\Theta_0 \in Q'$. Θ_0, Θ, $Q' \cap R$ wären paarweise verbunden, und es gäbe eine Ebene S durch diese Punkte. S würde Q' in einer Geraden, also auch Ω^* treffen. Wegen der Existenz einer Ebene durch, $\Theta_0\Theta$, die Q und P_1 träfe, wäre $\Lambda(\Theta_0\Theta) \in \Theta_0\Theta$. Andererseits $\Lambda(\Theta_0\Theta) \in \Omega_0$. Dann ginge $\Lambda\Theta$ durch $\Omega_0 \cap \Theta_0\Theta$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wäre $Q' \cap P_1$ nichtleer, so würde Q' die Ebenen P_1 und R mit $\dim P_1 \cap R = 1$ treffen, also würde Q' sogar $P_1 \cap R$ treffen. Dies widerspräche $\Theta \notin \Omega_0$.

2. Wir setzen $\Pi = \Lambda\Lambda'$. Nach 20.2 ist das eine Perspektivität mit Scheitel Θ_0 und Achse Ω_0. $\Lambda'\Theta$ geht durch Θ. Also: $\Pi\Theta = \Lambda\Lambda'\Theta$ liegt auf $\Lambda\Theta$ und andererseits auf $\Theta_0\Theta$.

20.4 Wegen der Hermitizität der Perspektivitäten (siehe 13.1) folgt hieraus:

Satz: Die Polaritäten $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$ sind hermitesch.

Die Schlussweise versagt im komplexen und im Quaternionen-Fall.

21. *Die reell-projektive Struktur des Büschels $\beta(\Omega)$.*

Unter $\beta(\Omega)$ verstehen wir die Menge der Ebenen durch Ω.

21.1. Man entnehme 16.19–20 die Definition von $\Delta(\Omega_1, \Omega_2)$ und

$\Delta^*(\Theta_1, \Theta_2)$. Ferner sei $\Delta^{**}(\Theta_1, \Theta_2)$ die Vereinigung aller Elemente (Geraden) aus $\Delta^*(\Theta_1, \Theta_2)$. Bildet man $\Delta^*(\Theta_1, \Theta_2)$ für zwei Punkte $\Theta_1, \Theta_2 \in \Delta(\Omega_1, \Omega_2)$, so erhält man eine Menge, die jedenfalls Ω_1, Ω_2 enthält und daher von der speziellen Wahl von Θ_1, Θ_2 nicht abhängt (siehe 16.20); wir nennen sie $\Delta^*(\Omega_1, \Omega_2)$ und ihre Vereinigung $\Delta^{**}(\Omega_1, \Omega_2)$. Bildet man $\Delta(\Omega_1, \Omega_2)$ für zwei Geraden i.a.L. $\Omega_1, \Omega_2 \in \Delta^*(\Theta_1, \Theta_2)$, so erhält man eine Menge, die jedenfalls Θ_1, Θ_2 enthält und daher von der speziellen Wahl von Ω_1, Ω_2 nicht abhängt; wir nennen sie $\Delta(\Theta_1, \Theta_2)$.

21.2. Zwei Punkte einer Menge Δ sind niemals verbunden. Sind zwei Punkte einer Menge Δ^{**} verbunden, so liegt ihre Gerade ganz in Δ^{**}.

21.3. $\Delta(\Theta_1, \Theta_2)$ und $\Delta^{**}(\Theta_1, \Theta_2)$ bestimmen einander gegenseitig; jede besteht aus allen Punkten, die mit der andern punktweise verbunden sind.

21.4. Dann und nur dann ist $P \cap \Delta(\Theta_1, \Theta_2)$ leer, wenn $P \cap \Delta^{**}(\Theta_1, \Theta_2)$ aus höchstens einem Punkt besteht.

Beweis: Sei $\Theta \in P \cap \Delta(\Theta_1, \Theta_2)$. Dann ist $\Delta(\Theta_1, \Theta_2) = \Delta(\Theta_1, \Theta)$ und $\Theta_1 P \cap P$ punktweise verbunden mit Θ_1 und Θ, also $\subset \Delta^{**}(\Theta_1, \Theta)$. Sei andererseits $\Omega \subset P \cap \Delta^{**}(\Theta_1, \Theta_2)$ und $\Omega' \cap \Omega$ leer, $\Omega' \subset \Delta^{**}(\Theta_1, \Theta_2)$. Dann ist $\Omega' \cap P$ leer und $P \cap \Omega' P$ mit Ω und Ω' punktweise verbunden, also $P \cap \Omega' P \in \Delta(\Theta_1, \Theta_2)$.

21.5. Gegeben seien die Geraden Ω, Ω^* i.a.L. Wir wählen ein P_0 mit eerem $P_0 \cap \Delta(\Omega, \Omega^*)$ und setzen

$$S = \Omega^* P_0,\ P_1 = \Omega S,\ \Theta_0 = P_0 \cap S,\ \Theta_1 = P_1 \cap S.$$

(Siehe Fig. 5.)

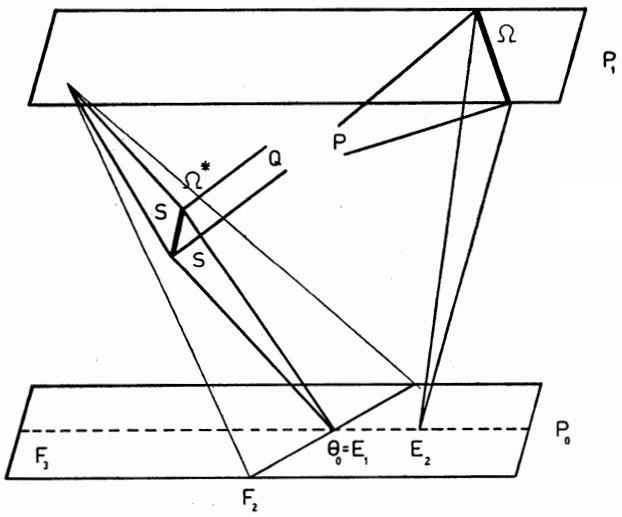


Fig. 5

Wir koordinatisieren die Ebene P_0 so, dass

$$\Theta_0 = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 \cap \Theta_1 P_0 = F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega P_0 = E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wird.

Eine variable Ebene Q durch Ω^*, die $P_0 \cup P_1$ nicht trifft, bestimmt eine Polarität

$$\Lambda_Q = P_0 \to Q \to P_1 \to P_0$$

mit

$$\Lambda_Q E_1 = F_2. \tag{21.5.1}$$

$\Lambda_Q B$ ist unabhängig von Q für alle Geraden B durch E_1, also: $\Lambda_Q A$ ist unabhängig von Q für alle Punkte A auf F_2. Nach 20.4 und 14 ist

$$\Lambda_Q = 2(U \times U) \times X - (U, X)U$$

mit gewissem

$$U = \begin{pmatrix} \omega_1 & u_3 & \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 & \omega_2 & u_1 \\ u_2 & \bar{u}_1 & \omega_3 \end{pmatrix},$$

das von Q abhängt.
Die Forderung 21.5.1 ergibt

$$\omega_1 = u_2 = 0, \quad u_3 \neq 0 \text{ (wegen det } U \neq 0).$$

Mit $(X, F_2) = 0$, also

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \bar{x}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix},$$

erhält man

$$\Lambda_Q X = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1|u_3|^2 + \xi_3|u_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(u_3 u_1 x_2) & \omega_3 \bar{u}_3 \bar{x}_2 + \xi_3 \omega_3 u_1 \\ 0 & \omega_3 x_2 u_3 + \xi_2 \omega_3 \bar{u}_1 & \xi_3 \omega_3^2 \end{pmatrix}.$$

Speziell für

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt aus der Unabhängigkeit des $\Lambda_Q X$ von Q:

$$c = u_1/\omega_3 \quad \text{unabhängig von } Q,$$
$$b = u_3/\omega_3 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad Q, \neq 0.$$

Auf der Geraden

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

finden wir die Punkte

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & 0 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wo $\Lambda_Q X$ durch X geht ("Inzidenzpunkte"), als Lösungen von (siehe 14.5)

$$2(x_3, u_3) + \xi_2 \omega_2 = 0.$$

Wir wählen ein a mit

$$(a, a) = 1, \quad (a, b) \neq 0$$

und verstehen unter C die reelle projektive Gerade auf F_3, die aus den Punkten

$$\begin{pmatrix} \mu^2 & \lambda\mu a & 0 \\ \lambda\mu\bar{a} & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(λ, μ reell variabel) besteht. Auf C liegt genau ein Inzidenzpunkt $\neq E_1$; er ist bestimmt durch

$$\lambda/\mu = -2(a, u_3)/\omega_2 = -2(a, b)\omega_3/\omega_2; \tag{21.5.2}$$

wir nennen ihn $\varphi(Q)$. Man kann auch definieren: $\varphi(Q)$ ist der Punkt $\neq E_1$ auf C, durch den eine Gerade geht, die Q und P_1 trifft. Diese Definition kann bis $Q = S$ fortgesetzt werden, so dass $\varphi(S) = E_1$. Dem entspricht $\lambda = 0$ und, wenn 21.5.2 gültig bleiben soll, $\omega_3 = 0$, d.h. eine entartete Polarität. Andererseits gibt es zu jedem Punkt Θ auf C genau ein Q mit $\varphi(Q) = \Theta$, nämlich $Q = \Omega^*(\Theta P_1)$. Also ist φ eine eineindeutige Abbildung des Büschels $\beta(\Omega^*)$ auf die reelle projektive Gerade C. Wenn wir in Zukunft von einer (reell) projektiven Struktur in $\beta(\Omega^*)$ sprechen, so meinen wir die mittels φ^{-1} von C auf $\beta(\Omega^*)$ übernommene Struktur.

$$\Lambda_Q E_2 = \begin{pmatrix} |b|^2\omega_3^2 & \omega_2\omega_3 b & \omega_3^2 bc \\ \omega_2\omega_3\bar{b} & \omega_2^2 & \omega_2\omega_3 c \\ \omega_3^2\bar{c}\bar{b} & \omega_2\omega_3\bar{c} & \omega_2^2|c|^2 \end{pmatrix}$$

durchläuft bei variablem Q ein reell projektives Geradenbüschel D. Zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} |b|^2 & 0 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}\bar{b} & 0 & |c|^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} |b|^2 & b & bc \\ \bar{b} & 1 & c \\ \bar{c}\bar{b} & \bar{c} & |c|^2 \end{pmatrix}$$

als Fundamentalgeraden hat $\Lambda_Q E_2$ das Doppelverhältnis ω_3/ω_2. (Zwecks Berechnung siehe 11.2.) $\Lambda_Q E_2$ und $\varphi(Q)$ hängen also reell-projektiv voneinander ab.

Wegen $\Omega P_0 = E_2$ kann $\Lambda_Q E_2$ auch folgendermassen beschrieben werden: Zu jedem $Q \in \beta(\Omega^*)$ gehört *ein* $P \in \beta(\Omega)$, das Q trifft; $\Lambda_Q E_2 = (P \cap Q)P_0 \cap P_0$. (Auch für $Q = S$ sinnvoll.)

Man definiert nun zweckmässig eine reell-projektive Struktur in $\Delta(\Omega, \Omega^*)$ durch die Festsetzung: Die Abbildung von $\Delta(\Omega, \Omega^*)$ auf D, bei der einem $\Theta \in \Delta(\Omega, \Omega^*)$ die Gerade $P_0 \cap \Theta P_0$ entspricht, ist projektiv.

Dann kann unser Resultat so ausgesprochen werden: Zwischen $\beta(\Omega^*)$ und $\Delta(\Omega, \Omega^*)$ kommt eine reelle Projektivität zustande durch die Relation: $\Theta \in \Delta(\Omega, \Omega^*)$ liegt auf $P \in \beta(\Omega^*)$.

Wir zeigen noch:

1. Die projektive Struktur in $\Delta(\Omega, \Omega^*)$ hängt nicht von der Wahl von P_0 ab (wobei P_0 nicht $\Delta(\Omega, \Omega^*)$ trifft).

2. Die projektive Struktur in $\beta(\Omega^*)$ hängt nicht von der Wahl von Ω ab.

1. Der Scheitel des Büschels D ist Schnittpunkt der Geraden $\Theta P_0 \cap P$ mit $\Theta \in \Delta(\Omega, \Omega^*)$, also mit allen Punkten von $\Delta(\Omega, \Omega^*)$ verbunden, also in $\Delta^{**}(\Omega, \Omega^*)$. Ersetzt man P_0 durch ein P_0', so dass $P_0 \cap P_0'$ eine Gerade und fremd zu $\Delta^{**}(\Omega, \Omega^*)$ ist, so sind die Büschel D und D' (zu P_0' gehörig) durch die Schnittgerade $P_0 \cap P_0'$ (die die Scheitel vermeide) projektiv aufeinander bezogen, derart dass P_0' dieselbe projektive Struktur in $\Delta(\Omega, \Omega^*)$ bestimmt wie P_0.

Ist nun P_0' fremd zu P_0 (und zu $\Delta(\Omega, \Omega^*)$), so schalte man zwischen P_0 und P_0' Ebenen P_0'', P_0''' ein, so dass $P_0 \cap P_0''$, $P_0'' \cap P_0'''$, $P_0''' \cap P_0$ Geraden und zu $\Delta^{**}(\Omega, \Omega^*)$ fremd sind (dann sind P_0'', P_0''' von selber fremd zu $\Delta(\Omega, \Omega^*)$, da sie nach 21.4 sonst eine Gerade aus $\Delta^*(\Omega, \Omega^*)$ enthielten, die mit $P_0 \cap P_0''$ usw. einen Punkt gemein hätte). Man wähle etwa $\Theta \in P_0$ mit $\Theta \notin \Delta^{**}(\Omega, \Omega^*)$, $\Theta P_0' \cap P_0'$ fremd zu $\Delta^{**}(\Omega, \Omega^*)$; ferner $\Theta' \in \Theta P_0' \cap P_0'$, so dass $\Theta' P_0 \cap P_0$ und $\Theta' P_0 \cap \Theta P_0'$ fremd zu $\Delta^{**}(\Omega, \Omega^*)$ sind — dies ist möglich, da die Ebenen nach 21.4 mit $\Delta^{**}(\Omega, \Omega^*)$ höchstens einen Punkt gemein haben. Man setze dann $P_0'' = \Theta' P_0$, $P_0''' = \Theta P_0'$.

Ist schliesslich P' beliebig (aber fremd zu $\Delta(\Omega, \Omega^*)$), so schalte man zwischen P_0 und P_0' eine Ebene P_0'' ein, die zu $P_0 \cup P_0' \cup \Delta(\Omega, \Omega^*)$ fremd ist, und wende das Vorige an.

So ergibt sich die Behauptung 1.

2. Ersetzt man Ω durch irgendeine Gerade Ω' in P_1, die nicht durch Θ_1 geht, so wird E_2 ersetzt durch ein E_2' (nicht auf F_2). $\Lambda_Q E_2$ und $\Lambda_Q E_2'$ hängen reell projektiv von $\varphi(Q)$, also auch voneinander ab. Die Ersetzung von Ω durch Ω' ändert also die projektive Struktur in $\beta(\Omega^*)$ nicht.

Nun darf man dies anwenden mit *beliebigem* P_1 durch Ω. Dann ergibt sich: Man darf Ω durch irgendeine Gerade Ω' ersetzen, die mit Ω in einer Ebene liegt und sich i.a.L. zu Ω^* befindet. Dasselbe gilt hinsichtlich eines Ω', das Ω trifft — man schalte ein Ω'' ein, das mit Ω sowohl als auch mit Ω' in je einer Ebene liegt. Schliesslich gilt es auch für beliebiges Ω' — man schalte ein Ω'' ein, das Ω und Ω' trifft.

Wir fassen das Bewiesene zusammen:

21.6. Satz: Es gibt eine Struktur der reellen projektiven Geraden in jedem $\beta(\Omega)$ und $\Delta(\Omega_1, \Omega_2)$ derart, dass 1 für Ω_1, Ω_2 i.a.L. die Beziehung "$P_1 \in \beta(\Omega_1)$ trifft $P_2 \in \beta(\Omega_2)$" projektiv ist, 2. für $\Omega \in \Delta^*(\Omega_1, \Omega_2)$ die Beziehung "$P \in \beta(\Omega_1)$ geht durch $\Theta \in \Delta(\Omega_1, \Omega_2)$" projektiv ist, 3. für zu $\Delta(\Omega_1, \Omega_2)$ fremdes P die Gerade ΘP projektiv abhängt von $\Theta \in \Delta(\Omega_1, \Omega_2)$.

Insbesondere hat sich ergeben: $\beta(\Omega)$ ist unendlich.

Wir wollten topologische Betrachtungen (in der gewöhnlichen Topologie der Oktavenebene) vermeiden. Hätten wir uns ihrer bedient, so wären wir schneller zum Ziel gekommen.

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. VII [1959d]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 62 (1959), 192–201
[Zbl 0128.15302]

(Communicated at the meeting of March 28, 1959)

22. *Eine spezielle Abbildung der Ebene auf das Ebenenbüschel.*

22.1. Wir fangen an mit Betrachtungen wie in 21.5 mit dem Unterschied, dass die Schar Λ_Q aus entarteten hermiteschen Polaritäten bestehen wird. (Siehe Fig. 6.)

Gegeben seien die zu einander fremden Ebenen P_0, P_1 und die Gerade Ω^*, die P_0 in einem Punkte und P_1 nicht trifft. Den Punkt $\Omega^* \cap P_0$ koordinatisieren wir als

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gerade Ω_0 in P_0, deren Punkte mit Ω^* punktweise verbunden sind, kann als

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

angenommen werden. Q sei eine variable Ebene durch Ω^* und

$$\Lambda_Q = P_0 \to Q \to P_1 \to P_0 = P_0 \to P_1 \to Q \to P_0$$

(definiert für Punkte $\neq E_1$). Diese entarteten Polaritäten sind hermitesch (siehe 14.6), was man genau wie dort für die algebraisch definierten einsieht. Aus

$$\Lambda_Q E_1 = 0$$

und

$$\Lambda_Q X \text{ unabhängig von } Q \text{ für } (X, F_2) = 0$$

folgt (ähnlich wie in 21.5):

$$\Lambda_Q X = 2(U \times U) \times X - (U, X)U$$

mit

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & u_1 \\ 0 & \bar{u}_1 & \omega_3 \end{pmatrix},$$

$$u_1/\omega_3 = c \text{ unabhängig von } Q.$$

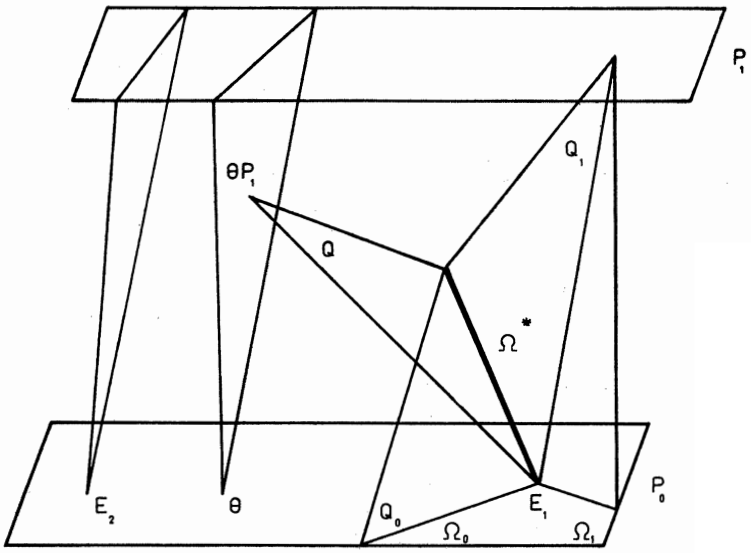


Fig. 6

Dabei wird vorläufig ausgeschlossen die Ebene Q_0, die Ω^* und Ω_0 enthält, und die Ebene $Q_1 = \Omega^* P_1$.

Wir setzen weiter: $\Omega_1 = (P_1 \cap Q_1)P_0 \cap P_0$. Ferner wählen wir Ω in P_1 so, dass $P_0 \cap \Omega P_0 = E_2$ wird. Wir setzen

$$\tau(Q) = P_0 \cap (Q \cap \Omega Q)P_0 \qquad \text{für } Q \in \beta(\Omega^*).$$

Dann ist τ projektiv (21.6). Für $Q \neq Q_0, \neq Q_1$ ist

$$\tau(Q) = \Lambda_Q E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2{}^2 & \omega_2\omega_3 c \\ 0 & \omega_2\omega_3\bar{c} & |\omega_3|^2|c|^2 \end{pmatrix}.$$

Für $Q = Q_0, {}_1$ sieht man direkt: $\tau(Q_0) = \Omega_0$, $\tau(Q_1) = \Omega_1$.

Also
$$\tau(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2{}^2 & \omega_2\omega_3 c \\ 0 & \omega_2\omega_3\bar{c} & |\omega_3|^2|c|^2 \end{pmatrix} \text{ für } Q \neq Q_1.$$

Sowohl linkes wie rechtes Glied durchlaufen für $Q \in \beta(\Omega^*)$ bzw. für beliebiges ω_2/ω_3 ein volles reelles Geradenbüschel. Also gilt diese Beziehung auch noch für $Q = Q_1$. In dem Geradenbüschel ist ω_2/ω_3 ein projektiver Parameter. Also ist ω_2/ω_3 auch projektiver Parameter $\sigma(Q)$ für $Q \in \beta(\Omega^*)$; zu Q_0 gehört $\omega_3 = 0$, zu Q_1 gehört $\omega_2\omega_3 = |u_1|^2$, d.h. $\omega_2/\omega_3 = |c|^2$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \psi(\Theta) &= \Omega^* \Theta P_1 && \text{für } \Theta \in P_0,\ \Theta \notin \Omega_0, \\ \psi(\Theta) &= Q_0 && ,,\ \Theta \in \Omega_0,\ \Theta \neq E_1. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\Theta \text{ Inzidenzpunkt von } \Lambda_{\psi(\Theta)} \qquad \text{für } \Theta \in P_0,\ \Theta \notin \Omega_0 \cup \Omega_1.$$

Für

$$\Theta = X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

drückt die Inzidenzeigenschaft sich aus als $(\Lambda_Q X, X) = 0$, oder

$$\xi_2\omega_2 + \xi_3\omega_3 + 2\omega_3(x_1, c) = 0. \tag{21.1.1}$$

Das ist also die algebraische Beziehung zwischen Θ und $\sigma\psi(\Theta)$ für $\Theta \notin \Omega_0 \cup \Omega_1$. Man rechnet leicht nach, dass sie für alle $\Theta \neq E_1$ gültig bleibt.

Der Koordinatenausdruck für Ω_0 bzw. Ω_1 ist

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c|^2 & c \\ 0 & \bar{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$U = B_1 - \left(|c|^2 - \frac{\omega_2}{\omega_3}\right) B_0.$$

Ersetzt man $\sigma = \omega_2/\omega_3$ durch den gleichfalls projektiven Parameter

$$\mu = |c|^2 - \frac{\omega_2}{\omega_3},$$

so drückt die Inzidenzrelation (21.1.1) sich in der Form

$$\mu\psi(X) = \frac{(B_1, X)}{(B_0, X)} \qquad \text{für } X \neq E_1$$

aus.

Es hat sich ergeben:

22.2. Satz: Seien P_0, P_1 zueinander fremde Ebenen und Ω^* eine Gerade, die P_0 in einem Punkt und P_1 nicht trifft. Sei Ω_0 in P_0 die Gerade, deren Punkte mit Ω^* punktweise verbunden sind, und sei

$$\Omega_1 = P_0 \cap (\Omega^* P_1 \cap P_1) P_0.$$

Sei Q_0 die Ebene durch Ω_0 und Ω^*. Sei $\psi(\Theta) = \Omega^* \Theta P_1$ für $\Theta \in P_0$, $\Theta \notin \Omega_0$, und $\psi(\Theta) = Q_0$ für $\Theta \in \Omega_0$, $\Theta \notin \Omega_0 \cap \Omega_1$. Dann ist bei geeigneter Wahl eines projektiven Parameters μ in $\beta(\Omega^*)$

$$\mu\psi(\Theta) = \frac{(B_1, X)}{(B_0, X)},$$

wenn (in einer Koordinatisierung von P_0) Ω_i $(i = 0, 1)$ durch B_i beschrieben wird (mit fester Normierung) und Θ durch X.

22.3. Wir geben noch eine nützliche Umstrukturierung dieses Satzes an, indem wir variables P_0 und festes Q_0 einführen.

Zunächst übertragen wir die Koordinatisierung von P_0 auf P_1, indem wir einem $(P_0 \to P_1)\Theta$ oder $(P_0 \to P_1)\Omega$ (mit $\Theta \in P_0$ bzw. $\Omega \subset P_0$) dieselbe Matrix zuordnen, die Θ bzw. Ω in P_0 hat. In P_0 wählen wir für X

Punkte A, A_0, A_1, was auf die Wahl von Geraden A, A_0, A_1 in P hinauskommt. In Q_0 liegen die Geraden Ω_0 und Ω^*; als $P_1 \cap \Omega_0 P_1$ und $P_1 \cap \Omega^* P_1$ entsprechen ihnen die Punkte B_0, B_1 in P_1. Der Geraden Ω in P_1 (die nicht durch B_1 geht) entspricht eine Ebene $\vartheta(\Omega) = \Omega^* \Omega P_0 \in \beta(\Omega^*)$. Es ist $\vartheta(P_1 \cap \Theta P_1) = \psi(\Theta)$, also

$$\mu\vartheta(A) = \frac{(B_1, A)}{(B_0, A)}.$$

ein projektiver Parameter in $\beta(\Omega^*)$. Wir ersetzen ihn durch

$$\varrho\vartheta(A) = \frac{(B_1, A)}{(B_0, A)} : \frac{(B_1, A_0)}{(B_0, A_0)}.$$

Dieser projektive Parameter wird 0 für A durch B_1, $\vartheta(A) = Q_1$, ∞ für A durch B_0, $\vartheta(A) = Q_0$, und 1 für $A = A_0$, $\vartheta(A) = \vartheta(A_0)$, ist also gleich dem Doppelverhältnis

$$DV(Q_1, \vartheta(A_0), Q_0, \vartheta(A)).$$

Lässt man nun P_0 variieren, während Q_0 festbleibt, so hängt ϑ noch von P_0 ab, während in $\varrho\vartheta(A)$ nur das zu P_0 gehörige B_0 erscheint.

Schliesslich ersetzen wir den Buchstaben Q_0 durch P_0 und übernehmen wir auf P_0 die Koordinatisierung von P_1 durch die Abbildung $P_1 \to P_0$. So ergibt sich:

22.4. Satz: Seien P_0, P_1 zueinander fremde Ebenen und so koordinatisiert, dass $\Theta \in P_0$ bzw. $\Omega \subset P_0$ dieselben Koordinaten hat wie $P_1 \cap \Theta P_1$ bzw. $P_1 \cap \Omega P_1$ in P_1. Seien B_0, B_1 Geraden in P_0 und A_0, A_1 Geraden in P_1. Sei R eine Ebene durch B_0 und $\vartheta_R(A_i) = B_1 A_i R$. Dann ist

$$DV(B_1P_1, \vartheta_R(A_0), P_0, \vartheta_R(A_1)) = \frac{(B_1, A_1)}{(B_0, A_1)} : \frac{(B_1, A_0)}{(B_0, A_0)}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass bei Inzidenzen, bei denen die Ausdrücke sinnvoll bleiben, auch die Gleichung richtig bleibt. (Siehe Fig. 7.)

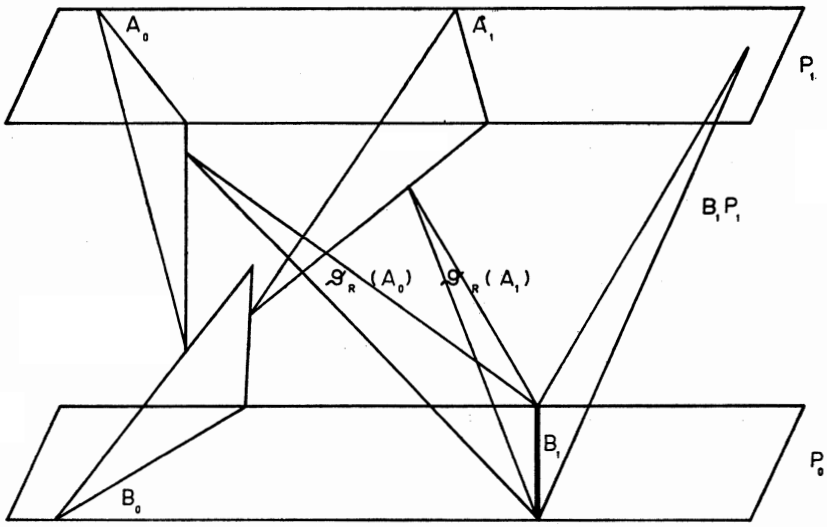


Fig. 7

22.5. In Sy al (5, ok) gilt mit

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, \quad 0, \quad 1, \quad 0), \\ P_1 &= (0, \quad 0, \quad 0, \quad 1), \\ \Theta &= (\phi, \quad \varrho, \quad A, \quad B): \\ \Theta P_0 &= (0, \quad B, \quad -\varrho, \quad 0), \\ \Theta P_1 &= (A, \quad 0, \quad 0, \quad \varrho). \end{aligned}$$

Weiter ist für Ebenen

$$(0,\ B,\ \beta,\ 0),\ (A,\ 0,\ 0,\ \alpha),$$

die bzw. P_0 und P_1 längs Geraden schneiden, die Bedingung, dass sie einander treffen:

$$(A,\ B) - \alpha\beta = 0.$$

Man wähle in Sy ax (5, ok) zwei Ebenen P_0, P_1 i.a.L. mit einer Koordinatisierung im Sinne von Satz 22.4. Die Ebenen P mit $\dim P \cap P_i \geqslant 1$ heissen i-Ebenen ($i = 0, 1$). Die Menge der i-Ebenen soll koordinatisiert werden. Die Verhältnisse im Sy al (5, ok) legen folgende Vorschriften nahe:

1) Einer i-Ebene ($i = 0$ bzw. 1), die P_i in der Geraden B bzw. A schneidet, wird ein Symbol $\{B, \beta\}$ bzw. $\{A, \alpha\}$ zugeordnet (β, α reell), mit dem bis auf einen reellen Faktor $\neq 0$ gerechnet wird.

2) P_i wird das Symbol $\{0, 1\}$ zugeordnet (0 ist die Nullmatrix).

3) Dass die 0-Ebene $\{B, \beta\}$ die 1-Ebene $\{A, \alpha\}$ trifft, drückt sich aus in

$$(A,\ B) = \alpha\beta.$$

4) Für eine feste Gerade $\Omega_0 \subset P_0$ mit der Koordinatendarstellung B_0 sei B_0/β projektiver Parameter von $\{B_0, \beta\}$ im Büschel $\beta(\Omega)$.

Ist nun Ω_1 eine Gerade in P_1 i.a.L. zu Ω_0, also mit einem A, so dass $(A,\ B_0) \neq 0$, so ist in $\beta(\Omega_1)$ durch die Forderung

$$\text{«}\{A,\ B_0\} = \alpha\beta_0,\ \text{falls}\ \{A,\ \alpha\}\ \text{und}\ \{B_0,\ \beta_0\}\ \text{sich treffen»}$$

das Büschel $\beta(\Omega_1)$ koordinatisiert, und zwar ist A/α nach 21.6 ein projektiver Parameter.

Ist Ω_2 eine Gerade B_1 in P_0 und $(A,\ B_1) \neq 0$, so ergibt die Forderung

$$\text{«}\{A,\ B_1\} = \alpha\beta_1,\ \text{falls}\ \{A,\ \alpha\}\ \text{und}\ \{B_1,\ \beta_1\}\ \text{sich treffen»}$$

eine Koordinatisierung des Büschels $\beta(\Omega_2)$, bei der B_1/β_1 wieder projektiver Parameter ist. Man hat zu zeigen, dass er von der Wahl von A nicht abhängt. Unabhängig von der Wahl von A gilt jedenfalls: $\{B_1, \beta_1\} = \Omega_2 P_1$ bzw. P_0 haben den Parameterwert $B_1/\beta_1 = \infty$ bzw. 0. Wir müssen also zeigen:

Wenn die 0- und 1-Ebenen (siehe auch Fig. 7)

$$\begin{aligned} &\{A_i, \alpha_i\} \quad \text{und} \quad \{B_0, \beta_0\} \qquad (i = 0, 1), \\ &\{A_0, \alpha_0\} \quad \text{und} \quad \{B_1, \beta_1\}, \\ &\{A_1, \alpha_1\} \quad \text{und} \quad \{B_1, \beta_1'\}, \end{aligned}$$

einander in einem Punkt treffen, so ist

$$\beta_1'/\beta_1 = DV(\Omega_2 P_1, \{B_1, \beta_1\}, P_0, \{B_1, \beta_1'\}).$$

Nach Voraussetzung ist

$$(A_i, B_0) = \alpha_i \beta_0,$$
$$(A_0, B_1) = \alpha_0 \beta_1,$$
$$(A_1, B_1) = \alpha_1 \beta_1',$$

also

$$\frac{\beta_1'}{\beta_1} = \frac{(A_1, B_1)}{(A_0, B_1)} : \frac{(A_1, B_0)}{(A_0, B_0)},$$

also nach 22.4

$$= DV(\Omega_2 P_1, \{B_1, \beta_1\}, P_0, \{B_1, \beta_1'\}),$$

w.z.b.w.

23. *Zariski-Topologie in* Sy (5, ok)

23.1 In der Oktavenebene kann man eine Art von Zariski-Topologie einführen, wenn man festsetzt: Eine Basis der abgeschlossenen Mengen wird gebildet durch die Geraden und die Kegelschnitte (siehe 14.5).

In dieser Topologie ist der Durchschnitt endlich vieler nichtleerer offener Mengen nichtleer.

23.2 In Sy (5, ok) setzt man fest: Eine Punktmenge heisst abgeschlossen, wenn sie jede Oktavenebene in einer abgeschlossenen Menge trifft.

Auch hier gilt: der Durchschnitt endlich vieler nichtleerer offener Mengen ist nichtleer.

23.3. Insbesondere ist abgeschlossen: die Menge der mit einem Punkt Θ verbundenen Punkte; die Vereinigung der Geraden, die zwei gegebene Ebenen P_1, P_2 treffen.

Das erste ist evident. Es genügt, das zweite zu beweisen für P_1, P_2 i.a.L. Man sucht in P die Punkte, durch die es Geraden gibt, die P_1 und P_2 treffen. Es genügt, den Fall "$P \cap (P_1 \cup P_2)$ leer" zu betrachten. Die gesuchten Punkte sind dann die Inzidenzpunkte der Polarität

$$P \to P_1 \to P_2 \to P,$$

bilden also in der Tat einen Kegelschnitt.

24. *Die Isomorphie von* Sy ax (5, ok) *und* Sy al (5, ok)

24.1. Wir nehmen in Sy ax (5, ok) zwei Ebenen P_1, P_2 i.a.L. an, die wie in 22.4 koordinatisiert sind. Den 1- und 2-Ebenen (dort 0- und 1-Ebenen) werden wie in 22.5 Ausdrücke $\{B, \beta\}$ bzw. $\{A, \alpha\}$ zugeordnet, nachdem für eine gewisse 1-Ebene die Zuordnung $\{B_0, \beta_0\}$ geschehen ist.

Γ sei die Menge der Punkte, durch die es eine Gerade gibt, die P_1 und P_2

trifft. Für $\Theta \notin \Gamma$ definieren wir eine Abbildung ζ, so dass $\zeta\Theta$ Punkt von Sy al (5, ok) ist. Sei

$$\Theta P_1 \text{ als } \{B, \beta\},$$
$$\Theta P_2 \text{ als } \{A, \alpha\}$$

koordinatisiert. Dann setzen wir

$$\zeta\Theta = (2\langle A, B\rangle, \alpha\beta, \beta A, -\alpha B);$$

man beachte, dass $(A, B) \neq 0$ wegen $\Theta \notin \Gamma$ und $(A, B) = \alpha\beta$ (wegen $\Theta P_1 \cap \Theta P_2 = \Theta$), also $(\beta A, -\alpha B) + (\alpha\beta)^2 = 0$ ist. Alle Punkte (ϕ, ϱ, A, B) mit $(A, B) \neq 0$ und die der Ebenen (0, 0, 1, 0) und (0, 0, 0, 1) treten als Bilder auf.

24.2. Wir definieren wie in 15 Perspektivitäten Π^{Θ_1, Θ_0} (siehe Fig. 2):

$$P_3 = \Theta_1 P_1,\ Q_3 = \Theta_0 P_1,\ P_4 = (P_2 \cap \Theta_1 P_2) Q_3,\ Q_4 = (P_2 \cap \Theta_0 P_2) P_3.$$

Θ_0, Θ_1 haben dabei noch gewissen Bedingungen zu genügen, die wir in 24.5 angeben.

$$\Pi^{\Theta_1, \Theta_0} = P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_1$$

lässt den Punkt

$$A_1 = P_1 \cap (P_2 \cap P_4) P_1$$

von P_1 und punktweise die Gerade

$$B_1 = P_1 \cap P_3$$

von P_1 fest, ist also eine Perspektivität von P_1,

$$\Pi^{\Theta_1, \Theta_0} = \Pi^{\varkappa}_{A_1, B_1}$$

mit Scheitel A_1, Achse B_1 und Doppelverhältnis

$$\varkappa = DV(A_1, A_0, (A_0 \times A_1) \times B_1, \Pi^{\Theta_1, \Theta_0}\ A_0).$$

Dabei nehme man für A_0 zweckmässig

$$A_0 = P_1 \cap (P_2 \cap \Theta_0 P_2) P_1, \text{ ferner } B_0 = P_1 \cap Q_3.$$

24.3. Wir nehmen

$$\zeta\Theta_i = (\phi_i, \varrho_i, A_i, B_i)$$

an und zeigen

$$\frac{\varkappa}{1-\varkappa} = -\frac{(A_1, B_0)}{\varrho_1 \varrho_0},$$

also nach 15.1.2

$$DV\ (\Pi^{\Theta_1, \Theta_0}) = DV(\Pi^{\zeta\Theta_1, \zeta\Theta_0}).$$

Wir nehmen einen Augenblick eine Gerade

$$\Omega \text{ in } P_3 \text{ durch } P_3 \cap Q_4$$

an und setzen

$$P_2 \cap \Theta_1 P_2 = \Omega'.$$

Wir betrachten in $\beta(\Omega')$ die vier Ebenen

$$A_1P_2,\ \Theta_1P_2,\ P_2,\ P_4$$

mit den Koordinaten bzw.

$$\{A_1, 0\},\ \{A_1, \varrho_1\},\ \{0, 1\},\ \{A_1, \alpha\},$$

wobei sich aus dem Treffen von P_4 und Q_3

$$(A_1, B_0) + \alpha\varrho_0 = 0,$$

also für das DV der Ebenen in dieser Reihenfolge

$$\frac{\alpha}{\varrho_1} = -\frac{(A_1, B_0)}{\varrho_1\varrho_0}$$

ergibt.

Im Büschel $\beta(\Omega)$ entsprechen diesen Ebenen vermöge der Relation "R' aus $\beta(\Omega')$ trifft R aus $\beta(\Omega)$" bzw.

$$\Omega A_1P_2,\ \Omega\Theta_1P_2,\ \Omega P_2,\ \Omega P_4$$

mit demselben DV. Die Treffpunkte entsprechender Paare sind bzw.

$$\text{auf } A_1P_2,\ \Theta_1,\ \text{auf } P_2 \cap Q_4,\ \text{auf } P_4 \cap (P_3 \cap Q_4)P_4.$$

Vermöge der Abbildung $\Theta \to P_1 \cap \Theta P_1$ entsprechen ihnen Geraden bzw.

$$\text{durch } A_1,\ B_1,\ \text{durch } A_0,\ \text{durch } \Pi^{\Theta_1,\Theta_0} A_0,$$

die nach 21.6 wieder dasselbe DV haben, also

$$DV(A_1, (A_0 \times A_1) \times B_1,\ A_0,\ \Pi^{\Theta_1,\Theta_0} A_0) = -\frac{(A_1, B_0)}{\varrho_1\varrho_0},$$

und gemäss der Definition von $\varkappa$ (24.2) ist das in der Tat $= \frac{\varkappa}{1-\varkappa}$.

24.4. Dann und nur dann sind Θ_0, Θ_1 verbunden, wenn $\Pi^{\Theta_1,\Theta_0} A_0$ auf B_0 liegt, also nach 15.3 dann und nur dann, wenn $\zeta\Theta_0$, $\zeta\Theta_1$ verbunden sind.

Zum Beweise bemerken wir, dass

$$\text{«}\Pi^{\Theta_1,\Theta_0} A_0 \text{ liegt auf } B_0\text{»}$$

äquivalent ist mit

$$\text{«}P_3 \cap Q_4 \text{ verbunden mit } P_4 \cap Q_3\text{»}.$$

Man betrachte die entartete Polarität

$$\Lambda = P_3 \to P_2 \to Q_3 \to P_3.$$

$$\text{«}\Theta_0,\ \Theta_1 \text{ sind verbunden»}$$

ist äquivalent mit

$$\text{«}\Lambda(P_3 \cap Q_4) \text{ geht durch } \Theta_1\text{»}.$$

Dies ist wieder äquivalent mit

$$A\Theta_1 \text{ geht durch } P_3 \cap Q_4,$$

und dies ist äquivalent mit

$$P_3 \cap Q_4 \text{ verbunden mit } P_4 \cap Q_3 \ ,$$

w.z.b.w.

24.5. Zu den Betrachtungen 24.2–4 gehören Vorsichtsmassregeln wie in 15.4. Man wird genauso wie dort zu 15.4.1–3 geführt, 15.4.4 erhält man hier leicht aus der Treffbedingung für 1- und 2-Ebenen. Die Bemerkung 15.5.6 zu 15.5.4 ergibt sich hier durch eine einfache geometrische Betrachtung. Schliesslich braucht man, um mit A_0 das Doppelverhältnis berechnen zu können, ausser $A_0 \neq A_1$ noch $A_0 \notin B_1$.

Die Aussage von 24.4 präzisiert sich demnach:

24.6. Voraussetzung: $\Theta_i \notin \Gamma$; es gebe kein inzidentes Paar C (Punkt), D (Gerade), so dass A_0, A_1 auf D liegen und B_0, B_1 durch C gehen.

Dann und nur dann sind Θ_0, Θ_1 verbunden, wenn $\zeta\Theta_0, \zeta\Theta_1$ verbunden sind.

24.7. Beschränkt man sich auf Punkte Θ einer zu $P_1 \cup P_2$ fremden Ebene P, und setzt man $P_1 \to P \to P_2 \to P_1 = A$, so kann man die Voraussetzung 24.6 ersetzen durch:

A_0, A_1 sind nicht Inzidenzpunkte von A und keine Inzidenzgerade enthält A_0, A_1.

Hieraus folgt: In P gibt es drei Punkte Θ_i, die nicht auf einer Geraden liegen, und die paarweise die Voraussetzung 24.6 erfüllen.

Es ist nach 24.6 klar, dass dann auch $\zeta\Theta_i$ nicht auf einer Geraden liegen und paarweise verbunden sind, also eine Ebene ζP bestimmen.

Für ein $\Theta \in P$, das mit jedem $\Theta_i (i = 0, 1, 2)$ die Voraussetzung 24.6 erfüllt, folgt aus der Verbundenheit von Θ mit Θ_i die von $\zeta\Theta$ mit $\zeta\Theta_i$, also $\zeta\Theta \in \zeta(P)$. Durch Einschaltung anderer Tripel erhält man dasselbe für alle $\Theta \in P, \notin \Gamma$.

Wir verstehen unter ζ_0 die triviale Abbildung (Koordinatisierung) von P_1 auf (0 0 1 0) und von P_2 auf (0 0 0 1).

$$((0\ 0\ 1\ 0) \to \zeta(P)) \cdot \zeta_0 \cdot (P \to P_1)$$

ist eine projektive Abbildung von P auf $\zeta(P)$, die in der offenen Menge $P \backslash \Gamma$ mit ζ übereinstimmt. Man setze ζ auf ganz P gemäss dieser Abbildung fort. Dann gilt wieder auf P

$$((0\ 0\ 1\ 0) \to \zeta(P)) \cdot \zeta_0 \cdot (P \to P_1) = \zeta,$$

aber auch

$$((0\ 0\ 0\ 1) \to \zeta(P)) \cdot \zeta_0 \cdot (P \to P_2) = \zeta.$$

Da es durch jedes $\Theta \notin P_1 \cup P_2$ ein P mit leerem $P \cap (P_1 \cup P_2)$ gibt,

kann man ζ so in all diese Punkte fortsetzen. Man hat zu zeigen, dass die Fortsetzung nicht von der Wahl von P abhängt.

Ist $\Theta \in P \cap P^*$, wo $(P \cup P^*) \cap (P_1 \cup P_2)$ leer ist, so wähle men ein P^{**} derart, dass $\Theta \in P^{**}$, $\dim P \cap P^{**} = \dim P^* \cap P^{**} = 1$ und $P^{**} \cap (P_1 \cup P_2)$ leer ist. Die Fortsetzung von ζ auf P, P^*, P^{**} heisse bzw. $\zeta_P, \zeta_{P^*}, \zeta_{P^{**}}$. ζ_P und $\zeta_{P^{**}}$ stimmen auf einer nichtleeren offenen Menge von $P \cap P^{**}$ überein und sind projektiv, also $\zeta_P \Theta = \zeta_{P^{**}} \Theta$. Ebenso $\zeta_{P^*} \Theta = \zeta_{P^{**}} \Theta$. Also $\zeta_P \Theta = \zeta_{P^*} \Theta$.

Wir setzen schliesslich noch $\zeta = \zeta_0$ auf $P_0 \cup P_1$. Eine Umkehrung der Betrachtung zeigt, dass ζ eine "Abbildung auf" ist. Wir zeigen noch, dass ζ eine Isomorphie ist hinsichtlich der Relation der Verbundenheit.

Seien Θ_1, Θ_2 verbunden; wir wollen beweisen, dass $\zeta\Theta_1$, $\zeta\Theta_2$ verbunden sind (das Umgekehrte ergibt sich analog). Die Behauptung ist evident, wenn $\Theta_1, \Theta_2 \in P_1 \cup P_2$ sind, und nach dem Vorigen klar, wenn es durch Θ_1, Θ_2 eine Ebene gibt, die $P_1 \cup P_2$ nicht trifft. also wenn die Gerade $\Theta_1\Theta_2$ $P_1 \cup P_2$ nicht trifft.

Nun möge $\Theta_1\Theta_2$ etwa P_2 treffen, aber nicht P_1, und es möge $\Theta_1 \notin P_1$ sein. Wir wählen eine Ebene P durch $\Theta_1\Theta_2$, die P_1 nicht trifft, und in P Punkte Θ_3, Θ_4, so dass Θ_1, Θ_3, Θ_4 ein Dreieck bilden und P_2 von keiner Seite des Dreiecks getroffen wird. Dann sind $\zeta\Theta_1$, $\zeta\Theta_3$, $\zeta\Theta_4$ verbunden, bilden ein Dreieck und bestimmen eine Ebene $\zeta(P)$. Wie oben schliesst man, dass ζ alle Punkte von P, ausser evtl. $P \cap P_2$ in $\zeta(P)$ abbildet. Aber ζ stimmt auf ganz P überein mit

$$((0\ 0\ 1\ 0) \to \zeta(P)) \cdot \zeta_0 \cdot (P \to P_0),$$

also liegen insbesondere $\zeta\Theta_1$, $\zeta\Theta_2$ in ζP, sind also verbunden.

Möge schliesslich $\Theta_1\Theta_2$ sowohl P_1 als auch P_2 treffen. Wir wählen eine Ebene P durch $\Theta_1\Theta_2$, die P_1 und P_2 je in genau einem Punkt trifft, und in P Punkte Θ_3, Θ_4, Θ_5 (keiner auf $\Theta_1\Theta_2$), die ein Dreieck bilden. Ausser $\Theta_1\Theta_2$ trifft keine der Verbindungsgeraden $\Theta_i\Theta_j$ sowohl P_1 als auch P_2. Also sind $\zeta\Theta_i$, $\zeta\Theta_j$ verbunden für $i, j \neq 1, 2$, also auch für $i, j = 1, 2$.

Wir haben demnach bewiesen:

24.8. *Satz*: Sy ax (5, ok) und Sy al (5, ok) sind isomorph.

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. VIII [1959e]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 62 (1959), 447–465
[Zbl 0128.15302]

(Communicated at the meeting of May 30, 1959)

25. *Heuristische Betrachtungen*

Es folgt hier eine Auseinandersetzung der Analogien, von denen wir uns bei den Untersuchungen der letzten Jahre haben leiten lassen.

25.1. Wenn man die einfachen Liegruppen der vier grossen Klassen der Komplexifikation und Quaternionisierung unterwirft, erhält man das Schema

re	*ko*	*qu*
$\mathfrak{A}_n$	$\mathfrak{A}_n + \mathfrak{A}_n$	$\mathfrak{A}_{2n+1}$
$\mathfrak{B}_n$	$\mathfrak{A}_{2n}$	$\mathfrak{C}_{n+1}$
$\mathfrak{C}_n$	$\mathfrak{A}_{2n-1}$	$\mathfrak{D}_{2n}$
$\mathfrak{D}_n$	$\mathfrak{A}_{2n-1}$	$\mathfrak{C}_{2n}$.

Man gehe dabei aus von der gebräuchlichen linearen Darstellung (niedrigster Dimension, bzw. $\pi_1, \pi_2, \pi_1, \pi_3$ in der Cartanschen Terminologie), und man verstehe die Komplexifikation und Quaternionisierung im Hermiteschen Sinn, d.h. die symmetrische bzw. antisymmetrische Form, als deren Invarianzgruppe $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{D}_n$ bzw. $\mathfrak{C}_n$ definiert ist, wird durch eine hermitesche ersetzt. In obigem Schema haben wir die Gruppen gemäss ihrer komplexen Klassifikation bezeichnet; man kann mühelos die die reelle Struktur kennzeichnende Signatur hinzufügen.

In niederen Dimensionen kann man noch eine Oktavisierung durchführen, aber das geht nicht so elementar. Man muss in der Spalte „re" statt der erwähnten dann eine Darstellung zugrunde legen, die im Fall „ok" ein Analogon besitzt. Welche Darstellungen das sind, hat sich empirisch gegeben; inzwischen hat J. Tits [1]) aber auch die tieferen Gründe ermittelt.

In den in Frage kommenden niederen Dimensionen ergibt sich die

TAFEL *S*

	re	*ko*	*qu*	*ok*
2-dim. elliptische Geometrie	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{F}_4$
2-dim. projektive Geometrie	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{E}_6$
5-dim. symplektische Geometrie	$\mathfrak{C}_3$	$\mathfrak{A}_5$	$\mathfrak{D}_6$	$\mathfrak{E}_7$
metasymplektische Geometrie	$\mathfrak{F}_4$	$\mathfrak{E}_6$	$\mathfrak{E}_7$	$\mathfrak{E}_8$

[1]) Mémoires Acad. Roy. Belg. **29**, fasc. 3, 1955. Siehe auch Bull. Soc. Math. Belg. **8** (1956), 48–81.

Statt „symplektische Geometrie" sagen wir auch Symplekton. Besser wäre Symplexis, wenn es nicht in den meisten Sprachen so unbequem wäre, von diesem Wort eine Mehrzahlform zu bilden.

Man beachte vorläufig nur die ersten drei Zeilen. Was man unter komplexer und quaternionialer elliptischer bzw. projektiver Ebene zu verstehen hat, ist ohne weiteres klar; ebenso dass zu ihnen die im Schema angegebenen Gruppen gehören; bei der 5-dim. symplektischen Geometrie hat seinerzeit J. Tits [1]) auf die Komplexifikation usw. aufmerksam gemacht. Die elliptische und projektive Oktavenebene mit ihren Gruppen sind aus *OAO* bekannt; über die 5-dim. symplektische Geometrie über den Oktaven and ihre Gruppe verschaffen die ersten Arbeiten dieser Reihe die nötige Aufklärung.

Die reelle projektive Ebene und ihre Gruppe erscheint hier dargestellt im Raum der symmetrischen 3–3-Matrizes (π_1^2); wenn man in der Tafel S nach rechts fortschreitet muss man zu hermiteschen Matrizes über *ko*, *qu*, *ok* übergehen. Die Dimensionen der Darstellungsräume sind

$$6, \quad 9, \quad 15, \quad 27,$$

also drei Parameter bleiben einfach, während die andern jeweils verdoppelt werden. Bei der elliptischen Geometrie arbeitet man mit Matrizes der Spur 0. Die Dimensionen der Darstellungsräume sind entsprechend

$$5, \quad 8, \quad 14, \quad 26.$$

Bei der 5-dim. symplektischen Geometrie geht man von der Darstellung (π_3) von $\mathfrak{C}_3$ in 14 Dimensionen aus. Die Reihe der Dimensionszahlen lautet

$$14, \quad 20, \quad 32, \quad 56.$$

In dieser Darstellung findet man eine transitiv transformierte Mannigfaltigkeit, die der der Ebenen (nicht der Punkte) der symplektischen Geometrie entspricht. Die Mannigfaltigkeit der Punkte lässt sich in den Darstellungsraum der adjungierten Gruppe einbetten.

Bei der ebenen elliptischen Geometrie hat man *ein* Raumelement, den Punkt (die Geraden sind überflüssig, da sie in einer festen Polaritätsbeziehung zu den Punkten stehen). In der ebenen projektiven Geometrie gibt es *zwei* Raumelemente, Punkte und Geraden, in der 5-dim. symplektischen Geometrie *drei*, nämlich Punkte, Geraden und Ebenen. Die Dimensionszahlen der Mannigfaltigkeit der Punkte und Geraden in der elliptischen und der projektiven Geometrie sind

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16.$$

In der symplektischen Geometrie hat man:

Punkte:	5,	9,	17,	33,
Geraden:	7,	12,	22,	42,
Ebenen:	6,	9,	15,	27,

[1]) Bulletin Acad. Roy. Belg., Sci., (5) **40**, 29–40 (1954).

d.h.
$$1 + 4p,$$
$$2 + 5p,$$
$$3 + 3p.$$

mit $p = 1, 2, 4, 8$ [1]).

Das ist dasselbe Prinzip, wie wir es bei den Dimensionen der linearen Darstellungsräume bemerkten.

Für die Dimensionen der Gruppen der Tafel S hat man die

TAFEL S'

3	8	21	52
8	16	35	78
21	35	66	133
52	78	133	248

Die Tafel lautet zusammengefasst:

$$\begin{array}{rl} 5p - 2 & + 0, 0, 3, 14 \\ 8p & + 0, 0, 3, 14 \\ 14p + 7 & + 0, 0, 3, 14 \\ 26p + 26 & + 0, 0, 3, 14 \end{array}$$

mit $p = 1, 2, 4, 8.$

Man sieht hier einen ähnlichen Aufbau wie früher, aber bei *qu* und *ok* treten noch die Summanden 3 bzw. 14 hinzu, die Dimensionen der Automorphismengruppe der Quaternionen bzw. Oktaven. Wie das kommt, kann man sich etwa bei der projektiven Gruppe klar machen: durch Automorphismen der projektiven Ebene kann man rein geometrisch vier Punkte in vier Punkte ($8p$ Parameter) überführen, wonach noch ein Automorphismus des Grundkörpers (0, 0, 3, 14 Parameter) übrig bleibt.

Ehe wir weitergehen, bemerken wir noch, dass wir in die erste Zeile auch die hyperbolische Geometrie hätten setzen können. Das hätte nur andere reelle Formen der entsprechenden Gruppen ergeben.

25.2. Wir wenden uns nun der vierten Zeile von S zu. Man sieht unmittelbar eine Symmetrie im Schema der ersten drei Zeilen. Die vierte Zeile ist einfach aus Symmetrierücksichten ergänzt worden. Das stimmt auch sehr schön zur arithmetischen Struktur der Tafel S'.

Das magische Quadrat S beunruhigte seit fünf Jahren einige Mathematiker, die sich für die Ausnahmegruppen interessierten. Offenbar musste der vierten Zeile eine neue Geometrie entsprechen (nach der metrischen, projektiven und symplektischen). Es ist mir nun im vorigen Sommer gelungen, die Grundeigenschaften dieser Geometrie, für die ich den Namen „metasymplektisch" vorschlage, aufzuklären, und gleichzeitig hat J. Tits ähnliche Erfolge zu verzeichnen gehabt.

Die Geometrie der vierten Zeile hat vier Raumelemente:

Punkt, Gerade, Ebene, 5–dim. Symplekton.

---

[1]) Siehe auch J. Tits a.a.O.

Wie in der symplektischen Geometrie hat man zwischen Punkten die Relation der *Verbundenheit*. Aber als zweite, schwächere, Relation kommt hinzu die der Kosymplektizität oder *Verflechtung* [1]) (zwei Punkte gehören zu einem Symplekton) und als dritte und schwächste die des *Scharnierens* (d.h. es gibt zu den zwei Punkten einen dritten, der mit beiden verbunden ist).

Für Symplekta hat man sozusagen duale Relationen: Sie sind *verbunden*, wenn sie eine Gerade (und dann auch eine Ebene) gemein haben, *verflochten*, wenn sie einen Punkt gemein haben, und *scharnierend*, wenn es ein Symplekton gibt, das beide in einer Ebene schneidet. Das bedeutet aber nicht, dass die metasymplektische Geometrie selbstdual sei: die Symplekta durch einen festen Punkt bilden eine Quadrik und nicht ein Symplekton.

Die hier aufgezählten Tatsachen (und allerlei andere) sind zuerst ermittelt worden bei der reellen metasymplektischen Geometrie, deren Gruppe eine reelle Form der $\mathfrak{F}_4$ ist. Die Methode, die dabei angewandt wurde, ist nicht verallgemeinerungsfähig; sie versagt schon in komplexen Falle und erst recht bei der metasymplektischen Geometrie über *qu* und *ok*. Es wird nämlich mit der Darstellung π_1 von $\mathfrak{F}_4$ gearbeitet, die kein Analogon bei $\mathfrak{E}_6$, $\mathfrak{E}_7$, $\mathfrak{E}_8$ besitzt. Die einander entsprechenden Darstellungen, in denen sich die Punktmannigfaltigkeiten der metasymplektischen Geometrie realisieren lassen [2]), sind

$$\pi_1^2, \qquad \pi_1\pi_3, \qquad \pi_4, \qquad \pi_2$$

mit den resp. Dimensionen

$$324, \qquad 650, \qquad 1539, \qquad 3875.$$

Die Dimensionen zeigen, dass es nicht leicht sein dürfte, das Problem von dieser Seite her anzugreifen. Im reellen Fall, bei der $\mathfrak{F}_4$, verfügt man über die Darstellung π_1, in der die Punktmannigfaltigkeit der metasymplektischen Geometrie sich realisieren lässt. Das macht die Sache viel einfacher, und darum setzen wir die – nicht verallgemeinerungsfähige – Methode für die $\mathfrak{F}_4$ erst einmal auseinander.

Im allgemeinen Falle empfiehlt sich der duale Zugang. Die Mannigfaltigkeit der Symplekta kann innerhalb der adjungierten Darstellung

$$\pi_2, \qquad \pi_2, \qquad \pi_1, \qquad \pi_1$$

mit den Dimensionen

$$52, \qquad 78, \qquad 133, \qquad 248$$

realisiert werden, und es empfiehlt sich, die Geometrie von dort her zu studieren. Auch diese Untersuchungen sind zum grossen Teil abgeschlossen.

---

[1]) Zur Etymologie bemerke ich, dass symplektisch "verflochten" bedeutet.

[2]) Auf die Bedeutung solcher Tatsachen für die hier behandelten Probleme hat zuerst Herr J. Tits hingewiesen. Insbesondere im Falle der $\mathfrak{E}_8$ war dieser Hinweis für mich aufschlussreich.

25.3. Ich gebe noch die Dimensionszahlen einiger Mannigfaltigkeiten an (jedoch mit dem Vorbehalt, dass einige aus Analogien erschlossen und noch nicht exakt abgeleitet worden sind).

Dimension der Mannigfaltigkeit der

	Punkte	Geraden	Ebenen	Symplekta	
überhaupt	15	20	20	15	
durch einen gegebenen Punkt		6	7	5	*re*
durch eine gegebene Gerade			2	2	
durch eine gegebene Ebene				1	
dito	24	31	29	21	
		9	9	6	*ko*
			2	2	
				1	
dito	42	53	47	33	
		15	13	8	*qu*
			2	2	
				1	
dito	78	97	83	57	
		27	21	12	*ok*
			2	2	
				1	

Man bemerkt hier dieselben Regelmässigkeiten wie früher und überdies eine gewisse Dualität, z. B.

$$78 = 9\cdot 8 + 6\cdot 1, \quad 57 = 9\cdot 1 + 6\cdot 8$$
$$97 = 11\cdot 8 + 9\cdot 1, \quad 83 = 11\cdot 1 + 9\cdot 8.$$

In ähnlicher Weise sind die Dimensionen der Gebilde *durch einen Punkt* dual zu den Dimensionen der Gebilde *im Symplekton.*

25.4. Wir geben zur Tafel S noch die Signaturen der in Frage kommenden reellen Darstellungen:

— 3	— 8	— 21	— 52
2	0	— 7	— 26
3	1	— 6	— 25
4	2	— 5	— 24

26. *Eine Darstellung der* $\mathfrak{E}_6$

26.1. Statt des früher verwendeten $\mathfrak{Z}$ definieren wir die Menge $\mathfrak{Z}'$ der geordneten Tripel

$$X_1,\ X_2,\ X_3$$

von 3–3-Matrizes mit reellen Koeffizienten. Statt der früheren kubischen Form det definieren wir auf $\mathfrak{Z}'$

$$(X, X, X) = \det X_1 + \det X_2 + \det X_3 - \mathrm{sp}\, X_1 X_2 X_3,\ ^1)$$

die der früheren komplex (aber nicht reell) äquivalent ist. Die Invarianz-

[1]) Diese Form hat auch Beziehungen zur Konfiguration der 27 Geraden auf der kubischen Fläche.

gruppe dieser Form ist eine Darstellung der reellen Form von $\mathfrak{E}_6$ der Signatur 6; sind

$$\xi_j^i,\ \eta_j^i,\ \zeta_j^i$$

bzw. die Matrizes

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3,$$

so sind

$$\begin{aligned}
d\xi_j^i &= q_\alpha^i\,\xi_j^\alpha - r_j^\alpha\,\xi_\alpha^i\\
d\eta_j^i &= r_\alpha^i\,\eta_j^\alpha - p_j^\alpha\,\eta_\alpha^i\\
d\zeta_j^i &= p_\alpha^i\,\zeta_j^\alpha - q_j^\alpha\,\zeta_\alpha^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\xi_j^i &= I_{j\sigma\alpha}a^{\varrho i\alpha}\,\eta_\varrho^\sigma\\
d\eta_j^i &= I_{j\sigma\alpha}a^{\alpha\varrho i}\,\zeta_\varrho^\sigma\\
d\zeta_j^i &= I_{j\sigma\alpha}a^{i\alpha\varrho}\,\xi_\varrho^\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\xi_j^i &= I^{i\varrho\alpha}a_{\sigma\alpha j}\,\zeta_\varrho^\sigma\\
d\eta_j^i &= I^{i\varrho\alpha}a_{j\sigma\alpha}\,\xi_\varrho^\sigma\\
d\zeta_j^i &= I^{\varrho i\alpha}a_{\alpha j\sigma}\,\eta_\varrho^\sigma
\end{aligned}$$

(mit dem alternierenden Kroneckersymbol I und der Einstein-Kcnvention über die Summation) drei Arten von infinitesimalen Transformationen, die die kubische Form invariant lassen, und aus denen man alle mit derselben Eigenschaft linear kombinieren kann.

Zu der kubischen Form gehört eine symmetrische Trilinearform, die auch mit $(\ ,\ ,\ )$ angegeben wird.

Rein formal führen wir ein mit $\mathfrak{J}'$ isomorphes System $\mathfrak{J}'^*$ ein, und wir definieren für $X \in \mathfrak{J}'$, $U \in \mathfrak{J}'^*$:

$$(U, X) = (X, U) = \Sigma_i \operatorname{sp} X_i U_i',$$

wenn X_i die Komponenten von X, U_i die von U sind.

Durch

$$(X \times Y, Z) = 3(X, Y, Z)$$

wird ein Produkt $X \times Y$ für $X, Y \in \mathfrak{J}'$ definiert; $X \times Y \in \mathfrak{J}'^*$. Analog definiert man $U \times V \in \mathfrak{J}'$ für $U, V \in \mathfrak{J}'^*$.

Die Verdopplung von $\mathfrak{J}'$ ist rein formal. Sie ist geschehen, weil die Elemente von $\mathfrak{J}' \times \mathfrak{J}'$ sich kontragredient zu denen von $\mathfrak{J}'$ transformieren. Die beiden Darstellungen sind nicht äquivalent; fasst man die eine als π_1 auf, so ist die andere π_2.

26.2. Für reelle 3–3-Matrizes definiere man vorübergehend $A \times B$ so, dass

$$\operatorname{sp}(A \times B)C'$$

die symmetrische kubische Form ist, die für $A = B = C$

$$3 \det A$$

wird. Es ist also $A \times A$ die 3–3-Matrix, deren Elemente die 2–2-Unterdeterminanten von A sind. Bekanntlich ist auch

$$(A \times A)A' = \det A$$

(d.h. Skalar mal Einsmatrix).

Für $X \in \mathfrak{Z}'$ hat dann $X \times X$ die Komponenten:

$$X_1 \times X_1 - (X_2 X_3)',\ X_2 \times X_2 - (X_3 X_1)',\ X_3 \times X_3 - (X_1 X_2)'.$$

26.3. $(X \times X) \times (X \times X) = (X, X, X)X.$

26.4. $X \times (U \times (X \times X)) = \frac{1}{4}(X, X, X)U + \frac{1}{4}(X, U)X \times X.$

Diese Formeln kann man als Analogie zu 1.17 erschliessen. Sie sind aber auch einfach direkt zu beweisen:

26.5.1. Wir konstatieren erst für 3–3-Matrizes A und X:

$$XA'X + 2(X \times X) \times A = (\mathrm{sp}\, XA')X.$$

Das ergibt sich, wenn man die Ausdrücke ausschreibt, wobei man sich, was A betrifft, auf die Matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschränken darf.

26.5.2. Die erste Komponente von $(X \times X) \times (X \times X)$ ist

$$\begin{aligned}(X_1 \times X_1 - X_3' X_2') \times (X_1 \times X_1 - X_3' X_2') - ((X_3 \times X_3)' - X_1 X_2)((X_2 \times X_2)' - X_3 X_1) \\ = (X_1 \times X_1) \times (X_1 \times X_1) - 2(X_1 \times X_1) \times (X_3' X_2') + X_3' X_2' \times X_3' X_2' - \\ - (X_3 \times X_3)'(X_2 \times X_2)' + (X_3 \times X_3)' X_3 X_1 + X_1 X_2 (X_2 \times X_2)' - X_1 X_2 X_3 X_1.\end{aligned}$$

Hier ist der erste Summand

$$= (\det X_1)\, X_1,$$

den zweiten zusammen mit dem siebten kann man nach 26.5.1 (mit X_1 statt X und $X_2 X_3$ statt A) durch

$$\mathrm{sp}\,(X_1 X_2 X_3)\, X_1$$

ersetzen, der dritte und vierte heben sich weg, der fünfte und sechste sind gleich

$$(\det X_3) X_1 \quad \text{und} \quad (\det X_2)\, X_1.$$

Daraus ergibt sich 26.3.

26.6. $$\begin{aligned}(X_1 \times X_2) \times (X_3 \times X_4) + (X_1 \times X_3) \times (X_2 \times X_4) + (X_1 \times X_4) \times \\ \times (X_3 \times X_2) = \tfrac{3}{4}(X_1, X_2, X_3)X_4 + \tfrac{3}{4}(X_2, X_3, X_4)X_1 + \\ \tfrac{3}{4}(X_3, X_4, X_1)X_2 + + \tfrac{3}{4}(X_4, X_1, X_2)X_3\end{aligned}$$

ergibt sich aus 26.3 durch Polarisieren.

26.7. Aus 26.6 leitet man 26.4 ab. Man nehme $(X, X, X) \neq 0$ an und setze links in 26.4

$$X \times X = V, \quad (X, X, X)X = V \times X,$$

also

$$\begin{aligned}(X, X, X)X \times (U \times (X \times X)) &= (V \times V) \times (U \times V) \\ &= \tfrac{1}{4}(V, V, V)U + \tfrac{3}{4}(U, V, V)V \\ &= \tfrac{1}{4}(X, X, X)((X, X, X)U + (X, U)X \times X).\end{aligned}$$

Für $(X, X, X) = 0$ erhält man das Gewünschte durch eine Stetigkeits- oder ähnliche algebraische Betrachtung.

26.8. $X_1 \times (U \times (X_2 \times X_3)) + X_2 \times (U \times (X_3 \times X_1)) + X_3 \times (U \times (X_1 \times X_2))$
$= \frac{3}{4}(X_1, X_2, X_3)U + \frac{1}{4}(X_1, U)X_2 \times X_3 + \frac{1}{4}(X_2, U)X_3 \times X_1 + \frac{1}{4}(X_3, U)X_1 \times X_2$

ergibt sich aus 26.4 durch Polarisieren.

26.9. Analog 1.21 definieren wir (für $X \in \mathfrak{J}'$, $U \in \mathfrak{J}'^*$) $\langle X, U\rangle$ durch

$$\langle X, U\rangle A = 2U \times (X \times A) - \tfrac{1}{2}(A, U)X - \frac{1}{6}(X, U)A$$

für alle $A \in \mathfrak{J}'$.

Ist Φ eine lineare Abbildung von $\mathfrak{J}'$ in sich, so heisse Φ^* die in $\mathfrak{J}'^*$ durch Φ gemäss

$$(\Phi A, B) + (A, \Phi^* B) = 0$$

induzierte.

Speziell ergibt sich

$$\langle X, U\rangle^* + \langle U, X\rangle = 0,$$

wo

$$\langle U, X\rangle B = 2X \times (U \times B) - \tfrac{1}{2}(X, B)U - \frac{1}{6}(X, U)B.$$

26.10. $\langle X, U\rangle^*(A \times B) = \langle X, U\rangle A \times B + A \times \langle X, U\rangle B.$

Man braucht das nur für $A = B$ zu verifizieren. Dann folgt es leicht aus 26.8.

26.11. Aus 26.10 folgt ohne weiteres:

Die $\langle X, U\rangle$ *mit* $X \in \mathfrak{J}'$, $U \in \mathfrak{J}'^*$ *sind infinitesimale Elemente* der Invarianzgruppe von $(*, *, *)$ (einer Darstellung der $\mathfrak{E}_6$).

26.12. Für $X \times X = 0$, $U \times U = 0$ genügt $\langle X, U\rangle$ der Gleichung:

$$\Big(\langle X, U\rangle + \frac{2}{3}(X, U)\Big)\Big(\langle X, U\rangle + \frac{1}{6}(X, U)\Big)\Big(\langle X, U\rangle - \frac{1}{3}(X, U)\Big) = 0,$$

wie sich leicht ergibt. Auch gilt

$$\Big(\langle X, U\rangle^2 - \frac{1}{6}(X, U)\Big)\Big(\langle X, U\rangle - \frac{1}{18}(X, U)^2\Big)A = \tfrac{1}{2}(A, U)\,(X, U)X.$$

Ist obendrein $(X, U) = 0$, so ist $\langle X, U\rangle^2 = 0$.

27. *Die Punktmannigfaltigkeit der metasymplektischen Geometrie*

27.1. Aus der Darstellung von $\mathfrak{E}_6$ als Invarianzgruppe von $(*, *, *)$ hebt man eine Darstellung der $\mathfrak{F}_4$ heraus, indem man noch die Invarianz eines allgemeinen Elements von $\mathfrak{J}'$ fordert. Als solches nehmen wir etwa

$$H = 0,\ 0,\ 1$$

(die Nullen und die Eins bedeuten 3–3-Matrizes). Es ist

$$(H, H, H) = 1$$

$$H^* = H \times H = 0,\ 0,\ 1.$$

27.2. Als Punktmannigfaltigkeit der symplektischen Geometrie definieren wir die Menge $\mathfrak{W}_1$ der $X \in \mathfrak{J}'$ mit

$$X \times X = 0, \quad (X, H^*) = 0.$$

Dabei rechnen wir mit den Elementen von $\mathfrak{W}_1$ als geometrischen Objekten „bis auf einen reellen Faktor $\neq 0$". $\mathfrak{W}_1$ ist nicht trivial.

Weiter definieren wir $\mathfrak{W}_1{}^*$ als Menge der $U \in \mathfrak{J}'^*$ mit

$$U \times U = 0, \quad (H, U) = 0.$$

Im Raum der $X \in \mathfrak{J}'$ mit $(X, H^*) = 0$ (bzw. der $U \in \mathfrak{J}'^*$ mit $(H, U) = 0$) ist die $\mathfrak{F}_4$ (als Untergruppe von $\mathfrak{E}_6$, die H bzw. H^* festlässt) linear irreduzibel dargestellt. Die Darstellungen sind äquivalent. $\mathfrak{W}_1$ bzw. $\mathfrak{W}_1{}^*$ sind bei ihnen invariant. $\mathfrak{F}_4$ ist also in $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_1{}^*$ dargestellt. Die Darstellung in $\mathfrak{W}_1$ heisst die *metasymplektische Gruppe.*

Wegen der Irreduzibilität spannt $\mathfrak{W}_1$ bzw. $\mathfrak{W}_1{}^*$ den Raum der $X \in \mathfrak{J}'$ mit $(X, H^*) = 0$ bzw. der $U \in \mathfrak{J}'^*$ mit $(H, U) = 0$ linear auf.

27.3. Aus 26.6 folgt:

$X \to H \times X$ ist eine eineindeutige Abbildung von W_1 auf $W_1{}^*$,

$U \to H^* \times U$ ist eine eineindeutige Abbildung von $W_1{}^*$ auf W_1.

Das Produkt beider ist

$$X \to H^* \times (H \times X) = \tfrac{1}{4} X.$$

27.4. Ist Φ infinitesimales Element der metasymplektischen Gruppe, also $(\Phi H, H, H) = 0$ und ΦH skalares Vielfaches von H, so ist sogar $\Phi H = 0$. Ist weiter

$$\Phi = \langle X, U \rangle \text{ mit } X \in \mathfrak{W}_1, \; U \in \mathfrak{W}_1{}^*,$$

so ergibt sich aus

$$0 = \Phi H = \langle X, U \rangle H = 2U \times (X \times H) - \frac{1}{6}(X, U) H$$

bei Multiplikation mit X und Anwendung von 26.8

$$(X, U) = 0$$

und

$$U \times (X \times H) = 0.$$

Multiplikation mit H ergibt

$$X \times Y = 0,$$

wenn $H^* \times U = Y$ gesetzt ist.

Umgekehrt gilt: Für $X, Y \in \mathfrak{W}_1$ mit $X \times Y = 0$ ist $\langle X, H \times Y \rangle$ infinitesimales Element der metasymplektischen Gruppe.

27.5. Unter denselben Voraussetzungen gilt

$$\langle X, H \times Y) + \langle Y, H \times X \rangle = 0,$$

was ohne weiteres aus 26.6 folgt.

27.6. Die Punkte $X, Y \in \mathfrak{W}_1$ heissen

$$\begin{aligned} &\text{scharnierend, wenn } (X, Y, H) = 0, \\ &\text{verflochten, wenn } X \times Y = 0, \\ &\text{verbunden, wenn } \langle X, H \times Y \rangle = 0 \end{aligned}$$

ist. Analog in $\mathfrak{W}_1^*$.

27.7. Verbunden $\rightarrow$ verflochten $\rightarrow$ scharnierend.
Denn wenn $\langle X, H \times Y \rangle = 0$, so insbesondere $\langle X, H \times Y \rangle X = 0$, also $(X, H \times Y) = 0$; andererseits auch $\langle X, H \times Y \rangle H = 0$, also

$$(H \times Y) \times (H \times X) = 0$$

und (nach 26.6) $X \times Y = 0$. — Dass aus $X \times Y = 0$ folgt $(X, Y, H) = 0$, ist evident.

27.8. Die Reflexivität und Symmetrie der zwei ersten Relationen ist evident. Die der dritten folgt aus 27.5 unter Berücksichtigung von 27.7.

27.9. Man sieht leicht ein: Die Abbildung $X \rightarrow H \times X$ erhält die Relationen aus 27.6.

27.10. Für $X, Y \in \mathfrak{W}_1$ ist $X \times Y \in \mathfrak{W}_1'$ dann und nur dann, wenn X, Y scharnieren.
Das „nur dann" ist evident. — Für $X, Y \in \mathfrak{W}_1$ ist $(X \times Y) \times (X \times Y) = 0$ wegen 26.6.

27.11. Für $X \in \mathfrak{W}_1$ ist $\langle X, X \times Y \rangle = 0$. Denn

$$2(X \times Y) \times (X \times A) - \tfrac{1}{2}(A, X \times Y) X = 0$$

wegen 26.6.

27.12. Für scharnierende $X, Y \in \mathfrak{W}_1$ mit $X \times Y \neq 0$ sind X und Y mit $H^* \times (X \times Y)$ verbunden. (Folgt aus 27.11.)
Zu scharnierenden X, Y mit $X \times Y \neq 0$ gibt es also ein $Z \in \mathfrak{W}_1$, das mit beiden verbunden ist. (Das gilt auch für $X \times Y = 0$, wie sich später zeigt.) Daher der Name „scharnierend".

27.13. Für scharnierende $X, Y \in \mathfrak{W}_1$ gilt $H^* \times (X \times Y) = -2(H \times X) \times (H \times Y)$. (Folgt aus 26.6.)

27.14. Dann und nur dann sind zwei verschiedene Punkte $X, Y \in \mathfrak{W}_1$ verbunden, wenn es ein $Z \in \mathfrak{W}_1$ gibt mit $H \times X = Y \times Z$.
„Dann" folgt aus 27.11. — „Nur dann": Wir wählen $A \in \mathfrak{W}_1$ mit

$$(H, X, A) = 0, \quad (H, Y, A) \neq 0.$$

Da X, Y verbunden sind, sind sie auch verflochten, also $X \times Y = 0$, also

$$(A, X, Y) = (H, X, Y) = 0.$$

Aus $\langle X, H \times Y \rangle = 0$ folgt

$$2(H \times Y) \times (X \times A) = \tfrac{1}{2}(A, H \times Y) X.$$

Multiplikation mit H ergibt nach 27.13

$$-Y\times(H^*\times(X\times A))=\frac{3}{2}(H, A, Y)\,H\times X.$$

Z bestimme man nun als skalar Vielfaches von

$$H^*\times(X\times A).$$

Dass die Wahl von A möglich ist, sieht man leicht. (Hier wird zum ersten Mal $\mathfrak{J}'$ konkret verwandt; bisher brauchte man nur abstrakt Folgerungen aus 26.3.)

27.15. Seien $X, Y, Z\in\mathfrak{W}_1$, X, Y verflochten, Y, Z verbunden. Dann sind X, Z scharnierend.

Denn nach 27.14 gibt es ein $Z_1\in\mathfrak{W}_1$ mit $H\times Z=Y\times Z_1$. Nun ist $3(H, X, Z)=(H\times Z, X)=(Y\times Z_1, X)=(Z_1, X\times Y)=0$.

27.16. Sind $X, Y\in\mathfrak{W}_1$ scharnierend und $X\times Y\neq 0$, so gibt es genau ein $Z\in\mathfrak{W}_1$, das mit X und Y verbunden ist, nämlich Z mit $H\times Z=X\times Y$.

Denn für solch ein Z gibt es (nach 27.14) X_1 und Y_1, so dass

$$H\times X=X_1\times Z,\ H\times Y=Y_1\times Z.$$

$$(H\times X)\times(H\times Y)=(X_1\times Z)\times(Y_1\times Z)$$

ist skalar Vielfaches von Z, also $H\times Z$ skalar Vielfaches von $X\times Y$.

28. *Der Mannigfaltigkeit der Symplekta*

28.1. Es sei $\mathfrak{W}_4$ die Menge der

$$\langle X, H\times Y\rangle \text{ mit } X, Y\in\mathfrak{W}_1 \text{ und } X\times Y=0.$$

In geometrischen Zusammenhängen rechnen wir mit den Elementen von $\mathfrak{W}_4$ „bis auf einen reellen Faktor $\neq 0$" und nennen wir sie Symplekta (Rechtfertigung erfolgt später).

28.2. Auf $\mathfrak{W}_4$ induziert die metasymplektische Gruppe eine Darstellung, die wir auch wieder metasymplektische Gruppe (in $\mathfrak{W}_4$) nennen. Einem infinitesimalen Φ der metasymplektischen Gruppe in $\mathfrak{W}_1$ entspricht dabei

$$\langle X, H\times Y\rangle\to\langle\Phi X, H\times Y\rangle+\langle X, H\times\Phi Y\rangle.$$

Wegen

$$\Phi\langle X, U\rangle A=\langle\Phi X, U\rangle A+\langle X, \Phi^*U\rangle A+\langle X, U\rangle\Phi A$$

ist

$$[\Phi, \langle X, U\rangle]=\langle\Phi X, U\rangle+\langle X, \Phi^*U\rangle,$$

also ist die metasymplektische Gruppe in $\mathfrak{W}_4$ die Beschränkung der adjungierten Gruppe von $\mathfrak{F}_4$ auf $\mathfrak{W}_4$. Diese ist irreduzibel. Also spannt $\mathfrak{W}_4$ die Lie-Algebra der ganzen metasymplektischen Gruppe linear auf.

Für $X, Y\in\mathfrak{J}'$, $X\times Y=0$, $\Phi=\langle X, H\times Y\rangle$ und beliebiges infinitesimales metasymplektisches Φ_1 definieren wir

$$(\Phi_1, \Phi)=-9(\Phi_1X, H\times Y).$$

Ist auch $\Phi_1 = \langle X_1, H \times Y_1 \rangle$ usw., so ist wegen

$$(\langle X_1, H \times Y_1 \rangle X, H \times Y) = (\langle X, H \times Y \rangle X_1, H \times Y_1):$$
$$(\Phi_1, \Phi) = (\Phi, \Phi_1).$$

Hierauser gibt sich leicht die Möglichkeit, für beliebiges Φ_1 und beliebiges $\Phi = \Sigma \langle X_\iota, H \times Y_\iota \rangle$

$$(\Phi_1, \Phi) = -9\Sigma(\Phi_1 X_\iota, H \times Y_\iota)$$

zu definieren.

Die symmetrische Form (Φ_1, Φ) ist eine Invariante der adjungierten Gruppe, also konstant Vielfaches von

$$\operatorname{sp} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}.$$

Um den Proportionalitätsfaktor zu ermitteln, nimmt man etwa

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)\ (0), \quad Y = (0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0),$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)\ (0), \quad Y_1 = (0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0);$$

so wird

$$(\langle X_1, H \times Y_1 \rangle X, H \times Y) = -\tfrac{1}{2}$$

und

$$\operatorname{sp} \langle X_1, H \times Y_1 \rangle \langle X, H \times Y \rangle = \tfrac{1}{4} \cdot 6.$$

Weiter ist

$$\operatorname{sp} \tilde{\Phi}^2 / \operatorname{sp} \Phi^2 = 3,$$

wie man aus dem Verhältnis der Quadrate der Wurzelformen und der der Gewichte sieht.

Daraus ergibt sich für den Proportionalitätsfaktor 1, also

$$(\Phi_1, \Phi) = \operatorname{sp} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}.$$

28.3. Für $\Phi \in \mathfrak{W}_4$ ist $\Phi^2 = 0$. (Siehe 26.12.)

28.4. Nach 26.10 und 28.3 ist

$$0 = \Phi^{*2}(A \times B) = \Phi^2 A \times B + 2\Phi A \times \Phi B + A \times \Phi^2 B,$$

also

$$\Phi A \times \Phi B = 0.$$

28.5. Die Menge $\Phi\mathfrak{W}_1$ wird auch mit $\{\Phi\}$ bezeichnet. (Diese Menge erweist sich später als Symplekton.)

Aus 28.4 und $(\Phi A, H^*) = -(A, \Phi H^*) = 0$ folgt

$$\{\Phi\} \subset \mathfrak{W}_1.$$

Je zwei Elemente von $\{\Phi\}$ sind verflochten.

28.5.1. Bemerkung: Setzt man von K nur voraus $K \times K = 0$, so gilt nach 28.4 schon $\Phi K \times \Phi K = 0$ und $(\Phi K, H^*) = 0$, also $\Phi K \in \mathfrak{F}'$. Auch gilt dann nach 28.4: $\Phi K \times X = 0$ für alle $X \in \{\Phi\}$. Hieraus ergibt sich später (28.23): $\Phi K \in \{\Phi\}$ für alle K mit $K \times K = 0$.

28.6. $\Phi \in \mathfrak{W}_4$ führt verbundene Punktepaare in verbundene über (insofern die Bilder existieren, d.h. $\neq 0$ sind).

Sei nämlich $X, Y \in \mathfrak{W}_1$, $U = H \times Y$, $\langle X, U\rangle = 0$. Dann ist wegen

$$[\Phi, \langle X, U\rangle] = \langle \Phi X, U\rangle + \langle X, \Phi^* U\rangle:$$

$$\langle \Phi X, U\rangle + \langle X, \Phi^* U\rangle = 0.$$

Nochmalige Anwendung von $\tilde{\Phi}$ ergibt wegen $\Phi^2 = 0$:

$$\langle \Phi X, \Phi^* U\rangle = 0,$$

also

$$\langle \Phi X, H \times \Phi Y\rangle = 0.$$

28.7. Ist $\Phi \in \mathfrak{W}_4$, $X \in \mathfrak{W}_1$, so ist X mit ΦX verflochten. Denn $2\Phi X \times X = \Phi^*(X \times X) = 0$.

28.8. Ist $X, Y, Z \in \mathfrak{W}_1$, $X \times Y = X \times Z = 0$, so ist

$$\langle X, H \times Y\rangle Z = -\frac{3}{2}(H, Y, Z) X,$$

also skalar Vielfaches von X.

28.9. Ist $X, Y \in \mathfrak{W}_1$, $X \times Y = 0$, $U = H \times Y$, $\Phi = \langle X, U\rangle$, so ist $X \in \{\Phi\}$.

Man wähle nämlich ein $\Phi_1 \in \mathfrak{W}_4$ mit $(\Phi_1, \langle X, U\rangle) = -9(\Phi_1 X, U) \neq 0$ Das ist möglich, da die quadratische Form nicht entartet ist. $X \times \Phi_1 X = 0$ nach 28.7, also

$$\langle X, U\rangle \Phi_1 X = -\tfrac{1}{2}(\Phi_1 X, U) X,$$

also $X \in \{\Phi\}$.

28.10. Sei $X, Y, Z \in \mathfrak{W}_1$, $X \times Y = 0$, $U = H \times Y$, $\Phi = \langle X, U\rangle$. Dann ist nach 28.9 auch $\Phi Z \times Y = 0$ und

$$\langle \Phi Z, U\rangle = -\tfrac{1}{2}(Z, U)\Phi.$$

Man hat nämlich

$$\langle \Phi Z, U\rangle A = 2U \times ((2U \times (X \times Z) - \tfrac{1}{2}(Z, U) X) \times A)$$
$$-\tfrac{1}{2}(A, U)(2U \times (X \times Z) - \tfrac{1}{2}(Z, U) X)$$

nach 26.8

$$= (A, U) U \times (X \times Z) - (Z, U) U \times (X \times A) - (A, U) U \times (X \times Z)$$
$$+\tfrac{1}{4}(A, U)(Z, U) X = -\tfrac{1}{2}(Z, U)\Phi A.$$

28.11. Sei $X, Y, A, B \in \mathfrak{W}_1$, $X \times Y = 0$, $\Phi = \langle X, H \times Y\rangle$. Dann ist

$$\langle \Phi A, H \times \Phi B\rangle = \frac{3}{2}(\Phi A, B, H)\Phi.$$

Denn mit $\Phi_1 = \langle \Phi A, H \times Y\rangle$ ist nach 28.10 und 27.5

$$\Phi_1 = -\tfrac{1}{2}(A, H \times Y)\Phi = -\langle Y, H \times \Phi A\rangle,$$
$$\langle \Phi_1 B, H \times \Phi A\rangle = -\tfrac{1}{2}(B, H \times \Phi A)\Phi_1,$$

also wenn $(A, H \times Y) \neq 0$, auch

$$\langle \Phi B, H \times \Phi A\rangle = -\frac{3}{2}(\Phi A, B, H)\Phi,$$

also nach Vertauschung von A und B das Gewünschte. Für $(A, H \times Y) = 0$ bediene man sich eines Grenzübergangs oder eines entsprechenden algebraischen Arguments.

28.12. Aus dem Vorigen folgt: Φ ist bis auf einen skalaren Faktor durch zwei nichtverbundene Punkte von $\{\Phi\}$ bestimmt. Ferner: $\{\Phi\}$ ist durch zwei nichtverbundene unter seinen Punkten bestimmt.

28.13. Weiter folgt: $\Phi A, \Phi B$ sind dann und nur dann verbunden, wenn $\Phi A, B$ scharnieren.

28.14. In $\{\Phi\}$ gibt es zu jedem Punkt einen nicht mit ihm verbundenen Punkt.

Denn zu gegebenem ΦA braucht man nur B mit $(\Phi A, B, H) \neq 0$ zu bestimmen, um nach 28.11 $\langle \Phi A, H \times \Phi B \rangle \neq 0$ zu erhalten.

28.15. Aus 28.8, 28.12, 28.14 folgt: Ist A verflochten mit $X \in \{\Phi\}$, so ist ΦA skalar Vielfaches von X.

28.16. Daraus folgt: Ist A mit zwei Punkten von $\{\Phi\}$ verflochten, so ist $\Phi A = 0$.

Eine Umkehrung wird später bewiesen.

28.17. Ist A mit einem Punkte von $\{\Phi\}$ verbunden, so ist $\Phi A = 0$.

Denn nach 28.5 und 27.15 scharniert A dann mit ganz $\{\Phi\}$, also wäre nach 28.13 $\Phi A \neq 0$ mit allen Punkten von $\{\Phi\}$ verbunden, im Widerspruch zu 28.14.

28.18. Für $A, B \in \mathfrak{W}_1$, $A \times B = 0$, $\Phi = \langle A, H \times B \rangle$ ist nach 28.11

$$[\Phi, [\Phi, \langle A, H \times B \rangle]] = 2\langle \Phi A, H \times \Phi B \rangle = \\ = (\Phi A, H \times B)\Phi = -\frac{1}{9}(\Phi, \langle A, H \times B \rangle)\Phi$$

Also

$$\tilde{\Phi}^2 \Phi_1 = -\frac{1}{9}(\Phi, \Phi_1)\Phi \text{ für } \Phi \in \mathfrak{W}_4.$$

28.19. $\Phi\Phi_1\Phi = \frac{1}{18}(\Phi, \Phi_1)\Phi$ für $\Phi \in \mathfrak{W}_4$ folgt aus dem Vorigen.

28.20. $\{\Phi\}$ ist ein projektiver Raum.

Man hat zu zeigen, dass aus $A, B \in \{\Phi\}$ folgt: $A + B \in \{\Phi\}$. Man wähle wie in 28.9 ein $\Phi_1 \in \mathfrak{W}_4$ mit $(\Phi_1, \Phi) \neq 0$. Es gibt $A_1, B_1 \in \mathfrak{W}_1$ mit $\Phi A_1 = A$, $\Phi B_1 = B$. Man setze $\Phi_1\Phi A_1 = A_2$, $\Phi_1\Phi B_1 = B_2$. Dann ist $A_2, B_2 \in \mathfrak{W}_1$, $A_2 \times B_2 = 0$ (siehe 28.5), also $A_2 + B_2 \in \mathfrak{W}_1$.

$\Phi(A_2 + B_2) = \Phi\Phi_1\Phi(A_1 + B_1) = \frac{1}{18}(\Phi, \Phi_1)\Phi(A_1 + B_1)$ und das ist $A + B$ bis auf einen skalaren Faktor $\neq 0$.

28.21. Mit der Verbundenheitsrelation aus $\mathfrak{W}_1$ ist $\{\Phi\}$ ein Symplekton.

Seien nämlich $A, B \in \{\Phi\}$, also $B = \Phi B_1$. Wir wählen $\Phi_1 \in \mathfrak{W}_4$ mit $(\Phi_1, \Phi) \neq 0$. Dann ist $\Phi\Phi_1 B = \frac{1}{18}(\Phi, \Phi_1)B$. Die Verbundenheit von A, B

drückt sich nach 28.13 aus durch

$$(A, \Phi_1 B, H) = 0,$$

und das ist eine antisymmetrische bilineare Relation.

28.22. Zu zwei Symplekta gibt es eine Transformation der metasymplektischen Gruppe, die das eine in das andere überführt.

Zum Beweise setze man erst voraus $(\Phi_1, \Phi_2) \neq 0$, etwa > 0. Nun ist nach 28.18

$$e^{\tau\Phi_1}\Phi_2 = \Phi_2 + \tau[\Phi_1, \Phi_2] - \frac{1}{18}\tau^2(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_1,$$

$$e^{\tau\Phi_2}\Phi_1 = \Phi_1 + \tau[\Phi_2, \Phi_1] - \frac{1}{18}\tau^2(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_2,$$

also für gewisses τ

$$e^{\tau\Phi_1}\Phi_2 = -\,e^{\tau\Phi_2}\Phi_1.$$

$e^{-\tau\Phi_1}\, e^{\tau\Phi_2}$ führt $\{\Phi_1\}$ in $\{\Phi_2\}$ über.

Sei $\mu(\Phi)$ die Transitivitätsschicht von $\{\Phi\}$ und $\nu(\Phi)$ die lineare Hülle von $\mu(\Phi)$. Ist $\mu(\Phi_1) \neq \mu(\Phi_2)$, so ist nach dem Vorigen $(\mu(\Phi_1), \mu(\Phi_2)) = 0$, also auch $(\nu(\Phi_1), \nu(\Phi_2)) = 0$. Jedes $\nu(\Phi)$ ist gegenüber der adjungierten Gruppe invariant. Dies ergibt einen Widerspruch zur Irreduzibilität der adjungierten Gruppe.

28.22.1. Bemerkung: Bei obigem Beweise brauchten wir von Φ_1, Φ_2 nicht $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$ vorauszusetzen, sondern nur: Φ_i ist infinitesimales Element der metasymplektischen Gruppe, und es gilt die Relation aus 28.18

$$\tilde{\Phi}_i^2 \Phi = -\frac{1}{9}(\Phi_i, \Phi)\Phi_i.$$

Nimmt man $\Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$, so ergibt sich $\Phi_1 \in \mathfrak{W}_4$, d.h. die $\Phi \in \mathfrak{W}_4$ sind schon durch

$$\tilde{\Phi}^2 \Phi_1 = -\frac{1}{9}(\Phi, \Phi_1)\Phi$$

charakterisiert, also durch eine Relation, die sich nicht (wie $\Phi^2 = 0$; siehe 28.25) auf eine zufällige Darstellung der metasymplektischen Gruppe, sondern auf ihre adjungierte bezieht. Das ist für die Behandlung der Fälle *ko*, *qu*, *ok* wichtig.

28.23. Sei $\Phi = \langle X, H \times Y \rangle$ mit

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)\ (0), \qquad Y = (0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)$$

$$A = (\alpha_{ij})(\beta_{ij})(\gamma_{ij}).$$

Dann ist

$$\Phi A = -\begin{pmatrix} \alpha_{13} & 0 & 0 \\ \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \end{pmatrix} (0),$$

$$\{\Phi\} = \text{Menge der } \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} (0).$$

Man sieht leicht, dass jeder mit ganz $\{\Phi\}$ verflochtene Punkt zu $\{\Phi\}$ gehört. Also nach 28.22 allgemein:

Die Symplekta sind maximale Mengen paarweise verflochtener Punkte.

28.24. Es gibt aber noch andere maximale Mengen paarweise verflochtener Punkte, z.B. die der

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} (0).$$

28.25. Sei Φ ein beliebiges infinitesimales Element der metasymplektischen Gruppe mit $\Phi^2 = 0$. Dann gilt für $X, Y \in \mathfrak{W}_1$:

$$X \times \Phi X = \Phi X \times \Phi Y = 0.$$

Daher ist

$$\Phi_1 = 2\langle \Phi X,\ H \times \Phi Y\rangle \in \mathfrak{W}_4.$$

Ferner

$$\Phi_1 = [\Phi, [\Phi, \langle X, H \times Y\rangle]]$$
$$= -2\Phi\langle X, H \times Y\rangle\Phi,$$

also nach 28.5.1:

$$\{\Phi_1\} = \Phi_1\mathfrak{W}_1 \subset \Phi\mathfrak{W}_1,$$

also wegen 28.23

$$\Phi\mathfrak{W}_1 = \{\Phi_1\}.$$

Hieraus und aus $(\Phi X, Y, H) + (X, \Phi Y, H) = 0$ folgt, dass auch für Φ gilt: $\Phi X = 0$ dann und nur dann, wenn X mit ganz $\Phi\mathfrak{W}_1$ scharniert. Also auch: $\Phi X = 0$ dann und nur dann, wenn $\Phi_1 X = 0$.

Weiter gibt es zu jedem $\Phi X \neq 0$ wegen $\Phi X \in \{\Phi_1\}$ ein $Y \in \{\Phi_1\}$ mit

$$\Phi_1 = \langle \Phi X, H \times Y\rangle.$$

Nun ist

$$\Phi_1 X = -\tfrac{1}{2}(X, H \times Y)\Phi X,$$

also $\Phi_1 X$ skalar Vielfaches von ΦX. Man zeigt leicht, dass der Faktor nicht von X abhängt. Also $\Phi \sim \Phi_1$. Also:

Die infinitesimalen Elemente Φ der metasymplektischen Gruppe mit $\Phi^2 = 0$ gehören zu $\mathfrak{W}_4$.

28.26. In üblicher Weise kann man zeigen, dass die metasymplektische Gruppe alle Automorphismen von $\mathfrak{W}_1$ enthält.

28.27. Seien $X, Y, Y_1 \in \mathfrak{W}_1$, $X \times Y = X \times Y_1 = 0$, $\Phi = \langle X, H \times Y\rangle$, $\Phi_1 = \langle X, H \times Y_1\rangle$, $A \in \{\Phi\}$. Dann ist

$$A \to e^{2\Phi_1}A = A + 2\Phi_1 A = A - (A, U_1)X$$

mit $U_1 = H \times Y_1$ bei geeigneter Wahl von Y_1 eine beliebige symplektische

Transvektion des Symplektons $\{\Phi\}$. Die Transvektionen erzeugen die ganze symplektische Gruppe von $\{\Phi\}$. Also gilt:

Es gibt eine metasymplektische Transformation, die das Symplekton $\{\Phi\}$ invariant lässt und auf $\{\Phi\}$ eine vorgegebene symplektische Transformation induziert.

Hieraus zusammen mit 28.22 folgt: Die metasymplektische Gruppe ist transitiv über $\mathfrak{W}_1$.

28.28. Die Menge der mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)\ (0)$$

verbundenen Punkte ist von der Form

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)\ (0)$$

verbundenen Punkte ist von der Form

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)\ (0)$$

verbundenen Punkte ist von der Form

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der mit

$$(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)$$

verbundenen Punkte ist von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der mit dem ersten, zweiten und dritten Punkt verbundenen Punkte ist von der Form

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)\ (0).$$

Die Menge der mit dem ersten, zweiten und vierten Punkt verbundenen Punkte ist von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} (0).$$

28.29. Sei K eine von drie unabhängigen Punkten projektiv erzeugte Teilmenge des Symplektons $\{\Phi\}$. Dann sind alle mit allen Punkten von K verbundenen Punkte in $\{\Phi\}$ enthalten.

Nach 28.22 und 28.27 darf man nämlich annehmen, dass $\{\Phi\}$ das Symplekton

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} (0)$$

ist, und dass die Menge K erzeugt wird von dem ersten, zweiten und dritten oder vom ersten, zweiten und vierten Punkt aus 28.28. Dann folgt die Behauptung aus der Aussage von 28.28.

28.30. Ist $\Phi \in \mathfrak{W}_4$, $A \in \mathfrak{W}_1$, $\Phi A = 0$, $A \notin \{\Phi\}$, so ist die Menge der mit A verbundenen Punkte von $\{\Phi\}$ eine Gerade L des Symplektons $\{\Phi\}$ und die Menge der mit A verflochtenen Punkte gleich der Menge der mit L punktweise verbundenen Punkte von $\{\Phi\}$.

Man betrachte nämlich die Abbildung

$$X \to H^* \times (X \times A).$$

Das ist eine (entartete projektive) Abbildung von $\{\Phi\}$ in sich, denn für $X = \Phi Z$ ist

$$H^* \times (\Phi Z \times A) = \Phi(H^* \times (Z \times A)).$$

Der Nullraum N besteht aus den mit A verflochtenen Punkten; dim $N = \alpha$. Der Bildraum L besteht aus den mit A verbundenen Punkten; dim $L = \beta$. Es ist $(\alpha+1)+(\beta+1) = 6$ und $\alpha \geqslant \beta$. Also $\alpha \geqslant 2$.

Wäre $\alpha = 2$, so wäre auch $\beta = 2$ und A wäre mit drei unabhängigen Punkten von $\{\Phi\}$ verbindbar, also $\in \{\Phi\}$ nach 28.29, im Widerspruch zur Annahme.

Man nehme wieder als $\{\Phi\}$ die Menge

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} (0).$$

Für $\alpha = 3$ darf man nach 28.27 die Menge N als

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad (0)$$

oder

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (0)$$

ansetzen. Im zweiten Fall findet man alle mit N punktweise verflochtenen Punkte in $\{\Phi\}$, im Widerspruch zu $A \notin \{\Phi\}$. Im ersten Fall haben die mit N punktweise verflochtenen Punkte die Form

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \end{pmatrix} \quad (0);$$

die nicht in $\{\Phi\}$ liegenden unter ihnen haben die Form

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \end{pmatrix} \quad (0).$$

A muss diese Form haben, und für die mit A verbundenen Punkte von $\{\Phi\}$ ergibt sich dann

$$(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix} (0),$$

entsprechend der Behauptung.

Für $\alpha = 4$ darf man N als

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (0)$$

ansetzen, und dann ergibt sich die Unmöglichkeit wie im ersten Fall von $\alpha = 3$.

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. IX [1959f]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 62 (1959), 466–474
[Zbl 0128.15302]

(Communicated at the meeting of 30 May, 1959)

29. *Relationen in der Mannigfaltigkeit der Symplekta*

29.1. Die Symplekta $\{\Phi_1\}$, $\{\Phi_2\}$ heissen
verbunden, wenn $\Phi_1\Phi_2=0$,
verflochten, wenn $[\Phi_1, \Phi_2]=0$,
scharnierend, wenn $(\Phi_1, \Phi_2)=0$.

29.2. Verbunden $\rightarrow$ verflochten $\rightarrow$ scharnierend.

Sei nämlich $X_2, Y_2 \in \{\Phi_2\}$, $\Phi_2=\langle X_2, H\times Y_2\rangle$. Ist $\Phi_1\Phi_2=0$, so ist $\Phi_1X_2=\Phi_1Y_2=0$, also $[\Phi_1, \Phi_2]=\langle\Phi_1X_2, H\times Y_2\rangle+\langle X_2, H\times\Phi_1Y_2\rangle=0$. Also $[\Phi_1, \Phi_2]=0$. Nebenbei ergibt sich dann $\Phi_2\Phi_1=0$, also die Symmetrie der Verbundenheit.

Sei nun $[\Phi_1, \Phi_2]=0$. Dann ist $\Phi_2\Phi_1\Phi_2=\Phi_1\Phi_2^2=0$, andererseits (nach 28.19) $=\frac{1}{18}(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_2$. Also $(\Phi_1, \Phi_2)=0$.

29.3. Sind $\{\Phi_1\}$, $\{\Phi_2\}$ verbunden, so ist $\Phi_1+\Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$.

29.4. Sind $\{\Phi_1\}$, $\{\Phi_2\}$ scharnierend, so ist $[\Phi_1, \Phi_2] \in \mathfrak{W}_4$ und mit $\{\Phi_1\}$ und $\{\Phi_2\}$ verbunden.

Denn $[\Phi_1, \Phi_2]^2 = \Phi_1\Phi_2\Phi_1\Phi_2+\Phi_2\Phi_1\Phi_2\Phi_1 = -\frac{1}{9}(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_1\Phi_2 = 0$, also (nach 28.25) $[\Phi_1, \Phi_2] \in \mathfrak{W}_4$. Ferner

$$\Phi_1[\Phi_1, \Phi_2]=-\Phi_1\Phi_2\Phi_1=-\frac{1}{18}(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_1=0.$$

Ebenso $\Phi_2[\Phi_1, \Phi_2]=0$.

29.5. Die Menge der Punkte, die von zwei bzw. drie unabhängigen und paarweise verbundenen Punkten abhängen, heisst Gerade bzw. Ebene.

Die Punkte einer Geraden (einer Ebene) sind paarweise verbunden.

29.6. Zwei Symplekta sind dann und nur dann verbunden, wenn ihr Durchschnitt eine Ebene ist.

Sei $\Phi_1\Phi_2=0$, also auch $\Phi_2\Phi_1=0$. $A_1, A_2 \in \mathfrak{W}_1$.

$$\Phi_1A_1\times\Phi_2A_2=\Phi_1{}^*(A_1\times\Phi_2A_2)=\Phi_2{}^*(\Phi_1A_1\times A_2).$$

$A_3=A_1\times\Phi_2A_2$, $A_4=\Phi_1A_1\times A_2$ brauchen zwar nicht $\in \mathfrak{W}_1{}^*$ zu sein, wohl aber gilt $A_3\times A_3=A_4\times A_4=0$. Nach 28.5.1 ist dann

$$\Phi_1(H^*\times A_3) \in \{\Phi_1\},\ \Phi_2(H^*\times A_4) \in \{\Phi_2\}.$$

Also $H^*\times(\Phi_1A_1\times\Phi_2A_2) \in \{\Phi_1\}\cap\{\Phi_2\}$.

Es ist $\Phi_1\Phi_2 A_2 = 0$, also $\Phi_2 A_2$ (wenn $\neq 0$) verflochten mit einer 3-dim. Menge von $\{\Phi_1\}$ (siehe 28.30). Der Nullraum von

$$\Phi_1 A_1 \to H^* \times (\Phi_1 A_1 \times \Phi_2 A_2)$$

(als entarteter projektiver Abbildung von $\{\Phi_1\}$ in sich) ist 3-dim., also der Bildraum eine Gerade in $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$. Somit ist $\Phi_1 A_1$ mit allen Punkten einer Geraden aus $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ verbunden. Das kann nicht für alle Punkte $\Phi_1 A_1$ von $\{\Phi_1\}$ dieselbe Gerade sein. Also ist dim $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\} > 1$. Da ein Symplekton durch zwei nichtverbundene Punkte bestimmt ist, sind alle Punkte von $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ untereinander verbunden. Also ist $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ eine Ebene.

Umgekehrt: Wenn $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ zwei Punkte enthält, so ist jedes $\Phi_2 A$ mit zwei Punkten von $\{\Phi_1\}$ verflochten, also (nach 28.16) $\Phi_1\Phi_2 A = 0$. Also $\Phi_1\Phi_2 = 0$.

29.7. Zwei Symplekta sind dann und nur dann verflochten, wenn ihr Durchschnitt nichtleer ist.

Denn mit $\Phi_i = \langle X, U_i \rangle$ ist

$$\begin{aligned}\langle X, U_1\rangle\langle X, U_2\rangle A &= 2U_1 \times (X \times \langle X, U_2\rangle A) - \tfrac{1}{2}(\langle X, U_2\rangle A, U_1)X \\ &= 0 - (X \times A, U_1 \times U_2)X\end{aligned}$$

symmetrisch in U_1 und U_2, also $\Phi_1\Phi_2 = \Phi_2\Phi_1$.

Umgekehrt folgt aus $\Phi_1\Phi_2 = \Phi_2\Phi_1$ entweder $\Phi_1\Phi_2 A = 0$ für alle $A \in \mathfrak{W}_1$, also $\Phi_1\Phi_2 = 0$, oder $\Phi_1\Phi_2 A \neq 0$ für gewisses $A \in \mathfrak{W}_1$, also $\in \{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$. Jedenfalls $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ nichtleer.

29.8. Seien die Symplekta Φ_1, Φ_2 scharnierend, aber nicht verflochten. Dann ist die Menge der $X \in \{\Phi_1)$ mit $\Phi_2 X = 0$ die Ebene $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_3\}$, wo $\Phi_3 = [\Phi_1, \Phi_2]$, und die Menge der $\Phi_2 X$ mit $X \in \{\Phi_1\}$ ist die Ebene $\{\Phi_2\} \cap \{\Phi_3\}$.

Denn die $X \in \{\Phi_1\} \cap \{\Phi_3\}$ sind mit allen Punkten von $\{\Phi_2\} \cap \{\Phi_3\}$ verflochten, also $\Phi_2 X = 0$ nach 28.16; andererseits sind alle $X \in \{\Phi_1\}$ mit $\Phi_2 X = 0$ untereinander verbunden, denn wäre $X, Y \in \{\Phi_1\}$, $\langle X, H \times Y\rangle \neq 0$, so wäre $[\Phi_2, \langle X, H \times Y\rangle] = \Phi_2 X \times (H \times Y) + X \times (H \times \Phi_2 Y) = 0$, im Widerspruch zu $[\Phi_2, \Phi_1] \neq 0$; also sind alle $X \in \{\Phi_1\}$ mit $\Phi_2 X = 0$ verbunden mit ganz $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_3\}$; also liegen jene X in $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_3\}$. Da der Nullraum bei der Abbildung Φ_2 von $\{\Phi_1\}$ in $\{\Phi_2\}$ 2-dim. ist, ist auch der Bildraum 2-dim.; andererseits ist für $X = \Phi_1 A$: $\Phi_1\Phi_2 X = 0$; also $\Phi_2 X \in \{\Phi_2\} \cap \{\Phi_3\}$ (Vertauschung von 1 und 2); also $\Phi_2\{\Phi_1\} = \{\Phi_2\} \cap \{\Phi_3\}$.

29.9. Seien die Symplekta Φ_1, Φ_2 verflochten, aber nicht verbunden. Dann ist die Menge der $\Phi_2 X$ mit $X \in \{\Phi_1\}$ der Punkt $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ und die Menge der $X \in \{\Phi_1\}$ mit $\Phi_2 X = 0$ gleich der Menge der in $\{\Phi_1\}$ mit $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ verbundenen Punkte.

29.10. Dann und nur dann scharnieren die Symplekta $\{\Phi_1\}$, $\{\Phi_2\}$, wenn es ein $X \in \{\Phi_1\}$ gibt mit $\Phi_2 X = 0$.

Nur dann: Folgt aus 29.8–9.

Dann: Zu $X \in \{\Phi_1\}$ mit $\Phi_2 X = 0$, wähle man ein U, so dass $\Phi_1 = \langle X, U\rangle$. Dann ist $(\Phi_1, \Phi_2) = -9(\Phi_2 X, U) = 0$.

29.11. Die Symplekta Φ_1, Φ_2 seien verbunden und Φ_2, Φ_3 verflochten. Dann scharnieren Φ_1, Φ_3.

Denn wenn $X \in \{\Phi_2\} \cap \{\Phi_3\}$, so ist X verflochten mit allen Punkten (also mehr als einem) von $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$. Also $\Phi_1 X = 0$ und nach 29.10 demnach $(\Phi_1, \Phi_3) = 0$.

29.12. Sind Φ_1, Φ_2 scharnierend, aber nicht verflochten, so gibt es genau ein Φ_3, das mit beiden verbunden ist.

Die Existenz ergab sich in 29.4. — Sind $\Phi_1\Phi_3 = \Phi_2\Phi_3 = 0$, so sind $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_3\}$, $\{\Phi_2\} \cap \{\Phi_3\}$ Ebenen, die punktweise verflochten sind, also die Mengen der $\Phi_1\Phi_2 A$ und $\Phi_2\Phi_1 A$, also ist $\{\Phi_3\} = \{[\Phi_1, \Phi_2]\}$.

29.13. Dann und nur dann ist mit Φ_1, Φ_2 auch $\Phi_1 + \Phi_2$ Symplekton, wenn Φ_1, Φ_2 verbunden sind.

Dann: $\Phi_1\Phi_2 = \Phi_2\Phi_1 = 0$, also $(\Phi_1 + \Phi_2)^2 = 0$.

Nur dann: Aus $(\Phi_1 + \Phi_2)^2 = 0$ folgt $\Phi_1\Phi_2 + \Phi_2\Phi_1 = 0$, also $\Phi_1\Phi_2 A = -\Phi_2\Phi_1 A$ identisch 0, oder $\in \{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$, also $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$, also wieder $\Phi_1\Phi_2 = 0$.

29.13.1. Das führt nach 28.22.1 zu einem neuen Kriterium für Verbundenheit von Φ_1 und Φ_2:

$$(\tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_2 \tilde{\Phi}_1)\Phi = -\frac{1}{9}(\Phi, \Phi_1)\Phi_2 - \frac{1}{9}(\Phi, \Phi_2)\Phi_1 .$$

Auch dies ist für die Behandlung der Fälle *ko*, *qu*, *ok* wichtig.

29.14. Wir untersuchen die Menge $\mathfrak{V}$ der Symplekta durch einen festen Punkt X, den wir etwa als

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0) \quad (0)$$

wählen. Der Punkt Y scharniere nicht mit X. Wir nehmen etwa

$$Y = (0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0).$$

Die Menge der Symplekta durch Y heise $\mathfrak{V}'$.

Für jedes $\Phi \in \mathfrak{V}$ gilt $\Phi Y \neq 0$, da sonst Y mit den Punkten von Φ, also auch mit X scharnierte. Zu jedem $\Phi \in \mathfrak{V}$ gehört genau ein $\Phi' \in \mathfrak{V}'$, das Φ in einem Punkt trifft, nämlich $\Phi' = \langle \Phi Y, H \times Y \rangle$. Die Zuordnung $\Phi \to \{\Phi\} \cap \{\Phi'\} = \Phi Y$ ist eineindeutig. Man erhält die Menge $\mathfrak{Q}_5$ dieser ΦY als Menge der mit X und Y verflochtenen Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_6 & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

mit

$$(a, a) = 0,$$

wo a zur Abkürzung steht für $\alpha_0, \ldots, \alpha_6$ und

$$(a, a) = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_6 + \alpha_0^2.$$

Die Menge $\mathfrak{Q}_5$, und also auch $\mathfrak{V}$, hat die Struktur einer 5-dim. Quadrik, nicht eines 5-dim. Symplektons. Das ist die erste Abweichung von der Dualität, nachdem bis jetzt alle Anzeichen auf Selbstdualität der symplektischen Geometrie deuteten.

Seien $A, B, X \in \mathfrak{Q}_5$ mit zugehörigen a, b, x.

$$A \times B = (0)\ (0) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(a, b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wo (a, b) das zu (a, a) gehörige innere Produkt bedeutet. Verbundenheit in $\mathfrak{V}$ im Sinne von $\mathfrak{W}_4$, Verflechtung in $\mathfrak{Q}_5$ im Sinne von $\mathfrak{W}_1$ und Verbundenheit in $\mathfrak{Q}_5$ im Sinne der Quadrik entsprechen einander.

Man rechnet leicht aus (für $A \times B = 0$):

$$\langle A, H \times B\rangle X = \tfrac{1}{4}(b, x)A - \tfrac{1}{4}(a, x)B.$$

Die infinitesimalen Abbildungen

$$x \to \tfrac{1}{4}(b, x)a - \tfrac{1}{4}(a, x)b$$

von $\mathfrak{Q}_5$ auf sich erzeugen die ganze projektive Gruppe, die $\mathfrak{Q}_5$ (d.h. $(a, a) = 0$) invariant lässt, d.h. die Darstellung einer reellen Form der $\mathfrak{B}_3$ im 6-dim. projektiven Raum. Dieselbe wird von der metasymplektischen Gruppe in $\mathfrak{V}$ induziert. (Dual hierzu war die $\mathfrak{C}_3$ im Symplekton.)

29.15. Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{X}$ der Geraden durch

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ (0)\ (0).$$

Die Menge der mit X verbundenen Punkte (siehe 28.28) ist ein Kegel über der Menge $\mathfrak{Q}_6$ der

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_8 & -\alpha_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$(a, a) = 0,$$

wo a zur Abkürzung für $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ steht und

$$(a, a) = \alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_6 + \alpha_3\alpha_7 + \alpha_4\alpha_8.$$

Die Gruppe aus 29.14 induziert in $\mathfrak{Q}_6$ eine irreduzible Darstellung, und das kann nur die Spindarstellung der $\mathfrak{B}_3$ im 7-dim. projektiven Raum sein. Sie ist übrigens transitiv.

Die Geometrie in $\mathfrak{Q}_6$ und $\mathfrak{V}$ ist besonders interessant. F. VAN DER BLIJ und T. A. SPRINGER sind auf sie von den Oktaven mit Nullteilern her

gekommen. Sie verhält sich zur metasymplektischen Geometrie etwa wie die 3-dim. zur 5-dim. symplektischen. Man hat in ihr zwei fundamentale Relationen, die der Verbundenheit und der Verflechtung entsprechen. Wir wollen hier auf sie nicht weiter eingehen.

29.16. Aus dem Vorigen folgt, dass die metasymplektische Gruppe über der Menge der Geraden transitiv ist, dass man also eine Gerade L bis auf metasymplektische Transformationen in der Form

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0)\ (0)$$

annehmen darf. Wir suchen die Symplekta durch diese Gerade. Die Punkte von $\mathfrak{Q}_5$ (siehe 29.14), die mit den Punkten von L verflochten sind, lauten

$$(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \\ \alpha_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie bilden eine projektive Ebene $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{Q}_5$. Insbesondere liegt also jede Gerade in einem Symplekton.

Weiter suchen wir die Symplekta durch eine Ebene P der metasymplektischen Geometrie. Wir dürfen annehmen, dass P die soeben verwendete Gerade L enthält und ausserdem einen Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix} (0).$$

Die mit P punktweise verflochtenen Punkte von $\mathfrak{Q}_5$ liegen in $\mathfrak{E}$ und genügen noch $\alpha_4\beta_3 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_3\beta_1 = 0$, bilden also eine Gerade in $\mathfrak{E}$.

Schliesslich sieht man ohne weiteres, dass auch die durch die Gerade L gehenden Ebenen eine projektive Ebene bilden. Also:

Die Symplekta und Ebenen durch eine feste Gerade L bilden eine Struktur der reellen projektiven Ebene im Sinne

Symplekta $\rightarrow$ *Punkte,*
Ebenen $\rightarrow$ *Geraden,*
Symplekton durch eine Ebene $\rightarrow$ *Punkt auf einer Geraden.*

Es sei hier vorweggenommen, dass diese Eigenschaft beim Übergang zu *ko*, *qu*, *ok* erhalten bleibt. Das hat zur Folge, dass eine gewisser Zug von Selbstdualität, der bei *re* noch vorhanden war, dann verschwindet.

29.17. Sind $\{\Phi\}$, $\{\Phi'\}$ nicht-scharnierende Symplekta, so gibt es ein metasymplektisches f, das $\{\Phi\}$ und $\{\Phi'\}$ invariant lässt und auf $\{\Phi\}$ eine vorgegebene symplektische Abbildung induziert.

Das ist eine Verschärfung von 28.27. Wählt man dort $X, Y \in \{\Phi\}$, $Y_1 \in \{\Phi'\}$, so dass $X \times Y_1 = 0$ ist, so lässt $e^{2\Phi_1}$ auch Φ' invariant. Da kein

Punkt von $\{\Phi'\}$ mit allen Punkten von $\{\Phi\}$ scharniert, erhält man so jede beliebige symplektische Transvektion.

29.18. Die metasymplektische Gruppe ist transitiv über der Menge der Paare $\Phi \in \mathfrak{W}_4$, $X \in \mathfrak{W}_1$ mit $\Phi X \neq 0$.

Man braucht nur zu beweisen, dass es zu $\Phi_1 \in \mathfrak{W}_4$, $X, Y \in \mathfrak{W}_1$, mit $\Phi_1 X \neq 0$, $\Phi_1 Y \neq 0$ ein metasymplektisches f gibt mit $f\{\Phi_1\} = \{\Phi_1\}$, $fX \sim Y$. Wenn durch X, Y ein Symplekton geht, das mit Φ_1 nicht scharniert, so folgt die Behaptung aus 29.17.

Scharnieren X, Y nicht, so betrachte man die Symplekta Φ durch X und Φ' durch Y; beide Mengen haben nach 29.14 die Struktur einer 5-dim. Quadrik. Da $\Phi_1 X \neq 0$ bzw. $\Phi_1 Y \neq 0$, sind (Φ, Φ_1) bzw. $(\Phi', \Phi_1) \not\equiv 0$; die Φ bzw. Φ', die mit Φ_1 scharnieren, bilden eine 4-dim. Teilmannigfaltigkeit. Es gibt also Φ durch X und Φ' durch Y, die einander in *einem* Punkt Z treffen, doch so, dass keines von beiden mit Φ_1 scharniert. Schaltet man Z zwischen X und Y ein, so wird dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Der Fall scharnierender X, Y lässt sich leicht auf den nicht-scharnierender zurückführen.

29.19. Die metasymplektische Gruppe ist transitiv über der Menge der Paare nicht-scharnierender Punkte.

Wir brauchen nur zu zeigen, dass es zu X, Y, Z mit $(X, Y, H) \neq 0$, $(X, Z, H) \neq 0$ ein metasymplektisches f gibt mit $fX \sim X$, $fY \sim Z$. Wir legen durch X ein Symplekton $\{\Phi\}$ mit $\Phi Y \neq 0$, $\Phi Z \neq 0$. Nach 29.18 haben wir ein g mit $g\{\Phi\} = \{\phi\}$, $gY \sim Z$. Wir legen durch Z ein Symplekton Φ' mit $(\Phi, \Phi') \neq 0$. Nach 28.27 gibt es ein h mit $h\{\Phi\} = \{\Phi\}$, $h\{\Phi'\} = \{\Phi'\}$, $hgX \sim X$, $h\Phi Z = \Phi Z$ (denn da X und fX nicht mit Z scharnieren, sind X und fX nicht mit ΦZ verbunden – siehe 28.13). hg leistet das Gewünschte.

29.20. Die metasymplektische Gruppe ist transitiv über der Menge der geordneten Paare nicht-scharnierender Symplekta.

Wir brauchen nur zu zeigen, dass zu Φ_1, Φ_2, Φ_3 mit $(\Phi_1, \Phi_2) \neq 0$, $(\Phi_1, \Phi_3) \neq 0$ ein metasymplektisches f existiert mit $f\{\Phi_1\} = \{\Phi_1\}$, $f\{\Phi_2\} = \{\Phi_3\}$. Wir nehmen erst an dass Φ_2, Φ_3 verflochten sind.

Nach 29.19 können wir weiter voraussetzen, dass der Punkt X aus 29.14 auf Φ_1 liegt und der Punkt Y aus 29.14 gleich $\{\Phi_2\} \cap \{\Phi_3\}$ ist. Nach 29.14 gibt es ein metasymplektisches f, das X und Y invariant lässt, $\{\Phi_1\}$ invariant lässt und $\{\Phi_2\}$ in $\{\Phi_3\}$ überführt.

Der allgemeine Fall ergibt sich hieraus leicht.

30. *Ein „nicht-trivialer" Inzidenzsatz*

30.1. Seien $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in \mathfrak{W}_4$, $\Psi = \Phi_1\Phi_2\Phi_3$, $A = \Phi_1 X$. Dann ist

$$\Psi^2 A - \frac{1}{18}([\Phi_1, \Phi_2], \Phi_3)\Psi A - \frac{1}{18^3}(\Phi_1, \Phi_2)(\Phi_2, \Phi_3)(\Phi_3, \Phi_1)A = 0.$$

Beweis:

$\Phi_1\Phi_2\Phi_1 = \frac{1}{18}(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_1$ für $\Phi_1 \in \mathfrak{W}_4$, Φ_2 infinitesimal metasymplektisch.

$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_1 = \Phi_1[\Phi_2, \Phi_3]\Phi_1 + \Phi_1\Phi_3\Phi_2\Phi_1$$
$$= \frac{1}{18}(\Phi_1, [\Phi_2\Phi_3])\Phi_1 + \Phi_1\Phi_3\Phi_2\Phi_1$$
$$\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_1 = \frac{1}{18}(\Phi_1, [\Phi_2\Phi_3])\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_1 + \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_1\Phi_3\Phi_2\Phi_1,$$

wo der letzte Summand

$$= \frac{1}{18}(\Phi_1, \Phi_3)\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_2\Phi_1 = \frac{1}{18^2}(\Phi_1, \Phi_3)(\Phi_3, \Phi_2)\Phi_1\Phi_2\Phi_1$$
$$= \frac{1}{18^3}(\Phi_1, \Phi_3)(\Phi_3, \Phi_2)(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_1$$

ist.

30.2. Zu zwei Symplekta $\{\Phi\}$, $\{\Phi'\}$ mit $(\Phi, \Phi') \neq 0$ gehört eine symplektische Abbildung

$$\{\Phi\} \to \{\Phi'\},$$

bei der jedem Punkt von $\{\Phi\}$ der mit ihm verflochtene von $\{\Phi'\}$ entspricht.

Die vorige Formel zeigt:

$$\{\Phi_1\} \to \{\Phi_2\} \to \{\Phi_3\} \to \{\Phi_1\}$$

(wenn $(\Phi_i, \Phi_j) \neq 0$ für $i \neq j$) ist eine symplektische Abbildung von $\{\Phi_1\}$ auf sich mit höchstens zwei verschiedenen Eigenwerten und höchstens doppelten Elementarteilern. Wir nennen solch eine Abbildung eine *symplektische Perspektivität.*

Wir haben hier einen Inzidenzsatz erhalten, der dem in der symplektischen Geometrie ähnelt. Dort waren die entsprechenden Abbildungen Polaritäten.

30.3. Wir zeigen nun, dass man so alle symplektischen Perspektivitäten von $\{\Phi_1\}$ erhält, und zwar auch schon, wenn man $\{\Phi_2\}$ festlässt und nur $\{\Phi_3\}$ variiert.

Man rechnet leicht nach, dass die symplektischen Perspektivitäten nach der symplektischen Gruppe in sechs Klassen zerfallen:

1) Verschiedene reelle Eigenwerte; die Fixpunkte erfüllen zwei zueinander fremde Ebenen des Symplektons.

2) Verschiedene komplexe Eigenwerte; beim Übergang ins Komplexe findet man die Fixpunkte auf zwei zueinander konjugierten fremden Ebenen (im Sinne der komplex erweiterten symplektischen Geometrie).

3–6) *Ein* reeller Eigenwert; die Fixpunkte liegen auf einer Symplektonebene und zählen alle doppelt. Nimmt man in einem $\xi_1, \ldots \xi_6$-Koordinatensystem diese Ebene als $\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$, so kann man die symplektische Perspektivität auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bringen, wo 1 eine 3-3-Einsmatrix und S eine 3-3-symmetrische Matrix ist und es nur auf den Rang von S ($= 0, 1, 2, 3$) ankommt. Dem entsprechen die 3.–6.Klasse.

Nach 29.20 dürfen wir annehmen, dass für

$$A=(\alpha_{ij})\quad(\beta_{ij})\quad(\gamma_{ij})$$

$$\Phi_1 A=\begin{pmatrix}-\alpha_{13}&0&0\\-\alpha_{23}&0&0\\-\alpha_{33}&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\beta_{11}&\beta_{12}&\beta_{13}\end{pmatrix}\quad(0),$$

$$\Phi_2 A=\begin{pmatrix}0&0&-\alpha_{11}\\0&0&-\alpha_{21}\\0&0&-\alpha_{31}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}\beta_{31}&\beta_{32}&\beta_{33}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad(0)$$

ist. Nimmt man als Φ_3 das durch

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&\varrho\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\varrho\\0&0&0\end{pmatrix}$$

bestimmte Symplekton, so wird die Diskriminante der Gleichung 30.1

$$-\frac{1}{16}\varrho,$$

also nach Wunsch positiv oder negativ. Das ergibt Beispiele für die 1. und 2. Klasse.

Nimmt man für Φ_3 das durch

$$X=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\varrho_2\varrho_3&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\varrho_3\\0&-\varrho_2&0\end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix}0&\varrho_1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad(0)$$

bestimmte Symplekton, so ergibt sich nach einiger Rechnung

$$4\Psi\Phi_1 A=\begin{pmatrix}-\alpha_{13}&0&0\\-\alpha_{23}&0&0\\-\alpha_{33}&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\beta_{11}-\varrho_2\varrho_3\alpha_1&\beta_{12}-\varrho_3\varrho_1\alpha_2&\beta_{13}-\varrho_1\varrho_2\alpha_3\end{pmatrix}\quad(0).$$

Das ist ein Beispiel für die 3. Klasse, wenn $\varrho_1=\varrho_2=\varrho_3=0$, für die 4. Klasse, wenn nur $\varrho_1=0$, für die 6. Klasse, wenn alle $\varrho_i\neq 0$.

Nimmt man für Φ_3 das durch

$$X=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ (0)$$

bestimmte Symplekton, so ergibt sich ebenso

$$4\Psi\Phi_1 A=\begin{pmatrix}-\alpha_{13}&0&0\\-\alpha_{23}&0&0\\-\alpha_{33}&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\beta_{11}+\alpha_3&\beta_{12}+\alpha_2&\beta_{13}\end{pmatrix},$$

also ein Beispiel für die 5. Klasse.

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. X [1963b]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 66 (1963), 457–471
[Zbl 0123.13501; MR 0163203]

(Communicated at the meeting of March 30, 1963)

31. *Gewisse Koeffizienten*

Die Betrachtungen in 1–25 [1]) waren im Wesentlichen unabhängig davon, welche der vier Hurwitzalgebren $\mathscr{H}$ als Grundkörper gewählt wurde. Nur gewisse Dimensionszahlen und Spuren und daher auch gewisse numerische Koeffizienten in verschiedenen Gleichungen ändern sich. Die Änderungen werden unten angegeben. Dagegen war die Betrachtung der metasymplektischen Geometrie in 26–30 wesentlich auf den reellen Fall zugeschnitten. Weiter unten wird nun die in 25 angekündigte allgemeine Methode der metasymplektischen Geometrie entwickelt.

31.1. Der Koeffizient in 1.26 ist bzw.

$$-\tfrac{5}{4},\quad -\tfrac{3}{2},\quad -2,\quad -3.$$

31.2. Die Dimension von $\mathfrak{R}$ ist bzw.

$$14,\quad 20,\quad 32,\quad 56,$$

die von $\mathfrak{M}$ (projektiv)

$$6,\quad 9,\quad 15,\quad 27,$$

die von $\mathfrak{L}$

$$21,\quad 35,\quad 66,\quad 133,$$

die von $\mathfrak{N}$ (projektiv)

$$5,\quad 9,\quad 17,\quad 33,$$

die der Menge der Geraden der 5-dim. symplektischen Geometrie

$$7,\quad 12,\quad 22,\quad 42.$$

31.3. Im Folgenden seien $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots \in \mathfrak{L}$, $P, P_1, P_2, \ldots \in \mathfrak{R}$, $\Phi \in$ Lie-Algebra aus 7.

---

[1]) Siehe in diesen Proceedings:

I: **57** (1954), 218–230
II: **57** (1954), 363–368
III: **58** (1955), 152–157
IV: **58** (1955), 277–285
V–VII: **62** (1959), 165–201
VIII–IX: **62** (1959), 447–474

Statt 4.8, 4.10 ist [1])

(31.3.1) $\qquad \operatorname{sp} \Theta(P_1 \times P_2) = -\varepsilon\{\Theta P_1, P_2\}$

mit bzw.

$$\varepsilon = \tfrac{5}{4},\ \tfrac{3}{2},\ 2,\ 3.$$

Statt der Formel am Ende von 4 hat man

(31.3.2) $\qquad \operatorname{sp} \Theta^2 = 2 \operatorname{sp} \phi^2 + (10, 12, 16, 24)((A, B) + \tfrac{1}{3}\varrho^2).$

Statt 9.5.1 (siehe auch 13.3) ist

(31.3.3) $\qquad \widetilde{\Theta}^2\Theta_1 = -\frac{1}{2\varepsilon}(\operatorname{sp} \Theta\Theta_1)\Theta \quad$ für $\Theta \in \mathfrak{R}$.

Für die Killing-Cartan-Form der Gruppen der dritten Zeile von S zeigt eine einfache Rechnung

(31.3.4) $\qquad \operatorname{sp} \widetilde{\Theta}^2 / \operatorname{sp} \Theta^2 = \tfrac{8}{5},\ 2,\ \tfrac{5}{2},\ 3.$

Für die der vierten Zeile (siehe 7) berechnet man

(31.3.5) $\qquad \operatorname{sp} \widetilde{\Phi}^2 = \varepsilon_1 \operatorname{sp} \Theta^2 - \varepsilon_2\{P_1\, P_2\} + 4\varepsilon_2(\gamma^2 + \underline{\delta}\delta),$

wo $\varepsilon_1 = 2 +$ Koeffizient aus 31.3.4 und $\varepsilon_2 = 2 + \frac{1}{2}\dim \mathfrak{R}$, also

$$\varepsilon_1 = \tfrac{18}{5},\quad 4,\quad \tfrac{9}{2},\quad 5,$$
$$\varepsilon_2 = 9,\quad 12,\quad 18,\quad 30 = 2\varepsilon\varepsilon_1.$$

32. *Einige Formeln*

Einige wichtige Formeln seien zur Erleichterung des Nachschlagens wiederholt, und einige weitere seien hinzugefügt.

Für $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots \in \mathfrak{L}$, $P, P_1, P_2, \ldots \in \mathfrak{R}$ gilt:

(32.1) $\quad [\Theta, P_1 \times P_2] = \Theta P_1 \times P_2 + P_1 \times \Theta P_2.$ (Siehe 4.4)

(32.2) $\quad \{P_1, P_2\} + \{P_2, P_1\} = 0.$ (Siehe 4.5)

(32.3) $\quad \{\Theta P_1, P_2\} + \{P_1, \Theta P_2\} = 0.$ (Siehe 4.6)

(32.4) $\quad \{\Theta P_1, P_2\} = -\varepsilon^{-1} \operatorname{sp} \Theta(P_1 \times P_2).$ (Siehe 31.3.1)

(32.5) $\quad (P \times P_1)P_2 - (P \times P_2)P_1 = \frac{1}{4}\{P_1, P_2\}P + \frac{1}{8}\{P, P_2\}P_1 + \frac{1}{8}\{P_1, P\}P_2.$

(32.6) Für $(P \times P)P = 0$ [(Siehe 6.1)

ergeben sich leicht aus den vorigen:

(32.6.1) $\quad (P \times P)\Theta P = \frac{1}{4\varepsilon}(\operatorname{sp} \Theta(P \times P))P.$

(32.6.2) $\quad ((P \times P)P_1) \times P = \frac{1}{4}\{P, P_1\}P \times P.$

(32.7) $\qquad$ Für $P_1 \times P_2 = 0$

ergeben sich ebenso

(32.7.1) $\quad (P_1 \times P_1)P_2 = \frac{3}{8}\{P_1, P_2\}P_1.$

(32.7.2) $\quad P_1 \times (P_2 \times P_2)P_3 = \frac{1}{8}\{P_1, P_2\}P_2 \times P_3 + \frac{1}{4}\{P_1, P_3\}P_2 \times P_2.$

---

[1]) Statt χ sagen wir nun sp.

(32.7.3) $(P_1 \times P_2)\Theta P_1 = \frac{1}{4\varepsilon}(\mathrm{sp}\ \Theta(P_2 \times P_2))P_1 - \frac{1}{8}\{P_1, P_2\}\Theta P_2.$

(32.7.4) $(P_1 \times P_1)(P_2 \times P_2)P_3 = \frac{1}{64}\{P_1, P_2\}(8\{P_2, P_3\}P_1 - 8\{P_1, P_3\}P_2 - \{P_1, P_2\}P_3).$

(32.7.5) $[P_1 \times P_1, [P_2 \times P_2, \Theta]] = -\frac{1}{2}\{P_1, P_2\}P_1 \times \Theta P_2 - \frac{1}{2\varepsilon}(\mathrm{sp}\ \Theta(P_2 \times P_2))P_1 \times P_1.$

(32.8) Für $\Theta \in \mathfrak{N}$ ist

$$[\Theta, [\Theta, \Theta_1]] = -\frac{1}{2\varepsilon}(\mathrm{sp}\ \Theta\Theta_1)\Theta. \qquad \text{(Siehe 31.3.3)}$$

(32.9) Für $\Theta, \Theta_1 \in \mathfrak{N}$, $\Theta\Theta_1 = 0$ sind Θ, Θ_1 linear abhängig. (Siehe 12.5)

(32.10) Für $\Theta, \Theta_1 \in \mathfrak{N}$ reicht schon $\mathrm{sp}\,(\Theta\Theta_1) = 0$ zur Kommutativität von Θ, Θ_1 aus.

Denn $[\Theta, \Theta_1]^2 = \Theta\Theta_1\Theta\Theta_1 + \Theta_1\Theta\Theta_1\Theta = 0$ nach 32.8, also $[\Theta, \Theta_1] \in \mathfrak{N}$; ferner $\Theta[\Theta, \Theta_1] = 0$, also nach 32.9 Abhängigkeit zwischen Θ und $[\Theta, \Theta_1]$; ebenso zwischen Θ_1 und $[\Theta_1, \Theta]$. Also $[\Theta, \Theta_1] = 0$.

33. *Heuristische Argumente aus der Darstellungstheorie*

Wie in 25.2 auseinandergesetzt, hat man nach Tits die Menge der Symplekta bzw. Punkte der metasymplektischen Geometrie über den Oktaven als *die* Mannigfaltigkeit zu suchen, die vom Vektor höchsten Gewichts in der Darstellung π_1 bzw. π_2 der $\mathfrak{E}_8$ erzeugt wird. Um algebraisch die Inzidenzbeziehungen darzustellen, drückt man π_2 durch π_1 (die adjungierte Darstellung) aus, und das kann etwa im Kronecker-Quadrat von π_1 geschehen. Zu dem Zwecke hat man das Kronecker-Quadrat zu reduzieren. Wir führen das nun für alle vier Gruppen der vierten Zeile des Schemas S aus:

$\mathfrak{F}_4$:

Höchste fundamentale Gewichte:

π_1 :	1	0	0	0
π_2 :	1	1	0	0
π_3 :	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
π_4 :	2	1	1	0

$\delta = 1\frac{1}{2}\quad \frac{5}{2}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{1}{2}$

Höchste Gewichte im Kronecker-Quadrat von π_2 und Dimensionen:

π_2^2 :	2	2	0	0,	symmetrisch,	1053
$\pi_1\pi_2$:	2	1	0	0,	antisymmetrisch,	1053
π_1^2 :	2	0	0	0,	symmetrisch,	324
π_3 :	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$,	antisymmetrisch,	273
π_0 :	0	0	0	0,	symmetrisch,	1

$\mathfrak{E}_6$:

Wurzelformtypen über der Basis $f_1, \ldots, f_6$ mit $(f_i, f_i) = \frac{4}{9}$, $(f_i, f_j) = -\frac{1}{18}$:

1	−1	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	$\delta = 8\quad 7\quad 6\quad 5\quad 4\quad 3$
1	1	1	1	1	1	

Höchste Gewichte im Kronecker-Quadrat von π_2 und Dimensionen:

π_2^2	: 2	2	2	2	2	2,	symmetrisch,	2430
π_6	: 2	2	2	1	1	1,	antisymmetrisch,	2925
$\pi_2\pi_3$	: 2	1	1	1	1	0,	symmetrisch,	650
π_2	: 1	1	1	1	1	1,	antisymmetrisch,	78
π_0	: 0	0	0	0	0	0,	symmetrisch,	1

$\mathfrak{E}_7$:

Wurzelformtypen über der Basis $f_1, \ldots, f_7$ wie oben:

1	−1	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	$\delta = \frac{1}{2}(27 \quad 25 \quad 23 \quad 21 \quad 19 \quad 17 \quad 15)$
1	1	1	1	1	1	0	

Höchste Gewichte im Kronecker-Quadrat von π_1 und Dimensionen:

$_{01}{}^2$	: 2	2	2	2	2	2	0,	symmetrisch, 7371
π_5	: 2	2	2	2	2	1	1,	antisymmetrisch, 8645
π_4	: 2	2	1	1	1	1	1,	symmetrisch, 1539
π_1	: 1	1	1	1	1	1	0,	antisymmetrisch, 133
π_0	: 0	0	0	0	0	0	0,	symmetrisch, 1

$\mathfrak{E}_8$:

Höchste Gewichte im Kronecker-Quadrat von π_1 und Dimensionen [1]):

π_1^2	,	symmetrisch,	27000
π_3	,	antisymmetrisch,	30380
π_2	,	symmetrisch,	3875
π_1	,	antisymmetrisch,	248
π_0	,	symmetrisch,	1

Man erkennt bei allen vier Gruppen dieselben Züge. Die Darstellung (bzw. π_1^2, $\pi_1\pi_3$, π_4, π_2), in der man die Mannigfaltigkeit der Punkte zu suchen hat, ist als Teil des symmetrischen Kronecker-Quadrats charakterisiert durch die Eigenschaften:

es gibt keinen invarianten Vektor,

das Doppelte der höchsten Wurzelform tritt nicht als Gewicht auf.

Das liefert den Hinweis, wie man den Raum dieser Darstellung aus dem Kronecker-Quadrat herausheben kann.

34. Definition: $\mathfrak{R}_4$ sei die in 7 definierte Lie-Algebra, also je nach dem Grundkörper $\mathscr{K}$ isomorph (einer reellen Form) der $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{E}_6$, $\mathfrak{E}_7$, $\mathfrak{E}_8$. Auch übrigens bedienen wir uns der Bezeichnungen von 7. Die Elemente von $\mathfrak{R}_4$ werden meist mit Φ bezeichnet (mit Indizes, Strichen und Sternen).

Statt des üblichen ad Φ schreiben wir $\widetilde{\Phi}$.

Definition: Für $\Phi \in \mathfrak{R}_4$ wird die lineare Selbstabbildung $\langle \Phi, \Phi \rangle$ von $\mathfrak{R}_4$ durch

$$(34.1) \quad \langle \Phi, \Phi \rangle \Phi^* = \widetilde{\Phi}^2 \Phi^* + \varepsilon_2^{-1}(\mathrm{sp}\, \widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi}^*)\Phi - \varepsilon_3^{-1}(\mathrm{sp}\, \widetilde{\Phi}^2)\, \Phi^*$$

[1]) Siehe: Verf., Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lie-Gruppen, Proceed. Kon. Ned. Akad. Wet. **A 57**, 487–491 (1954).

mit

$$\varepsilon_3 = \tfrac{9.5.2}{1.0.}, \quad 72, \quad 126, \quad 240$$

definiert (bzgl. ε_2 siehe 31.3.5).

Der Koeffizient ε_2^{-1} ist folgendermassen motiviert: Gehört $\Phi = \Phi_\mu$ zur höchsten Wurzelform μ und $\Phi^* = \Phi_\alpha$ zu der Wurzelform α, so ist $\tilde{\Phi}_\mu^2 \Phi_\alpha$, $\operatorname{sp} \tilde{\Phi}_\mu \tilde{\Phi}_\alpha$, $\operatorname{sp} \tilde{\Phi}_\alpha^2$ im Allgemeinen null. Nur für $\alpha = -\mu$ hat man

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\mu^2 \Phi_{-\mu} &= -(\mu, \mu)\Phi_\mu, \\ (\operatorname{sp} \tilde{\Phi}_\mu \tilde{\Phi}_{-\mu})\Phi_\mu &= \Phi_\mu, \\ (\operatorname{sp} \tilde{\Phi}_\mu^2)\Phi_{-\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Der Koeffizient ε_2^{-1} ist so eingerichtet ($\varepsilon_2 = (\mu, \mu)$), dass sich alles weghebt, also $\langle \Phi_\mu, \Phi_\mu \rangle$ verschwindet.

Der Koeffizient ε_3^{-1} ist so eingerichtet, dass die Spur von $\langle \Phi, \Phi \rangle$ verschwindet. In der Tat ist

$$\operatorname{sp} \langle \Phi, \Phi \rangle = \operatorname{sp} \tilde{\Phi}^2 + \varepsilon_2^{-1} \operatorname{sp} \tilde{\Phi}^2 - \varepsilon_3^{-1} (\dim \mathfrak{R}_4) \operatorname{sp} \tilde{\Phi}^2,$$

und hieraus ergibt sich ε_3 wie oben.

Definition: Für $\Phi_i \varepsilon \mathfrak{R}_4$ definiert man

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$$

durch die Forderungen:

symmetrisch, bilinear, $\langle \Phi, \Phi \rangle$ wie oben.

Definition: Der von diesen $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ linear erzeugte Raum heisst $\mathfrak{R}_1$. Die adjungierte von $\mathfrak{R}_4$ wird in $\mathfrak{R}_1$ linear dargestellt durch den Homomorphismus ϑ mit

$$(34.2) \quad (\vartheta \tilde{\Phi}) \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = [\tilde{\Phi}, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle] = \langle \tilde{\Phi} \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \langle \Phi_1, \tilde{\Phi} \Phi_2 \rangle.$$

Dass das wirklich eine Darstellung ist, sieht man ohne weiteres. Durch eine Umkehrung von

$$\Phi_1 \times \Phi_2 \to \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$$

ist sie in das symmetrische Kronecker-Quadrat der adjungierten zu $\mathfrak{R}_4$ eingebettet. Gehören die Φ_i zur Wurzelform α_i, so gehört $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ zum Gewicht $\alpha_1 + \alpha_2$. Wir haben es so eingerichtet, dass $\langle \Phi_\mu, \Phi_\mu \rangle$ verschwindet. Daher kommt in $\mathfrak{R}_1$ kein (nichttrivialer) Vektor vom Gewicht 2μ vor. Da die Spur von $\langle \Phi, \Phi \rangle$ also auch von $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ verschwindet, kommt auch kein invarianter Vektor in $\mathfrak{R}_1$ vor. Also nach 33:

Durch 34.2 wird in $\mathfrak{R}_1$ in der Tat die Darstellung $\pi_1^2, \pi_1\pi_3, \pi_4, \pi_2$ von $\mathfrak{R}_4$ definiert, auf die es uns ankommt.

35. Wir fahren heuristisch fort: Gewisse $\Phi \in \mathfrak{R}_4$ sollen als Symplekta interpretiert werden, gewisse $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ als Punkte der metasymplektischen Geometrie. Naturgemäss soll $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ den Schnittpunkt der Symplekta Φ_1, Φ_2 angeben, wenn einer existiert. Dieser Schnittpunkt muss unbe-

stimmt werden, wenn Φ_1, Φ_2 zusammenfallen, d.h. für die $\Phi \in \mathfrak{R}_4$, die als Symplekta zu verstehen sind, muss $\langle \Phi, \Phi \rangle = 0$ sein. Diese Überlegung führt zu der

Definition: $\Phi \in \mathfrak{W}_4$ dann und nur dann, wenn $\Phi \in \mathfrak{R}_4$ und $\langle \Phi, \Phi \rangle = 0$. $\mathfrak{W}_4$ heisst die Menge der *Symplekta*, wenn mit den Elementen von $\mathfrak{W}_4$ bis auf einen reellen Faktor gerechnet wird.

$\langle \Phi, \Phi \rangle$ war durch 34.1 erklärt worden. Um uns von lästigen numerischen Koeffizienten zu befreien, setzen wir für $\Phi \in \mathfrak{R}_4$

$$(\Phi, \Phi^*) = -\varepsilon_2^{-1} \operatorname{sp} \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^*,$$

also

(35.1) $\operatorname{sp} \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^*/(\Phi, \Phi^*) = -9, \ -12, \ -18, \ -30.$

Dann wird

(35.2) $\langle \Phi, \Phi \rangle \Phi^* = \tilde{\Phi}^2 \Phi^* - (\Phi, \Phi^*)\Phi + \varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} (\Phi, \Phi)\Phi^*.$

(35.3) $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^* = \frac{1}{2}(\tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_2 \tilde{\Phi}_1)\Phi^* - \frac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\Phi_2 - \frac{1}{2}(\Phi_2, \Phi^*)\Phi_1 + + \varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} (\Phi_1, \Phi_2)\Phi^*.$

Hier ist $\varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} = \frac{5}{2\,6}, \ \frac{1}{6}, \ \frac{1}{7}, \ \frac{1}{8}.$

Ist $\Phi \in \mathfrak{W}_4$, so ist insbesondere $\langle \Phi, \Phi \rangle \Phi = 0$, also $(\Phi, \Phi) = 0$. Daraus folgt

(35.4) $\Phi \in \mathfrak{W}_4$ dann und nur dann, wenn $(\Phi, \Phi) = 0$ und

$$\tilde{\Phi}^2 \Phi^* = (\Phi, \Phi^*)\Phi \qquad \text{für alle } \Phi^* \in \mathfrak{R}_4.$$

Dies und die Tatsache, dass bei den meisten Berechnungen auch $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ vorausgesetzt wird, hat zur Folge, dass der letzte Summand in 35.2–3 praktisch keine Rolle spielt.

35.4 ist im reellen Fall schon in 28.22.1 erwähnt worden.

36. Wir geben die vollständige Lösung von 35.4 an. Zwischenrechnungen lassen wir aus. Vom Ergebnis dieses Paragraphen wird später wesentlich nur der Anfang verwendet.

Man setze (siehe 7)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Theta + \gamma & \underline{\delta} \\ \bar{\delta} & \Theta - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

und analog Φ^* mit Sternen.

Die Bedeutung von $(\Phi, \Phi) = 0$ erhellt aus 31.3.5. Also

(36.0) $\varepsilon_1 \operatorname{sp} \Theta^2 - \varepsilon_2 \{P_1, P_2\} + 4\varepsilon_2(\gamma^2 + \underline{\delta}\bar{\delta}) = 0.$

Man wende Φ^2 nacheinander auf

$$\underline{\Delta}, \ \bar{\Delta}, \ \Gamma, \ \underline{P}^*, \ \bar{P}^*, \ \Theta^*$$

an (am besten in dieser Reihenfolge). Dann erhält man die Bedingungen:

(36.1) $P_1 \times P_1 = \ 2\delta\Theta$

(36.2) $P_1 \times P_2 = -2\gamma\Theta$

(36.3) $P_2 \times P_2 = -2\bar{\delta}\Theta$

(36.4) $\{P_1, P_2\} = 16(\gamma^2 + \underline{\delta}\bar{\delta})$

(36.5) $\frac{1}{3}\Theta P_1 = \gamma P_1 + \underline{\delta} P_2$

(36.6) $\frac{1}{3}\Theta P_2 = \bar{\delta} P_1 - \gamma P_2$

(36.7) $P_1 \times \Theta P^* + \frac{1}{3}\Theta P_1 \times P^* = \frac{1}{4}\{P_1, P^*\}\Theta$

(36.8) $P_2 \times \Theta P^* + \frac{1}{3}\Theta P_2 \times P^* = \frac{1}{4}\{P_2, P^*\}\Theta$

(36.9) $\frac{1}{3}\Theta^*\Theta P_1 - \Theta\Theta^* P_1 = -\frac{1}{3\varepsilon}(\mathrm{sp}\ \Theta\Theta^*)P_1$

(36.10) $\frac{1}{3}\Theta^*\Theta P_2 - \Theta\Theta^* P_2 = -\frac{1}{4\varepsilon}(\mathrm{sp}\ \Theta\Theta^*)P_2$

(36.11) $\Theta^2 P^* = \frac{1}{16}\{P_1, P_2\}P^* - \frac{1}{2}\{P_2, P^*\}P_1 + \frac{1}{2}\{P_1, P^*\}P_2$

(36.12) $[\Theta, [\Theta, \Theta^*]] - P_1 \times \Theta^* P_2 + P_2 \times \Theta^* P_1 = -\frac{1}{2\varepsilon}(\mathrm{sp}\ \Theta\Theta^*)\Theta.$

Aus 36.11 folgt

(36.13) $\mathrm{sp}\ \Theta^2 = \frac{3\varepsilon}{2}\{P_1, P_2\}.$

Die Bedingungen 36.0–12 sind notwendig und hinreichend für $\Phi \in \mathfrak{W}_4$. Man kommt auch mit weniger Bedingungen aus. Dann hat man aber einige Fälle zu unterscheiden. Der „allgemeine" Fall ist

36a. $\{P_1, P_2\} \neq 0.$

Aus $\varepsilon_2 = 2\varepsilon\varepsilon_1$ folgt, dass 36.0 überflüssig ist.

Durch Transformation mit einem Element von $\mathfrak{A}_1$ (siehe 7) kann man $\gamma = 0$ erreichen, also $P_1 \times P_2 = 0$. Mittels der Formeln 32.7 zeigt man dann:

36.1–6 sind hinreichend.

Ist obendrein $\{P_1, P_2\} > 0$, so kann man statt $\gamma = 0$ auch $\underline{\delta} = \bar{\delta} = 0$ erreichen, also $P_1 \times P_1 = P_2 \times P_2 = 0$. Man sieht dann noch einfacher ein, dass 36.1–6 hinreichen.

Zur Dimension von $\mathfrak{W}_4$ (projektiv) liefern P_1, P_2 je den Beitrag $\dim \mathfrak{M} + 1$; $\gamma, \underline{\delta}, \bar{\delta}$ den Beitrag 3–1 (wegen 36.4), so dass sich (projektiv)

$$\dim \mathfrak{W}_4 = 2 \dim \mathfrak{M} + 3 = 15,\ 21,\ 33,\ 57$$

ergibt.

36b. $\{P_1, P_2\} = 0$, P_1, P_2 linear unabhängig, nicht alle $\gamma, \underline{\delta}, \bar{\delta}$ verschwinden.

Durch Transformation mit einem Element von $\mathfrak{A}_1$ erreicht man $\gamma = \bar{\delta} = 0$, $\underline{\delta} \neq 0$. Also $P_1 \times P_2 = P_2 \times P_2 = 0$ (36.1–2).

Man wähle ein $P_3 \in \mathfrak{R}$ mit

(36.14) $\{P_1, P_3\} = 0,\ \{P_2, P_3\} \neq 0.$

Dann ist (32.5)

(36.15) $(P_1 \times P_3)P_2 = -\frac{1}{4}\{P_2, P_3\}P_1.$

Man definiere Θ_1 durch

(36.16) $P_1 \times P_3 = -\frac{1}{4}\{P_2, P_3\}\Theta_1.$

Also

(36.17) $$\Theta_1 P_2 = P_1.$$

Mittels 36.5, 36.1, 31.3.1, 32.5, 36.15 erhält man

$$6\underline{\delta}^2\{P_2, P_3\} = \{6\underline{\delta}^2 P_2, P_3\} = \{2\underline{\delta}\Theta P_1, P_3\} = \{(P_1 \times P_1)P_1, P_3\} =$$
$$-\varepsilon^{-1}\,\mathrm{sp}\,(P_1 \times P_3)(P_1 \times P_1) = \{(P_1 \times P_3)P_1, P_1\} = -\tfrac{1}{4}\{P_2, P_3\}\{\Theta_1 P_1, P_1\},$$

also mit 36.14, 36.17, 32.3

(36.18) $$24\underline{\delta}^2 = -\{\Theta_1 P_1, P_1\} = -\{\Theta_1^2 P_2, \Theta_1 P_2\} = \{\Theta_1^3 P_2, P_2\}.$$

Nur 36.1–6 sind verwendet worden. Zur Lösung der Gleichung 35.4 wähle man P_2 und Θ_1 beliebig, aber so, dass

$$P_2 \times P_2 = 0,$$

(36.19) $$\{\Theta_1^3 P_2, P_2\} > 0$$

gilt. Dann bestimme man $\underline{\delta}$ nach 36.18, P_1 nach 36.17, Θ nach 36.1; ferner setze man $\gamma = \bar{\delta} = 0$, und führe man schliesslich eine Transformation aus $\mathfrak{A}_1$ aus. Hauptsächlich mittels 32.7 zeigt man, dass dann alle Bedingungen 36.0–12 erfüllt sind. Z.B. 36.1:

$$2\underline{\delta}\Theta P_1 = (P_1 \times P_1)P_1 = (P_1 \times P_1)\Theta_1 P_2 = [P_1 \times P_1, \Theta^*]P_2 = -2(P_1 \times \Theta_1 P_1)P_2$$
$$= -\tfrac{1}{4}\{\Theta_1 P_1, P_1\}P_2 = -\tfrac{1}{4}\{\Theta_1^2 P_2, \Theta_1 P_2\}P_2 = 6\underline{\delta}P_2$$

wegen 36.1, 36.17, 32.1, 36.6 (man beweise dies vorher), 32.5, 36.2 (man beweise dies vorher), 32.3, 36.19.

36c. $\{P_1, P_2\} = 0$, P_1, P_2 linear unabhängig, $\gamma = \underline{\delta} = \bar{\delta} = 0$.

Man bestimme $S_i \in \mathfrak{R}$ mit

$$\{P_i, S_i\} = 1, \quad \{P_1, S_2\} = \{P_2, S_1\} = 0.$$

Mit $R_i = 4\Theta S_i$ wird wegen 36.7–8 mit S_i statt P^*

(36.20) $$P_i \times R_i = \Theta$$

(36.21) $$\{P_i, R_j\} = 0$$

(36.22) $$P_1 \times R_2 = P_2 \times P_1 = 0$$

und nach 36.11 mit S_1 statt P^*

$$\{\Theta S_1, \Theta S_2\} = -\{\Theta^2 S_1, S_2\} = -\tfrac{1}{2},$$

also

(36.23) $$\{R_1, R_2\} = -8.$$

Umgekehrt schreibe man P_1, P_2 beliebig vor mit

$$P_i \times P_j = 0, \quad \{P_1, P_2\} = 0.$$

Bestimmt man hierzu R_1, R_2, so dass 36.21–23 und ferner

$$P_1 \times R_1 = P_2 \times R_2$$

gilt, so hat man noch Θ nach 36.20 zu bestimmen und $\gamma = \underline{\delta} = \bar{\delta}$ zu setzen, um alle Bedingungen 36.1–12 zu erfüllen. Die Bestimmung der R_i zu

gegebenen P_i geschieht so: Man setze $R_i = \Theta_i P_i$, wo die Θ_i der Bedingung $P_1 \times (\Theta_1 + \Theta_2) P_2 = 0$ zu genügen haben. Dies ergibt eine Forderung an $\Theta_1 + \Theta_2$, für die ich keine elegante explizite Form finden konnte.

36d. P_1, P_2 linear abhängig, $\Theta \neq 0$.

Dann ist nach 36.11

$$\Theta^2 = 0.$$

Sei $\Theta P_i \neq 0$. Dann ist $P_i \neq 0$ und ΘP_i wegen 36.5 ein reelles Vielfaches von P_i, aber $\Theta^2 P_i = 0$. Also muss

$$\Theta P_i = 0$$

sein. Nach 36.9–10 hat P_i die Form ΘS (nämlich mit $S =$ Vielfachem von $\Theta^* P_i$).

Umgekehrt wähle man zu gegebenem Θ mit $\Theta^2 = 0$ beliebige reelle Zahlen α_1, α_2 und beliebiges $S \in \mathfrak{R}$ und setze

$$\begin{aligned} P_i &= \alpha_i \Theta S \\ \underline{\delta} &= -\tfrac{1}{8\varepsilon} \alpha_1^2 \operatorname{sp} \Theta(S \times S) \\ \gamma &= \tfrac{1}{8\varepsilon} \alpha_1 \alpha_2 \operatorname{sp} \Theta(S \times S) \\ \bar{\delta} &= \tfrac{1}{8\varepsilon} \alpha_2^2 \operatorname{sp} \Theta(S \times S). \end{aligned}$$

Dann sind 36.0–12 erfüllt, z.B. 36.1:

$$P_1 \times P_1 = \alpha_1^2 \Theta S \times \Theta S = \tfrac{1}{2} \alpha_1^2 [\Theta, [\Theta, S \times S]]$$

wegen 31.3.3 $$= -\tfrac{1}{4\varepsilon} \alpha_1^2 (\operatorname{sp} \Theta(S \times S)) \Theta = 2 \underline{\delta} \Theta$$

36e. P_1, P_2 linear abhängig, $\Theta = 0$.

Man kann die P_i beliebig (aber abhängig) vorschreiben mit $P_i \times P_i = 0$. Man bestimme dann $\gamma, \underline{\delta}, \bar{\delta}$ so, dass $\gamma P_1 + \underline{\delta} P_2 = \bar{\delta} P_1 - \gamma P_2 = 0$ ist. Dann sind 36.0–12 erfüllt.

37. Die systematische Auseinandersetzung der metasymplektischen Geometrie fängt nun an. Erst eine zusammenfassende Definition, die in sich einige frühere wiederholt.

Definition der metasymplektischen Geometrie.

$\mathfrak{R}_4$ ist die Algebra aus 7 über einer der vier Hurwitzalgebren $\mathscr{H}$.

$\mathfrak{R}_1$ ist die lineare Hülle der $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ mit $\Phi_i \in \mathfrak{R}_4$.

$\mathfrak{R}_4$ ist in sich selber adjungiert dargestellt, und in $\mathfrak{R}_1$ durch

$$\tilde{\Phi} \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = [\Phi, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle] = \langle \tilde{\Phi} \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \langle \Phi_1, \tilde{\Phi} \Phi_2 \rangle.$$

$\mathfrak{R}_4$ erzeugt in $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_4$ die metasymplektische Gruppe.

$\Phi \in \mathfrak{W}_4$ bedeutet: $\langle \Phi, \Phi \rangle = 0$.

$A \in \mathfrak{W}_1$ bedeutet: $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ für geeignete $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{R}_4$ mit $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$.

Symplekta heissen die Elemente $\neq 0$ von $\mathfrak{W}_4$, wenn mit ihnen bis auf einen reellen Faktor gerechnet wird.

Punkte heissen die Elemente $\neq 0$ von $\mathfrak{W}_1$, wenn mit ihnen bis auf einen reellen Faktor gerechnet wird.

Wo es unmissverständlich ist, werden $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_4$ die Mengen der Punkte bzw. Symplekta genannt.

Symplekta Φ_1, Φ_2 heissen

verbunden, wenn $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$,
verflochten, wenn $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$,
scharnierend, wenn $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$

ist. Punkte A, B heissen

verbunden, wenn $AB = 0$,
verflochten, wenn $AB = BA$,
scharnierend, wenn $\mathrm{sp}\, AB = 0$

ist. Der Punkt A heisst mit dem Symplekton Φ

inzident, wenn es ein Symplekton Φ^* mit $\Phi = A\Phi^*$ gibt,
halbinzident, wenn $A\Phi = 0$

ist.

Die Menge der Punkte, die mit dem Symplekton Φ inzidieren, heisst $\{\Phi\}$. Die Menge der Symplekta, die mit dem Punkt A inzidieren, heisst $\{A\}$.

38. Es ist klar, dass alle diese Begriffe gegenüber der metasymplektischen Gruppe invariant sind. Wir zeigen:

Die metasymplektische Gruppe ist transitiv auf der Menge der Symplekta.

Sei $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$. Dann nach 35.4

$$(\exp \tau \widetilde{\Phi}_2)\Phi_1 = \Phi_1 + \tau[\Phi_2, \Phi_1] + \tfrac{1}{2}\tau^2(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_2,$$
$$(\exp \tau \widetilde{\Phi}_1)\Phi_2 = \Phi_2 + \tau[\Phi_1, \Phi_2] + \tfrac{1}{2}\tau^2(\Phi_2, \Phi_1)\Phi_1.$$

Für $\tau = 1$, $(\Phi_1, \Phi_2) = -2$ ist das dasselbe Symplekton. Also lassen sich Φ_1, Φ_2 metasymplektisch ineinander überführen, wenn $(\Phi_1, \Phi_2) \neq 0$ ist. Verschiedene Transitivitätsschichten in $\mathfrak{W}_4$, wenn sie existierten, wären also orthogonal zueinander. Dasselbe gälte für ihre lineare Hüllen. Das ist aber unmöglich, wegen der Irreduzibilität der adjungierten von $\mathfrak{R}_4$ (Einfachheit von $\mathfrak{R}_4$).

39. Sei $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$. Dann und nur dann $\Phi_1 + \Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$, wenn $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$.

Denn $\langle \Phi_1 + \Phi_2, \Phi_1 + \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_1, \Phi_1 \rangle + 2\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle + \langle \Phi_2, \Phi_2 \rangle$, wo erster und dritter Summand verschwinden.

Für $\Phi \in \mathfrak{W}_4$ ist $(\Phi, \Phi) = 0$. (Siehe 35.4.)

Sei $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1 + \Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$. Dann $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. (Klar.)

Das Vorige kombiniert ergibt für $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$:

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0 \rightarrow (\Phi_1, \Phi_2) = 0.$$

40. Sei $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$,

$$\Phi_3 = [\Phi_1, \Phi_2].$$

Nach 35.4 ist

$$[\Phi_1, [\Phi_1, \Phi_2]] = (\Phi_1, \Phi_2)\Phi_1,$$

also mit Übergang zu den adjungierten

$$[\tilde{\Phi}_1, [\tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_2]] = (\Phi_1, \Phi_2)\tilde{\Phi}_1.$$

Man wende dies auf $\Phi \in \mathfrak{R}_4$ an und löse die Kommutatoren auf:

$$\tilde{\Phi}_1^2\tilde{\Phi}_2\Phi - 2\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1\Phi + \tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1^2\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)\tilde{\Phi}_1\Phi.$$

Also mittels 35.4:

$$2\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1\Phi = (\Phi_3, \Phi)\Phi_1 - (\Phi_1, \Phi)\Phi_3 - (\Phi_1, \Phi_2)\tilde{\Phi}_1\Phi,$$

wenn

$$\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{W}_4, \quad \Phi_3 = [\Phi_1, \Phi_2].$$

41. Für Symplekta gilt: verbunden $\rightarrow$ verflochten $\rightarrow$ scharnierend.

Beweis: 1. Wenn $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$ ist, verschwinden in 40 alle Terme bis auf den letzten, also auch der letzte (identisch in Φ), also $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$.

2. Sei $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$, $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$, $\Phi_3 = [\Phi_1, \Phi_2]$. Dann auch $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ nach 39. Gemäss der Definition von $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ ist

$$\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi + \tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1\Phi = (\Phi_1, \Phi)\Phi_2 + (\Phi_2, \Phi)\Phi_1.$$

Mit $\tilde{\Phi}_1\Phi$ statt Φ

$$\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1\Phi + \tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1^2\Phi = -(\Phi_3, \Phi)\Phi_1,$$

da

$$(\Phi_i, \tilde{\Phi}_j\Phi) = -(\tilde{\Phi}_j\Phi_i, \Phi).$$

Unter Verwendung von 40, 35.4 und der ersten Hälfte der Behauptung:

$$\tfrac{3}{2}(\Phi_3, \Phi)\Phi_1 - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi)\Phi_3 + (\Phi_1, \Phi)\tilde{\Phi}_2\Phi_1 = 0.$$

$$(\Phi_3, \Phi)\Phi_1 - (\Phi_1, \Phi)\Phi_3 = 0.$$

Ebenso

$$(\Phi_3, \Phi)\Phi_2 - (\Phi_2, \Phi)\Phi_3 = 0.$$

Wäre $\Phi_3 \neq 0$, so wählte man Φ so, dass $(\Phi_3, \Phi) \neq 0$ ist. Dann ergäbe sich lineare Abhängigkeit der Φ_1, Φ_2. Also $\Phi_3 = 0$, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$.

42. Sei $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$. Dann und nur dann ist $[\Phi_1, \Phi_2] \in \mathfrak{W}_4$, wenn $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$.

Beweis: Man setze in 34.2 $\Phi_1 = \Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$:

(42.1) $\langle \tilde{\Phi}\Phi_1, \Phi_1 \rangle = 0$ für $\Phi_1 \in \mathfrak{W}_4$.

Sei $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{W}_4$. Man setze in 34.2: Φ_2 statt Φ, $\tilde{\Phi}_2\Phi_1$ statt Φ_2. Nach 42.1 verschwindet die linke Seite, also

$$\langle \tilde{\Phi}_2\Phi_1, \tilde{\Phi}_2\Phi_1 \rangle + \langle \Phi_1, \tilde{\Phi}_2^2\Phi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \tilde{\Phi}_2\Phi_1, \tilde{\Phi}_2\Phi_1 \rangle = -(\Phi_1, \Phi_2)\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle.$$

Nach 41 verschwindet die rechte Seite dann und nur dann, wenn $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

43. Seien Φ_1, Φ_2, Φ_3 Symplekta, Φ_1 mit Φ_2 verbunden, Φ_2 mit Φ_3 verflochten. Dann scharnieren Φ_1 und Φ_3.

Denn

$$(\widetilde{\Phi}_1\widetilde{\Phi}_2+\widetilde{\Phi}_2\widetilde{\Phi}_1)\Phi_3=2\widetilde{\Phi}_1\widetilde{\Phi}_2\Phi_3=0,$$

also

$$\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi_3=\tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi_3)\Phi_2.$$

44. Zu zwei verbundenen Symplekta Φ_1, Φ_2 gibt es ein Symplekton Φ_3 mit $[\Phi_1, \Phi_3]=\Phi_2$.

Beweis: Man wähle $\Phi_0 \in \mathfrak{W}_4$ so, dass

$$(\Phi_1, \Phi_0)\neq 0,\ (\Phi_2, \Phi_0)=0.$$

Das kann am einfachsten geschehen, wenn man (aufgrund von 38) Φ_2 in spezieller Lage (etwa $=\underline{A}$) voraussetzt.

Man setze $[\Phi_2, \Phi_0]=\Phi_3$. Dann ist

$$[\Phi_1, \Phi_3]=\widetilde{\Phi}_1\widetilde{\Phi}_2\Phi_0=\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi_0-\tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi_0)\Phi_2-\tfrac{1}{2}(\Phi_2, \Phi_0)\Phi_1.$$

Also ist Φ_3 bis auf einen reellen Faktor das gewünschte Symplekton.

45. Zu zwei Symplekta Φ_1, Φ_2 gibt es nur dann eines, das mit beiden verbunden ist, wenn sie scharnieren. Wenn sie obendrein nicht verflochten sind, so ist $[\Phi_1, \Phi_2]$ das einzige Symplekton, das mit beiden verbunden ist.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus 43.

Sei nun $(\Phi_1, \Phi_2)=0$, $\Phi_3=[\Phi_1, \Phi_2]\neq 0$. Dann ist $\Phi_3 \in \mathfrak{W}_4$ nach 42, $\langle\Phi_3, \Phi_1\rangle=0$ nach 42.1 (mit Φ_2 statt Φ) und analog $\langle\Phi_3, \Phi_2\rangle=0$. Φ_3 ist also mit Φ_1, Φ_2 verbunden.

Sei auch das Symplekton Φ_4 mit den Symplekta Φ_1, Φ_2 verbunden. Dann gibt es nach 44 Symplekta Φ_1', Φ_2' so, dass

$$\Phi_1=[\Phi_4, \Phi_1'],\ \Phi_2=[\Phi_4, \Phi_2'],$$

also

$$(\Phi_4, \Phi_1')=(\Phi_4, \Phi_2')=0,$$

$$\langle\Phi_4, \Phi_1\rangle=\langle\Phi_4, \Phi_2\rangle=0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\Phi_3&=[\Phi_1, \Phi_2]=[\Phi_1, [\Phi_4, \Phi_2']]=[\Phi_4, [\Phi_1, \Phi_2']]\\&=[\Phi_4, [[\Phi_4, \Phi_1'], \Phi_2']]\\&=-\widetilde{\Phi}_4\widetilde{\Phi}_2'\Phi_4\Phi_1'\\&=-\tfrac{1}{2}(\Phi_2, \Phi_1')\Phi_4+\tfrac{1}{2}(\Phi_4, \Phi_1')\Phi_2+\tfrac{1}{2}(\Phi_4, \Phi_2')\Phi_1,\end{aligned}$$

nach 40

wo der zweite und dritte Summand verschwindet. Da $\Phi_3\neq 0$ ist, ist Φ_4 von Φ_3 abhängig.

46. Sei Φ_1 mit Φ_2, Φ_2 mit Φ_3, Φ_3 mit Φ_4 verbunden und Φ_1 mit Φ_4 scharnierend. Dann ist Φ_1 mit Φ_3 oder Φ_2 mit Φ_4 verflochten.

Beweis: Man darf annehmen, dass Φ_3, Φ_4 nicht dasselbe Symplekton darstellen. Da $\langle \Phi_3, \Phi_4 \rangle = 0$, ist auch $[\Phi_3, \Phi_4] = 0$, also

$$[\Phi_4, [\Phi_3, \Phi_1]] = [\Phi_3, [\Phi_4, \Phi_1]].$$

Nach 45 ist $[\Phi_3, \Phi_1]$ Vielfaches von Φ_2, also die linke Seite Vielfaches von Φ_3. Ebenso ist die rechte Seite Vielfaches von Φ_4. Also ist $[\Phi_4, [\Phi_3, \Phi_1]] = 0$, also entweder $[\Phi_4, \Phi_2] = 0$ oder $[\Phi_3, \Phi_1] = 0$.

47. Seien die Φ_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4 \bmod 5)$ zyklisch verbunden. Dann gibt es ein i so, dass

$$[\Phi_i, \Phi_{i+2}] = [\Phi_{i+2}, \Phi_{i+4}] = [\Phi_{i+4}, \Phi_{i+1}] = 0$$

ist.

Dies ergibt sich aus 46, wenn man $\Phi_5 = [\Phi_1, \Phi_4]$ hinzufügt und 46 mit zyklischen Vertauschungen anwendet.

48. Sei $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$, $\Phi \in \mathfrak{R}_4$, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$. Dann ist

$$[\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi, \Phi_1] = 0.$$

Denn dies ist

$$\begin{aligned} &= \tilde{\Phi}_1(\tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_2 \Phi - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi)\Phi_2 - \tfrac{1}{2}(\Phi_2, \Phi)\Phi_1) \\ &= (\Phi_1, \tilde{\Phi}_2 \Phi)\Phi_1 = -(\tilde{\Phi}_2 \Phi_1, \Phi)\Phi_1 = 0. \end{aligned}$$

49. Sei A ein Punkt. Dann ist $A^2 = 0$.

Beweis: $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ mit $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$.

$$A^2\Phi = \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_2 \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi)\Phi_2 - \tfrac{1}{2}(\Phi_2, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi)\Phi_1.$$

Der erste Summand verschwindet nach 48, und von den andern ist es klar, dass sie verschwinden.

50. Sei $\Phi_i \in \mathfrak{R}_4$, $\Phi_1 \in \mathfrak{W}_4$, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$. Dann ist

$$\langle \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_1 \rangle = -\tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi_3)\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \langle \langle \Phi_2, \Phi_3 \rangle \Phi_1, \Phi_1 \rangle.$$

Beweis: Aus $\langle \Phi_1, \Phi_1 \rangle = 0$ folgt mit 34.2

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\Phi}_3 \Phi_1, \Phi_1 \rangle = 0, \\ &\langle \tilde{\Phi}_2 \tilde{\Phi}_3 \Phi_1, \Phi_1 \rangle = 0, \\ &\langle \langle \tilde{\Phi}_2 \Phi_3 \rangle \Phi_1, \Phi_1 \rangle = -\tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi_3)\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Die vorletzte Zeile schreibt man auch

$$\langle \tilde{\Phi}_2 \tilde{\Phi}_1 \Phi_3, \Phi_1 \rangle = 0.$$

Also

$$\langle \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_1 \rangle = -\tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi_3)\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle.$$

51. Sei A ein Punkt und Φ ein Symplekton. Dann ist $A\Phi$ ein Symplekton (oder 0).

Bemerkung: Die $A\Phi$ sind definitionsgemäss die mit A *inzidierenden* Symplekta.

Beweis: Sei $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$, $[\Phi_1, \Phi_2]=0$, $\Phi_4=\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi_3$.

Zu beweisen ist $\langle\Phi_4, \Phi_4\rangle=0$.

$$\langle\Phi_4, \Phi_4\rangle=\langle\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi_3, \tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi_3\rangle-2\cdot\tfrac{1}{2}\langle(\Phi_1, \Phi_3)\Phi_2+(\Phi_2, \Phi_3)\Phi_1, \tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi_3\rangle$$
$$+\tfrac{1}{4}\langle(\Phi_1, \Phi_3)\Phi_2+(\Phi_2, \Phi_3)\Phi_1, (\Phi_1, \Phi_3)\Phi_2+(\Phi_2, \Phi_3)\Phi_1\rangle.$$

Der zweite Summand verschwindet; z.B.

$$\langle\Phi_2, \tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi_3\rangle=\langle\Phi_2, \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi_3\rangle+\tfrac{1}{2}\langle\Phi_2, (\Phi_2, \Phi_3)\Phi_1\rangle=0$$

nach 50.

Der dritte Summand ist

$$\tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi_3)(\Phi_2, \Phi_3)\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle;$$

den ersten Summand schreibt man auch

$$\langle\overbrace{[\Phi_2, \Phi_3]}\Phi_1, \overbrace{[\Phi_2, \Phi_3]}\Phi_1\rangle=\overbrace{[\Phi_2, \Phi_3]}\langle\overbrace{[\Phi_2, \Phi_3]}\Phi_1, \Phi_1\rangle-\langle\overbrace{[\Phi_2, \Phi_3]}^{2}\Phi_1, \Phi_1\rangle$$
$$=\tfrac{1}{2}\overbrace{[\Phi_2, \Phi_3]}^{2}\langle\Phi_1, \Phi_1\rangle-\langle\overbrace{[\Phi_2, \Phi_3]}^{2}\Phi_1, \Phi_1\rangle$$
$$=-\langle\overbrace{[\Phi_2, \Phi_3]}^{2}\Phi_1, \Phi_1\rangle.$$

Nun ist

$$[\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3]^2\Phi_1=\langle[\Phi_2, \Phi_3], [\Phi_2\Phi_3]\rangle\Phi_1+([\Phi_2, \Phi_3], [\Phi_2, \Phi_3))\Phi_1$$

und

$$\langle\tilde{\Phi}_2\Phi_3, \tilde{\Phi}_2\Phi_3\rangle=\tilde{\Phi}_2\langle\tilde{\Phi}_2\Phi_3, \Phi_3\rangle-\langle\tilde{\Phi}_2^2\Phi_3, \Phi_3\rangle$$
$$=-(\Phi_2, \Phi_3)\langle\Phi_2, \Phi_3\rangle.$$

Also wird der erste Summand

$$=(\Phi_2, \Phi_3)\langle\langle\Phi_2, \Phi_3\rangle\Phi_1, \Phi_1\rangle$$

nach 50

$$=-\tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi_3)\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle.$$

Die Summanden heben sich also weg.

52. Sind Φ_i nicht verbundene Symplekta ($i=5, 6$) und mit dem Punkt A inzident, so gibt $\langle\Phi_5, \Phi_6\rangle$ den Punkt A.

Und schärfer:

$$\langle A\Phi_3, A\Phi_4\rangle=-\tfrac{1}{2}(A\Phi_3, \Phi_4)A.$$

(Diese Formel gilt für *alle* $\Phi_3, \Phi_4 \in \mathfrak{R}_4$.)

Beweis: Sei $A=\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle$, $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$, $[\Phi_1, \Phi_2]=0$. Aus 50 (siehe auch 48) folgt, wenn $\Phi_3 \in \mathfrak{W}_4$, also $A\Phi_3 \in \mathfrak{W}_4$:

$$\langle\langle A\Phi_3, \Phi_1\rangle\Phi_4, A\Phi_3\rangle=-\tfrac{1}{2}(A\Phi_3, \Phi_4)\langle A\Phi_3, \Phi_1\rangle,$$

ferner

$$\langle A\Phi_3, \Phi_1\rangle=-\tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi_3)A.$$

Setzt man die letzte in die vorletzte Zeile ein, so erhält man die zu beweisende Formel unter der Voraussetzung $(\Phi_1, \Phi_3)\neq 0$. Von ihr kann man sich etwa durch eine Stetigkeitsbetrachtung befreien. Dazu hat man

zu zeigen: Ist $\Phi_1 \neq 0$, so kann (Φ_1, Φ) nicht für alle $\Phi \in \mathfrak{W}_4$ aus einer Umgebung von Φ_3 verschwinden.

Wäre das nun der Fall, so wäre

$$((\exp \tau\Phi^*)\Phi_3, \Phi_1) = 0 \text{ für alle } \Phi^* \in \mathfrak{R}_4,$$

also

$$(\tilde{\Phi}^*\Phi_3, \Phi_1) = 0 \text{ für alle } \Phi^* \in \mathfrak{R}_4,$$

also (wegen der Irreduzibilität der adjungierten von $\mathfrak{R}_4$) Φ_1 orthogonal auf ganz $\mathfrak{R}_4$.

Dass die Voraussetzung $\Phi_3 \in \mathfrak{W}_4$ unwesentlich ist, ist klar.

53. Zu jedem Symplekton Φ_1, das mit dem Punkte A inzidiert, gibt es ein Symplekton Φ_2, das mit A inzidiert und so dass $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ ist.

Beweis: Sei $\Phi_1 = A\Phi_3 \neq 0$. Man setze $\Phi_2 = A\Phi_4$, wobei Φ_4 so zu wählen ist, dass $(A\Phi_3, \Phi_4) \neq 0$ ist. Bis auf einen skalaren Faktor ist Φ_2 dann wie gewünscht.

54. Je zwei mit dem Punkte A inzidierende Symplekta sind verflochten.

Dies lässt sich aus dem Vorigen ableiten oder auch direkt:

Beweis: $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ mit $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$; $\Phi_3, \Phi_4 \in \mathfrak{R}_4$.

$$\tilde{\Phi}_1{}^2[\Phi_3, \Phi_4] = (\Phi_1, [\Phi_3, \Phi_4])\Phi_1.$$

Man rechne die linke Seite aus:

$$[\tilde{\Phi}_1{}^2\Phi_3, \Phi_4] + 2[\tilde{\Phi}_1\Phi_3, \tilde{\Phi}_1\Phi_4] + [\Phi_3, \tilde{\Phi}_1{}^2\Phi_4]$$
$$= (\Phi_1, \Phi_3)[\Phi_1, \Phi_4] + 2[\tilde{\Phi}_1\Phi_3, \tilde{\Phi}_1\Phi_4] - (\Phi_1, \Phi_4)[\Phi_1, \Phi_3].$$

Also

$$2[\tilde{\Phi}_1\Phi_3, \tilde{\Phi}_1\Phi_4] = (\Phi_1, [\Phi_3, \Phi_4])\Phi_1 - (\Phi_1, \Phi_3)[\Phi_1, \Phi_4] + (\Phi_1, \Phi_4)[\Phi_1, \Phi_3].$$

Man setze hier $\tilde{\Phi}_2\Phi_3$ statt Φ_3 und $\tilde{\Phi}_2\Phi_4$ statt Φ_4:

$$2[\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi_3, \tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi_4] = (\Phi_1, [\tilde{\Phi}_2\Phi_3, \tilde{\Phi}_2\Phi_4])\Phi_1.$$

Wendet man im inneren Produkt die zur vorletzten analoge Formel an, so ergibt sich:

$$[\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi_3, \tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi_4] = 0.$$

Hieraus schliesst man mit 48, dass

$$[\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_4] = 0$$

ist (sogar für alle $\Phi_3, \Phi_4 \in \mathfrak{R}_4$).

Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene. XI [1963c]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 66 (1963), 472–487
[Zbl 0123.13501; MR 0163203]

(Communicated at the meeting of March 30, 1963)

55. Sei $A \in \mathfrak{R}_1$. Dann gilt

$$[\Phi, A\Phi] = 0 \text{ für alle } \Phi \in \mathfrak{W}_4.$$

Beweis: Wir dürfen annehmen: $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$, $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$, $\Phi \in \mathfrak{W}_4$.

$$\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi = -\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}\Phi_2 = -\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}^2\Phi_2 - \widetilde{[\Phi, \Phi_1]}\tilde{\Phi}\Phi_2,$$

aber auch

$$= -\tilde{\Phi}^2\tilde{\Phi}_1\Phi_2 - \tilde{\Phi}\widetilde{[\Phi_1, \Phi]}\Phi_2.$$

Man addiere diese Ergebnisse und wende 35.4 an:

$$2\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi = -(\Phi, \Phi_2)\tilde{\Phi}_1\Phi - (\Phi, \tilde{\Phi}_1\Phi_2)\Phi + [\tilde{\Phi}, [\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_1]]\Phi_2$$
$$= (\Phi, \Phi_2)\tilde{\Phi}\Phi_1 - (\Phi, \tilde{\Phi}_1\Phi_2)\Phi + (\Phi, \Phi_1)\tilde{\Phi}\Phi_2.$$

Analog

$$2\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1\Phi = (\Phi, \Phi_1)\tilde{\Phi}\Phi_2 - (\Phi, \tilde{\Phi}_2\Phi_1)\Phi + (\Phi, \Phi_2)\tilde{\Phi}\Phi_1.$$

Also

$$\tilde{\Phi}((\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1)\Phi - (\Phi, \Phi_1)\Phi_2 - (\Phi, \Phi_2)\Phi_1) = 0,$$

w.z.b.w.

56. $(\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_4)$ ist invariant bei den Permutationen $1 \leftrightarrow 2$; $3 \leftrightarrow 4$; $1 \leftrightarrow 3$ und $2 \leftrightarrow 4$, wie man aus

$$2(\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_4) = -(\tilde{\Phi}_2\Phi_3, \tilde{\Phi}_1\Phi_4) - (\tilde{\Phi}_1\Phi_3, \tilde{\Phi}_2\Phi_4)$$
$$+ (\Phi_1, \Phi_3)(\Phi_2, \Phi_4) + (\Phi_1, \Phi_4)(\Phi_2, \Phi_3)$$

sieht.

$(\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_4)$ hängt daher nur von $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ und $\langle \Phi_3, \Phi_4 \rangle$ ab; die Abhängigkeit ist bilinear. Es gibt daher in $\mathfrak{R}_1$ ein inneres Produkt mit der Eigenschaft

$$(\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle, \langle \Phi_3, \Phi_4 \rangle) = (\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_4). \tag{56.1}$$

Dieses innere Produkt ist metasymplektisch invariant. Dasselbe gilt aber für sp AB als Funktion von $A, B \in \mathfrak{R}_1$, da sp $([\tilde{\Phi}, A]B + A[\tilde{\Phi}, B]) = 0$ ist. Wegen der Irreduzibilität der metasymplektischen Gruppe muss es also eine Konstante $\varkappa$ geben mit

$$\text{sp } AB = \varkappa(A, B). \tag{56.2}$$

Die Bestimmung dieser Konstanten skizzieren wir nur, da sie sich später nochmals durch geometrische Betrachtungen ergeben wird

Man hat bei den Gruppen der vierten Zeile von S

$$(56.3) \qquad (\mathrm{sp}\,\tilde{\Phi}^2)^2 = \tfrac{1}{5}(2d+4)\,\mathrm{sp}\,\tilde{\Phi}^4,$$

wo $d = \dim \mathfrak{R}_4$, also

$$\tfrac{1}{5}(2d+4) = \tfrac{108}{5},\ 32,\ 54,\ 100$$

ist. Man berechnet

$$\langle \Phi, \Phi\rangle^2\Phi_0 = \tilde{\Phi}^4\Phi_0 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1}\,(\Phi,\Phi)\tilde{\Phi}^2\Phi_0 + (1-2\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1})(\Phi,\Phi_0)(\Phi,\Phi)\Phi + \varepsilon_2^2\varepsilon_3^{-2}\,(\Phi,\Phi)^2\Phi_0,$$

also

$$\mathrm{sp}\,\langle \Phi, \Phi\rangle^2 = \mathrm{sp}\,\tilde{\Phi}^4 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1}\,(\Phi,\Phi)\,\mathrm{sp}\,\tilde{\Phi}^2 + (1-2\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1})(\Phi,\Phi)^2 + (\varepsilon_2^2\varepsilon_3^{-2})(\Phi,\Phi)^2\,\mathrm{sp}\,1.$$

Man drücke nun nach 35.1 und 56.2 alles durch (Φ, Φ) aus:

$$\mathrm{sp}\,\langle \Phi, \Phi\rangle^2 = (\tfrac{5}{2d+4}\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_2^2\varepsilon_3^{-1} + 1 - 2\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_2^2\varepsilon_3^{-2}d)(\Phi,\Phi).$$

Ferner

$$(\langle \Phi, \Phi\rangle\Phi, \Phi) = (\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1} - 1)(\Phi,\Phi).$$

Wir erinnern an die Konstanten

$\varepsilon_2 =$	9	12	18	30
$\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1} =$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{5}{2d+4} =$	$\frac{5}{108}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{100}$
$d =$	52	78	133	248.

Man rechnet dann aus:

$$(56.4) \qquad \varkappa = \mathrm{sp}\,\langle \Phi, \Phi\rangle^2/(\langle \Phi, \Phi\rangle\Phi, \Phi) = -\tfrac{7}{2},\ -4,\ -5,\ -7.$$

57. Für $A \in \mathfrak{W}_1$, $B \in \mathfrak{R}_1$ gilt

$$ABA = -\tfrac{1}{2}(A, B)A.$$

Beweis: Sei $\Phi \in \mathfrak{W}_4$, $\Phi \neq 0$. Nach 53 gibt es ein Φ_1 mit

$$[\Phi_1, A\Phi] = 0,$$

$$A = \langle \Phi_1, A\Phi\rangle.$$

Nach 55 ist

$$[BA\Phi, A\Phi] = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} ABA\Phi &= \langle \Phi_1, A\Phi\rangle BA\Phi \\ &= -\tfrac{1}{2}(BA\Phi, \Phi_1)A\Phi \\ &= -\tfrac{1}{2}(B, \langle A\Phi, \Phi_1\rangle)A\Phi \\ &= -\tfrac{1}{2}(B, A)A\Phi. \end{aligned}$$

Dies gilt dann auch für *alle* $\Phi \in \mathfrak{R}_4$.

58. Zur Spur von AB ($A \in \mathfrak{W}_1$, $B \in \mathfrak{R}_1$) liefert nur der Teilraum $A\mathfrak{R}_4$ einen Beitrag. Nach 57 hat AB dort den einzigen Eigenwert $-\frac{1}{2}(A, B)$.

Also ist

$$\mathrm{sp}\,(AB) = -\tfrac{1}{2}(A, B)\,\dim A\mathfrak{R}_4.$$

Die Konstanten in 56.4 sind also bis auf den Faktor $-\frac{1}{2}$ die Dimensionen von $A\mathfrak{R}_4$. Auf diesem Wege werden sie später von neuem verifiziert werden.

59. Von 37 an ist nicht wesentlich benutzt, zu welchem reellen Typ der Gruppen der vierten Zeile von S die metasymplektischen Gruppen gehören. Im nächsten Satz spielt das wohl eine Rolle. Daher muss die Darstellung der metasymplektischen Gruppe aus 7 entscheidend herangezogen werden.

Nach 54 sind die mit einem Punkte inzidenten Symplekta paarweise verflochten. Nun wird behauptet:

Die mit einem Punkte inzidenten Symplekta bilden eine maximale Menge paarweise verflochtener Symplekta.

(Es gibt auch noch andere maximale Mengen paarweise verflochtener Symplekta.)

Beweis: Φ_0 sei verflochten mit allen Symplekta, die mit A inzidieren, also

$$[\Phi_0, A\Phi^*] = 0$$

für alle $\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, also auch für alle $\Phi^* \in \mathfrak{R}_4$. Wir haben zu zeigen:

$$\Phi_0 \text{ ist von der Form } A\Phi^* \text{ mit } \Phi^* \in \mathfrak{W}_4.$$

Wegen 38 dürfen wir Φ_0 in der speziellen Form

$$\Phi_0 = \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

annehmen.

Für

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Theta+\gamma & \underline{\delta} \\ \bar{\delta} & \Theta-\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$[\Phi_0, \Phi] = \begin{pmatrix} \bar{\delta} & -2\gamma \\ 0 & -\bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die mit Φ_0 kommutierenden Φ sind also von der Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Theta & \underline{\delta} \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{59.1}$$

Um zu $\mathfrak{W}_4$ zu gehören, müssen sie (siehe 36 d–e) noch

$$\Theta^2 = 0,\ P \text{ von der Form } \Theta S,\ P \times P = 2\underline{\delta}\Theta$$

oder

$$\Theta = 0,\ P \times P = 0,\ \underline{\delta} = 0$$

erfüllen. Im zweiten Fall ist auch $\Phi + \Phi_0 \in \mathfrak{W}_4$, also $\langle \Phi, \Phi_0 \rangle = 0$.

Sei nun A speziell von der Form $\langle \Phi, \Phi_0 \rangle \neq 0$ mit einem solchen Φ, also jedenfalls $\Theta \neq 0$.
Mit

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \Theta^* & 0 \\ 0 & \Theta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\Theta^{*2} = 0)$$

ist $[\Phi_0, \Phi^*] = 0$, also

$$\langle \Phi_0, \Phi \rangle \Phi^* = \tfrac{1}{2} (\Phi, \Phi^*) \Phi_0.$$

Wegen $\Theta \neq 0$ ist das für geeignetes Φ^* von null verschieden. Also inzidiert Φ_0 mit dem Punkte A.

Allgemein: Wenn $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \neq 0$, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$, so inzidieren die Φ_i mit A.

Der Punkt A darf nun in der Form

$$A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$$

angenommen werden, wo

$$[\Phi_1, \Phi_0] = [\Phi_2, \Phi_0] = 0,$$

also

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \Theta_i & \underline{\delta}_i \\ 0 & \Theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{59.2}$$

mit

$$\Theta_i^2 = 0, \ \varrho_i P_i = \Theta_i S, \ P_i \times P_i = 2 \underline{\delta} \Theta_i. \tag{59.3}$$

Die Bedingung $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$ liefert weiter

$$[\Theta_1, \Theta_2] = 0, \ \{P_1, P_2\} = 0, \ \Theta_1 P_2 = \Theta_2 P_1. \tag{59.4}$$

Wir haben nun zu fordern:

$$[\Phi_0, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^*] = 0$$

für alle $\Phi^* \in \mathfrak{R}_4$. Für $\Phi^* = \overline{\Delta}$ erhält man an der 6. Stelle von $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^*$: $\Theta_1 P_2$. Ebenso für $\Phi^* = \overline{P}^*$: $\Theta_1 \Theta_2 P^*$.
Also

$$\Theta_1 P_2 = \Theta_2 P_1 = 0, \tag{59.5}$$

$$\Theta_1 \Theta_2 = 0, \tag{59.6}$$

also nach (32.9) Θ_1, Θ_2 linear abhängig.

Also: Sollen alle mit dem Punkte A inzidenten Symplekta mit Φ_0 verflochten sein, so muss A von der Form $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ sein mit $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$, die 59.2–6 erfüllen.

Für

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \Theta^* + \gamma & \underline{\delta}^* \\ \delta^* & \Theta^* - \gamma^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^* \\ P_2^* \end{pmatrix}$$

berechnet man dann (hauptsächlich mit Verwendung von 32.6.1–2, wobei $P \times P$ durch Θ_i und P durch P_i ersetzt wird):

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\delta}^* \Theta & \frac{1}{4\varepsilon} \operatorname{sp} \Theta \Theta^* \\ 0 & \bar{\delta}^* \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta P_2^* \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{59.7}$$

wo zur Abkürzung

$$\Theta = \underline{\delta}_1 \Theta_2 + \underline{\delta}_2 \Theta_1 - P_1 \times P_2 \tag{59.8}$$

gesetzt ist.

(59.7) gibt also bei festem Θ und variablen Θ^*, $\bar{\delta}^*$, P_2^* mit

$$P_2^* \times P_2^* = -2\bar{\delta}^* \Theta^* \tag{59.9}$$

die Gesamtheit der mit A inzidenten Symplekta. Wählt man Φ^* so, dass $\bar{\delta}^* = 0$, $P_2^* = 0$, sp $\Theta\Theta^* \neq 0$, so ergibt sich die zu beweisende Behauptung, dass Φ_0 unter ihnen vorkommt. Diese Wahl ist möglich, denn wegen $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \neq 0$ ist $\Theta \neq 0$.

60. Wir nutzen die letzten Resultate noch aus, um die Struktur der Mannigfaltigkeit $\{A\}$ der mit A inzidenten Symplekta zu bestimmen.

Als A nehmen wir das door (59.7) bestimmte $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$.

Nach 59.3 ist es klar, dass $\Theta^2 = 0$ sein muss. Nach 9 dürfen wir speziell

$$\Theta = (0, 0, A, 0)\ ^{1})$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annehmen. Mit

$$P_2^* = (X, U, \xi, \omega),$$

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \\ & * & \end{pmatrix},$$

wird nach 4.1.

$$\Theta P_2^* = (\omega A, 2A \times X, (A, U), 0).$$

Nun ist

$$2A \times X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3 & -x_1 \\ 0 & -\bar{x}_1 & \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (A, U) = \omega_1.$$

Weiter aus 59.3, 59.9, 32.4, 4.5

$$2\bar{\delta}^* \cdot \tfrac{1}{4\varepsilon} \text{ sp } \Theta\Theta^* = -\tfrac{1}{4\varepsilon} \text{ sp } \Theta(P_2^* \times P_2^*) =$$
$$\tfrac{1}{4}\{\Theta P_2^*, P_2^*\} = \tfrac{1}{4}((X, A \times X) - 2\omega(A, U)).$$

Das allgemeine Symplekton von 59.7 wird also durch die reellen Koordinaten

$$\eta_1 = 2\bar{\delta}^*, \ \eta_2 = \tfrac{1}{4\varepsilon} \text{ sp } \Theta\Theta^*, \ \eta_3 = \xi_2, \ \eta_4 = \xi_3, \ \eta_5 = \omega, \ \eta_6 = \omega_1$$

und das Element x_1 der Hurwitz-Algebra beschrieben, die der Bedingung

$$|x_1|^2 + 4\eta_1\eta_2 - 2\eta_3\eta_4 + 2\eta_5\eta_6 = 0$$

unterworfen sind.

---

[1]) Die Bezeichnungen aus 4. Man verwechsele das A nicht mit dem Punkt A der metasymplektischen Geometrie.

$\{A\}$ ist also eine Quadrik der (projektiven) Dimension

$$5,\quad 6,\quad 8,\quad 12$$

und der Signatur

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,$$

die also Ebenen als höchst-dimensionale projektive Räume enthält. Die Verbundenheit der Symplekta in $\{A\}$ ist die der Punkte auf der Quadrik. Wie in 58 angekündigt, ergibt sich

$$\dim A\mathfrak{R}_4 = 7,\quad 8,\quad 10,\quad 14.$$

61. Wir nutzen die Resultate von 59 weiter aus, um die Struktur der Mannigfaltigkeit $\{\Phi_0\}$, d.h. der Menge der mit Φ_0 inzidenten Punkte, zu ermitteln.

Durch 59.7 ist sie in eineindeutige Beziehung zu $\mathfrak{R}$ (siehe 9), der Mannigfaltigkeit der Punkte der symplektischen Geometrie $Sy(5, \mathscr{H})$ über $\mathscr{H}$, gesetzt:

$$\zeta\Theta = \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle. \tag{61.1}$$

Was entspricht bei ζ verbundenen [1]) Punkten? Die Verbundenheitsbedingung war

$$\operatorname{sp}\Theta\Theta' = 0.$$

Man berechne nach 59.7

$$(\zeta\Theta')(\zeta\Theta)\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4\varepsilon}\bar{\delta}^* \operatorname{sp}\Theta\Theta' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $\operatorname{sp}\Theta\Theta' = 0$ dann und nur dann, wenn $(\zeta\Theta')(\zeta\Theta) = 0$ ist. Gemäss der Definition in 37 erhält ζ die Verbundenheitsrelation.

Nach 38 gilt das hier für Φ_0 Bewiesene für beliebige $\Phi \in \mathfrak{W}_4$. $\{\Phi\}$ ist ein Symplekton im Sinne von $Sy(5, \mathscr{H})$.

Die Bezeichnung Symplekton ist damit gerechtfertigt.

62. Die mit Φ_0 verbundenen Φ (also $\langle\Phi, \Phi_0\rangle = 0$) haben die Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } P \times P = 0 \tag{62.1}$$

(siehe 36e), stehen also durch die Abbildung ζ mit

$$\zeta P = \Phi \bmod \Phi_0$$

in mod Φ_0 eineindeutiger Beziehung zu den Ebenen (über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$) der symplektischen Geometrie. Wie verhält sich dies ζ zu dem von 61?

Sei Θ Punkt der symplektischen Geometrie $Sy(5, \mathscr{H})$. Dann ist nach (59.7) und (61.1) $(\zeta\Theta)\Phi^* = \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi^*$ dann und nur $= \Phi$ für geeignetes Φ^*, wenn $P = \Theta P^*$ für geeignetes P^* ist; das ist aber nach 9 wegen

[1]) Wir wollen lieber "verbunden" statt "verbindbar" sagen.

$P \times P = 0$ dann und nur dann der Fall, wenn $\Theta P = 0$ ist, also der Punkt Θ auf der Ebene P (in $Sy(5,\mathscr{H})$) liegt. Also:

Der Punkt $\zeta\Theta$ inzidiert mit den Symplekta $\zeta P = \Phi + \lambda\Phi_0$ (Φ verbunden mit Φ_0) dann und nur dann, wenn Θ auf P liegt. Dies gilt wieder für *beliebiges* $\Phi_0 \in \mathfrak{W}_4$.

Zwei verschiedene verbundene Symplekta Φ_0, Φ haben also als Durchschnitt $\{\Phi_0\} \cap \{\Phi\}$ eine Ebene der symplektischen Geometrie von $\{\Phi_0\}$; alle diese Ebenen ergeben sich als solche Durchschnitte; die Symplekta $\{\Phi\}$, die eine gegebene Ebene enthalten, bilden ein Büschel (reelle projektive Gerade).

Die Mannigfaltigkeit mod Φ_0 der mit Φ_0 verbundenen Symplekta ist im Wesentlichen die Mannigfaltigkeit der Ebenen von $Sy(5, \mathscr{H})$. Sind $\zeta P_i = \Phi_i \bmod \Phi_0$ ($i = 1, 2$) mit Φ_0 verbunden, so ergibt sich mit 62.1 nach einfacher Rechnung, bei der 32.5 eine Rolle spielt:

Φ_1, Φ_2 verflochten, dann und nur dann, wenn $\{P_1, P_2\} = 0$, also wenn die Ebenen P_i sich schneiden;

Φ_1, Φ_2 verbunden, dann und nur dann, wenn $P_1 \times P_2 = 0$, also wenn die Ebenen P_i mehr als einen Schnittpunkt haben.

In $Sy(5, \mathscr{H})$ hat jede Menge paarweise längs Geraden schneidender Ebenen eine Gerade (über $\mathscr{H}$) als Durchschnitt (siehe 16.10). Also gilt auch:

Der Durchschnitt einer Menge paarweise verbundener Symplekta ist eine projektive Gerade über $\mathscr{H}$.

Jedenfalls gibt es also einen Punkt A, der mit einer gegebenen Menge paarweise verbundener Symplekta inzidiert. Nach 60 liegen auf der Quadrik $\{A\}$ reelle projektive Ebenen als maximale Mengen paarweise verbundener Symplekta. Also:

Maximale Mengen paarweise verbundener Symplekta sind reelle projektive Ebenen.

63. Für ein Paar verschiedener verbundener Punkte A, A' gilt Analoges. Es wird vorläufig unter der Voraussetzung bewiesen, dass es ein Symplekton gibt, das mit beiden inzidiert. (Siehe 64.) Wir dürfen nach 38 annehmen, Φ_0 sei ein solches.

$$A = \zeta\Theta, \quad A' = \zeta\Theta',$$

wobei Θ, Θ' unabhängig sind wegen der Unabhängigkeit von A, A', und wobei Θ, Θ' verbunden sind wegen der Verbundenheit von A, A' (siehe 62). Der Durchschnitt $\{A\} \cap \{A'\}$ soll bestimmt werden. Nach 59.7 und wegen der Unabhängigkeit von Θ, Θ' muss ein Element von $\{A\} \cap \{A'\}$ die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{\delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, wo nach 36e

$$P \times P = 0$$

ist, sowie

$$\Theta P = \Theta' P = 0.$$

In $Sy(5, \mathscr{H})$ muss also P mit der Geraden $\Theta\Theta'$ inzidieren. Nach 12 bilden diese Ebenen ein Büschel. Unter Berücksichtigung des Parameters $\underline{\delta}$ erhält man für

$\{A\} \cap \{A'\}$ eine reelle projektive Ebene auf den Quadriken von $\{A\}$ und $\{A'\}$.

Man erhält alle $\{A''\}$, die diese Ebene enthalten, wenn man Θ'' mit $\zeta\Theta'' = A''$ auf der Geraden $\Theta\Theta'$ variieren lässt. Die $\{A''\}$, die eine solche projektive Ebene enthalten, bilden also eine projektive Gerade über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$.

Schliesslich ist jede reelle projektive Ebene der Quadrik $\{A\}$ als Durchschnitt $\{A\} \cap \{A'\}$ erhältlich. Denn sind Φ_0, Φ_1, Φ_2 verbundene nichtkollineare Elemente von $\{A\}$, $\Phi_i = \zeta P_i \bmod \Phi_0$ $(i = 1, 2)$, $A = \zeta\Theta$, so ist (nach 62) $\Theta P_i = 0$, $P_1 \times P_2 = 0$; ferner mit einem Θ' auf der Schnittgeraden der P_i und mit $A' = \zeta\Theta'$ in der Tat $\Phi_i \in \{A\} \cap \{A'\}$.

64. Die vorläufige Voraussetzung in 63 wird noch eliminiert:

Seien A, B verbundene Punkte. Dann gibt es ein Symplekton, das mit beiden inzidiert.

Beweis: $AB = 0$, also $(AB\Phi_1, \Phi_2) = 0$, $(B\Phi_1, A\Phi_2) = 0$. Also scharnieren die Symplekta von $\{A\}$ mit denen von $\{B\}$.

Seien $\Phi, \Phi_1 \in \{A\}$, $\Phi_2 \in \{B\}$. Dann $(\Phi, \Phi_2) = (\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Ferner wegen $AB = 0$ und $\Phi_2 = B\Phi_3$ mit gewissem Φ_3, auch $A\Phi_2 = 0$. Also wegen 52: $0 = A\Phi_2 = \langle \Phi, \Phi_1 \rangle \Phi_2 = \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\Phi_2$. Also ist $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$ mit allen Φ aus $\{A\}$ verflochten. Also nach 59: $[\Phi_1, \Phi_2] \in \{A\}$. Analog $[\Phi_1, \Phi_2] \in \{B\}$. Ist $[\Phi_1, \Phi_2]$ für alle $\Phi_1 \in \{A\}$, $\Phi_2 \in \{B\}$, so geben A und B nach 59 denselben Punkt. Dann ist die Behauptung aber evident.

Es hat sich sogar ergeben:

Mit den verbundenen Punkten A, B inzidieren alle $[\Phi_1, \Phi_2]$ mit $\Phi_1 \in \{A\}$, $\{\Phi_2\} \in B$; wenn A, B verschiedene Punkte sind, so ist das schon die Gesamtheit der mit ihnen inzidierenden Symplekta.

Das Letzte ergibt sich mittels 59.7 unter Berücksichtigung der in 63 erzielten Charakterisierung dieser Symplekta.

65. Es folgt hier eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse. Dabei wird jedes Resultat dualisiert; Beweise folgen später.

65.1. Verbunden $\rightarrow$ verflochten $\rightarrow$ scharnierend
für Symplekta (siehe 37), für Punkte (siehe 66).

65.2. $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ besteht dann und nur dann aus mindestens einem Punkt, wenn Φ_1, Φ_2 verflochten sind. (Im Allgemeinen: $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$; siehe auch 62.)

65.2′. $\{A\} \cap \{B\}$ besteht dann und nur dann aus mindestens einem Symplekton, wenn A, B verflochten sind. (Im Allgemeinen: $AB\Phi^* = BA\Phi^*$; siehe auch 63–64.)

65.3. $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ besteht dann und nur dann aus höchstens einem Punkt, wenn Φ_1, Φ_2 nicht verbunden sind (siehe 62).

65.3′. $\{A\} \cap \{B\}$ besteht dann und nur dann aus höchstens einem Symplekton, wenn A, B nicht verbunden sind (siehe 63–64).

65.4. Zu Symplekta Φ_1, Φ_2 gibt es dann und nur dann mindestens ein mit beiden verbundenes Symplekton, wenn Φ_1, Φ_2 scharnieren. (Im Allgemeinen $[\Phi_1, \Phi_2]$ (siehe 45); verschwindet das, so betrachte man die Geometrie in der Quadrik $\{\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle\}$.)

65.4′. Zu Punkten A, B gibt es dann und nur dann mindestens einen Punkt, der mit beiden verbunden ist, wenn A, B scharnieren. (Siehe 72.)

65.5. Zu Symplekta Φ_1, Φ_2 gibt es dann und nur dann höchstens ein Symplekton, das mit beiden verbunden ist, wenn Φ_1, Φ_2 nicht verflochten sind. (Siehe 45.)

65.5′. Zu Punkten A, B gibt es dann und nur dann höchstens einen Punkt, der mit beiden verbunden ist, wenn A, B nicht verflochten sind. (Siehe 72.)

65.6. Wenn die Symplekta Φ_1, Φ_2 verbunden und Φ_2, Φ_3 verflochten sind, so scharnieren Φ_1, Φ_3. (Siehe 43.)

65.6′. Wenn die Punkte A, B verbunden und B, C verflochten sind, so scharnieren A, C. (Siehe 72.)

65.7. In $\{\Phi_1\}, \{\Phi_2\}$ gibt es dann und nur dann bzw. Punkte A_1, A_2, die verbunden sind, wenn Φ_1, Φ_2 scharnieren (siehe 72).

65.7′. In $\{A_1\}, \{A_2\}$ gibt es dann und nur dann bzw. Symplekta Φ_1, Φ_2, die verbunden sind, wenn A_1, A_2 scharnieren. (Siehe 72.)

65.8. Für jeden Punkt A ist $\{A\}$ eine maximale Menge verflochtener Symplekta. (Siehe 59.)

65.8′. Für jedes Symplekton Φ ist $\{\Phi\}$ eine maximale Menge verflochtener Punkte. (Siehe 72.)

65.9. Die Menge $\{A\}$ hat die Struktur einer Quadrik der Dimension 5, 6, 8, 12 und der Signatur 1, 2, 4, 8. (Siehe 60.)

65.9′. Die Menge $\{\Phi\}$ hat die Struktur einer 5-dimensionalen symplektischen Geometrie über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$. (Siehe 61.)

65.10. Für verschiedene verbundene A, B hat $\{A\} \cap \{B\}$ die Struktur einer reellen projektiven Ebene; alle Ebenen der Quadrik von $\{A\}$ sind so erhältlich; die $\{A\}$, die solch eine Ebene enthalten, bilden eine projektive Gerade über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$. (Siehe 63.).

65.10′. Für verschiedene verbundene Φ_1, Φ_2 hat $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ die Struktur einer projektiven Ebene über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$; alle Ebenen der symplektischen Geometrie von $\{\Phi_1\}$ sind so erhältlich; die $\{\Phi\}$, die solch eine Ebene enthalten, bilden eine reelle projektive Gerade. (Siehe 62.)

65.11. Die Mannigfaltigkeit mod Φ_0 der mit Φ_0 verbundenen Symplekta (also die der reellen projektiven Geraden von Symplekta durch Φ_0) hat die Struktur der Mannigfaltigkeit der Ebenen einer 5-dimensionalen symplektischen Geometrie über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$; „verflochten" entspricht „schneiden", „verbunden" entspricht „schneiden in einer Geraden". (Siehe 62.)

65.11′. Die Mannigfaltigkeit mod A_0 der mit A_0 verbundenen Punkte (d.h. die der projektiven Geraden über $\mathscr{H}$ durch A) hat die Struktur der Mannigfaltigkeit der Ebenen der reellen Quadrik $\{A_0\}$; „verflochten" entspricht „schneiden", „verbunden" entspricht „schneiden in einer Geraden". (Siehe 72.)

65.12. Eine maximale Menge paarweise verbundener Symplekta ist eine reelle projektive Ebene auf der Quadrik $\{A\}$. Ihr Durchschnitt ist eine projektive Gerade über $\mathscr{H}$. (Siehe 62.)

65.12′. Eine maximale Menge paarweise verbundener Punkte ist eine Ebene von $Sy(5, \mathscr{H})$. Ihr Durchschnitt ist eine reelle projektive Gerade von Symplekta. (Siehe 72.)

66. Beweis von 65.1 für Punkte:

Sei $AB=0$, also $(AB\Phi_1, \Phi_2)=0$, $(\Phi_1, BA\Phi_2)=0$ für alle Φ_1, Φ_2, also $BA=0$.

Sei $AB=BA$. Dann nach 57: $(A, B)A=-2ABA=-2A^2B=0$ nach 49.

67. Beweis von 65.6′: Sei $AB=0$, $BC=CB$. Sei $\Phi_1 \in \{A\} \cap \{B\}$ (siehe 65.2′) und Φ_2 so, dass $A=\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$. Es gibt Φ_1^*, Φ_2^* mit $B\Phi_1^*=\Phi_1$, $A\Phi_2^*=\Phi_2$. Nach 56.1

$(C, A)=(C\Phi_1, \Phi_2)=(CB\Phi_1^*, A\Phi_2^*)=(BC\Phi_1^*, A\Phi_2^*)=(C\Phi_1^*, BA\Phi_2^*)=0$.

68. Inzident $\rightarrow$ halbinzident.

Denn für inzidente A, Φ gibt es ein Φ^* mit $A\Phi^*=\Phi$, also $A\Phi=A^2\Phi^*=0$ wegen 49.

69. Für Punkte A und Symplekta Φ sind folgende Aussagen äquivalent:

69.1. A und Φ sind halbinzident.

69.2. $[A, \widetilde{\Phi}]=0$.

69.3. Φ scharniert mit jeden $\Phi_1 \in \{A\}$.

69.3′. A scharniert mit jedem $A_1 \in \{\Phi\}$.

69.4. In $\{A\}$ gibt es ein mit Φ verbundenes Φ_1.

69.4′. In $\{\Phi\}$ gibt es ein mit A verbundenes A_1.

69.5. In $\{A\}$ gibt es mehrere mit Φ verflochtene Symplekta.

69.5′. In $\{\Phi\}$ gibt es mehrere mit A verflochtene Punkte.

(Beweise in 72.)

70. A, Φ seien halbinzident, aber nicht inzident. Dann gilt:

70.1. Die mit Φ verbundenen Symplekta in $\{A\}$ bilden eine reelle projektive Gerade auf $\{A\}$, die besteht aus allen $[\Phi, \Phi_1] \neq 0$ mit $\Phi_1 \in \{A\}$. (Siehe 72.)

70.1′. Die mit A verbundenen Punkte in $\{\Phi\}$ bilden eine Gerade (über $\mathscr{H}$) der symplektischen Geometrie von Φ. (Siehe 72.)

70.2. $\Phi_1 \in \{A\}$ ist dann und nur dann mit Φ verflochten, wenn Φ_1 mit allen Symplekta aus $\{A\}$ verbunden ist, mit denen Φ verbunden ist. (Siehe 72.)

70.2′. $A_1 \in \{\Phi\}$ ist dann und nur dann mit A verflochten, wenn A_1 verbunden ist mit allen Punkten aus $\{\Phi\}$, mit denen A verbunden ist. (Siehe 72.)

71.

71.1. Sei Φ_0 mit Φ_1 und Φ_2 verbunden, und seien Φ_1, Φ_2 verflochten. Dann ist $\{\Phi_0\} \cap \{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ nichtleer. (Siehe 62 Ende.)

71.1′. Sei A_0 mit A_1 und A_2 verbunden, und seien A_1, A_2 verflochten. Dann ist $\{A_0\} \cap \{A_1\} \cap \{A_2\}$ nichtleer. (Siehe 72.)

71.2. Sei Φ_0 mit den Φ_1, Φ_2 verflochten, aber nicht verbunden, und seien Φ_1, Φ_2 verbunden. Dann stimmen die Punkte $\langle \Phi_0, \Phi_1 \rangle$, $\langle \Phi_0, \Phi_2 \rangle$ überein. (Siehe 72.)

71.2′. Sei A_0 mit den A_1, A_2 verflochten, aber nicht verbunden, und seien A_1, A_2 verbunden. Dann liegen sie in einem Symplekton. (Siehe 72.)

71.3. Seien Φ_1 mit Φ_2, Φ_2 mit Φ_3, Φ_3 mit Φ_4 verbunden und Φ_1 mit Φ_4 verflochten. Dann gibt es einen Punkt, mit dem drei ihrer inzidieren und der vierte (Φ_3 oder Φ_4) halbinzidiert.

71.3′. Seien A_1 mit A_2, A_2 mit A_3, A_3 mit A_4 verbunden und A_1 mit A_4 verflochten. Dann gibt es ein Symplekton, mit dem drei ihrer inzidieren und der vierte (A_3 oder A_4) halbinzidiert.

71.4. Seien Φ_i ($i = 1, \ldots, 5 \bmod 5$) zyklisch verbunden. Dann gibt es einen Punkt, mit dem vier ihrer inzidieren und der fünfte halbinzidiert.

71.4′. Seien A_i ($i = 1, \ldots, 5 \bmod 5$) zyklisch verbunden. Dann gilt: Entweder liegen sie in einem Symplekton, oder gewisse vier unter ihnen liegen in einer Ebene (über $\mathscr{H}$).

72. Beweise:

Zu 71.2: Man nehme Φ_0 spezial $= \underline{\Delta}$. Die mit Φ_0 verflochtenen, nicht verbundenen Φ_i müssen die Form 59.1

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \Theta_i & \underline{\delta}_i \\ 0 & \Theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben. Da $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$, hat man wie in 59: $[\Phi_0, \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^*] = 0$, also (59.6) $\Theta_1 \Theta_2 = 0$, Θ_1, Θ_2 abhängig. $A = \zeta \Theta_i$ (siehe 61) inzidiert mit Φ_0 und Φ_i (siehe 62). Also sind die Punkte $\langle \Phi_0, \Phi_1 \rangle$ und $\langle \Phi_0, \Phi_2 \rangle$ mit A identisch.

Zu 69.1 $\leftrightarrow$ 69.3: $A\Phi = 0 \leftrightarrow (A\Phi, \Phi^*) = 0 \leftrightarrow (\Phi, A\Phi^*) = 0$.

Zu 69.1 $\rightarrow$ 69.3′: $A\Phi = 0 \rightarrow (A\Phi, \Phi^*) = 0 \rightarrow (A, \langle \Phi, \Phi^* \rangle) = 0$.

Zu 69.1 $\rightarrow$ 69.4: Seien $\Phi_i \in \{A\}$. Dann ist $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ abhängig von A, also $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi = 0$, also (nach 69.3)

$$(*) \qquad \widetilde{\Phi}_1 \widetilde{\Phi}_2 \Phi = 0,$$

also (nach 69.3 und 42) $\widetilde{\Phi}_2 \Phi \in \mathfrak{W}_4$, also entweder $\widetilde{\Phi}_2 \Phi = 0$ für alle $\Phi_2 \in \{A\}$ und nach 65.8 $\Phi \in \{A\}$; oder für gewisses $\Phi_2 \in \{A\}$ gilt $\Phi_3 = \widetilde{\Phi}_2 \Phi \neq 0$, aber dann ist Φ_3 nach (*) mit allen $\Phi_1 \in \{A\}$ verflochten, also (nach 65.8) $\Phi_3 \in \{A\}$, und andererseits $\Phi_3 = [\Phi_2, \Phi]$ nach 45 mit Φ verbunden.

Zu 70.1. Sei $A\Phi = 0$ und $\mathfrak{g}$ die Menge der mit Φ verbundenen Symplekta in $\{A\}$. Sei $\mathfrak{g}'$ die Menge der Symplekta $\tilde{\Phi}\Phi_1$ mit $\Phi_1 \in \{A\}$.

Im Beweis zu 69.1 $\rightarrow$ 69.4 ergab sich: $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$.

Weiter ist, wenn $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{g}$ nicht verbunden sind, $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = A$, also nach 71.1 $\Phi \in \{A\}$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass Φ, A nicht inzidieren. Also sind je zwei Symplekta aus $\mathfrak{g}$ verbunden.

Also spannen Φ und $\mathfrak{g}$ eine Menge verbundener Symplekta auf, die nach 65.12 höchstens zweidimensional ist. Da $\Phi \notin \{A\}$, also $\notin \mathfrak{g}$, ist $\dim \mathfrak{g} \leqslant 1$.

Sei nun (nach 69.4) $\Phi_1 \in \{A\}$ verbunden mit Φ, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$ und $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$. Da $\Phi \notin \{A\}$, ist (wegen 65.8)

$$\tilde{\Phi}\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^* \text{ nicht identisch null in } \Phi^*.$$

Nun ist
$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^* &= \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi^* - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\tilde{\Phi}\Phi_2 \\ &= \langle \Phi, \Phi_1 \rangle \tilde{\Phi}_2\Phi^* + \tfrac{1}{2}(\Phi, \tilde{\Phi}_2\Phi^*)\Phi_1 - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\tilde{\Phi}\Phi_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\tilde{\Phi}\Phi_2, \Phi^*)\Phi_1 - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\Phi\Phi_2\end{aligned}$$

nicht identisch null. Also sind Φ_1 und $\tilde{\Phi}\Phi_2$ unabhängig. $\tilde{\Phi}\Phi_2 \in \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$. Also $\dim \mathfrak{g} = 1$. Nun kann man zu jedem $\Phi_1 \in \mathfrak{g}$ ein $\Phi_2 \in \{A\}$ so wählen, dass $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ ist, und dann ist $\tilde{\Phi}\Phi_2$ von Φ_1 unabhängig. Also ist auch $\dim \mathfrak{g}' = 1$ und daher $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Zu 69.4 $\rightarrow$ 69.2: Sei wieder $\Phi_1 \in A$ verbunden mit Φ, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$ und $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$. Dann ist $A\tilde{\Phi}\Phi^* =$

$$\begin{aligned}\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \tilde{\Phi}\Phi^* &= \tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}\Phi^* - \tfrac{1}{2}(\Phi_2, \tilde{\Phi}\Phi^*)\Phi_1 \\ &= \tilde{\Phi}_2\langle \Phi_1, \Phi \rangle \Phi^* + \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\tilde{\Phi}_2\Phi - \tfrac{1}{2}(\Phi_2, \tilde{\Phi}\Phi^*)\Phi_1 \\ &= \tfrac{1}{2}(\tilde{\Phi}\Phi_2, \Phi^*)\Phi_1 - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\tilde{\Phi}\Phi_2\end{aligned}$$

gleich dem Ausdruck, der im Beweis von 70.1 (wesentlich unter der Voraussetzung 69.4) für $\tilde{\Phi}A\Phi^*$ berechnet wurde. Also $\tilde{\Phi}A = A\tilde{\Phi}$.

Zu 69.2 $\rightarrow$ 69.1: Sei $\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, $(\Phi, \Phi^*) = 0$. Dann ist (nach 42) $\tilde{\Phi}\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, also $A\tilde{\Phi}\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, also (nach Voraussetzung 69.2) $\tilde{\Phi}A\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, also (nach 42) $(\Phi, A\Phi^*) = 0$. Also $(A\Phi, \Phi^*) = 0$ für alle $\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$ mit $(\Phi, \Phi^*) = 0$. Also $A\Phi$ abhängig von Φ und wegen $A^2 = 0$ sogar $A\Phi = 0$.

Zu 69.3′ $\rightarrow$ 69.1: Sei $A\Phi \neq 0$. Nach 69.4 $\rightarrow$ 69.1 ist $B = \langle \Phi, A\Phi \rangle \neq 0$. Nach 65.8 gibt es ein Symplekton Φ_1 mit $\Phi = B\Phi_1 = \langle \Phi, A\Phi \rangle \Phi_1 = \tfrac{1}{2}(A\Phi, \Phi_1)\Phi$. Also $(A, \langle \Phi, \Phi_1 \rangle) = (A\Phi, \Phi_1) \neq 0$. A scharniert nicht mit $\langle \Phi, \Phi_1 \rangle$.

Zu 69.1 $\rightarrow$ 69.5 und 70.2: Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ wie im Beweis von 70.1. Φ_2 elementweise verbunden mit $\mathfrak{g} \leftrightarrow \langle \Phi_2, \tilde{\Phi}\Phi_1 \rangle = 0$ für alle $\Phi_1 \in \{A\} \leftrightarrow \langle \tilde{\Phi}\Phi_2, \Phi_1 \rangle = 0$ für alle $\Phi_1 \in \{A\} \leftrightarrow \tilde{\Phi}\Phi_2 = 0$.

Zu 69.1 $\rightarrow$ 69.4′. Seien $\Phi_i \in \{A\}$, Φ_1 verbunden mit Φ, Φ_2 verflochten, nicht verbunden mit Φ (siehe 69.4, 70.2). $A_1 = \langle \Phi, \Phi_2 \rangle$ ist ein Punkt. Φ_1 ist mit Φ und Φ_2 verbunden, also nach 71.1 $\Phi_1 \in \{A\}$. Daher hat $\{A\} \cap \{A_1\}$ mindestens die zwei Elemente Φ_1, Φ_2, also eine Gerade der

Quadrik $\{A\}$. Jedes Element Φ^* der Quadrik ist mit einem gewissen Element dieser Geraden, also mit einem Element von $\{A_1\}$ verbindbar. Also (nach 69.4) $A_1\Phi^*$ für alle $\Phi^* \in \{A\}$. Also $A_1 A\Phi^{**}$ für alle $\Phi^{**} \in \mathfrak{W}_4$. Also $A_1 A = 0$.

Zu 69.4′ → 69.4: Sei A_1 mit A verbunden und mit Φ inzident. Nach 63–64 enthält $\{A\} \cap \{A_1\}$ eine Ebene der Quadrik $\{A_1\}$, auf der auch Φ liegt. Φ ist mit einem gewissen Φ_1 dieser Ebene verbunden, Φ_1 inzidiert auch mit $\{A\}$. Da gibt es also ein mit Φ verbundenes Φ_1.

Zu 69.1 → 69.5′: Man wähle $\Phi_i \in \{A\}$ wie im Beweis von 69.1 → 69.4′, ausserdem $\Phi_3 \in \{A\}$ verflochten, nicht verbunden mit Φ und nicht verbunden mit Φ_2. $A_2 = \langle \Phi, \Phi_3 \rangle$. $\Phi_1, \Phi_2 \in \{A\} \cap \{A_1\}$, $\Phi_1, \Phi_3 \in \{A\} \cap \{A_2\}$. Nach 65.3′ ist A mit A_1 und A_2 verbunden; nach 63–64 sind die Symplekta aus $\{A\} \cap \{A_1\}$ miteinander verbunden, ebenso die von $\{A\} \cap \{A_2\}$. Aber Φ_2, Φ_3 sind nicht verbunden, also ist $\{A\} \cap \{A_1\} \neq \{A\} \cap \{A_2\}$, also $\{A_1\} \neq \{A_2\}$.

Zu 69.5′ → 69.5: Seien A_1, A_2 mit A verflochten und $A_i \in \{\Phi\}$. Nach 63–64 gibt es Symplekta $\Phi_i \in \{A_i\} \cap \{A\}$, die also mit Φ verflochten und $\in \{A\}$ sind.

Zu 69.5 → 69.1: Seien $\Phi_i \in \{A\}$ mit Φ verflochten. Zu Φ_i gibt es Φ_i' mit $[\Phi_i, \Phi_i'] = 0$, $\langle \Phi_i, \Phi_i' \rangle = A$. Nun ist $A\Phi = \langle \Phi_i, \Phi_i' \rangle \Phi = -\frac{1}{2}(\Phi, \Phi_i')\Phi_i$, also $A\Phi = 0$ für unabhängige Φ_i.

Zu 71.1′: Nach 63–64 gibt es ein $\Phi \in \{A_1\} \cap \{A_2\}$. In $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ liegt nach 62 eine Ebene $\mathfrak{e}_i$ der Quadrik $\{A_i\}$. Φ ist auf der Quadrik $\{A_i\}$ mit einer Geraden $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e}_i$ punktweise verbunden. Nach 70.1 ist entweder Φ mit A_0 inzident oder $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$. Wegen $\mathfrak{g}_i \subset \{A_0\} \cap \{A_i\}$ ist dann $\{A_0\} \cap \{A_1\} \cap \{A_2\}$ nichtleer.

Zu 71.2′: Nach 65.3′, 65.4′ liegt in $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ genau ein Symplekton Φ_i. Nach 62 enthält $\{A_1\} \cap \{A_2\}$ eine reelle Ebene $\mathfrak{e}$ von Symplekta. Auf der Quadrik $\{A_i\}$ ist Φ_i punktweise verbunden mit einer Geraden $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e}$. Diese Geraden haben ein Φ gemein, das mit den Φ_i verbunden ist. $\Phi_i \in \{A_0\}$. Wenn $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \neq 0$, so $\Phi \in \{A_0\}$ nach 71.1. $\Phi \in \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e} \subset \{A_1\} \cap \{A_2\}$ Also $\{A_0\} \cap \{A_1\} \cap \{A_2\}$ nichtleer. Ist dagegen $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$, so ist Φ_1 verbunden mit Φ_2 und elementweise mit $\mathfrak{g}_2$. Also nach 70.1 entweder $\Phi_1 \in \{A_2\}$ oder $\Phi_2 \in \mathfrak{g}_2$. In beiden Fällen kommt man zum selben Ergebnis wie vorhin.

Zu 65.7′: Sei $(A_1, A_2) = 0$. Dann $(A_2\Phi_1^*, \Phi_2^*) = 0$ für alle $\Phi_i^* \in \{A_1\}$. Ist $A_2\Phi_1^* = 0$ für alle $\Phi_1^* \in \{A_1\}$, so ist $A_1 A_2 = 0$, also ist nach 63–64 die Behauptung evident. Sei $\Phi_2 = A_2\Phi_1^* \neq 0$. Dann ist nach 69.3 → 69.4 Φ_2 verbunden mit einem Symplekton Φ_1 aus $\{A_1\}$. Seien umgekehrt $\Phi_i \in \{A_i\}$ verbunden. Nach 69.4 → 69.1 ist dann $A_2\Phi_1 = 0$, also $(A_2\Phi_1, \Phi_1^*) = 0$ für alle $\Phi_1^* \in \{A_1\}$, also $(A_1, A_2) = 0$.

Zu 65.4′ und 65.5′: Sei $(A, B) = 0$. Nach 65.7′ gibt es verbundene $\Phi_1 \in A$, $\Phi_2 \in B$. Nach 70.1 ist Φ_1 mit einer Geraden $\mathfrak{g}_2$ der Quadrik $\{B\}$ verbunden, ebenso Φ_2 mit einer Geraden $\mathfrak{g}_1$ der Quadrik $\{A\}$. Sind $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ elementweise verbunden, so haben sie nach 65.12 ein Φ gemein. Dann

liegen A, B im Symplekton Φ, wo es sogar unendlich viele mit A und B verbundene C gibt. Es ist dies ein Fall verflochtener A und B.

Sind $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ nicht elementsweise verbunden, so gibt es nichtverbundene $\Phi_i' \in \mathfrak{g}_i$, die man von den Φ_i verschieden annehmen darf. Φ_1', Φ_2' scharnieren nach 43. Ist $[\Phi_1', \Phi_2'] \neq 0$, so ist das nach 42 ein Symplekton, das mit A und B inzidiert. Nach 65.2′ sind dann A, B wieder verflochten; es gibt dann unendlich viele mit ihnen verbundene C.

Ist dagegen $[\Phi_1', \Phi_2'] = 0$, so ist $C = \langle \Phi_1', \Phi_2' \rangle$ ein Punkt, da die Φ_i' nicht verbunden sind. Φ_1 ist mit beiden verbunden, also nach 71.1 in C; ferner ist Φ_1' in C. Nach 65.3′ sind A und C verbunden. Evenso zeigt man, dass B und C verbunden sind.

Seien nun die scharnierenden A, B nicht verflochten, also (65.2′) $\{A\} \cap \{B\}$ leer. Seien C und C' mit A und B verbunden. Es gibt Ebenen von Symplekta $\mathfrak{e}_1 \subset \{A\} \cap \{C\}$, $\mathfrak{e}_2 \subset \{B\} \cap \{C\}$, $\mathfrak{e}_1' \subset \{A\} \cap \{C'\}$, $\mathfrak{e}_2' \subset \subset \{B\} \cap \{C'\}$. Sei $\Phi_1 \in \mathfrak{e}_1$, $\Phi_1' \in \mathfrak{e}_1'$. Es gibt ein mit Φ_1 verbundenes $\Phi_2 \in \mathfrak{e}_2$. Nach 70.1 ist $[\Phi_2, \Phi_1'] \in \{A\} \cap \{B\}$, also Φ_2, Φ_1' verflochten. Ferner $\Phi_1. \Phi_1'$ verflochten, Φ_1, Φ_2 verbunden. Wegen $\{A\} \cap \{B\}$ leer und nach 71.2 ist Φ_1' mit Φ_1 oder mit Φ_2 verbunden. Also $\Phi_1' \in \mathfrak{e}_1$. Also $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1'$. Ebenso $\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2'$. Also $C = C'$.

Sei umgekehrt nur vorausgesetzt, dass C mit A und B verbunden ist. Dann gibt es ein $\Phi \in \{A\}$ mit $B\Phi = 0$. Für gewisses Φ_1 ist $A = \langle \Phi, \Phi_1 \rangle$. $(A, B) = (B\Phi, \Phi_1) = 0$. Wenn A, B obendrein verflochten sind, so ist weiter klar, dass es mehrere C gibt, die mit A und B verbunden sind.

Zu 70.1′: Sei $B \neq A$ mit A verbunden, $\mathfrak{e} = \{A\} \cap \{B\}$, und $\mathfrak{g}$ die Menge der mit Φ verbundenen Symplekta $\in \{A\}$. Dann ist $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{e}$.

Da Φ und A nicht inzidieren, erzeugen $\mathfrak{g}$ und Φ eine Ebene $\mathfrak{e}'$ auf der Quadrik $\{B\}$. Umgekehrt gilt für alle B mit $\mathfrak{e}' \subset \{B\}$, dass B in Φ liegt und mit A verbunden ist. Nach 65.10′ folgt hieraus die Behauptung.

Zu 70.2′: Sei $B \in \{\Phi\}$ mit A verbunden; sei $C \in \{\Phi\}$, also mit B verflochten, ausserdem C mit A verflochten. Nach 71.2′ gibt es ein $\Phi' \in \{A\} \cap \cap \{B\} \cap \{C\}$. Da Φ, A nicht inzidieren, sind die Symplekta Φ, Φ' verschieden. $\{B\} \cap \{C\}$ besteht aus mehr als einem Symplekton, also sind B, C nach 65.3 verbunden.

Sei nun $C \in \{\Phi\}$ nicht mit A verflochten. Da $A\Phi = 0$, ist $(A, C) = 0$, also gibt es nach 65.5′ genau einen mit A und C verbundenen Punkt, und der liegt in Φ. Es gibt aber in Φ mehr Punkte, die mit A verbunden sind. Also, wenn $C \in \{\Phi\}$ nicht mit A verflochten ist, ist C nicht mit allen Punkten in $\{\Phi\}$ verbunden, die mit A verbunden sind.

Zu 65.7: Sind Φ_1, Φ_2 verflochten, so gibt es (65.2) einen Punkt A, der mit beiden inzidiert; man setze $A_1 = A_2 = A$. Ist aber $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$, $\Phi_3 = [\Phi_1, \Phi_2] \neq 0$, so nehme man $A_1 \in \{\Phi_1\} \cap \{\Phi_3\}$ (siehe 65.2). Da Φ_2 mit $\Phi_3 \in \{A_1\}$ verbunden ist, gibt es nach 69.4 $\rightarrow$ 69.4′ ein $A_2 \in \{\Phi_2\}$, das mit A verbunden ist. Seien umgekehrt $A_i \in \{\Phi_i\}$ und A_1, A_2 verbunden. Nach 69.4′ $\rightarrow$ 69.3 scharniert Φ_1 mit Φ_2.

Zu 65.6′: Sei $\Phi \in \{B\} \cap \{C\}$ (siehe 65.2). Φ ist in der Quadrik $\{B\}$ mit

einem Element von $\{A\} \cap \{B\}$ verbunden, also wegen 69.4 $\rightarrow$ 69.1 $A\Phi = 0$. Mit $C = \langle \Phi, \Phi_1 \rangle$ erhält man $(A, C) = (A\Phi, \Phi_1) = 0$.

Zu 65.8′: Sei A verflochten mit allen Punkten aus $\{\Phi\}$, also jedenfalls mit mehr als einem, also nach 69.5 $\rightarrow$ 69.1 : $A\Phi = 0$. Nach 69.4′ gibt es ein mit A verbundenes $A_1 \in \{\Phi\}$. Weiter gibt es in $\{\Phi\}$ ein mit A_1 nichtverbundenes B_1. Nach Voraussetzung ist A verflochten mit B_1, während es ein mit A verbundenes A_1 gibt, das nicht mit B_1 verbunden ist. Nach 70.2′ müssen A, Φ inzidieren.

Zu 65.11′: Der erste Teil der Aussage steht in 63. Seien A_1, A_2 mit A_0 verbunden. Sind A_1, A_2 obendrein untereinander verflochten, so ist nach 71.1′ $\{A_0\} \cap \{A_1\} \cap \{A_2\}$ nichtleer, also schneiden die Ebenen $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ $(i = 1, 2,)$ auf der Quadrik $\{A_0\}$ einander; und umgekehrt. Sind A_1, A_2 sogar verbunden, so ist entweder $\{A_1\} \cap \{A_2\} \subset \{A_0\}$ und dann schneiden die $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ $(i = 1, 2)$ sich in mehr als einem Punkt; oder es gibt ein $\Phi \in \{A_1\} \cap \{A_2\}$, $\Phi \notin \{A_0\}$. Es gibt in der Quadrik $\{A_0\}$ Ebenen $\mathfrak{e}_i \supset \subset \{A_0\} \cap \{A_i\}$ $(i = 1, 2)$. In der Quadrik $\{A_i\}$ ist Φ elementweise verbunden mit einer Geraden $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e}_i$. Andererseits bilden die Symplekta aus $\{A_0\}$, mit denen Φ verbunden ist, nach 70.1 genau eine Gerade. Also $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2$; die $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ schneiden sich in mehr als einem Punkt.

Zu 65.12′: Sei $\mathfrak{a}$ eine maximale Menge paarweise verbundener Punkte und A_0 ein Punkt aus $\mathfrak{a}$. Die $\{A\} \cap \{A_0\}$ mit $A \in \mathfrak{a}$, $A \neq A_0$ (als Punkt) sind Ebenen auf der Quadrik $\{A_0\}$, die einander mehrpunktig schneiden (65.11′). Die Menge dieser Ebenen ist hinsichtlich dieser Eigenschaft maximal, also gleich der Menge aller Ebenen auf $\{A_0\}$ durch eine feste Gerade $\mathfrak{g}$ auf $\{A_0\}$. Seien Φ_1, Φ_2 zwei Symplekta aus $\mathfrak{g}$. Nun ist $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt der Symplekta $\{\Phi_i\}$, also nach 65.10 eine projektive Ebene über $\mathscr{H}$.

Zu 71.3: Nach 46 ist etwa Φ_1 mit Φ_3 verflochten. Sind Φ_1 und Φ_3 nicht verbunden, so inzidieren nach 71.1 und 71.2 Φ_2 und Φ_4 mit dem Punkt $\langle \Phi_1, \Phi_3 \rangle$. Sind Φ_1, Φ_3 verbunden, so inzidieren Φ_1, Φ_2, Φ_3 mit einem Punkt, mit dem Φ_4 nach 69.4 $\rightarrow$ 69.1 halbinzident ist.

Zu 71.4: Nach 47 ist etwa Φ_1 mit Φ_3, Φ_3 mit Φ_5 und Φ_5 mit Φ_2 verflochten. Sei Φ_1 nicht mit Φ_3 verbunden. Nach 71.1 inzidieren Φ_2, Φ_5 mit dem Punkt $\langle \Phi_1, \Phi_3 \rangle$; Φ_4 ist mit ihm halbinzident. Sei Φ_3 nicht mit Φ_5 verbunden, dagegen Φ_1 mit Φ_3 und Φ_5 mit Φ_2 verbunden. Dann gibt es einen Punkt, der mit allen inzidiert. Sei Φ_1 mit Φ_3, Φ_3 mit Φ_5, Φ_5 mit Φ_2 verbunden. Dann ergibt sich wieder der erste Fall.

Zu 71.3′: Sei $\Phi \in \{A_4\} \cap \{A_1\}$, $\Phi' \in \{A_2\} \cap \{A_3\}$. Da Φ mit A_2 und A_3 halbinzidiert, ist (nach 70.1) entweder $[\Phi, \Phi'] \in \{A_1\} \cap \{A_2\}$ und $\in \{A_3\} \cap \{A_4\}$, und dann sind die A_i verflochten. Oder Φ verflochten mit ganz $\{A_2\} \cap \{A_3\}$. Aber dann ist (nach 70.2) entweder Φ mit A_2 inzident und daher A_2 mit A_4 verflochten, oder ganz $\{A_2\} \cap \{A_3\}$ verbunden mit allen $\Phi'' \in \{A_2\}$, die mit Φ verbunden sind, und die eine Gerade $\mathfrak{g} \subset \{A_1\} \cap \{A_2\}$ bilden. Nun muss $\mathfrak{g} \subset \{A_2\} \cap \{A_3\}$ sein, also $\{A_1\} \cap \{A_3\}$ nichtleer, A_1, A_3 verflochten. — Man fährt fort wie in 71.3.

71.4′. Für $\Phi_i \in \{A_{i-1}\} \cap \{A_i\}$ hat man nach 70.1

$$[\Phi_i, \Phi_{i+2}] \subset \{A_i\} \cap \{A_{i+1}\}.$$

$$[[\Phi_i, \Phi_{i+2}], \Phi_{i+3}] = [[\Phi_i, \Phi_{i+3}], \Phi_{i+2}]$$

ergibt sich nun einerseits $\in \{A_{i+1}\} \cap \{A_{i+2}\}$, andererseits $\in \{A_{i+2}\} \cap \{A_{i+3}\}$, insoweit die Kommutatoren nicht verschwinden. Wie in 47 schliesst man hier auf die Existenz eines i mit

$$[\Phi_i, \Phi_{i+2}] = [\Phi_{i+2}, \Phi_{i+4}] = [\Phi_{i+4}, \Phi_{i+1}] = 0.$$

Wie in 71.2′ schliesst man, wenn alle $[\Phi_i, \Phi_{i+2}]$ verschwinden, auf die Verflochtenheit von A_i, A_{i+2}. Man fährt dann fort wie in 71.4.

Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen. I [1954d]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954), 369–376
[Zbl 0059.02303; MR 0067123]

(Communicated at the meeting of June 26, 1954)

Wir geben erst einen rein algebraischen Beweis der Weylschen Formel [1]; im Beweise kommen zwar Potenzreihen und Differentialgleichungen vor, aber die sind rein formaler Art. Zur praktischen Berechnung der Charaktere eignet sich die Weylsche Formel allerdings nicht. Hierzu werden wir in der Fortsetzung dieser Note unmittelbar von der grundlegenden Formel 2.1 ausgehen.

1. Wir nehmen den Infinitesimalring in der üblichen Normalform an, normieren aber $N_\alpha = 1$, um ein lästiges Minuszeichen nicht überall mitzuschleppen. Es wird also

$$[H_\alpha, E_\beta] = (\alpha, \beta) E_\beta.$$

Wir betrachten eine irreduzible Darstellung im Raum R; α sei eine Wurzelform, N sei der Nullraum von E_α; R_h sei der zum Gewicht h gehörige Unterraum; $m_h = \dim R_h$ ist die Vielfachheit des Gewichtes h.

Für

$$x_0 \in N_h = N \cap R_h$$

und

$$x_i = E^i_{-\alpha} x_0$$

beweist man in bekannter Weise induktiv

$$E_\alpha x_i = i\,(h - \frac{i-1}{2}\alpha, \alpha) x_{i-1},$$

woraus folgt

$$E_\alpha E_{-\alpha} x_i = (i+1)\,(h - \frac{i}{2}\alpha, \alpha) x_i. \tag{1.1}$$

Ist

$$x_n \neq 0, \quad x_{n+1} = 0,$$

so muss

$$(h - \frac{n}{2}\alpha, \alpha) = 0,$$

$$n = 2\frac{(h, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

sein. $E_\alpha E_{-\alpha}$ ist eineindeutig in allen Räumen $E^i_{-\alpha} N_h$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

[1] Math. Zeitschr. **24**, 389 (1926).

Die Spiegelungen S_α,

$$S_\alpha \xi = \xi - 2\frac{(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \tag{1.2}$$

erzeugen die „Kaleidoskopgruppe" K. Durch K werden Gewichte in äquivalente transformiert. Das höchste Gewicht hat die Vielfachheit 1 und ist äquivalent allen Grenzgewichten (d.h. Gewichten g, so dass für keine Wurzel α sowohl $g+\alpha$ als $g-\alpha$ Gewichte sind) [2]). Ein $S \in \mathsf{K}$ induziert eine (bis auf einen skalaren Faktor bestimmte) lineare Abbildung von R auf sich, bei der ein Vektor vom Gewicht h in einen vom Gewicht Sh übergeht.

α sei eine feste Wurzelform, g ein Gewicht, aber $g+\alpha$ kein Gewicht (Gewicht der Vielfachheit 0). Die Räume

$$E_{-\alpha}^{p-j} N_{g-j\alpha} \quad (j = 0, 1, \ldots) \tag{1.3}$$

liegen in $R_{g-p\alpha}$ und sind unabhängig, wie man durch Induktion nach p zeigt: Eine Abhängigkeit zwischen den

$$E_{-\alpha}^{p+1-j} N_{g-j\alpha}$$

ergäbe nämlich bei Anwendung von E_α nach 1.1 eine solche zwischen den Räumen (1.3).

Man kann aus den (1.3) die direkte Summe bilden. Dann gilt

$$\sum_j E_{-\alpha}^{p-j} N_{g-j\alpha} = R_{g-p\alpha}. \tag{1.4}$$

Man beweist das induktiv. Sei erst $p < \frac{(g, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ und $x \in R_{g-(p+1)\alpha}$. Dann ist $E_\alpha x \in R_{g-p\alpha}$, also mit (1.4) als Induktionsvoraussetzung

$$E_\alpha x \in \sum_j E_{-\alpha}^{p-j} N_{g-j\alpha}.$$

Wegen der Eineindeutigkeit von $E_\alpha E_{-\alpha}$ in diesem Raum kann man $E_\alpha x$ in der Form

$$E_\alpha x = E_\alpha E_{-\alpha} y$$

mit geeignetem y schreiben. Also

$$E_\alpha(x - E_{-\alpha} y) = 0,$$
$$x - E_{-\alpha} y \in N_{g-(p+1)\alpha},$$
$$x \in \sum E_{-\alpha}^{p+1-j} N_{g-j\alpha}.$$

---

[2]) Der Beweis dieser Behauptung bei E. CARTAN (Oeuvres I, 360) ist mir nicht recht verständlich. (Auch die Behauptung von p. 365, Mitte, scheint mir unbewiesen.) Man schließe etwa so: g sei ein dominantes und $\hat{g}$ das höchste Gewicht der irreduziblen Darstellung. Jeder Vektor vom Gewicht g ist lineare Kombination von Ausdrücken

$$(*) \quad E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \ldots E_{\alpha_k} x \text{ (mit } x \text{ vom Gewicht } \hat{g}).$$

Die Vertauschungsrelationen ermöglichen es, die E_α mit $\alpha > 0$ nach rechts zu schieben, aber da für positives α gilt $E_\alpha x = 0$, darf man von vornherein annehmen, daß in (*) nur negative α vorkommen. $g - \alpha_1$ ist nun ein Gewicht, aber auch $g + \alpha_1$, da sonst $S_{\alpha_1} g$ höher stände als g. Also ist g kein Grenzgewicht. Infolgedessen ist umgekehrt jedes dominante Grenzgewicht $= \hat{g}$, also jedes Grenzgewicht äquivalent mit $\hat{g}$.

Ist dagegen $p \geqq \frac{(g,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$, so führt man die Behauptung durch die Spiegelung (1.2) auf die für $p < \frac{(g,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ zurück.

2. $\dim N_{g-j\alpha} = m_{g-j\alpha} - m_{g-(j-1)\alpha}$.

Die Spur von $E_\alpha E_{-\alpha}$ in $E_{-\alpha}^{p-j} N_{g-j\alpha}$ berechnet sich also nach (1.1) mit $p-j$ statt i und $g-j\alpha$ statt h zu

$$(m_{g-j\alpha} - m_{g-(j-1)\alpha})\,(p-j+1)\,(g-j\alpha - \frac{p-j}{2}\,\alpha, \alpha).$$

Nach 1.4 erhält man hieraus die Spur von $E_\alpha E_{-\alpha}$ in $R_{g-p\alpha}$ durch Summation über j:

$$\sum_j \Big((p-j+1)\,(g-j\alpha - \frac{p-j}{2}\,\alpha, \alpha) - (p-j)\,(g-(j+1)\alpha - \frac{p-j-1}{2}\,\alpha, \alpha)\Big)\, m_{g-j\alpha} =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} (g-j\alpha, \alpha)\, m_{g-j\alpha}.$$

Also: Spur von $E_\alpha E_{-\alpha}$ in $R_h = \sum\limits_{p=0,1,\ldots} (h+p\alpha, \alpha) m_{h+p\alpha}$.

Wir können nun die Spur des Casimirschen Operators

$$Z = \sum a^{qr} H_q H_r + \sum_\alpha E_\alpha E_{-\alpha}$$

im Raum R_h berechnen. Für ein $x \in R_h$ ist

$$\sum a^{qr} H_q H_r\, x = \sum a^{qr} h_q h_r x = (h, h)\, x,$$

also:

Spur von Z in R_h

$$= \sum_\alpha \sum_{p=0,1,\ldots} (h+p\alpha, \alpha)\, m_{h+p\alpha} + (h, h)\, m_h.$$

Wir brauchen die innere Summation übrigens erst bei $p=1$ zu beginnen, da für $p=0$ die von $\pm\alpha$ herrührenden Beiträge sich wegheben.

Z ist Zentrumelement, also von der Form

$$Z = z \cdot 1.$$

Es ergibt sich so die „Hauptformel"

$$\sum m_g\,(g, \alpha) + m_h\,(h, h) = m_h z, \tag{2.1}$$

wo die Summe läuft über alle Paare α, g mit $g = h + p\alpha$, $p = 1, 2, \ldots$.

3. Erstreckt man

$$\sum m_g\,(g, \alpha)$$

bei festem α über eine volle α-Serie $g = h + p\alpha$ (p ganz), so ergibt sich 0. Denn

$$\sum m_g(g, \alpha) = \sum m_{S_\alpha g}\,(S_\alpha g, \alpha) = \sum m_g(g, S_\alpha g) = \sum m_g(g, -\alpha).$$

Dasselbe gilt bei Summierung über eine beiderseits symmetrisch abgeschnittene Serie.

Insbesondere verschwindet der Ausdruck, wenn h kein Gewicht ist ($m_h = 0$). Also gilt (2.1) auch für $m_h = 0$.

Weiter folgt hieraus, wenn man in (2.1) die Beiträge von $\pm\alpha$ zusammenfasst:

$$\sum_{\alpha>0} m_h(h,\alpha) + 2 \sum_{\substack{\alpha>0 \\ g=h+p\alpha,\ p=1,2,\ldots}} m_g(g,\alpha) + m_h(h,h) = m_h z.$$

Wir setzen

$$2\delta = \sum_{\alpha>0} \alpha.$$

Also

$$2 \sum m_g(g,\alpha) + m_h(h, h+2\delta) = m_h z. \tag{3.1}$$
$$(\alpha>0,\ g=h+p\alpha,\ p=1,2,\ldots).$$

Nimmt man für h das höchste Gewicht der Darstellung, $\hat{g}$, so wird $m_h = 1$ und fällt der erste Summand fort. Also

$$z = (\hat{g}, \hat{g}+2\delta) = (\hat{g}+\delta, \hat{g}+\delta) - (\delta,\delta). \tag{3.2}$$

4. Eine positive Wurzelform, die nicht Summe anderer ist, heißt irreduzibel. Es gibt deren $l =$ (Rang des Infinitesimalringes). Jede positive Wurzelform läßt sich als Summe irreduzibler schreiben.

Eine Linearform ξ, die von keiner äquivalenten $S\xi$ ($S \in \mathsf{K}$) übertroffen wird, heißt dominant. Notwendig für die Dominanz von ξ ist offenbar

$$2\frac{(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \geqq 0 \tag{4.1}$$

für alle positive Wurzelformen α.

Es ist aber auch hinreichend. Hierzu genügt es, zu zeigen, daß

$$2\frac{(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} > 0 \tag{4.2}$$

für alle positiven Wurzelformen α hinreicht für die Dominanz von ξ. Gilt nun (4.2) und ist $S\xi$ ($S \in \mathsf{K}$) die zugehörige dominante Form, so hat man noch

$$2\frac{(S\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} > 0,$$

also

$$2\frac{(\xi, S^{-1}\alpha)}{(S^{-1}\alpha, S^{-1}\alpha)} > 0.$$

S kann daher keine positive Wurzelform in eine negative überführen. S vertauscht die positiven untereinander, stört also die Ordnung der Wurzelformen nicht. S ist dann notwendig die Identität. Damit ist die Dominanz von ξ bewiesen.

Da alle (α,α) positiv sind, gilt sogar: Notwendig und hinreichend für die Dominanz von ξ ist:

$$2\frac{(\xi,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \geqq 0 \text{ für alle irreduziblen } \varrho. \tag{4.3}$$

5. ξ heißt ganzzahlig, wenn

(5.1) $$2\frac{(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \text{ ganz ist für alle Wurzelformen } \alpha,$$

oder, was auch schon genügt,

(5.2) $$2\frac{(\xi,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \text{ ganz für alle irreduziblen } \varrho.$$

Man zeigt das so: gilt (5.2), ist

$$2\frac{(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \text{ ganz}$$

für eine Wurzelform α, und ist σ irreduzibel, so ist mit

$$\beta = S_\sigma \alpha = \alpha - 2\frac{(\alpha,\sigma)}{(\sigma,\sigma)}\sigma$$

$$\text{auch } 2\frac{(\xi,\beta)}{(\beta,\beta)} = 2\frac{(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} - 2\frac{(\alpha,\sigma)}{(\alpha,\alpha)}\cdot 2\frac{(\xi,\sigma)}{(\sigma,\sigma)} \text{ ganz.}$$

Wiederholte Anwendung zeigt, dass man (5.1) nur zu beweisen braucht für solche positive Wurzelformen α, für die alle $S_\sigma \alpha$ (σ irreduzibel) negativ oder null sind. Das sind aber gerade die irreduziblen α, und für die ist (5.1) nach Voraussetzung richtig.

Die ganzzahligen ξ sind mögliche Gewichte, die ganzzahligen dominanten ξ sind mögliche höchste Gewichte.

Zu jedem irreduziblen ϱ_0 gehört ein π mit

$$2\frac{(\pi,\varrho_0)}{(\varrho,\varrho)} = \begin{matrix}1\\0\end{matrix} \text{ für } \begin{matrix}\varrho = \varrho_0\\ \varrho \text{ irreduzibel} \neq \varrho_0.\end{matrix}$$

Die π sind die höchsten Gewichte der fundamentalen Darstellungen. Alle anderen sind Summen solcher π.

Ist ϱ eine irreduzible und α eine positive Wurzelform, und ist $\alpha - \varrho$ wieder eine Wurzelform, so ist auch $\alpha - \varrho$ positiv, denn sonst wäre ja $\varrho = \alpha + (\varrho - \alpha)$ reduzibel. Für irreduzibles ϱ besteht also jede ϱ-Serie ganz aus positiven oder ganz aus negativen Wurzelformen, oder sie lautet ϱ, 0, $-\varrho$. Hieraus folgt

(5.3) $$2\frac{(\delta,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} = 1 \text{ für irreduzibles } \varrho.$$

Denn die Serie ϱ, 0, $-\varrho$ liefert den Beitrag 1, alle anderen ϱ-Serien liefern den Beitrag 0.

6. Sei g Gewicht einer irreduziblen Darstellung, aber nicht das höchste Gewicht $\hat{g}$. Dann ist

(6.1) $$(g+\delta,\ g+\delta) < (\hat{g}+\delta,\ \hat{g}+\delta).$$

Zum Beweise nehmen wir erst an, daß g auch dominant ist. Es gibt dann ein Gewicht $g' = g + \alpha$ (α = positive Wurzelform); denn sonst wäre ja g

Grenzgewicht und $g=\hat{g}$. Wir nehmen α möglichst hoch an. Dann ist g' wieder dominant. Denn wäre etwa

$$2\frac{(g',\beta)}{(\beta,\beta)}<0,$$

so hätte man wegen

$$2\frac{(g,\beta)}{(\beta,\beta)}\geqq 0$$

nun

$$n=2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\leqq 2\frac{(g',\beta)}{(\beta,\beta)}=n'<0;$$

$\gamma=\alpha-n'\beta$ wäre Wurzelform und $>\alpha$, und $S_\beta g'=g'-n'\beta=g+\gamma$ wäre Gewicht im Widerspruch zur Maximalität von α.

Mit g' verfahre man wie mit g usw., bis man schließlich bei $\hat{g}$ ankommt. Es genügt, 6.1 zu beweisen mit g' statt $\hat{g}$. Wegen

$$2\frac{(g',\alpha)}{(\alpha,\alpha)}>0$$

ist

$$(g'+\delta,g'+\delta)-(g+\delta,g+\delta)=2(g'+\delta,\alpha)-(\alpha,\alpha)>2(g',\alpha)-(\alpha,\alpha)>0.$$

Wir haben schließlich noch den Fall zu betrachten, daß g nicht dominant ist. Es gibt dann ein

$$g'=S_\alpha g=g-n\alpha,\ \alpha>0,$$
$$n=2\frac{(g,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}<0.$$

Nun ist

$$(g'+\delta,g'+\delta)-(g+\delta,g+\delta)=-2n\,(g+\delta,\alpha)+n^2\,(\alpha,\alpha)=$$
$$=-2n\,(\delta,\alpha)>0.$$

So fährt man fort, bis zum höchsten Gewicht $\hat{g}$.

7. Wir kehren nun nach 3.1 zurück. Mittels 3.1 kann man ein $m_h\neq 0$ berechnen aus den m_g, deren g höher steht als h, wenn man nur weiß, daß der Koeffizient von m_h in 3.1 nicht verschwindet, d.h. wenn

$$(h+\delta,h+\delta)\neq(\hat{g}+\delta,\hat{g}+\delta)$$

ist. Nach 6 ist das für $h\neq\hat{g}$ sicher wahr, und für $h=\hat{g}$ weiß man, daß $m_h=1$ ist.

Das Gleichungssystem 3.1 (und ebenso 2.1) reicht also zur rekursiven Bestimmung der Vielfachheiten m_h (und damit auch des zum höchsten Gewichte $\hat{g}$ gehörigen Charakters) aus, wenn man noch fordert:

(7.1) $$m_{\hat{g}}=1,\ m_h=0 \text{ für } h>\hat{g}.$$

8. Wir multiplizieren die Gleichungen 2.1 mit $e^{(h,\tau)}$ und summieren über h $(m_h\neq 0)$:

(8.1) $$\sum_{\alpha,g,p} m_g\,e^{(g-p\alpha,\tau)}\,(g,\alpha)+\sum_h m_h\,e^{(h,\tau)}\,(h,h)=\sum_h m_h\,e^{(h,\tau)}z.$$

Führen wir im ersten Summand die Summation über $p=1, 2, \ldots$ aus, so wird er:

$$\sum_{\alpha, g} m_g \, e^{(g,\tau)} \frac{e^{-(\alpha,\tau)}}{1-e^{-(\alpha,\tau)}} (g, \alpha). \tag{8.2}$$

Ferner gilt

$$e^{(g,\tau)} g \quad = \operatorname{grad} e^{(g,\tau)}, \tag{8.3}$$

$$\frac{e^{-(\alpha,\tau)}}{1-e^{-(\alpha,\tau)}} \alpha = \operatorname{grad} \log (1-e^{-(\alpha,\tau)}), \tag{8.4}$$

$$(h,h)\, e^{(h,\tau)} = \Delta\, e^{(h,\tau)}, \tag{8.5}$$

wo grad und Δ invariant im Sinne des gegebenen inneren Produktes zu verstehen sind.

Wir setzen schliesslich

$$f = \sum m_g \, e^{(g,\tau)}, \tag{8.6}$$

d.h.: deutet man in einem auf der Hand liegenden Koordinatensystem τ als Element einer maximal abelschen Untergruppe, so gibt f dort den Wert des Charakters an.

Aus 8.1 – 6 folgt nun

$$(\operatorname{grad} \sum_{\alpha} \log (1-e^{-(\alpha,\tau)}), \operatorname{grad} f) + \Delta f = zf.$$

Wir bemerken zwischendurch, dass der Operator, der hier links auf f angewandt wird, nichts anders ist als der invariante Laplace-Operator für die Gruppenmannigfaltigkeit. Das zu verifieren, ist aber recht umständlich, und wir unterlassen es.

Es ist nun natürlich, die von WEYL her bekannte Funktion

$$Q = \prod_{\alpha>0} (e^{\frac{1}{2}(\alpha,\tau)} - e^{-\frac{1}{2}(\alpha,\tau)}) \tag{8.7}$$

einzuführen.

Q ist antisymmetrisch gegenüber K, also eine lineare Kombination von Ausdrücken

$$\sum_{S \in \mathsf{K}} \det S \cdot e^{(S\mu,\tau)}, \tag{8.8}$$

wo μ von der Form

$$\mu = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha>0} \pm \alpha$$

ist. μ ist also ganzzahlig, und wir dürfen sogar annehmen, daß μ dominant ist. Nach 5.3 ist nun für irreduzibles ϱ

$$0 \leqq 2\frac{(\mu,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \leqq 2\frac{(\delta,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \leqq 1.$$

Also entweder $\mu=\delta$ oder aber mindestens einmal $(\mu, \varrho)=0$. Für solch ein ϱ bleibt (8.8) bei S_ϱ unverändert, während es andererseits mit -1 multi

pliziert werden muß. (5.8) kommt also in Q nur vor mit $\mu = \delta$, und dann natürlich mit dem Koeffizienten 1. Also

(8.9)
$$Q = \sum_{S \in \mathsf{K}} \det S \cdot e^{(S\delta, \tau)}.$$

$$Q^2 = \pm \prod_{\alpha} (1 - e^{-(\alpha, \tau)})$$

$$(2 \text{ grad } \log Q, \text{ grad } f) + \Delta f = zf.$$

Nun ist

$$\text{grad} \log Q = \frac{\text{grad } Q}{Q},$$

also

$$2(\text{grad } Q, \text{ grad } f) + Q\Delta f = zQf.$$

Ergänzt man hier $f\Delta Q$, so erhält man

$$\Delta(Qf) = zQf + f\Delta Q.$$

Mit

(8.10)
$$Qf = \varphi$$

gilt also

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \frac{\Delta Q}{Q} = z.$$

Nun ist wegen 8.9

$$\Delta Q = (\delta, \delta) Q,$$

also nach 3.2

(8.11)
$$\Delta\varphi = (\hat{g} + \delta, \ \hat{g} + \delta)\varphi.$$

f benimmt sich symmetrisch gegenüber K, Q antisymmetrisch, also auch φ antisymmetrisch. φ ist eine Linearkombination von Ausdrücken

$$e^{(\mu, \tau)},$$

und wegen 8.11 muss hier

$$(\mu, \mu) = (\hat{g} + \delta, \hat{g} + \delta)$$

sein. Wegen 8.6 und 8.9 ist μ von der Form $g + S\delta$ $(m_g \neq 0)$, also

$$S^{-1}\mu = S^{-1}g + \delta,$$
$$(S^{-1}g + \delta, \ S^{-1}g + \delta) = (\hat{g} + \delta, \ \hat{g} + \delta),$$

also nach 6 : $S^{-1} g = \hat{g}$. Also $\mu = S(\hat{g} + \delta)$.
Wegen $m_{\hat{g}} = 1$ und der Antisymmetrie ist nun

(8.12)
$$\varphi = \sum_{S \in \mathsf{K}} \det S \cdot e^{(S(\hat{g} + \delta), \tau)}.$$

Das ist aber, zusammen mit 8.6, 8.9, 8.10 gerade die Weylsche Formel.

Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen. II [1954e]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954), 487–491
[Zbl 0059.02303; MR 0067123]

(Communicated at the meeting of September 25, 1954)

9. Cartans Methode (Oeuvres I, 355–398) führt im Prinzip zur Bestimmung der Vielfachheiten der Gewichte (also der Charaktere); praktisch ist sie aber nicht brauchbar. Weyls explizite Charakterformel lässt sich auch kaum numerisch auswerten. Besser steht es mit seiner Dimensionsformel; die Rechnungen werden weniger weitläufig, als man befürchten sollte. Um nun unsere Hauptformel 2.1 (oder 3.1) zu erproben, habe ich sie auf die $\mathfrak{E}_8$ angewandt. Ich habe alle Darstellungen der $\mathfrak{E}_8$ behandelt, deren z das der π_8 nicht übertrifft [1]). Hierzu waren folgende Schritte nötig:

Man bestimmt zu einem *dominanten* Gewicht h und einer beliebigen positiven Wurzel α die *dominanten* Gewichte g, die mit $h+p\alpha$ $(p=1, 2, \ldots)$ äquivalent sind, sowie die zugehörigen $(h+p\alpha, \alpha)$. So erhält man die Matrix Tafel D. Die Zeile h dieser Matrix enthält die Koeffizienten der Gleichung h von 3.1. In der Spalte g stehen die Koeffizienten von m_g. Die Hauptdiagonale trägt die $(h, h+2\delta)$.

Von einem vorgeschriebenen höchsten Gewicht $\hat{g}$ ausgehend, bestimme man nun rekursiv die m_g; man setze also $m\hat{g}=1$ (und noch höhere $=0$) und $z=(\hat{g}, \hat{g}+2\delta)$. Das ist eine rein mechanische Rechnung. Rechenfehler stellen sich schnell heraus; die Divisionen durch z, die aufgehen müssen, sind bis weit oben ins Schema eine wirksame Kontrolle. Die Resultate stehen in Tafel E. Im Kreuzungspunkt der Zeile $\hat{g}$ und der Spalte h steht die Vielfachheit, mit der h in der Darstellung vom höchsten Gewicht $\hat{g}$ auftritt.

Zur weiteren Kontrolle habe ich Weyls Dimensionsformel herangezogen. Um die Dimension $d\hat{g}$ einer Darstellung vom höchsten Gewicht $\hat{g}$ aus den m_h zu berechnen, muss man noch zu jedem (dominanten) h die Zahl r_h der zu h äquivalenten Gewichte kennen (r_h ist auch der Index der Invarianz-Untergruppe von h in $\boldsymbol{K}$). Das kann nun ausserordentlich schnell so erreicht werden:

Seien h und h' zwei Gewichte, die sich um eine Wurzelform unterscheiden. Sei $q_{h,h'}$ die Anzahl der Lösungen von

$$h+\alpha \text{ äquivalent zu } h' \quad (\alpha = \text{Wurzelform}),$$

[1]) Die Rechnungen sind zu einem beträchtlichen Teile von MATTHIJS FREUDENTHAL ausgeführt.

und sei $q_{h',h}$ entsprechend definiert. Dann ist klar, dass $q_{h,h'}$ und $q_{h',h}$ nur von den Äquivalenzklassen von h und h' abhängen, und dass

$$q_{h',h} : q_{h,h'} = r_{h'} : r_h \tag{9.1}$$

gilt. Für ein h der adjungierten Darstellung läßt sich r_h leicht feststellen. Bei $\mathfrak{E}_8$ ist es z.B. gleich der Zahl der Wurzelformen = 240. Man verbinde nun ein h, dessen r_h berechnet werden soll, mit einem der adjungierten Darstellung durch eine Kette von Gewichten, deren jedes sich vom Vorgänger um eine Wurzelform unterscheidet und wende wiederholt 9.1 an. Dies Verfahren wird in Tafel C illustriert mit einer Berechnung von r_δ. Die $q_{h,h'}$ sind rechts und links angegeben.

(r_δ ist übrigens gleich der Ordnung von $\boldsymbol{K}$. Denn für ein $S \in \boldsymbol{K}$ ist $S\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha>0} \pm \alpha$. Ist nun $S\delta = \delta$, so muss S die positiven Wurzelformen untereinander vertauschen; S stört also die Anordnung der Wurzelformen nicht und ist daher die Identität. Die Invarianz-Untergruppe von δ ist also die Identität, und hieraus folgt die Behauptung.)

Übrigens findet man die $r\hat{g}$ in der obersten Zeile von Tafel E; ein gemeinsamer Faktor 240 ist herausgezogen. Aus

$$d\hat{g} = \sum m_h r_h \tag{9.2}$$

(erstreckt über alle nicht-äquivalenten h) erhält man nun die Dimension, die man mit der aus der Weylschen Formel zu errechnenden vergleichen kann. Wir haben diese explizite Kontrolle nur an einigen Beispielen ausgeführt und uns im Übrigen begnügt mit einer Faktorzerlegung des berechneten d_g. Eine oberflächliche Betrachtung der Weylschen Dimensionsformel lehrt nämlich, ob der höchste Primfaktor der Dimension 37,31 oder kleiner ist. So gibt die Faktorzerlegung auch schon eine Kontrolle. Siehe Tafel F.

10. Als Wurzelformensystem der $\mathfrak{E}_8$ haben wir genommen [1]):

$$\begin{aligned}
&\pm \xi_\nu \\
&\tfrac{1}{2}(\pm \xi_0 \pm \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3) \\
&\pm \alpha_\nu \pm \tfrac{1}{2}(\xi_0 \pm \xi_1) \ , \ \pm \alpha_\nu \pm (\xi_2 \pm \xi_3) \\
&\tfrac{1}{2}(\pm \alpha_0 \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3) \pm \tfrac{1}{2} \begin{matrix} (\xi_0 \pm \xi_2) \text{ oder } (\xi_1 \pm \xi_3) \\ (\xi_0 \pm \xi_3) \text{ oder } (\xi_2 \pm \xi_4) \end{matrix} \\
&\pm \alpha_\mu \pm \alpha_\nu
\end{aligned}$$

($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; oberer Summand bei gerader Anzahl von Pluszeichen in den α, unterer bei ungerader). Die Wurzelformen werden lexikographisch geordnet (erst die α, dann die ξ). Für die acht irreduziblen Wurzelformen können wir das Schema aufschreiben:

---

[1]) Siehe Hans Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. II. Proceedings Amsterdam, **A 57**, 364 (1954).

TAFEL A

0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	0	1	-1	0	0	0	0
0	1	-1	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$

Man beachte, dass das innere Produkt zweier Linearformen mit den Koeffizienten

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3$$
$$p_0',\ p_1',\ p_2',\ p_3',\ q_0',\ q_1',\ q_2',\ q_3'$$

sich zu

$$\sum p_i p_i' + 2\sum q_i q_i'$$

berechnet. (Um Nenner zu vermeiden, haben wir nicht $N_\gamma = 1$, sondern $(\gamma, \gamma) = 2$ für alle Wurzelformen γ normiert.)

Ganzzahlige Formen sind die mit

$$\begin{aligned} &p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3 && \text{halbzahlig} \\ &p_0 - q_1 - q_2 - q_3 \equiv 0 \\ &p_3 - q_0 - q_1 \equiv 0 \\ &p_2 - p_3 \equiv 0 \\ &p_1 - p_2 \equiv 0 \\ &\tfrac{1}{2}(p_0 - p_1 - p_2 - p_3) - q_0 - q_3 \equiv 0 && \text{mod } 1 \end{aligned}$$

Für dominante Formen müssen diese Ausdrücke noch $\geqq 0$ sein.

Fundamentale höchste Gewichte sind:

TAFEL B

	p_0	p_1	p_2	p_3	q_0	q_1	q_2	q_3	(g, g)	z
π_1	1	1	0	0	0	0	0	0	2	60
π_2	2	0	0	0	0	0	0	0	4	96
π_3	2	1	1	0	0	0	0	0	6	120
π_4	5/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1/2	0	8	144
π_5	3	1	1	1	0	0	0	0	12	180
π_6	7/2	1/2	1/2	1/2	1/2	0	0	1/2	14	196
π_7	4	1	1	1	1/2	1/2	0	0	20	240
π_8	5	1	1	1	1	0	0	0	30	300
δ	23	6	5	4	5/2	1/2	1/2	1/2		

TAFEL C

↓									↑
126	1	1	0	0	0	0	0	0	14
14	2	0	0	0	0	0	0	0	1
12	3	1	0	0	0	0	0	0	2
10	4	1	1	0	0	0	0	0	3
8	5	1	1	1	0	0	0	0	4
6	6	1	1	1	1/2	1/2	0	0	5
4	7	1	1	1	1	0	0	0	6
6	8	1	1	1	1	0	1/2	1/2	1
5	9	2	1	1	1	0	1/2	1/2	2
4	10	2	2	1	1	0	1/2	1/2	3
3	11	2	2	2	1	0	1/2	1/2	4
2	12	2	2	2	3/2	1/2	1/2	1/2	5
5	13	2	2	2	2	0	1/2	1/2	1
4	14	3	2	2	2	0	1/2	1/2	2
3	15	3	3	2	2	0	1/2	1/2	3
2	16	3	3	3	2	0	1/2	1/2	4
4	17	3	3	3	5/2	1/2	1/2	1/2	1
3	18	4	3	3	5/2	1/2	1/2	1/2	2
2	19	4	4	3	5/2	1/2	1/2	1/2	3
3	20	4	4	4	5/2	1/2	1/2	1/2	1
2	21	5	4	4	5/2	1/2	1/2	1/2	2
2	22	5	5	4	5/2	1/2	1/2	1/2	1
↓	23	6	5	4	5/2	1/2	1/2	1/2	↑

Hieraus ergibt sich: Ordnung von $K = 48 \cdot 10!$.

TAFEL F (Dimensionen)

π_1	248	=	$8 \cdot 31$
π_2	3 875	=	$125 \cdot 31$
π_3	30 380	=	$20 \cdot 49 \cdot 31$
${\pi_1}^2$	27 000		
π_4	147 250	=	$250 \cdot 19 \cdot 31$
$\pi_1\pi_2$	779 247	=	$27 \cdot 49 \cdot 19 \cdot 31$
π_5	2 450 240	=	$320 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
$\pi_1\pi_3$	4 096 000		
${\pi_1}^3$	1 763 125	=	$625 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$
π_6	6 696 000	=	$216000 \cdot 31$
${\pi_2}^2$	4 881 384	=	$3^9 \cdot 8 \cdot 31$
$\pi_1\pi_4$	26 411 008	=	$2^{16} \cdot 13 \cdot 31$
$\pi_2\pi_3$	76 271 625	=	$3^9 \cdot 125 \cdot 31$
${\pi_1}^2\pi_2$	70 680 000	=	$12000 \cdot 19 \cdot 31$
π_7	146 325 270	=	$30 \cdot 49 \cdot 169 \cdot 19 \cdot 31$
$\pi_1\pi_5$	344 452 500	=	$2500 \cdot 3^9 \cdot 7$
$\pi_2\pi_4$	301 694 976	=	$2^{15} \cdot 27 \cdot 11 \cdot 31$
${\pi_3}^2$	203 205 000	=	$15000 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31$
${\pi_1}^2\pi_3$	281 545 875	=	$243 \cdot 125 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 31$
$\pi_1\pi_6$	1 094 951 000	=	$11000 \cdot 169 \cdot 19 \cdot 31$
${\pi_1}^4$	79 143 000	=	$3000 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37$
$\pi_1{\pi_2}^2$	820 260 000	=	$540000 \cdot 49 \cdot 31$
$\pi_3\pi_4$	2 275 896 000	=	$24000 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31$
${\pi_1}^2\pi_4$	2 172 667 860	=	$20 \cdot 729 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31$
$\pi_2\pi_5$	4 825 673 125	=	$625 \cdot 49 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31$
$\pi_1\pi_2\pi_3$	8 634 368 000	=	$2^{14} \cdot 17000 \cdot 31$
π_8	6 899 079 264	=	$96 \cdot 49 \cdot 121 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31$

(Nicht ausgefüllte Stellen sind mit Nullen zu besetzen)

TAFEL D

	π_1	π_2	π_3	π_1^2	π_4	$\pi_1\pi_3$	π_5	$\pi_1^2\pi_3$	π_1^3	π_6	π_2^2	$\pi_1\pi_4$	$\pi_2\pi_3$	$\pi_1^2\pi_2$	π_7	$\pi_1\pi_5$	$\pi_2\pi_4$	π_3^2	$\pi_1^2\pi_3$	$\pi_1\pi_6$	π_1^4	$\pi_1\pi_2^2$	$\pi_3\pi_4$	$\pi_1^2\pi_4$	$\pi_2\pi_5$	$\pi_1\pi_2\pi_3$	π_8	
π_0	480	0	0	960	0	0	0	0	1440	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1920	0	0	0	0	0	0	π_0
π_1	60	252	336	8	0	504	0	560	12	0	0	0	0	756	0	0	0	0	784	0	16	0	0	0	0	0	0	π_1
π_2		96	168	0	384	112	336	0	0	0	0	640	0	168	0	504	0	0	0	0	0	0	0	0	896	0	0	π_2
π_3			120	4	144	324	216	28	0	288	0	0	540	0	0	324	0	12	28	432	0	0	0	0	0	756	0	π_3
π_1^2				124	0	252	0	448	12	0	504	0	0	0	0	0	0	672	0	0	16	756	0	0	0	0	0	π_1^2
π_4					144	112	336	0	0	224	0	304	0	0	560	0	0	0	0	336	0	0	336	112	0	0	0	π_4
$\pi_1\pi_2$						160	120	72	0	192	8	256	360	12	0	120	320	0	0	0	0	12	384	0	360	168	0	$\pi_1\pi_2$
π_5							180	12	0	80	0	288	240	24	320	36	0	0	0	480	0	0	0	0	360	36	240	π_5
$\pi_1\pi_3$								186	6	0	0	144	162	216	0	270	288	12	24	0	0	270	0	0	0	324	0	$\pi_1\pi_3$
π_1^3									192	0	0	0	0	252	0	0	0	0	560	0	16	504	0	0	0	0	0	π_1^3
π_6										196	4	84	252	0	280	168	148	0	0	84	0	0	420	0	0	0	420	π_6
π_2^2											200	0	168	0	0	0	512	336	0	0	0	168	0	0	0	0	0	π_2^2
$\pi_1\pi_4$												210	84	42	210	168	56	0	0	378	0	0	84	84	350	0	0	$\pi_1\pi_4$
$\pi_2\pi_3$													224	4	80	120	96	8	8	256	0	20	320	0	120	228	160	$\pi_2\pi_3$
$\pi_1^2\pi_2$														228	0	120	0	0	96	192	0	8	0	320	240	144	0	$\pi_1^2\pi_2$
π_7															240	24	40	0	0	240	0	0	240	48	280	0	120	π_7
$\pi_1\pi_5$																248	0	4	12	80	0	0	192	128	80	208	160	$\pi_1\pi_5$
$\pi_2\pi_4$																	250	0	0	84	0	42	126	0	280	168	210	$\pi_2\pi_4$
π_3^2																		252	4	0	8	0	144	0	432	0	0	π_3^2
$\pi_1^2\pi_3$																			256	0	8	0	0	144	0	162	0	$\pi_1^2\pi_3$
$\pi_1\pi_6$																				264	0	4	60	36	180	96	120	$\pi_1\pi_6$
π_1^4																					264	0	0	0	0	0	0	π_1^4
$\pi_1\pi_2^2$																						268	0	0	120	72	0	$\pi_1\pi_2^2$
$\pi_3\pi_4$																							276	4	60	72	120	$\pi_3\pi_4$
$\pi_1^2\pi_4$																								280	0	84	0	$\pi_1^2\pi_4$
$\pi_2\pi_5$																									288	12	48	$\pi_2\pi_5$
$\pi_1\pi_2\pi_3$																										294	0	$\pi_1\pi_2\pi_3$
π_8																											300	π_8

(Nicht ausgefüllte Stellen sind mit Nullen zu besetzen)

TAFEL E

	(g, g)	$(g, g+2\delta)$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_1^2	π_4	$\pi_1\pi_2$	π_5	$\pi_1\pi_3$	π_1^3	π_6	π_2^2	$\pi_1\pi_4$	$\pi_2\pi_3$	$\pi_1^2\pi_2$	π_7	$\pi_1\pi_5$	$\pi_2\pi_4$	π_3^2	$\pi_1^2\pi_3$	$\pi_1\pi_6$	π_1^4	$\pi_1\pi_2^2$	$\pi_3\pi_4$	$\pi_1^2\pi_4$	$\pi_2\pi_5$	$\pi_1\pi_2\pi_3$	π_8	
$r_g/240$			1/240	1	9	28	1	72	126	252	56	1	288	9	576	756	126	1008	756	576	28	56	2016	1	126	2016	576	2520	1512	2016	$r_g/240$
π_1	2	60	8	1																										π_1
π_2	4	96	35	7	1																									π_2
π_3	6	120	140	35	7	1																								π_3
π_1^2	8	124	120	29	6	1	1																							π_1^2
π_4	8	144	370	111	29	6	0	1																						π_4
$\pi_1\pi_2$	10	160	1407	455	133	34	7	7	1																					$\pi_1\pi_2$
π_5	12	180	2960	1056	350	105	27	28	6	1																				π_5
$\pi_1\pi_3$	14	186	4480	1624	552	174	56	48	12	2	1																			$\pi_1\pi_3$
π_1^3	18	192	1765	645	224	74	29	21	6	1	1	1																		π_1^3
π_6	14	196	6000	2296	826	275	77	84	22	5	0	0	1																	π_6
π_2^2	16	200	4104	1584	580	198	63	62	17	4	0	0	1	1																π_2^2
$\pi_1\pi_4$	16	210	18688	7504	2864	1028	336	344	104	28	6	0	6	0	1															$\pi_1\pi_4$
$\pi_2\pi_3$	18	224	43065	18081	7279	2790	1008	1007	338	103	27	0	28	7	6	1														$\pi_2\pi_3$
$\pi_1^2\pi_2$	20	228	37680	15959	6504	2535	959	932	323	101	34	7	27	6	7	1	1													$\pi_1^2\pi_2$
π_7	20	240	64470	28441	12103	4938	1897	1925	705	243	71	0	77	21	21	5	0	1												π_7
$\pi_1\pi_5$	22	248	135540	60948	26537	11142	4500	4480	1717	617	216	27	203	56	63	16	6	3	1											$\pi_1\pi_5$
$\pi_2\pi_4$	22	250	114816	52040	22840	9658	3880	3920	1508	550	171	0	190	64	56	16	0	4	0	1										$\pi_2\pi_4$
π_3^2	24	252	75720	34328	15112	6434	2681	2624	1027	376	139	21	127	42	41	11	5	2	1	0	1									π_3^2
$\pi_1^2\pi_3$	26	256	99555	45480	20216	8720	3724	3605	1442	537	219	56	183	57	63	17	12	3	2	0	1	1								$\pi_1^2\pi_3$
$\pi_1\pi_6$	24	264	343160	160929	73396	32437	13789	13846	5666	2215	806	77	818	279	280	88	22	25	5	6	0	0	1							$\pi_1\pi_6$
π_1^4	32	264	25320	11705	5300	2345	1065	994	414	159	74	29	56	21	21	6	6	1	1	0	1	1	0	1						π_1^4
$\pi_1\pi_2^2$	26	268	243600	115255	53116	23765	10283	10276	4274	1698	630	63	644	238	224	74	17	22	4	7	0	0	1	0	1					$\pi_1\pi_2^2$
$\pi_3\pi_4$	26	276	607440	292825	137704	62991	27889	27944	11961	4921	1916	225	1932	714	714	247	75	78	22	21	6	0	5	0	0	1				$\pi_3\pi_4$
$\pi_1^2\pi_4$	28	280	551700	267939	127107	58755	26439	26370	11461	4786	1962	336	1898	693	729	254	104	81	28	21	6	6	6	0	0	1	1			$\pi_1^2\pi_4$
$\pi_2\pi_5$	28	288	1102885	545629	264019	124642	57169	57274	25503	10979	4487	588	4550	1813	1785	669	212	235	70	77	20	0	21	0	6	5	0	1		$\pi_2\pi_5$
$\pi_1\pi_2\pi_3$	30	294	1834880	917616	449568	215346	100856	100520	45656	20044	8605	1512	8462	3416	3451	1322	528	472	170	154	54	27	48	0	12	12	6	2	1	$\pi_1\pi_2\pi_3$
π_8	30	300	1357104	688156	341950	166170	78547	78848	36371	16306	6941	980	7084	2968	2926	1171	390	446	145	161	45	0	50	0	15*	15	0	4	0	1 π_8

* In der Cartanschen Aufzählung der Gewichte der π_8 fehlt $\pi_1\pi_2^2$ (Oeuvres I, 383).

Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen. III [1956e]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 57 (1954), 511–514
[Zbl 0075.24104; MR 0083685]

(Communicated at the meeting of June 30, 1956)

11. In Gesprächen miteinander stiessen Herr J. TITS und ich wiederholt auf folgendes

Einbettungsproblem für homogene Räume: Gegeben sei eine Lie-Gruppe G mit der Lie-Untergruppe F. Gesucht wird ein Cartesischer (projektiver) Raum R und eine Einbettung von G/F in R, bei der die zu G gehörigen Automorphismen von G/F als lineare (projektive) Abbildungen von R erscheinen.

12. Als Beispiel, wie man dieses Problem behandeln kann, wähle ich den an und für sich interessanten Raum $\mathfrak{E}_8/\mathfrak{D}_8$. G und F sind also einfache Lie-Gruppen von gleichem Rang, F ist maximal in G. H sei für beide eine maximal abelsche reguläre Untergruppe. Ist G/F in R auf obengenannte Weise eingebettet, so muss es in R einen Vektor (Punkt) x geben, der genau bei F invariant ist, und umgekehrt, wenn ich eine lineare (projektive) Darstellung φ von G in R finden kann mit einem genau bei F invarianten x, so ist damit G/F auf die gewünschte Weise eingebettet.

Insbesondere ist x bei H invariant, gehört also zu einem Gewicht g. Wäre $g \neq 0$, so gäbe es eine Wurzelform α von F mit $(g, \alpha) \neq 0$, und dann wäre $E_\alpha x$ oder $E_{-\alpha} x \neq 0$ (E_α zu α gehörig, in F). Dieser Widerspruch zeigt, dass x zum Gewicht 0 gehört. Es kommt also darauf an, eine irreduzible lineare Darstellung von G zu finden mit einem Vektor, der bei F invariant ist.

Wenn man nur die von F (als Untergruppe von G) in R induzierte Darstellung betrachtet, so zerfällt R in irreduzible Teilräume R_i. Zu jedem gehört ein höchstes Gewicht $\hat{h}(R_i)$, das unter den Gewichten g der Darstellung φ von G zu finden ist. Die Gewichte g (alle mit der nötigen Vielfachheit) von φ ordnen sich in Kreisen W_j von äquivalenten (hinsichtlich der Kaleidoskopgruppe $\boldsymbol{K}(G)$ von G) an; wir numerieren diese

---

[1]) Siehe I, II: Proceedings Kon. Ned. Akad. v. Wet. **A 57**, 369–376, 488–491 = Indagationes Math. **16**, 369–376, 488–491 (1954).

Man korrigiere folgende Druckfehler:

S. 369, Z. 9 v.u. $E_\alpha x_i$ statt $E_\alpha x_t$.

S. 373, Z. 17 $2\frac{(\pi, \varrho)}{(\varrho, \varrho)}$ statt $2\frac{(\pi, \varrho_0)}{(\varrho, \varrho)}$

S. 376, Z. 1 (8.8) statt (5.8)

S. 488, Z. 7 v.u. $\alpha_\nu \pm \frac{1}{2}(\xi_2 \pm \xi_3)$ statt $\alpha_\nu \pm (\xi_2 \pm \xi_3)$

Z. 6 v.u. $(\xi_1 \pm \xi_2)$ statt $(\xi_2 \pm \xi_4)$

S. 490, Z. 29 v.u. 192 statt 48.

W_j nach aufsteigender Höhe ihres dominanten Gewichts, so dass W_0 die verschwindenden Gewichte enthält. Diese Kreise W_j zerfallen hinsichtlich $K(F)$ in Unterkreise.

Insbesondere zerfällt der höchste Kreis W_u (der mit dem höchsten Gewicht von G) in Unterkreise mit höchsten Gewichten $h_1, \ldots, h_p$, die hinsichtlich $K(F)$ inäquivalent sind. Jedes ihrer zieht eine irreduzible Darstellung von F in einem $R_1, \ldots, R_p$ nach sich. Die Gewichte von R_i sind die zu h_i hinsichtlich $K(F)$ äquivalenten, und ausserdem Gewichte aus niedrigeren Kreisen $W_{u-1}, W_{u-2}, \ldots$, die sich (mit den zugehörigen Vielfachheiten) nach unserer Methode [2]) berechnen lassen. Man schaue nun, ob die so erhaltenen Gewichte aus W_{u-1} das ganze W_{u-1} ausfüllen. Wenn das nicht der Fall ist, suche man die höchsten Gewichte $h_{p+1}, \ldots, h_{p+q}$ in W_{u-1}, die fehlen. Zu ihnen gehören gewisse $R_{p+1}, \ldots, R_{p+q}$. Man untersuche nun, ob W_{u-2} von den Gewichten von $R_1, \ldots, R_{p+q}$ erschöpft wird, und fahre so fort. Schliesslich wird sich zeigen, ob W_0 von den Gewichten der bisherigen $R_1, R_2, \ldots$ erschöpft wird. Dann und nur dann, wenn das nicht der Fall ist, gibt es einen genau bei F invarianten Vektor.

13. Die $\mathfrak{D}_8$ wählen wir in der $\mathfrak{E}_8$ so, dass die nicht verschwindenden Wurzelformen der $\mathfrak{D}_8$ unter denen der $\mathfrak{E}_8$ (siehe 10) werden:

$$\pm \xi_\nu,$$
$$\tfrac{1}{2}(\pm \xi_0 \pm \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3),$$
$$\pm \alpha_\nu \pm \tfrac{1}{2}(\xi_0 \pm \xi_1), \pm \alpha_\nu \pm \tfrac{1}{2}(\xi_2 + \xi_3),$$
$$\pm \alpha_\mu \pm \alpha_\nu.$$

Für die $\mathfrak{D}_8$ ist dies System etwas unpraktisch. Bei Rechnungen mit der $\mathfrak{D}_8$ gehen wir immer stillschweigend durch die Transformation

$$\alpha_\nu \to \omega_{\nu+1} \ (\nu = 1, 2, 3, 4),$$
$$\tfrac{1}{2}(\xi_0 + \xi_1) \to \omega_5, \ \tfrac{1}{2}(\xi_0 - \xi_1) \to \omega_6,$$
$$\tfrac{1}{2}(\xi_2 + \xi_3) \to \omega_7, \ \tfrac{1}{2}(\xi_2 - \xi_3) \to \omega_8$$

zu einer Basis von H über, bei der das Wurzelformensystem das übliche,

$$\pm \omega_\mu \pm \omega_\nu \quad (\mu \neq \nu),$$

wird.

Die fundamentalen höchsten Gewichte $\Sigma p_\nu \omega_\nu$ von $\mathfrak{D}_8$ findet man in der B entsprechenden

TAFEL B′

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	(g, g)	z
π_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	30
π_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	2	30
π_3	1	0	0	0	0	0	0	0	1	15
π_4	1	1	0	0	0	0	0	0	2	28
π_5	1	1	1	0	0	0	0	0	3	39
π_6	1	1	1	1	0	0	0	0	4	48
π_7	1	1	1	1	1	0	0	0	5	55
π_8	1	1	1	1	1	1	0	0	6	60
δ	7	6	5	4	3	2	1	0		

[2]) Siehe I, II, a.a.O.

In die Tafel D entsprechende Tafel D′ für die $\mathfrak{D}_8$ haben wir nur solche höchste Gewichte aufgenommen, die uns im Zusammenhang mit unserm Problem interessieren.

TAFEL D′

(Nicht ausgefüllte Stellen sind mit Nullen zu besetzen)

	π_4	π_2	π_3^2	$\pi_1\pi_3$	π_6	$\pi_3\pi_5$	$\pi_2\pi_4$	π_4^2	π_8	$\pi_{1,2}^2$	$\pi_1\pi_3^2$	$\pi_3\pi_7$	$\pi_1\pi_5$	
π_0	224	0	0	0	0	0	0	448	0	0	0	0	0	π_0
π_4	28	0	4	0	120	144	0	8	0	0	0	0	0	π_4
π_2		30	0	112	0	0	168	0	0	0	0	0	0	π_2
π_3^2			32	0	0	168	0	0	0	0	0	0	0	π_3^2
$\pi_1\pi_3$				46	0	0	84	0	0	0	42	0	126	$\pi_1\pi_3$
π_6					48	24	0	0	48	0	0	192	0	π_6
$\pi_3\pi_5$						56	0	4	0	0	0	80	0	$\pi_3\pi_5$
$\pi_2\pi_4$							60	0	0	0	4	0	60	$\pi_2\pi_4$
π_4^2								60	0	0	0	0	0	π_4^2
π_8									60	4	0	60	0	π_8
$\pi_{1,2}^2$										64	0	0	0	$\pi_{1,2}^2$
$\pi_1\pi_3^2$											64	0	0	$\pi_1\pi_3^2$
$\pi_3\pi_7$												72	0	$\pi_3\pi_7$
$\pi_1\pi_5$													72	$\pi_1\pi_5$

Aus Tafel D′ folgt

TAFEL E′

(Nicht ausgefüllte Stellen sind mit Nullen zu besetzen)

	(g,g)	$(g,g+2\delta)$	π_0	π_4	π_2	π_3^2	$\pi_1\pi_3$	π_6	$\pi_3\pi_5$	$\pi_2\pi_4$	π_4^2	π_8	$\pi_{1,2}^2$	$\pi_1\pi_3^2$	$\pi_3\pi_7$	$\pi_1\pi_5$	
r_g			1	112	128	16	1024	1120	1344	3584	112	1792	128	1024	8960	7168	
π_4	2	28	8	1													π_4
π_2	2	30	0	0	1												π_2
π_3^2	4	32	7	1	0	1											π_3^2
$\pi_1\pi_3$	4	46	0	0	7	0	1										$\pi_1\pi_3$
π_6	3	48	28	6	0	0	0	1									π_6
$\pi_3\pi_5$	6	56	76	19	0	7	0	3	1								$\pi_3\pi_5$
$\pi_2\pi_4$	6	60	0	0	28	0	6	0	0	1							$\pi_2\pi_4$
π_4^2	8	60	56	13	0	6	0	2	1	0	1						π_4^2
π_8	6	60	56	15	0	0	0	4	0	0	0	1					π_8
$\pi_{1,2}^2$	8	64	35	10	0	0	0	3	0	0	0	1	1				$\pi_{1,2}^2$
$\pi_1\pi_3^2$	8	64	0	0	28	0	7	0	0	1	0	0	0	1			$\pi_1\pi_3^2$
$\pi_3\pi_7$	8	73	252	81	0	21	0	23	5	0	0	5	0	0	1		$\pi_3\pi_7$
$\pi_1\pi_5$	8	72	0	0	76	0	21	0	0	5	0	0	0	0	0	1	$\pi_1\pi_5$

Die Berechnung der Zahlen r_g ist hier viel einfacher als in II.

Wie ein Kreis in Unterkreise zerfällt, zeigt das folgende Schema.

$\mathfrak{E}_8$	$\mathfrak{D}_8$
π_1	π_2, π_4
π_2	π_6, $\pi_1\pi_3$, π_3^2
π_3	π_8, $\pi_2\pi_4$, $\pi_3\pi_5$
π_1^2	π_2^2, π_4^2
π_4	$\pi_1\pi_5$, $\pi_3\pi_7$, $\pi_1\pi_3^2$, π_1^2

Hier steht also links ein dominantes Gewicht von $\mathfrak{E}_8$, und rechts stehen die ihm $\boldsymbol{K}(\mathfrak{E}_8)$-äquivalenten dominanten Gewichte von $\mathfrak{D}_8$. Die Summen der r_g rechts müssen den r_g links gleich sein.

Die Methode von 12 liefert nun die hinzukommenden Gewichte niederer Kreise. Bei π_1 und π_2 gibt es keine. Übrigens sind es (alle mit der Multiplizität 1):

$\mathfrak{E}_8$	$\mathfrak{D}_8$
π_3	$\pi_4,\ \pi_1\pi_3$
π_1^2	$\pi_6,\ \pi_2\pi_4,\ \pi_2,\ \pi_0$
π_4	$\pi_3\pi_5,\ \pi_3^2,\ \pi_1\pi_3$

Man kann also $\mathfrak{E}_8/\mathfrak{D}_8$ nicht mittels $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ einbetten, wohl aber mittels π_1^2, d.h. in einen 27000-dimensionalen cartesischen Raum.

Den bei π_1^2 gegenüber $\mathfrak{D}_8$ invarianten Vektor kann man auch explizit angeben. Man wähle in $\mathfrak{E}_8$ eine (im Sinne der Cartan–Killing-Form) orthonormale Basis $X_1, \ldots, X_{248}$, so dass $X_1, \ldots, X_{120}$ eine Basis der $\mathfrak{D}_8$ bilden. Man findet π_1^2 im Kronecker-Produkt $\pi_1 \times \pi_1$. Der invariante Vektor ist

$$128 \sum_{1}^{120} (X_i \times X_i) - 120 \sum_{121}^{248} (X_i \times X_i).$$

Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems*) [1956a]

Math. Z. 63 (1956), 374–405
[Zbl 0074.36103; MR 0082675]

Issai Schur zum Gedächtnis

Einleitung

Riemanns Habilitationsvortrag von 1854 „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" wurde erst 1867 von Dedekind veröffentlicht, und fast gleichzeitig erschien Helmholtz' Abhandlung „Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen", die im Titel eine deutliche Spitze gegen Riemann verrät. Gegen Riemann, der als philosophischer Schüler Herbarts höchstens die *Topologie* des Raumes als unhypothetisch gelten läßt, und für den die *Metrik* schon Hypothese ist, wendet Helmholtz ein: Die bloße Tatsache einer Metrik erfordere schon einen Kongruenzbegriff für starre Körper. Denn wie könnte man — gäbe es keine starren Körper — Maße am selben Ort und an verschiedenen Orten vergleichen? Fundamental sei also nicht die von Riemann postulierte quadratische Maßbestimmung im Infinitesimalen, sondern die Kongruenz von starren Körpern, die dann bei der (Helmholtzschen) Lösung des Raumproblems die Existenz der quadratischen Maßbestimmung nach sich ziehe.

Natürlich ist Helmholtz' Einwand, den auch B. Erdmann mit anderen übernimmt, ungerechtfertigt. Denn die praktische Metrik erfordert nicht feste Körper, sondern nur feste Maßstäbe (also eindimensionale „Körper") als Meßgeräte, und mehr braucht Riemann nicht. Riemanns Ansatz, der von der quadratischen Differentialform ausgeht und hinterdrein, wenn es sein muß, den euklidischen oder nichteuklidischen Charakter der Geometrie durch Homogenitätsforderungen erzwingt, hat sich denn auch als fruchtbarer erwiesen als der Helmholtzsche, bei dem die Homogenität vorausgeschickt wird. Als Rechtfertigung der klassischen Metriken aber ist Helmholtz' Analyse effektvoller. Doch hat ihre erste wirklich befriedigende Formulierung fast hundert Jahre auf sich warten lassen.

Bei Helmholtz fehlt zunächst der Begriff der Gruppe, er wird immerzu implizit vorausgesetzt. Die Gruppe tritt bei ihm auf als Invarianzgruppe einer Funktion von zwei Punkten, die auf der gegebenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit variieren. Wir würden heutzutage dieser Funktion gleich die axiomatischen Forderungen auferlegen, der man eine Metrik unterwirft.

*) Die Resultate sind vorläufig mitgeteilt worden auf dem Internationalen Mathematikerkongreß, Amsterdam 1954, und auf der Berliner Riemann-Tagung 1954.

Hält man $k(\leq n-1)$ Punkte in allgemeiner Lage fest, so soll ein $(k+1)$-ter Punkt in allgemeiner Lage noch aller Ortsveränderungen fähig sein, die mit der Invariante verträglich sind; für $k=n$ ist keine stetige Ortsveränderung mehr zugelassen. Im Sinne dieser „freien Beweglichkeit der starren Körper" wird man Helmholtz' Hauptforderung (nach Lie) interpretieren, wenn man sich sehr große Freiheiten erlauben will. Aber ohne solche Freiheiten kann man mit ihnen überhaupt nichts anfangen, denn so exakt seine Formulierungen 1868 scheinen mochten, so verschwommen sahen sie zwanzig Jahre später aus, als Lie sie seiner Kritik unterwarf.

Helmholtz erschließt aus seinen Postulaten die euklidische und die nicht-euklidischen Geometrien, die „klassischen" Geometrien des Raumproblems (anfangs übersieht er die hyperbolische — der Zusammenhang zwischen hyperbolischer Geometrie und den Räumen konstanter negativer Krümmung war im gleichen Jahre von Beltrami entdeckt worden).

In seiner Beweisführung nahm Helmholtz die Theorie der kontinuierlichen Gruppen vorweg. Seine Methode war aber ganz unzureichend, wie Lie bemerkte. Helmholtz verwendete nicht die „freie Beweglichkeit", die er postuliert, sondern die „freie Beweglichkeit im Infinitesimalen", die tiefer einschneidet. Diese „freie Beweglichkeit im Infinitesimalen" besagt: Man betrachte die Vereine, die bestehen aus einem Punkt, einer 1-Richtung, einer 2-Richtung, ..., einer $(n-1)$-Richtung (alle in Inzidenz); über der Menge dieser Vereine sei die Gruppe transitiv. — Diese Forderung führt recht einfach, wie Lie zeigt, zu den klassischen Gruppen des Raumproblems. (Siehe auch den Weylschen Beweis!)

Lie wertet auch das Postulat der freien Beweglichkeit der starren Körper aus. Genauer gesagt, begnügt er sich mit der Forderung, die Gruppe sei transitiv über der Menge der Vereine von $n-2$ Punkten in allgemeiner Lage (wenn n die Dimension der Mannigfaltigkeit ist). Er vermutet übrigens, daß man für $n>4$ mit weniger Punkten auskommt — eine Vermutung, die sich neuerdings bestätigt hat: für alle Dimensionen reicht „drei" aus.

Lie setzt natürlich voraus, daß er sich in einer genügend regulären Mannigfaltigkeit befindet, daß die Gruppe die nötigen Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt; er bewegt sich immer im Kleinen und läßt sich durch topologische Schwierigkeiten, die man erst später erkannt hat, nicht beirren. Es ist schwer zu schätzen, wieviel von seinen Betrachtungen man heute noch gelten lassen will.

Der ständige Einwand, den Zeitgenossen gegen solche Betrachtungen erhoben, war der eines circulus vitiosus: in der „Zahlenmannigfaltigkeit" werde ja schon die ganze Geometrie postuliert (insbesondere auch die Unendlichkeit des Raumes, die hinterdrein in der sphärischen Geometrie wieder geleugnet werde). Auch noch 1872 — nachdem Cantor und Dedekind geometriefrei das Zahlenkontinuum definiert hatten und Weierstraß' Aufbau bekannt geworden war — hört man den Einwand noch sehr dringend, und erst seit Stolz' Wiederentdeckung der Bedeutung des Archimedischen Axioms (1881—1883) und Veroneses nicht-Archimedischer Geometrie (1890) nimmt

der Widerstand ab. Doch auch Hilberts „Grundlagen der Geometrie" begegnen ihm noch.

Im Anhang IV (1902) löst Hilbert das Raumproblem für die Ebene mit rein topologischen Mitteln. Als Substrat nimmt er die Zahlenebene (schließt also von vornherein elliptische und sphärische Geometrie aus). Von der Bewegungsgruppe F fordert er erstens, daß die Menge der Fx_1 mit $Fx_0 = x_0$ für $x_1 \neq x_0$ unendlich sei, ferner daß aus $f_n \in F$, $f_n(x_0) = x_n$, $f_n(y_0) = y_n$, $f_n(z_0) = z_n$ und $\lim x_n = x'$, $\lim y_n = y'$, $\lim z_n = z'$ die Existenz eines $f' \in F$ folge mit $f(x_0) = x'$, $f(y_0) = y'$, $f(z_0) = z'$. Durch diese zweite Forderung wird der Gruppe ungemerkt eine gewisse „Starrheit" auferlegt.

Partielle Behandlungen erfuhr das Raumproblem im weiteren Verlaufe von L. E. J. Brouwer (1909—1910), R. L. Moore (1919), Süß (1925—1927), St. S. Cairns (1923), R. G. Lubben (1928), Kérékjartó (1950), Montgomery und Zippin (1940).

Allgemein hat Kolmogorov es 1930 von neuem angegriffen. Er verlangt vom Raume R Metrisierbarkeit, Kompaktheit im Kleinen und Zusammenhang, von der Gruppe F Transitivität und eine Art von gleichmäßiger Stetigkeit, die man auch Starrheit nennen dürfte. Außerdem fordert er: Ist $x_0 \in R$, J seine Standuntergruppe ($f \in J$ bedeute: $f \in F$ und $fx_0 = x_0$), ist B eine Bahn ($= Jx_1$, $x_1 \neq x_0$) und B' eine zweite Bahn, so wird B durch B' oder B' durch B von x_0 getrennt. Auf den Bahnen sind wieder Bahnen zweiter Stufe definiert, die ebenfalls die Trennungseigenschaft besitzen sollen, usw. bis die Bahnen schließlich 0-dimensional werden.

Kolmogorov hat seinen Beweis für die Behauptung, daß die Forderungen zu den klassischen Lösungen des Raumproblems führen, nicht veröffentlicht; bis heute ist sie nur unter der zusätzlichen Voraussetzung der Vollständigkeit von F bewiesen.

Inzwischen hatten Garret Birkhoff (1941, 1944) und H. Busemann (1941, 1942) die „Invariante" der klassischen Untersuchungen wieder in den Gesichtskreis bezogen. Sie betrachteten metrische Räume und stellten Forderungen an die Gruppe der Isometrien: Jede Isometrie von Teilmengen (Birkhoff) bzw. von dreipunktigen Teilmengen (Busemann) soll zu einer Isometrie des ganzen Raumes fortgesetzt werden können. Außerdem stellten sie noch Konvexheits- und ähnliche Forderungen. Einen weiteren Schritt tat H. C. Wang (1951, 1952), der die kompakten, zusammenhängenden metrischen Räume klassifiziert, in denen jedes Punktepaar in jedes kongruente durch eine Isometrie des Raumes übergeführt werden kann. Auch die im kleinen kompakten Räume behandelte Wang, jedoch unter zusätzlichen Voraussetzungen (darunter die einer geraden Dimension). Die inzwischen erzielte Lösung von Hilberts 5. Problem greift in Wangs Untersuchungen entscheidend ein.

In einer kurzen Note (ohne Beweise) hat J. Tits (1952) die Untersuchungen zum Raumproblem zu einem gewissen Abschluß gebracht. Er ist wieder zu Kolmogorovs Ansatz zurückgekehrt. Er setzt aber von Kolmogorovs Trennungseigenschaften nur die erste voraus und klassifiziert die Räume und

Gruppen, die die Forderungen befriedigen[1]). In seinen Ergebnissen ist das von Wang enthalten. Die Trennungseigenschaft der nächsten Stufe führt bereits zu den klassischen Räumen.

Ich bin zu der vorliegenden Arbeit durch die Titssche Note angeregt worden. Ich komme mit schwächeren Voraussetzungen als Tits aus. Meine Beweismethode ist ganz verschieden von der von Tits[2]) und, wie mir scheint, einfacher.

Ich werde nun die Titssche Fassung des Raumproblems mit meiner Verschärfung auseinandersetzen. Wir verlangen vom Raum R

Kompaktheit im Kleinen und Zusammenhang.

In R wirkt eine transitive Gruppe von Homöomorphismen, die die Eigenschaften S, V, Z besitzt:

S (Starrheit): Zu je zwei abgeschlossenen Mengen A, B von R mit $A \cap B = O$, von denen mindestens eine kompakt ist, gibt es eine offene Menge $U(\neq O)$, so daß für jedes $f \in F$ die Beziehungen $f(U) \cap A \neq O$ und $f(U) \cap B \neq O$ einander ausschließen.

Das ist im wesentlichen die Forderung, der Kolmogorov den Namen „gleichmäßige Stetigkeit" gibt. Man könnte sie übrigens noch abschwächen. Sie führt zu einer gleichmäßigen Struktur in R, die bei F invariant ist. Im Sinne dieser Struktur fordert man nun

V: Vollständigkeit von F.

Es wäre interessant festzustellen, in welchem Maße diese Forderung im weiteren Verlaufe wirklich nötig ist.

Ist $x_0 \in R$, so heißt *Standuntergruppe* J von x_0 die Gruppe der $f \in F$ mit $f x_0 = x_0$. Jede Menge $J x_1$ heißt *Bahn*.

Z: Es gibt eine Bahn, die R zerlegt.

Hier stellt Tits (wie Kolmogorov) die schärfere Forderung, daß unter je zwei Bahnen $(\neq (x_0))$ eine ist, die zwischen x_0 und der anderen den Raum zerlegt.

Durch die Bedingungen S, V, Z werden die Möglichkeiten sehr stark beschränkt. Mit allgemein gruppentheoretisch-topologischen Methoden (unter anderem unter Verwendung der Yamabeschen Lösung des verallgemeinerten fünften Hilbertschen Problems[3])) gelangt man zu Satz I, der aussagt, daß F notwendig eine (eventuell gemischte) transitive Lie-Gruppe mit endlich vielen Komponenten ist, und daß J kompakt und (bei geeigneter Koordinatenwahl) eine lineare orthogonale und auf der Abstandssphäre transitive Gruppe ist.

Die Darstellungstheorie der halbeinfachen Gruppen liefert dann die Methoden zur Klassifikation der zulässigen Standuntergruppen J und zum Einbau dieser in die möglichen F. Das endgültige Ergebnis können wir zusammenfassen in einer (von Tits herrührenden) Liste.

[1]) Die Klassifikation ist unvollständig, aber später korrigiert worden.

[2]) die ich inzwischen aus einem Manuskript kennengelernt habe.

[3]) YAMABE, H.: On the conjecture of Iwasawa and Gleason. Ann. of Math. (2) **58**, 48—54 (1953). — YAMABE, H.: A generalization of a theorem of Gleason. Ann. of Math. (2) **58**, 351—365 (1953).

Ehe wir diese angeben, führen wir einige Bezeichnungen ein.

Mit $*$ geben wir einen der folgenden Körper an:

re: Körper der reellen Zahlen.

ko: Körper der komplexen Zahlen.

qu: (Schief-)Körper der Quaternionen (über re).

ok: (Alternativ-)Körper der Oktaven (über re).

$\mathrm{VR}(n, *)$ ist der n-dimensionale Vektorraum über $*$. (Für $* = \mathrm{ok}$ wird nur $n = 2$ verwendet.)

$\mathrm{AR}(n, *)$ ist der entsprechende affine Raum [d.h. $\mathrm{VR}(n, *)$ nach Aufhebung der Auszeichnung von 0].

$\mathrm{UVR}(n, *)$ und $\mathrm{UAR}(n, *)$ sind dieselben Räume nach Adjunktion einer hermiteschen Form $\sum x_i \bar{x}_i$ in den Koordinaten (unitäre Räume).

$\mathrm{PR}(n, *)$ ist der n-dimensionale projektive Raum, der aus $\mathrm{VR}(n+1, *)$ entsteht als Raum der Klassen (ϱx) $(\varrho \in *,\ x \in \mathrm{VR})$. Im Falle ok muß PR anders definiert werden[4]).

$\mathrm{ElR}(n, *)$ ist der n-dimensionale elliptische Raum und entsteht aus $\mathrm{PR}(n, *)$ durch Adjunktion einer Absoluten $\sum x_i \bar{x}_i = 0$. Im Falle ok muß ElR anders definiert werden[4]).

$\mathrm{SpR}(n, \mathrm{re})$ ist der n-dimensionale sphärische Raum, der als Überlagerung von $\mathrm{ElR}(n, \mathrm{re})$ entsteht, oder als $\sum_1^{n+1} x_i^2 = 1$ in $\mathrm{VR}(n+1, \mathrm{re})$.

$\mathrm{HyR}(n, *)$ ist das Innere einer Absoluten $\sum_1^{n} x_i \bar{x}_i = x_{n+1} \bar{x}_{n+1}$ in $\mathrm{PR}(n, *)$. Im Falle ok muß HyR anders definiert werden.

Zu diesen Räumen gehören die Gruppen der (stetigen) Automorphismen, die durch ein vorgesetztes G bezeichnet werden. Insbesondere sind

GUAR	die euklidischen	Bewegungsgruppen.
GElR	die elliptischen	
GSpR	die sphärischen	
GHyR	die hyperbolischen	

Dabei ist $\mathrm{GSpR}(n, \mathrm{re})$ die Gruppe $\mathrm{GUVR}(n+1, \mathrm{re})$ auf $\sum_1^{n+1} x_i^2 = 1$ betrachtet.

Von den Gruppen GUAR betrachten wir noch gewisse Untergruppen G_0, die definiert sind

für $* = \mathrm{re}, \mathrm{ko}$ durch: Funktionaldeterminante $= 1$,

für $* = \mathrm{qu}$, durch $b = 1$ in der Formel

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j b + c_i$$

für ein Element von $\mathrm{GUAR}(n, \mathrm{qu})$.

[4]) Siehe FREUDENTHAL, H.: Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Utrecht 1951.

Ferner verstehe man für ElR(n, re), ElR(n, ko) (n ungerade), SpR(n, re) ($n > 1$) unter G_0 die Komponente der Identität von G.

Übrigens sei $G_0 = G$.

Hauptsatz I. *Die den Bedingungen S, V, Z genügenden Gruppen F sind: Die zwischen* G *und* G_0 *von*

$$\mathrm{UAR}(n, *), \quad \mathrm{ElR}(n, *), \quad \mathrm{Sp}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{Hy}(n, *)$$

liegenden abgeschlossenen Gruppen.

Ferner (1) *die Untergruppe von* GUAR$(7, \mathrm{re})$, *deren Standuntergruppe eine Darstellung der* G_2 *(bzw. ergänzt mit einer Spiegelung), nämlich die Automorphismengruppe der Oktaven mit Realteil* 0, *ist;*

(2) *die Untergruppe von* GUAR$(8, \mathrm{re})$, *deren Standuntergruppe die niedrigste Spindarstellung von* GUVR$(7, \mathrm{re})$ *ist;*

(3) *die Untergruppe von* GSpR$(6, \mathrm{re})$, *die entsteht, wenn man obengenannte Darstellung der* G_2 *auf* SpR$(6, \mathrm{re})$ *betrachtet (eventuell ergänzt mit einer Spiegelung);*

(4) *die Untergruppe von* GSpR$(7, \mathrm{re})$, *die entsteht, wenn man oben genannte Spindarstellung von* GUVR$(7, \mathrm{re})$ *auf* SpR$(7, \mathrm{re})$ *betrachtet;*

(5, 6) *die den beiden letzten Gruppen* (3—4) *entsprechenden Gruppen von* PR$(6, \mathrm{re})$ *und* PR$(7, \mathrm{re})$.

Man sieht also, daß schon Kolmogorovs Trennungseigenschaft erster Stufe tief einschneidet, und daß man sie nur für eine einzige Bahn zu fordern braucht. Will man nun die klassischen Räume des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems charakterisieren, so wird man eine Trennungseigenschaft höherer Stufe fordern, und das bedeutet, daß eine Bahn (mit der auf ihr herrschenden Darstellung der Standuntergruppe) wieder ein S, V, Z genügender Raum sein muß, und so fort.

Aus der Liste von Hauptsatz I folgt:

Hauptsatz II. *Fordert man die Gültigkeit von Z auch für eine Bahn, so bleiben übrig die klassischen Gruppen des Raumproblems*

$$\mathrm{GUAR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GElR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GSpR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GHyR}(n, \mathrm{re})$$

und die zugehörigen Gruppen G_0; *ferner* (1), (2), (4), (6), *auf deren Bahnen bzw. die Gruppen* (3), (4), (3), (3) *herrschen. Die zugehörigen Räume sind alle von konstanter Krümmung. Fordert man Z auch noch für die Bahnen zweiter Stufe, so bleibt außer den klassischen Gruppen nur* (2) *übrig. Fordert man schließlich Z noch für die Bahnen dritter Stufe, so bleiben nur die klassischen Gruppen übrig.*

Verfolgt man die Dinge weiter in der Richtung von G. Birkhoff, Busemann und Wang, so erhält man:

Hauptsatz III. *R sei metrisch, zusammenhängend und im Kleinen kompakt. F sei die Gruppe der Isometrien von R. Es gebe eine Zahl* $\gamma > 0$, *aber*

kleiner als die obere Grenze der in R auftretenden Abstände, mit der Eigenschaft: F führt ein Punktepaar mit dem Abstand γ in jedes andere mit dem Abstand γ über. Dann ist F eine der Gruppen

$$\mathrm{GUAR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GElR}(n, *), \quad \mathrm{GSpR}(n, *), \quad \mathrm{GHyR}(n, *).$$

Hauptsatz IV. *Es gebe außerdem eine Zahl $\gamma' > 0$, aber kleiner als der Durchmesser der Abstandssphäre mit dem Radius γ, mit der Eigenschaft, daß F ein Tripel mit den Abständen γ, γ, γ' in jedes andere derartige überführe. Dann ist F eine der Gruppen*

$$\mathrm{GUAR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GElR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GSpR}(n, \mathrm{re}), \quad \mathrm{GHyR}(n, \mathrm{re}).$$

Literatur zur Einleitung

RIEMANN, B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, 1854 gehaltener Habilitationsvortrag, 1867 veröffentlicht in Abh. Ges. Wiss. Göttingen **15** = Werke 1876, 254—269.

HELMHOLTZ, H.: Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. (Vortrag vom 22. Mai 1866?) Verh. Naturhist. med. Verein Heidelberg **4**, 197—202 (1868) = Wissensch. Abh. II (1883), 610—617.

HELMHOLTZ, H.: Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1868**, 193—221 = Wissensch. Abh. II (1883), 618—639.

ERDMANN, B.: Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.

LIE, S.: Über die Grundlagen der Geometrie. Berichte Ges. Wiss. Leipzig **42**, 284—321, 355—418 (1890) = Ges. Abh. II, 1, 380—468.

LIE, S.: Theorie der Transformationsgruppen III, Abt. V. Leipzig 1893.

CANTOR, G.: Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. **5**, 123—132 (1872) = Ges. Abh. 92—102.

DEDEKIND, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872.

STOLZ, O.: B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. **18**, 255—279 (1881), speziell 269.

STOLZ, O.: Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Math. Ann. **22**, 504—519 (1883).

VERONESE, G.: I continuo rettilineo e l'assioma V d'Archimede. Atti Accad. Linc., Memorie cl. fis. (4) **6**, 603—624 (1890).

HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie, Anhang IV (1902).

WEYL, H.: Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923.

BROUWER, L. E. J.: Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie. Math. Ann. **67**, 246—267 (1909); **69**, 181—203 (1910).

MOORE, R. L.: On the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert problem of the foundations of geometry. Amer. J. Math. (2) **41**, 299—319 (1919).

SÜSS, W.: Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. Tohoku Math. J. **26**, 365—385 (1926); **27**, 214—242 (1926); **28**, 228—241 (1927). — Jap. J. Math. **4**, 97—119 (1927).

CAIRNS, ST. S.: An axiomatic basis for plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 234—244 (1923).

LUBBEN, R. G.: The double elliptic case of the Lie-Riemann-Helmholtz problem of the foundation of geometry. Fundamenta Math. **11**, 34—95 (1928).

KÉRÉKJARTO, B. DE: Sur le groupe des homographies et des antihomographies d'une variable complexe. Comment. Helvet. **13**, 68—82 (1950).

MONTGOMERY, D., and L. ZIPPIN: Topological group foundations of rigid space geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, 21—49 (1940).

KOLMOGOROFF, A.: Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1930**, 208—210.

BIRKHOFF, GARRET: Metric foundations of Geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. **27**, 402—406 (1941).

BIRKHOFF, GARRET: Metric foundations of Geometry I. Trans. Amer. Math. Soc. **55**, 465—492 (1944).

BUSEMANN, H.: Metric Methods in Finsler spaces. Ann. of Math. Studies **8** (1942).

WANG, H. C.: Two-point homogeneous spaces. Ann. of Math. (2) **55**, 177—191 (1952).

WANG, H. C.: Two theorems on metric spaces. Pacific J. Math. **1**, 473—480 (1951).

TITS, J.: Etude de certains espaces métriques. Bull. Soc. Math. Belg. **1952**, 44—52 (1953).

TITS, J.: Sur un article précédent: Etudes de certains espaces métriques. Bull. Soc. Math. Belg. **1953**, 124—125 (1953).

Vorbemerkungen

1. „kompakt" wird im Sinne des früheren „bikompakt" gebraucht.

2. Wo von Gruppen die Rede ist, handelt sich es meistens um Transformationsgruppen, d.h. um in gewisser Weise dargestellte Gruppen. Man soll also z.B. die Bezeichnung GUVR(n, re) nicht verwenden wie $O(n)$, das immer mehr benutzt wird, um die n-dimensionale Drehgruppe zu bezeichnen und nicht ihre Darstellung im n-Raum, für die wir gerade den Ausdruck GUVR(n, re) eingeführt haben, um Mißverständnissen vorzubeugen.

3. Der Infinitesimalring einer Lie-Gruppe wird durch den entsprechenden fetten Buchstaben bezeichnet; z.B. Infinitesimalring von F ist $\boldsymbol{F}$, von B_3 ist $\boldsymbol{B}_3$. Auch Teilmengen und Elemente von Infinitesimalringen werden fett bezeichnet.

4. Die einfachen Lie-Gruppen (Lie-Algebren) werden gemäß der Cartanschen Klassifikation bezeichnet. Hinzugefügt ist: $\boldsymbol{A}_0$ für die 1-dimensionale Algebra, $\boldsymbol{O}$ für die 0-dimensionale. Auch für die fundamentalen Darstellungen bedienen wir uns der Cartanschen[5]) Bezeichnungen.

5. *Gemischte* Lie-Gruppe ist die Bezeichnung für eine Gruppe mit einer diskreten Menge von Komponenten und mit einer *reinen* (d.h. zusammenhängenden) Lie-Gruppe als Komponente der Eins.

6. In einer Transformationsgruppe bedeute id die identische Transformation.

1. Topologische Starrheit

1.1. *Räume* werden im folgenden *Hausdorffsch, im Kleinen kompakt* und *zusammenhängend* vorausgesetzt.

Im Raum R sei eine *transitive Gruppe* F von *Homöomorphismen* (von R auf sich) gegeben. Der Gruppe F erlegen wir noch die Bedingung auf:

S (topologische Starrheit): Zu je zwei fremden abgeschlossenen Mengen A und B von R, von denen mindestens eine kompakt ist, gibt es eine nichtleere offene Menge U, so daß für jedes $f \in F$ die Beziehungen $fU \cap A \neq O$, $fU \cap B \neq O$ einander ausschließen.

[5]) Oeuvres I, 1, 355—398.

1.2. Auf Grund von (S) versieht man R mit einer invarianten gleichmäßigen Struktur:

Ist U offen in R, so sei $\tilde{U}$ die Menge der $(x, y) \in R \times R$ mit der Eigenschaft: es gibt ein $f \in F$ mit $x, y \in fU$. Diese $\tilde{U}$ spielen die Rolle eines Umgebungssystems der Diagonale von $R \times R$.

Unter $\tilde{U}_1 \tilde{U}_2$ versteht man bekanntlich die Menge der (x, z) mit der Eigenschaft: es gibt ein y mit $(x, y) \in \tilde{U}_1$, $(y, z) \in \tilde{U}_2$. Wir zeigen:

Zu jedem V (offen $\neq O$) gibt es ein U (offen $\neq O$) mit $\tilde{U}^2 \subset \tilde{V}$.

Beweis. Zu V gibt es ein nichtleeres offenes kompaktes V_1 mit $\overline{V}_1 \subset V$. Auf $\overline{V}_1$ und R/V wenden wir (S) an: es gibt ein U_1, so daß aus $f \in F$, $fU_1 \cap \overline{V}_1 \neq O$ folgt: $fU_1 \subset V$. Wegen der Transitivität von F dürfen wir annehmen: $U_1 \cap V_1 \neq O$. Wir setzen $U_1 \cap V_1 = U$. Dann gilt auch:

$$\text{aus} \quad fU \cap U \neq O \quad \text{folgt} \quad fU \subset V.$$

Sei nun (x, y), $(y, z) \in \tilde{U}$, also mit geeigneten $f_i \in F$:

$$x, y \in f_1 U, \quad y, z \in f_2 U,$$

also
$$f_1 U \cap f_2 U \neq O,$$
$$f_2^{-1} f_1 U \cap U \neq O,$$
$$f_2^{-1} f_1 U \subset V,$$
$$f_1 U \subset f_2 V,$$

aber auch
$$f_2 U \subset f_2 V.$$

Also
$$x, z \in f_2 V,$$
$$(x, z) \in \tilde{V}.$$

Also
$$\tilde{U}^2 \subset \tilde{V}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

1.3. Es gibt ein nichtleeres offenes $U \subset R$ mit der Eigenschaft: ist $A \subset R$ kompakt, so ist auch

$$\cup (fU \mid f \in F,\ fU \cap A \neq O) \quad \text{kompakt.}$$

Beweis. Wir wählen V und U, so daß V kompakt und $\tilde{U}^2 \subset \tilde{V}$ ist. Wir überdecken $\bar{A}$ mit endlich vielen $f_i U$ $(f_i \in F)$. Zu jedem $f \in F$ mit $fU \cap A \neq O$ gibt es ein i mit $fU \cap f_i U \neq O$. Also $f_i^{-1} fU \cap U \neq O$, $f_i^{-1} fU \subset V$, $fU \subset f_i V$. Die Vereinigung dieser fU ist also in der der $f_i V$, also kompakt.

1.4. U sei gemäß 1.3 gewählt. Sei W_n die $\tilde{U}^n$-Umgebung irgendeines $x_0 \in R$. Dann ergibt sich induktiv: W_n ist kompakt. W_n ist nämlich die Menge der z mit $y \in W_{n-1}$, $(y, z) \in \tilde{U}$, also die Vereinigung der fU mit $fU \cap W_{n-1} \neq O$. Nach 1.3 folgt aus der Kompaktheit von W_{n-1} die von W_n.

1.5. Weiter gilt: $\cup W_n = R$.

Beweis. R ist zusammenhängend, $\cup W_n$ ist offen. Wir zeigen, daß es auch abgeschlossen ist: wäre $x \in \overline{\cup W_n} \setminus \cup W_n$, so gälte für jedes f mit $x \in fU : fU \cap \cup W_n \neq O$. Dann gäbe es ein i mit $fU \cap W_i \neq O$, also $fU < W_{i+1}$, $x \in W_{i+1}$ im Widerspruch zur Annahme.

1.6. Wir definieren eine Topologie in F:

Für $U \neq O$ offen, A kompakt in R und $f_i \in F$ setzen wir

$$(f_1, f_2) \in \{U, A\}$$

dann und nur dann, wenn

$$(f_1 x, f_2 x) \in \tilde{U} \text{ für alle } x \in A .$$

Die $\{U, A\}$ gelten als Umgebungssystem der Diagonale von $F \times F$. Unter $\{U, A\}$-Umgebung von f_1 verstehen wir die Menge der f_2 mit $(f_1, f_2) \in \{U, A\}$.

Das ist eine Hausdorffsche Topologie[6]).

1.7. F wird mit dieser Topologie eine topologische Gruppe:

Zu gegebenen $f_i \in F$ mit

$$f_1 f_2 = f_3$$

und gegebenem $\{V, A\}$ bestimmen wir $\{U, A_1\}$ und $\{U, A_2\}$, so daß aus $(f_i, g_i) \in \{U, A_i\}$ $(i = 1, 2)$ folgt $(f_3, g_3) \in \{V, A\}$. Wir wählen nämlich U, so daß

$$\tilde{U}^2 < \tilde{V}$$

und

$$A_1 = f_2 A, \quad A_2 = A .$$

Dann wird

$$(f_1 x, g_1 x) \in \tilde{U} \quad \text{für} \quad x \in f_2 A ,$$

$$(f_1 f_2 x, g_1 f_2 x) \in \tilde{U} \quad \text{für} \quad x \in A .$$

Weiter

$$(f_2 x, g_2 x) \in \tilde{U} \quad \text{für} \quad x \in A ,$$

$$(g_1 f_2 x, g_1 g_2 x) \in \tilde{U} \quad \text{für} \quad x \in A .$$

Also

$$(f_1 f_2 x, g_1 g_2 x) \in \tilde{U}^2 < V \quad \text{für} \quad x \in A , \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ferner ergibt sich mit

$$(f, g) \in \{V, f^{-1} A\}:$$

$$(f x, g x) \in \tilde{V} \quad \text{für} \quad x \in f^{-1} A ,$$

$$(x, g f^{-1} x) \in \tilde{V} \quad \text{für} \quad x \in A ,$$

$$(g^{-1} x, f^{-1} x) \in \tilde{V} \quad \text{für} \quad x \in A ,$$

und damit ist auch die Stetigkeit von $f \to f^{-1}$ erwiesen.

[6]) Siehe BOURBAKI, l. III, chap. X, § 1, no. 5, prop. 2.

1.8. Sei $x_0 \in R$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0, so daß die $\{U, x_0\}$-Umgebung der Identität von F kompakt ist im Raum der stetigen Abbildungen von R in R (im Sinne der kompakten Konvergenz)[7]).

Das folgt aus dem Satz von Ascoli[8]). Um ihn anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, daß für jedes $x \in R$ die Menge der $f x$ mit $(f, \mathrm{id}) \in \{U, x_0\}$ kompakt ist; U wählen wir dabei gemäß 1.3—5. Die Bedingung für f lautet dann auch

$$(f x_0, x_0) \in \tilde{U}.$$

Nach 1.5 gibt es ein i mit

$$(x_0, x) \in \tilde{U}^i.$$

$$(f x_0, f x) \in \tilde{U}^i,$$

$$(x_0, f x) \in \tilde{U}^{i+1},$$

und das ist nach 1.4 kompakt.

1.9. Wir setzen im folgenden noch voraus:

V: F ist vollständig.

Dann folgt aus 1.8: F ist im Kleinen kompakt.

1.10. Im Beweise von 1.8 können wir statt U irgendeine der Mengen W_n wählen (s. 1.4). Dann ergibt sich, daß die Menge der f mit

$$(f, \mathrm{id}) \in \{W_n, x_0\}$$

kompakt ist. Nach 1.5 ist F die Vereinigung der abzählbar vielen (kompakten) $\{W_n, x_0\}$-Umgebungen der Identität. Hieraus folgt:

Ist $Q \neq O$ offen in F, so ist F Vereinigung abzählbar vieler fQ $(f \in F)$.

1.11. Die kanonische Abbildung $\varphi: f \to f x_0$ von F auf R ist offen.

Dieser Satz wird im wesentlichen genau so bewiesen wie entsprechende Sätze, bei denen das zweite Abzählbarkeitsaxiom vorausgesetzt wird[9]). 1.10 kann nämlich dieses Axiom vertreten. Wir skizzieren den Beweis:

Sei $Q \neq O$ kompakt und offen in F. Man kann F mit abzählbar vielen fQ überdecken. Sei $Q x_0$ nirgends dicht. Dann ist auch $fQ x_0$ nirgends dicht. R wird dann mit abzählbar vielen nirgends dichten $f_n Q x_0$ überdeckt. Sei $U_1 \neq O$ offen und kompakt in R. Wir definieren induktiv ein nichtleeres offenes $U_{n+1} \subset U_n$, so daß $\overline{U}_{n+1} \cap f_n Q x_0 = O$ ist; wegen der Nirgendsdichtheit ist das möglich. Wegen der Kompaktheit von U_1 ist $\bigcap \overline{U}_n$ nichtleer und weiter fremd zu allen $f_n Q x_0$, also zu R, und das ist ein Widerspruch.

Also ist $Q x_0$ irgendwo dicht. $\overline{Q}\, x_0 = \overline{Q x_0}$ enthält also einen inneren Punkt. Ist $Q_1 \neq O$ offen und $\overline{Q}_1 \subset Q$, so gilt analog: $\overline{Q}_1 x_0$ enthält einen inneren Punkt. Also auch: $Q x_0$ enthält einen inneren Punkt, also eine offene Menge V. Sei P die Menge der $f \in F$ mit $f x_0 \in V$. Dann ist P offen in F, also auch $P \cap Q = Q'$ offen in F und $Q' x_0 = V$ offen.

[7]) BOURBAKI, l. III, chap. X, § 1, no. 3.

[8]) BOURBAKI, l. III, chap. X, § 4, no. 1.

[9]) FREUDENTHAL, H.: Ann. of Math. **37**, Nr. 4—5, 46—56 (1936).

Also gibt es zu jedem offenen Q in F ein nichtleeres offenes $Q' \subset Q$, so daß $Q' x_0$ auch offen ist.

Sei P nun beliebig offen in F. Wir müssen zeigen: $P x_0$ offen in R. Wir dürfen annehmen: $\mathrm{id} \in P$. Es genügt auch, zu zeigen, daß x_0 innerer Punkt von $P x_0$ ist. Wir wählen das offene Q so, daß $Q^{-1} Q \subset P$ ist. Sei $f \in Q'$ (siehe vorigen Absatz). $f x_0$ ist dann innerer Punkt von $Q' x_0$, also x_0 innerer Punkt von $f^{-1} Q' x_0 \subset P x_0$, w. z. b. w.

2. Bahnzerlegung

2.1. Zu einem Punkt $x_0 \in R$ gehört die *Standuntergruppe* J von F, die besteht aus den $f \in F$ mit $f x_0 = x_0$. Nach 1.11 darf R mit dem Nebengruppenraum F/J kanonisch identifiziert werden. Jede Menge Jx (mit festem x) heißt eine *J-Bahn* oder kurz eine *Bahn*.

Ist U eine Umgebung von x_0 gemäß 1.3, so ist

$$\cup (fU \mid f \in J)$$

eine bei J invariante Umgebung von x_0. Sie ist in der $\tilde{U}^2$-Umgebung von x_0 enthalten, also nach 1.4 kompakt.

Ebenso ist nach 1.4—5 jede Bahn kompakt.

2.2. Wir stellen nun noch die Forderung:

Z: Es gibt eine Bahn, die R zerlegt.

Wir beweisen in 2.3—7:

Satz I. *Unter den Voraussetzungen (S, V, Z) ist F eine (eventuell gemischte) transitive Lie-Gruppe mit endlich vielen Komponenten. J ist kompakt und bei geeigneter Koordinatenwahl eine lineare orthogonale Gruppe, die sich auf der Abstandssphäre transitiv benimmt.*

2.3. Sei F' eine offene abgeschlossene Untergruppe von F. Sei $J' = J \cap F'$. Die kanonische Beziehung zwischen den Nebengruppenräumen F/J und F'/J' ist dann eine Homöomorphie.

Beweis. Jede Nebengruppe von F' in F enthält Elemente von J, da sonst $R = F/J$ nicht zusammenhinge. Wir bilden F/J auf F'/J' ab:

$$fJ \to fJ \cap F'.$$

$fJ \cap F' = f(J \cap f^{-1} F')$ ist nicht leer. Ist $f_1 \in fJ \cap F'$ und $f_2 \in J'$, so ist $f_1 f_2 \in fJ \cap F'$. Ist $f_i \in fJ \cap F'$, so ist $f_1^{-1} f_2 \in J'$. Also ist $fJ \cap F'$ eine Nebengruppe von J' in F'. Die Beziehung ist eineindeutig, denn aus $f_1 J \cap F' = f_2 J \cap F'$ folgt $f_1^{-1} f_2 \in J \cap F'$. Sie bezieht F/J *auf* F'/J', denn für ein gegebenes fJ' mit $f \in F'$ gilt: $fJ \to fJ \cap F' = f(J \cap F') = fJ'$. Der topologische Charakter ist klar.

2.4. Der Bahnbegriff ändert sich, wenn man (unter den Voraussetzungen von 2.3) von F/J nach F'/J' übergeht. Wir zeigen: Eine J-Bahn in F/J zerfällt in *endlich* viel J'-Bahnen in F'/J'.

J ist nämlich kompakt, also ist auch J/J' kompakt, aber außerdem, da J' offen in J ist, diskret. Also ist J/J' endlich. Die J-Bahn zerfällt in höchstens soviel J'-Bahnen wie J in Nebenklassen nach J'.

2.5. F_0 sei die Einskomponente von F. Dann ist F_0 Normalteiler von F.

F_0 ist zusammenhängend und im Kleinen kompakt, besitzt also beliebig kleine kompakte Untergruppen F_1, so daß F_0/F_1 Liesch ist[10]).

Wir zeigen, daß der Normalisator F' von F_1 in F offen (und abgeschlossen) in F ist:

Mit F_1 ist auch fF_1f^{-1} Normalteiler in F_0, also auch $F_1 \cdot fF_1f^{-1}$. Nun ist $F_1 \cdot fF_1f^{-1}/F_1$ Normalteiler der Lie-Gruppe F_0/F_1 und andererseits in einer vorgeschriebenen Umgebung der Eins enthalten, wenn f genügend nahe der Eins gewählt wird. Das ist aber nur möglich, wenn $F_1 \cdot fF_1f^{-1} = F_1$ ist. Das bedeutet wiederum $fF_1f^{-1} = F_1$ für *alle* f in der Nähe der Eins. Der Normalisator von F_1 ist also offen.

2.6. Die Forderung (Z) kann auch geschrieben werden:

$$JfJ \text{ zerlegt } F \text{ für gewisses } f \in F.$$

Wir wählen nun F_1 nach 2.5 so klein, daß auch noch gilt:

$$JfF_1J \text{ zerlegt } F.$$

Wir definieren F' als Normalisator von F_1 in F und können nach 2.5 (Ende) nun 2.3 (auf F_1 statt F') anwenden. Von f darf man nach 2.3 voraussetzen: $f \in F'$. Wir unterwerfen JfF_1J/J der kanonischen Homöomorphie aus 2.3. Dann ergibt sich:

$$JfF_1J' = JfF_1J \cap F' \quad \text{zerlegt } F'.$$

Nach 2.4 gibt es endlich viele $f_i \in F'$, so daß

$$JfF_1J' = \bigcup_i J'f_iF_1J'.$$

Da F_1 Normalteiler in F' ist, darf man das auch schreiben:

$$(*) \qquad \bigcup_i F_1J'f_iF_1J' \quad \text{zerlegt } F'.$$

Mit der kanonischen Abbildung

$$\varphi: \quad F' \to F'/F_1 = F'',$$
$$R = F'/J' \to F'/F_1J' = R'',$$
$$f_i \to f_i'',$$
$$F_1J' \to F_1J'/F_1 = J''$$

erhält man eine gemischte Lie-Gruppe F'', die transitiv wirkt in R'' und da eine Standuntergruppe J'' besitzt. $(*)$ besagt:

Z': R'' wird durch eine gewisse endliche Vereinigung von Bahnen zerlegt.

[10]) YAMABE, H.: Ann. of Math. (2) **58**, 351—365 (1953).

Da R'' eine (n-dimensionale) analytische Mannigfaltigkeit ist und jede Bahn in R'' als Vereinigung analytischer Mannigfaltigkeiten liegt, ist mindestens eine Bahn (nach Z') $(n-1)$-dimensional.

J'' ist kompakt und besitzt daher nur endlich viel Komponenten; die Einskomponente heiße J_0''. Da wegen des Zusammenhanges von R'' jede Komponente von F'' Punkte von J'' enthält, besitzt F'' höchstens soviel Komponenten wie J'', also nur endlich viele. Die Einskomponente von F'' heiße F_0''.

2.7. Die $j \in J''$ induzieren im Infinitesimalring $\boldsymbol{F}_0''$ lineare Abbildungen

$$\psi_j : \boldsymbol{f} \to j \boldsymbol{f} j^{-1},$$

die J'' darstellen. Wegen der Kompaktheit von J'' sind sie nach geeigneter Abstandsdefinition orthogonal. Die ψ_j lassen $\boldsymbol{J}_0''$ und sein orthogonales Komplement $\boldsymbol{K}$ invariant. Man darf in der Nähe von x_0 nun R'' mit $\exp \boldsymbol{K}$ identifizieren: man ordne dem Punkte fJ'' von R den (dort eindeutig bestimmten) Schnittpunkt von $\exp \boldsymbol{K}$ mit der Nebenklasse fJ'' zu.

Die Punkte von R'' stellen sich dann im Kleinen in der Form

$$\exp \boldsymbol{k} \cdot J'' \qquad (\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K})$$

dar. Anwendung eines $j \in J''$ ergibt

$$\exp \boldsymbol{k} \cdot J'' \to j \exp \boldsymbol{k} \cdot J'' = j \exp \boldsymbol{k} j^{-1} J'' = \exp j \boldsymbol{k} j^{-1} \cdot J''.$$

j transformiert R dann gemäß ψ_j.

J'' benimmt sich also in der Nähe von x_0 wie eine orthogonale Gruppe. Da eine Bahn von J'' $(n-1)$-dimensional ist, sind alle seine Bahnen im allgemeinen mindestens $(n-1)$-dimensional. Hieraus folgt, daß J'' auf der Abstandssphäre transitiv ist.

2.8. Wir kehren zu F zurück. Wir hatten $F_0'' = F_0/F_1$. Ist F_0 nicht Lie-Gruppe, so gibt es eine echt absteigende Folge F_n von Normalteilern von F_0 so, daß die F_0/F_n Lie-Gruppen sind, die die in Satz I ausgedrückten Eigenschaften besitzen. Es gibt dann eine echte unendliche Folge stetiger kanonischer Homomorphismen

$$F_0/F_1 \leftarrow F_0/F_2 \leftarrow \cdots.$$

Nach der Klassifikation der dem Satz I entspringenden Lie-Gruppen zeigt sich aber (s. 8), daß solche Folgen höchstens die Länge 5 haben können. F_0 muß daher eine Lie-Gruppe sein und F eine gemischte Lie-Gruppe, die dem Satz I genügt.

3. Die zulässigen reinen Standuntergruppen

3.1. Wir behalten die Bezeichnungen bei, lassen aber die doppelten Akzente weg.

Mit J besitzt auch J_0 die Eigenschaften: in sich kompakt, linear, orthogonal, transitiv auf der Sphäre.

Wir behandeln vorläufig nur J_0, lassen aber den Index weg, setzen also Zusammenhang voraus.

J wirkt in einem linearen Raum $\boldsymbol{K}$.

3.2. J ist sicher (reell) irreduzibel, also ist $\boldsymbol{J}$ halbeinfach oder direkte Summe eines halbeinfachen und eines eindimensionalen Lie-Ringes. Die zweite Möglichkeit besteht nur, wenn $\boldsymbol{J}$ komplex reduzibel ist.

Da J orthogonal ist, sind alle seine Wurzelformen und Gewichte rein imaginär (bezogen auf eine reelle maximal Abelsche reguläre Untergruppe H). Mit jeder Wurzelform kommt also auch die entgegengesetzte vor und mit jedem Gewicht das entgegengesetzte. Wenn x ein Vektor von $\boldsymbol{K}$ vom Gewicht g ist, so ist $\bar{x}$ einer vom Gewicht $-g$. Das zur Wurzel α gehörige Element von $\boldsymbol{J}$ wird wie üblich mit $\boldsymbol{e}_\alpha$ bezeichnet.

3.3. Seien x und y Vektoren von $\boldsymbol{K}$ vom Gewicht $g \neq 0$ und $g' \neq 0$. Wegen der Transitivität von J auf der Sphäre muß es ein $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{J}$ geben mit

$$\boldsymbol{j}(x + \bar{x}) \equiv y + \bar{y} \mod x + \bar{x}.$$

Sei

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{h} + \Sigma(\tau_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \bar{\tau}_\alpha \bar{\boldsymbol{e}}_\alpha) \quad \text{mit } \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}.$$

Also

$$\left(\boldsymbol{h} + \Sigma\left(\tau_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \tau_\alpha \bar{\boldsymbol{e}}_\alpha\right)\right)(x + \bar{x}) \equiv y + \bar{y} \mod x + \bar{x}.$$

Links steht eine Kombination von Vektoren der Gewichte $\pm g$, $\pm(g \pm \alpha)$ (α = variable Wurzelform), rechts eine von Vektoren der Gewichte $\pm g'$. Also:

3.3.1. Für je zwei Gewichte $g \neq 0$, $g' \neq 0$ mit $g \neq \pm g'$ gilt:

$$g + g' \quad \text{oder} \quad g - g' \quad \text{ist Wurzelform.}$$

Sei nun $g = g' \neq 0$ (aber $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ unabhängig). Dann ergibt sich analog:

3.3.2. Ist das Gewicht $g \neq 0$ von einer Vielfachheit > 1, so ist diese Vielfachheit $= 2$ und $2g$ Wurzelform.

Schließlich hat man:

3.3.3. Das Gewicht 0 kann höchstens die Vielfachheit 1 besitzen, in dem Falle ist jedes Gewicht Wurzelform.

3.4. Ist $\boldsymbol{J}$ nicht-trivial direkte Summe zweier Lie-Ringe $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$, so ist 0 nicht Gewicht und einer von beiden hat (in der durch $\boldsymbol{J}$ induzierten Darstellung) höchstens zwei verschiedene Gewichte.

Beweis. Der maximal abelsche reguläre Teilring von $\boldsymbol{L}_i$ heiße $\boldsymbol{H}_i$. Jede Wurzelform verschwindet entweder auf $\boldsymbol{H}_1$ oder auf $\boldsymbol{H}_2$. Ist 0 Wurzelform, so verschwindet nach 3.3.3 jedes Gewicht auf $\boldsymbol{H}_1$ oder auf $\boldsymbol{H}_2$. Wäre g_i ($i = 1, 2$) ein Gewicht, das auf $\boldsymbol{H}_i$ nicht verschwände, so käme man mit dem Gewicht $g_1 \pm g_2$ (s. 3.3.1) zu einem Widerspruch. Also verschwinden alle Gewichte etwa auf $\boldsymbol{H}_2$. Also $\boldsymbol{L}_2 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Jedes Gewicht g von $\boldsymbol{J}$ ist zu schreiben als Summe von Linearformen

$$g = g_1 + g_2,$$

wo g_1 auf $\boldsymbol{H}_2$ verschwindet und g_2 auf $\boldsymbol{H}_1$. Mit einem weiteren Gewicht

$$g' = g_1' + g_2' \quad \text{mit} \quad g_1' \neq \pm g_1$$

erhalten wir nach 3.3.1 eine Wurzelform $g \pm g'$, die auf $\boldsymbol{H}_1$ oder auf $\boldsymbol{H}_2$ verschwinden muß. Alle g' haben also die Form

$$\pm g_1 + g_2' \quad \text{oder} \quad g_1' \pm g_2.$$

Diese beiden widersprechen einander nach dem soeben Bewiesenen, wenn nicht $g_1 = \pm g_1'$ oder $g_2 = \pm g_2'$. Hieraus folgt die Behauptung.

3.5. Wir nehmen im folgenden an, daß $\boldsymbol{L}_2$ nur zwei verschiedene Gewichte besitzt. $\boldsymbol{L}_2$ ist dann vom Rang 0 oder vom Rang 1. Im zweiten Fall ist $\boldsymbol{K}$ komplexe Summe von Ebenen, in denen $\boldsymbol{L}_2$ wie $\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ operiert[11]).

Jedenfalls erzeugen die Vektoren von Gewichten $g_1 + g_2$ bzw. $g_1 - g_2$ einen Unterraum $\boldsymbol{K}_+$ bzw. $\boldsymbol{K}_-$ von $\boldsymbol{K}$. Ist $x \in \boldsymbol{K}_+$ ein Vektor vom Gewicht g, so ist $\bar{x}$ vom Gewicht $-g$, also in $\boldsymbol{K}_-$. Daher sind $\boldsymbol{K}_+$ und $\boldsymbol{K}_-$ konjugiert komplex. Ihre (direkte) Summe ist $\boldsymbol{K}$.

$\boldsymbol{K}_+$ und $\boldsymbol{K}_-$ sind invariant gegenüber $\boldsymbol{L}_1$, da die Basis-Operationen von $\boldsymbol{L}_1$ einen Vektor vom Gewicht $g_1 + g_2$ in einen von einem Gewicht $g_1 + g_2$ oder $g_1 + \alpha + g_2$ (α Wurzelform von $\boldsymbol{L}_1$) überführen.

Ist $\boldsymbol{L}_2$ vom Range 1, so vertauscht die Spiegelung an der Wurzelebene $g_2 = 0$ ($2g_2$ ist Wurzel von $\boldsymbol{L}_2$) die $g_1 \pm g_2$ untereinander. $\boldsymbol{K}_+$ und $\boldsymbol{K}_-$ werden durch $\boldsymbol{L}_1$ dann äquivalent transformiert.

In keinem Fall kann $\boldsymbol{L}_1$ (in $\boldsymbol{K}_+$) einer reellen Darstellung äquivalent sein. Sonst wäre nämlich die Abbildung $x \to \bar{x}$ ($x \in \boldsymbol{K}$) vertauschbar mit den Elementen von $\boldsymbol{L}_1$; die Teilräume $\boldsymbol{K}'$ bzw. $\boldsymbol{K}''$ der $x + \bar{x}$ bzw. $i(x - \bar{x})$ mit $x \in \boldsymbol{K}_+$ wären ebenfalls invariant bei $\boldsymbol{L}_1$ und obendrein reell; die Darstellungen von $\boldsymbol{L}_1$ in $\boldsymbol{K}'$ und $\boldsymbol{K}''$ wären reell äquivalent; $\boldsymbol{L}_2$, das mit $\boldsymbol{L}_1$ vertauschbar und orthogonal ist, wäre vom Range 0; die Elemente von $\boldsymbol{L}$ hätten die Form

$$\begin{pmatrix} M & \varrho \cdot 1 \\ -\varrho \cdot 1 & M \end{pmatrix},$$

und $\boldsymbol{J}$ könnte nicht transitiv auf der Sphäre sein.

3.6. Für die Gewichte von $\boldsymbol{L}_1$ (d.h. die Gewichte von $\boldsymbol{J}$, auf $\boldsymbol{H}_1$ betrachtet) gelten wieder die Behauptungen 3.3.1–3, jedoch mit einigen Modifikationen:

3.6.1. Für je zwei Gewichte $g_1 \neq 0$, $g_1' \neq 0$ mit $g_1 \neq \pm g_1'$ gilt:

$$g_1 + g_1' \quad \text{oder} \quad g_1 - g_1' \quad \text{ist Wurzelform.}$$

3.6.2. Alle Gewichte $g_1 \neq 0$ sind einfach.

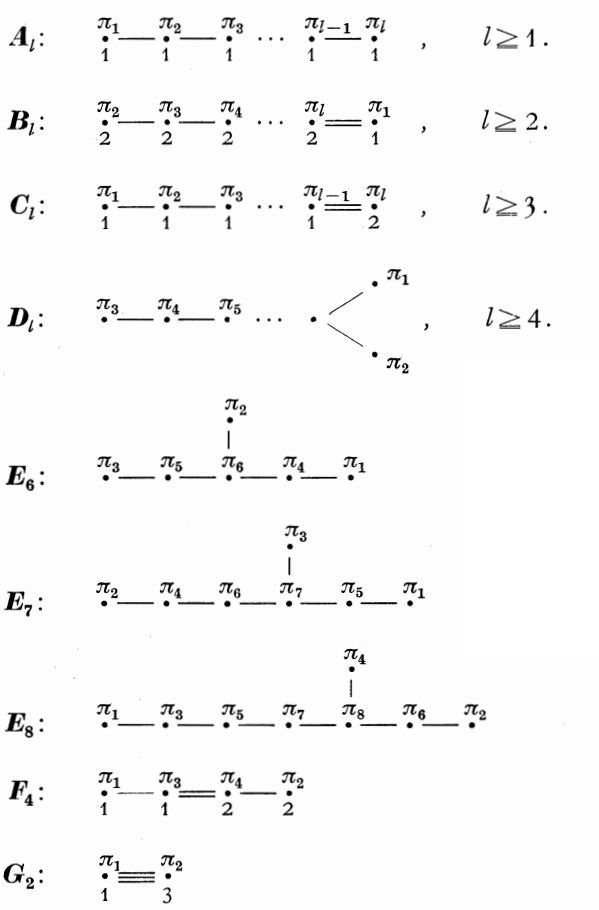
3.6.3. Das Gewicht 0 kann höchstens die Vielfachheit 2 besitzen.

[11]) Siehe Vorbemerkungen 4.

Hier ist 3.6.1 klar. — Ist g_1 mehrfach, so gibt es ein mehrfaches Gewicht g_1+g_2 von $\boldsymbol{J}$; nach 3.3.2 ist dann $2g_1+2g_2$ Wurzelform, also $g_1=0$ und g_2 von der Vielfachheit 2. Hieraus folgen 3.6.2—3.

3.7. Wir belegen $\boldsymbol{J}$, wenn es einfach ist, und $\boldsymbol{L}_1$ (im Raum $\boldsymbol{K}_1$), wenn $\boldsymbol{J}$ direkte Summe ist, mit dem gemeinsamen Namen $\boldsymbol{L}$. Wir untersuchen vorläufig $\boldsymbol{L}$. Es ist klar, daß $\boldsymbol{L}$ einfach ist — eventuell auch $=\boldsymbol{O}$ oder eindimensional, aber diese Fälle lassen wir vorläufig weg.

3.8. Bei den einfachen Gruppen bedienen wir uns der folgenden Schemata:



Die irreduziblen Wurzelformen ϱ_i sind als dicke Punkte angedeutet. Bei einem ϱ_i ist das zugehörige fundamentale dominante Gewicht π_i angegeben, d.h.

$$2\frac{(\pi_j, \varrho_i)}{(\varrho_i, \varrho_i)} = \begin{cases} 1 \text{ für } j=i \\ 0 \text{ für } j\neq i. \end{cases}$$

Wir notieren noch die dominanten Wurzelformen $\neq 0$:

$\boldsymbol{A}_l$: $\pi_1 + \pi_l$ (für $l = 1 : \pi_1$).
$\boldsymbol{B}_l$: π_2, π_3 (für $l = 2 : \pi_2, 2\pi_1$).
$\boldsymbol{C}_l$: $2\pi_1, \pi_2$.
$\boldsymbol{D}_l$: π_4.
$\boldsymbol{E}_6$: π_2.
$\boldsymbol{E}_7$: π_3.
$\boldsymbol{E}_8$: π_1.
$\boldsymbol{F}_4$: π_1, π_2.
$\boldsymbol{G}_2$: π_1, π_2.

3.9. Sei g ein dominantes Gewicht von $\boldsymbol{L}$ mit der Eigenschaft:

$$2\frac{(g,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \geqq 2$$

für eine gewisse irreduzible Wurzelform ϱ. Dann ist $g - 2\varrho$ Gewicht, also ist $2g - 2\varrho = \alpha$ nach 3.3.1 und 3.6.1 Wurzelform (denn 2ϱ ist sicher keine). $\alpha = 0$ bedeutet, daß das dominante Gewicht g auch irreduzible Wurzelform ist, also Rang $= 1$. Im Falle $\alpha \neq 0$ zeigt sich, daß α dominante Wurzelform ist. Denn $2\frac{(\alpha,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \geqq 0$ und für jeden Nachbarn ϱ' von ϱ:

$$2\frac{(\alpha,\varrho')}{(\varrho',\varrho')} > 0.$$

Weiter ist

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \text{ gerade}$$

für jede Wurzelform β. Das ist nur möglich beim Rang $= 1$ oder bei $\alpha = 2\pi_1(\boldsymbol{B}_2)$ und $\alpha = 2\pi_1(\boldsymbol{C}_l)$ (s. 3.8). ϱ darf nur einen Nachbarn haben [außer für $\pi_2(\boldsymbol{A}_3)$, aber das ist schon weggefallen]. Im Falle $\alpha = 2\pi_1(\boldsymbol{C}_l) = 2\omega_1$, wird $\varrho = \omega_1 - \omega_2$, $g = 2\omega_1 - \omega_2$, was nicht dominant ist. Im Falle $\alpha = 2\pi_1(\boldsymbol{B}_2) = \omega_1 + \omega_2$, $\varrho = \omega_1 - \omega_2$ oder $= \omega_2$, $g = \frac{3}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2$ oder $\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{3}{2}\omega_2$, die nicht dominant sind.

Nur der Rang 1 bleibt übrig. Mit 3.3.1 und 3.6.1 verträglich sind $g = p\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ $p = 1, 2, 3$. Die irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht $3\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ ist 4-dimensional und wesentlich nicht reell[12]). $\boldsymbol{J}$ ist dann höchstens $(3+3)$-dimensional und kann auf der Sphäre im $2 \cdot 4$-dimensionalen Raum nicht transitiv sein. $3\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ fällt also auch weg.

Nun bleiben $\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$, $2\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ übrig.

3.10. Wir dürfen jetzt voraussetzen:

$$2\frac{(g,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} \leqq 1$$

für jedes dominante Gewicht g und jede irreduzible Wurzelform ϱ.

[12]) Die Realitätsfragen bei Darstellungen werden wir an anderer Stelle allgemein behandeln. — Alle $p\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ mit ungeradem p sind nichtreell.

Sei

$$(*) \qquad 2\frac{(g,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} = 1 \quad \text{und} \quad 2\frac{(g,\varrho')}{(\varrho',\varrho')} = 1$$

für zwei irreduzible Wurzelformen ϱ, ϱ'. Dann sind $g-\varrho$ und $g-\varrho'$ Gewichte. $\varrho-\varrho'$ ist nicht Wurzelform, also (nach 3.3.1 und 3.6.1) $\alpha = 2g-\varrho-\varrho'$ wohl. $\alpha = 0$ bedeutet $g = \frac{1}{2}(\varrho+\varrho')$; das kann aber nur beim Rang 2 dominant sein; man sieht leicht, daß das unmöglich ist.

α ist wieder dominant und

$$2\frac{(\alpha,\varrho'')}{(\varrho'',\varrho'')} > 0$$

für alle Nachbarn ϱ'' von ϱ oder ϱ'. Nur $\pi_3(\boldsymbol{B}_3)$, $\pi_2(\boldsymbol{C}_3)$ lassen das zu, erweisen sich aber auch als unmöglich. Daher ist (*) unzulässig und g notwendig fundamental.

Im folgenden ist ϱ_i die irreduzible Wurzelform, für die

$$2\frac{(g,\varrho_i)}{(\varrho_i,\varrho_i)} = 1$$

gilt. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

3.11.

Hier sind $g-\varrho_i$ und $g-\varrho_{i-1}-\varrho_i-\varrho_{i+1}$ Gewichte. $\varrho_{i-1}+\varrho_{i+1}$ ist nicht Wurzelform. Daher ist (3.3.1 und 3.6.1) $\alpha = 2g-\varrho_{i-1}-2\varrho_i-\varrho_{i+1}$ wohl Wurzelform, und zwar wieder 0 oder dominant.

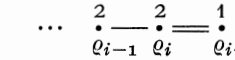
$$2\frac{(\alpha,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} > 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i-2}, \varrho_{i+2},$$
$$= 0 \quad \text{sonst.}$$

Mit 3.8 ist das nur verträglich, wenn entweder g an einem der Schemaenden steht oder an einem Kreuzpunkt oder eines der Gewichte

$$\pi_2(\boldsymbol{A}_3),\ \pi_3(\boldsymbol{A}_5),\ \pi_l(\boldsymbol{B}_l),\ \pi_{l-1}(\boldsymbol{C}_l),\ \pi_3(\boldsymbol{F}_4),\ \pi_4(\boldsymbol{F}_4)$$

ist. Nun ist die Darstellung zu $\pi_3(\boldsymbol{A}_5)$ wesentlich komplex[13]; die reelle Darstellung geschieht in $2\cdot 20$ Dimensionen; die Gruppe hat höchstens $35+3$ Dimensionen; es herrscht also keine Transitivität auf der Sphäre.

3.12.



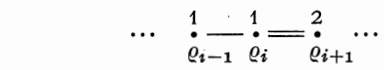
Wieder ist $\alpha = 2g-\varrho_{i-1}-2\varrho_i-\varrho_{i+1} = 0$ oder dominante Wurzelform. Hier wird

$$2\frac{(\alpha,\varrho)}{(\varrho,\varrho)} > 0 \quad \text{auch noch für} \quad \varrho = \varrho_{i+1}.$$

Hiermit fallen die $\pi_l(\boldsymbol{B}_l)$ fort, außer $\pi_2(\boldsymbol{B}_2)$. Weiter fällt $\pi_4(\boldsymbol{F}_4)$ fort.

[13]) Siehe Fußnote 12. — Die Darstellungen $\pi_k(\boldsymbol{A}_{2k-1})$ sind nur für gerades k reell.

3.13.

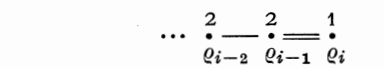


$\alpha = 2g - \varrho_{i-1} - 2\varrho_i - \varrho_{i+1} = 0$ oder dominant.

$$2\frac{(\alpha, \varrho)}{(\varrho, \varrho)}$$

benimmt sich wie in 3.11; aber auch noch > 0 für $\varrho = \varrho_i$. Demnach fallen die $\pi_{l-1}(\boldsymbol{C}_l)$ fort, außer $\pi_2(\boldsymbol{C}_3)$. Im letzten Fall besitzt die Darstellung zwei Vektoren vom Gewicht 0, was nach 3.3.2 unmöglich ist für $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{J}$; für $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1$ ist die Dimension der Darstellung wieder zu hoch. Also fällt auch $\pi_2(\boldsymbol{C}_3)$ fort. Ferner fällt noch $\pi_3(\boldsymbol{F}_4)$ fort.

3.14.

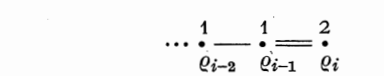


Hier sind ϱ_i und $\varrho_{i-2} + 2\varrho_{i-1} + 2\varrho_i$ Wurzelformen, ihre Differenz aber nicht. $\alpha = (g - \varrho_i) + (g - \varrho_{i-2} - 2\varrho_{i-1} - 2\varrho_i) = 0$ oder dominante Wurzelform

$$2\frac{(g, \varrho)}{(\varrho, \varrho)} > 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i-3},$$
$$= 0 \quad \text{sonst.}$$

Hierdurch fällt $\pi_1(\boldsymbol{B}_l)$ fort für $l > 5$. Für $l = 5$ ist die irreduzible Darstellung nicht reell[14]); die reelle ist 64-dimensional, die Gruppe ist höchstens $(55+3)$-dimensional. Also ist auch $\pi_1(\boldsymbol{B}_5)$ unmöglich.

3.15.

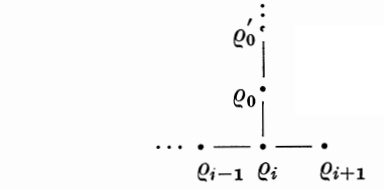


Wir nehmen die Wurzelformen ϱ_i, $\varrho_i + 2\varrho_{i-1} + \varrho_{i-2}$. Dann gilt für $\alpha = 2g - 2\varrho_i - 2\varrho_{i-1} - \varrho_{i-2}$

$$2\frac{(\alpha, \varrho)}{(\varrho, \varrho)} \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i-1},\ \varrho_{i-3},\ \varrho_{i+1} \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit fallen die $\pi_l(\boldsymbol{C}_l)$ fort außer für $l = 3$. Auch $\pi_3(\boldsymbol{C}_3)$ hat wieder keine irreduzible reelle Darstellung[15]); die Dimension der Darstellung wird $2 \cdot 20$, die der Gruppe höchstens $21 + 3$; also keine Transitivität. — Auch $\pi_2(\boldsymbol{F}_4)$ fällt fort.

3.16.



[14]) Siehe Fußnote 12. — $\pi_1(\boldsymbol{B}_l)$ ist reell für $l \equiv 0,3 \bmod 4$.

[15]) Siehe Fußnote 12. — Die $\pi_l(\boldsymbol{C}_l)$ geben nur für gerades l reelle irreduzible Darstellungen.

Wie in 3.11 sieht man, daß $\alpha = 2g - \varrho_{i-1} - 2\varrho_i - \varrho_{i+1} = 0$ oder dominante Wurzelform ist mit

$$2\frac{(\alpha, \varrho)}{(\varrho, \varrho)} > 0 \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i-2}, \varrho_{i+2}, \varrho_0.$$

Alle $\pi_l(\boldsymbol{D}_l)$ und $\pi_3(\boldsymbol{E}_8)$ fallen darum fort. Ersetzt man ϱ_{i+1} durch ϱ_0, so sieht man, daß auch $\pi_6(\boldsymbol{E}_6)$ und $\pi_7(\boldsymbol{E}_7)$ fortfallen.

Ferner sind $\varrho_1 + \cdots + \varrho_i + \varrho_{i+1}$ und $\varrho_1 + \cdots + \varrho_i + \varrho_0$ Wurzelformen, aber ihre Differenz nicht. $\alpha = 2g = 2\varrho_1 - \cdots - 2\varrho_i - \varrho_{i+1} - \varrho_0$ ist 0 oder dominante Wurzelform mit

$$2\frac{(\alpha, \varrho)}{(\varrho, \varrho)} \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \varrho = \varrho_{i+2}, \varrho_0' \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierdurch fallen $\pi_1(\boldsymbol{D}_l)$ und $\pi_2(\boldsymbol{D}_l)$ für $l > 4$ fort und alle $\pi_i(\boldsymbol{E}_j)$ in Endpunkten des Schemas.

3.17. $\pi_1(\boldsymbol{F}_4)$ besitzt zwei verschwindende Gewichte und ist reell. Also fällt es nach 3.3.2 fort. Dasselbe gilt für $\pi_2(\boldsymbol{G}_1)$.

Es ist zweckmäßig, bei $\boldsymbol{C}_l$ die Indizes 1, 2 zuzulassen, $\pi_1(\boldsymbol{B}_2)$ durch $\pi_1(\boldsymbol{C}_2)$ und $\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ durch $\pi_1(\boldsymbol{C}_1)$ zu ersetzen. Ebenso lasse man $\boldsymbol{D}_3$ zu und interpretiere man $\pi_2(\boldsymbol{A}_3)$ als $\pi_3(\boldsymbol{D}_3)$. Schließlich lasse man $\boldsymbol{B}_1$ zu und interpretiere man $2\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$ als $2\pi_1(\boldsymbol{B}_1)$.

$\pi_1(\boldsymbol{A}_l)$ und $\pi_l(\boldsymbol{A}_l)$ sind als Gruppen identisch. Wir können uns auf eine beschränken. Dasselbe gilt für $\pi_1(\boldsymbol{D}_4)$, $\pi_2(\boldsymbol{D}_4)$, $\pi_3(\boldsymbol{D}_4)$.

3.18. Die Resultate lassen sich zusammenfassen in

Satz II. Die zulässigen reellen $\boldsymbol{L}$ sind

$\boldsymbol{O}$ (Nullabbildung im 1-dimensionalen $\boldsymbol{K}$),
$\pi_2(\boldsymbol{B}_l)$ $(l \geqq 2)$, $2\pi_1(\boldsymbol{B}_1)$,
$\pi_1(\boldsymbol{B}_3)$, $\pi_1(\boldsymbol{B}_4)$,
$\pi_3(\boldsymbol{D}_l)$ $(l \geqq 3)$,
$\pi_1(\boldsymbol{G}_2)$.

Die zulässigen komplexen $\boldsymbol{L}$ sind

$\pi(\boldsymbol{A}_0)$,
$\pi_1(\boldsymbol{A}_l)$ $(l \geqq 2)$,
$\pi_1(\boldsymbol{C}_l)$ $(l \geqq 1)$.

Die zulässigen $\boldsymbol{J}$ sind: 1. die reellen $\boldsymbol{L}$, 2. die zu den komplexen $\boldsymbol{L}$ gehörigen reellen Darstellungen (doppelter Dimension), eventuell erweitert mit einem direkten Summand — dieser Summand ist eine Darstellung von $\boldsymbol{A}_0$ im Falle $\pi_1(\boldsymbol{A}_l)$ $(l \geqq 2)$ und eine Darstellung von $\boldsymbol{A}_0$ oder $\boldsymbol{A}_1$ im Falle $\pi_1(\boldsymbol{C}_l)$ und im Falle $\pi_1(\boldsymbol{A}_1)$.

Die zulässigen reinen Standuntergruppen sind hiermit bestimmt.

Wir bezeichnen diese Gruppen mit $\nu(\boldsymbol{O}), \nu(\boldsymbol{B}_1), \ldots, \nu(\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_1)$. Die $\pi_1(\boldsymbol{B}_3), \pi_1(\boldsymbol{B}_4)$ unterscheiden wir als $\nu'(\boldsymbol{B}_3), \nu'(\boldsymbol{B}_4)$.

Wir können sie auch folgendermaßen einteilen:

1. die Drehgruppen $G_0UVR(n, re)$ — das sind die $\nu(\boldsymbol{B}_l), \nu(\boldsymbol{D}_l), \nu(\boldsymbol{O}), \nu(\boldsymbol{A}_0), \nu(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{A}_1)$.

2. die unitären Gruppen (bzw. mit der Determinante 1) $GUVR(n, ko)$ bzw. $G_0UVR(n, ko)$ — das sind die $\nu(\boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{A}_0)$ bzw. die $\nu(\boldsymbol{A}_l)$ $(l \geqq 2)$;

3. die quaternion-unitären Gruppen $GUVR(n, qu)$ der Transformationen

$$x_i' = \sum a_{ij} x_j b,$$

wo $\sum_j a_{ij} \bar{a}_{ik} = \delta_{ik}$ ist und $b=1$ ist oder eine eindimensionale Gruppe oder alle Quaternionen mit $|b|=1$ durchläuft — das sind die $\nu(\boldsymbol{C}_l)$, $\nu(\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_0)$, $\nu(\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_1)$;

4. die (reine) Gruppe der Automorphismen der Oktavenalgebra (betrachtet für die Oktaven mit verschwindendem Realteil) — das ist die $\nu(\boldsymbol{G}_2)$;

5. die von den infinitesimalen Transformationen

$$x \to \sum_1^7 a_{ij} e_i (e_j x)$$

erzeugte Gruppe [x Oktave, e_i $(i=0, \ldots, 7)$ Oktavenbasiselemente] — das ist die $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$;

6. die oktaven-unitäre Gruppe (in der Oktavenebene) $GUVR(2, ok)$ — das ist die $\nu'(\boldsymbol{B}_4)$.

Die beiden letzten sind die niedrigsten Spindarstellungen der $\boldsymbol{B}_3$ und $\boldsymbol{B}_4$.

4. Die zulässigen gemischten Standuntergruppen

4.1. Die Einskomponente J_0 von J ist aus Satz II zu entnehmen. J_0 ist Normalteiler von J. Die Elemente von J induzieren Automorphismen in J_0. Um J zu kennen, braucht man nur in jeder Nebenklasse von J_0 einen Repräsentanten. Hierzu muß man in der Automorphismengruppe von J_0 die Nebenklassen der inneren Automorphismengruppe kennen und weiter im Zentralisator von J_0 innerhalb der allgemeinen orthogonalen Gruppe die Nebenklassen nach dem Zentrum von J_0.

Die Automorphismenklassen sind wohlbekannt[16]), die Zentralisatorklassen sind leicht festzustellen. Hier folgt eine Aufzählung:

1. Drehgruppen in Räumen ungerader Dimension: keine äußeren Automorphismen. Mit allen Drehungen vertauschbar ist nur ± 1.

Drehgruppen in Räumen gerader Dimension: Die Spiegelung an einer Hyperebene repräsentiert die äußeren Automorphismen. Zentralisator trivial.

$\boldsymbol{D}_4$ besitzt wohl mehr äußere Automorphismen, die aber auf $\pi_3(\boldsymbol{D}_4)$ nicht eindeutig sind.

[16]) CARTAN, E.: Oeuvres I, 555.

2. Unitäre Gruppen: Äußerer Automorphismus $x \to \bar{x}$, also realisierbar als lineare Abbildung in $\boldsymbol{K}$. Die mit $\nu(\boldsymbol{A}_l)$ elementweise vertauschbaren befinden sich in $\nu(\boldsymbol{A}_l + \boldsymbol{A}_0)$.

3. Quaternion-unitäre Gruppen: $\boldsymbol{C}_l$ besitzt keinen äußeren Automorphismus. Die mit $\nu(\boldsymbol{C}_l)$ elementweise vertauschbaren befinden sich in $\nu(\boldsymbol{C}_l + \boldsymbol{A}_1)$.

4. $\nu(\boldsymbol{G}_2)$: Kein äußerer Automorphismus. Mit allen vertauschbar ist nur ± 1.

5. $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$: Kein äußerer Automorphismus. Zentralisator besteht aus ± 1, aber da $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$ eine Spindarstellung ist und also ein nichttriviales Zentrum besitzt, befinden ± 1 sich in $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$.

6. $\nu'(\boldsymbol{B}_4)$: wie $\nu'(\boldsymbol{B}_3)$.

5. Der Einbau der reinen Standuntergruppen

5.1. Wir untersuchen nun, in welchen Gruppen F_0 (Einskomponente von F) die erhaltenen J_0 liegen können, und auf welche Weise dies möglich ist. Wir lassen die Indizes 0 vorläufig weg.

Klar ist, daß gelten muß:

5.1.1. $\dim \boldsymbol{F} = \dim \boldsymbol{J} + \dim \boldsymbol{K}$.

5.1.2. J kann keinen Normalteiler von F enthalten, da die Darstellung in F/J sonst nicht treu wäre.

5.1.3. Bei der von J in F induzierten Gruppe von Automorphismen von F ist $\boldsymbol{J}$ invarianter Unterraum; mod $\boldsymbol{J}$ ist diese Darstellung im wesentlichen J selber, also reell irreduzibel (s. 2.6).

5.2. Aus 5.1.3 folgt: ist $\boldsymbol{F}_1$ (reelles) Ideal von $\boldsymbol{F}$, so ist $\boldsymbol{F}_1$ invarianter Unterraum (bei den von J induzierten Automorphismen von $\boldsymbol{F}$), also

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{J} \equiv (\boldsymbol{O}) \text{ oder } \equiv \boldsymbol{F} \mod \boldsymbol{J}.$$

Nach 5.1.2 ist $\boldsymbol{F}_1 < \boldsymbol{J}$ unmöglich, also

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{F}.$$

Wir können uns beschränken auf die Annahmen: $\boldsymbol{F}_1$ ist halbeinfach, oder $\boldsymbol{F}_1$ ist abelsch.

5.3. Sei $\boldsymbol{F}_1$ halbeinfach. Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung in Ideale

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

Entsprechend 5.2 ist auch

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{J} = \boldsymbol{F}.$$

Wir zeigen:

$$\boldsymbol{F}_1 \cap \boldsymbol{J} = \boldsymbol{F}_2 \cap \boldsymbol{J} = (\boldsymbol{0}).$$

Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{F}_2 \cap \boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{f}_2 \in \boldsymbol{F}_2$. Also

$$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}_2] \in \boldsymbol{F}_2.$$

Weiter ist f_2 darstellbar als

$$f_2 = f_1 + j \quad \text{mit} \quad f_1 \in F_1, \quad j \in J.$$

Also auch

$$[f, f_2] = [f, j] \in J.$$

Daher

$$[f, f_2] \in F_2 \cap J.$$

Also ist $F_2 \cap J$ Ideal von F_2, also auch von F. Nach 5.1.2 folgt hieraus $F_2 \cap J = (O)$. Ebenso ergibt sich $F_1 \cap J = (0)$.

Die Zerlegung von J nach F_1 und F_2,

$$j = f_1 + f_2 \quad (j \in J, \ f_i \in F_i)$$

bewirkt also einen Isomorphismus zwischen F_1 und F_2. Weiter ist $\dim J = \dim F_i = \dim K$. Ein Blick auf die Liste von Satz II lehrt, daß das nur möglich ist für $J = \nu(B_1)$. Dann wird F_i notwendig isomorph mit J.

Infolgedessen wird F (wenigstens im Kleinen) die Drehgruppe der 3-Sphäre.

5.4. Ist (statt 5.2—3) F_1 komplexes Ideal von F (aber halbeinfach), so ist F direkte Summe, etwa

$$F = F_1 + \overline{F}_1.$$

Ist $J \cap F_1 = J \cap \overline{F}_1 = (0)$, so ist $\dim J \leqq \dim F_1$, also $\dim J \leqq \dim K$, also $\dim J = \dim K$, also wieder $J = \nu(B_1)$. F_1 und $\overline{F}_1$ sind isomorph, und F wird (im Kleinen) die Gruppe des hyperbolischen 3-Raumes.

Wäre dagegen $J \cap F_1 \neq (0)$, so hätte J zwei fremde konjugierte isomorphe Ideale $J \cap F_1$ und $J \cap \overline{F}_2$, müßte also nach der Liste von Satz II entweder $\nu(A_0 + A_0)$ oder $\nu(A_1 + A_1)$ sein; dann wäre $\dim F = \dim J + \dim K = 4$ oder 10 und $\dim F_1 = 2$ oder 5, also F_1 nicht halbeinfach.

5.5. Sei (im Gegensatz zu 5.3) nun F_1 abelsch. Das orthogonale Komplement von $F_1 \cap J$ in F_1 sei F_2. Nun ist $F_2 = F_1 \cap K$, also

$$[J, F_2] < F_2.$$
$$[F_1, F_2] = (0),$$

also wegen $F = F_1 + J$ (s. 5.2) F_2 Ideal von F. Ferner $F = F_2 + J$, $F_2 \cap J = (0)$.

Ein komplexes F_1 liefert nichts Neues, da dann $F_1 + \overline{F}_1$ auch abelsches Ideal von F ist.

5.6. Aus 5.2—5 folgt nun

Satz III. *F ist entweder (komplex) einfach. Oder F zerfällt in J und ein abelsches Ideal. Oder F gehört zur elliptischen oder hyperbolischen Geometrie des 3-Raumes.*

Wir nennen allgemein die F mit abelschem Ideal *parabolisch*, die andern, je nachdem ob sie kompakt oder nichtkompakt sind, *elliptisch* und *hyperbolisch*.

5.7. Die parabolischen F bieten keine Schwierigkeiten mehr. Wir suchen die übrigen auf. Hierbei verwenden wir 5.1.1 und die Tatsache, daß der Rang von F mindesteus so groß ist wie der von J und höchstens um 1 größer (nämlich wenn das Gewicht 0 auftritt). In der folgenden Aufstellung findet man die Dimensionen einfacher Gruppen angegeben (erste Spalte) ferner die Summe der Dimensionen eines zugehörigen J (das die einfache Gruppe als Summand L_1 enthält) und K; oberhalb dieser Spalten findet man ein l oder $l+1$, je nachdem der Rang des eventuellen F gleich dem von L_1 ist oder um 1 größer. Aus dieser Tabelle suchen wir erst die Fälle aus, in denen sich wieder die Dimensionszahl einer einfachen Gruppe ergibt mit dem richtigen Rang.

A_l		l	$\leq l+1$	B_l		$\leq l+1$	C_l		l	$\leq l+1$		D_l		l
A_0	1	3		O	0	1								
A_1	3	7	8	B_1	3	6	C_1	3	7	8	10			
A_2	8	14	15	B_2	10	15	C_2	10	18	19	21			
A_3	15	23	24	B_3	21	28	C_3	21	33	34	36	D_3	15	21
A_4	24	34	35	B_4	36	45	C_4	36	52	53	55	D_4	28	36
A_5	35	47	48	B_5	55	66	C_5	55	75	76	78	D_5	45	55
A_6	48	62	63	B_6	78	91	C_6	78	102	103	105	D_6	66	78
A_7	63	79	80	B_7	105	120	C_7	105	133	134	136	D_7	91	105
⋮				⋮			⋮					⋮		

G_2 14 21 (rang 3).

E_6 78, E_7 133, E_8 248, F_4 52.

$\nu'(B_3)$ $21+8$, $\nu'(B_4)$ $36+16=52$.

Von den hiernach möglichen Paaren fallen noch folgende fort: $\nu(C_l+A_1)$ in B_{l+1} — die B_{l+1} ist reell linear darstellbar in $2l+1$ Dimensionen, die C_l erst in $4l$ Dimensionen; das ist ein Widerspruch für $l>1$. Der Fall $l=1$ ist die Einbettung von D_2 in B_3.

$\nu(D_l)$ in C_l — durch die Wurzeln und Gewichte von $J=\nu(D_l)$ ist F vollkommen bestimmt; als F kommt nur B_l in Frage.

$\nu(G_2)$ in C_3 — das ergäbe eine 6-dimensionale lineare Darstellung der G_2.

$\nu(C_4)$ in F_4 — $\nu(C_4)$ hat Wurzeln, die Doppelten von Gewichten sind; beide träten zusammen als Wurzeln von F auf.

$\nu(C_7)$ in E_7 — dieselben Gründe.

$\nu(C_5+A_1)$ in E_6 — hier hätte man eine Darstellung der E_6 als Transformationsgruppe einer 20-dimensionalen Mannigfaltigkeit, während so etwas erst in 26 Dimensionen möglich ist.

Satz IV. *Die möglichen Paare J, F im nichtparabolischen Fall sind:*

1. die n-dimensionale Drehgruppe in einer reellen Form der komplexen $(n+1)$-dimensionalen Drehgruppe.

2. $\nu(A_l+A_0)$ in einer reellen Form der komplexen A_{l+1} $(l\geq 1)$.

3. $\nu(C_l+A_1)$ in einer reellen Form der komplexen C_{l+1} $(l\geq 1)$.

4. $v(\boldsymbol{G}_2)$ *in einer reellen Form der komplexen* $\boldsymbol{B}_3$.

5. $v'(\boldsymbol{B}_4)$ *in einer reellen Form der komplexen* $\boldsymbol{F}_4$.

6. $v(\boldsymbol{A}_2)$ *in einer reellen Form der komplexen* $\boldsymbol{G}_2$.

5.8. Wir werden noch zeigen, daß die in Satz IV aufgeführten Einbettungen wirklich vorkommen, und daß sie wesentlich eindeutig bestimmt sind. Wir behandeln erst die elliptischen Fälle.

1. $\boldsymbol{J}=v(\boldsymbol{B}_l)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_{l+1}$. Man kann einen maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{J}$ mit einem Element von $\boldsymbol{F}$ ergänzen, das zum Gewicht 0 gehört. Das ist dann ein maximal abelscher Unterring von $\boldsymbol{F}$. Man gehe umgekehrt von einem solchen aus. Die Wurzelformen sind $\pm\omega_i\pm\omega_j$. Um $\boldsymbol{J}$ aus $\boldsymbol{F}$ herauszuheben, muß man in dem maximal abelschen Unterring eine lineare Relation einführen, die $4l$ Wurzelformen paarweise zusammenfallen läßt (denn jedes Gewicht $\neq 0$ von $\boldsymbol{J}$ ist einer Wurzelform von $\boldsymbol{J}$ gleich). Im wesentlichen die einzige derartige Relation ist $\omega_{l+1}=0$. (Für $l=3$ kommt noch $\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=0$ hinzu, was aber bekanntlich nichts Neues liefert.) Der maximal abelsche Unterring von $\boldsymbol{J}$ ist hierdurch bestimmt. Um ganz $\boldsymbol{J}$ zu erhalten, muß man noch

$$e_{\pm\omega_i\pm\omega_j},\ \alpha_i e_{\omega_i+\omega_{l+1}}+\beta_i e_{\omega_i-\omega_{l+1}},\ -\bar{\alpha}_i e_{-\omega_i+\omega_{l+1}}-\bar{\beta}_i e_{-\omega_i-\omega_{l+1}} \qquad (i\leq l)$$

hinzufügen. Kommutatorbildung zeigt, daß α_i und β_i im wesentlichen unabhängig von i sein müssen. Durch innere Automorphismen von $\boldsymbol{F}$ können diese $\boldsymbol{J}$ ineinander übergeführt werden; hierzu verwende man $\exp \boldsymbol{h}$ mit einem $\boldsymbol{h}$ aus dem maximal abelschen Unterring, das $\omega_1=\cdots=\omega_l=0$ genügt.

$\boldsymbol{J}=v(\boldsymbol{D}_l)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{B}_l$. Man muß $2l$ von den Wurzelformen $\pm\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$ streichen (und als Gewichte erklären), für die paarweise gilt, daß entweder die Summe 0 ist, oder Summe und Differenz eine Wurzelform ist. Das geht nur auf eine Weise.

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{G_0ElR}(n, \mathrm{re})$ von $\sum x_i^2=0$ im projektiven Raum (elliptische Geometrie).

2. $\boldsymbol{J}=v(\boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{A}_0)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}_{l+1}$. Der maximal abelsche Unterring von $\boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{A}_0$ ist auch einer von $\boldsymbol{A}_{l+1}$. Man gehe von diesem aus. Die Wurzelformen von $\boldsymbol{A}_{l+1}$ seien $\pm\omega_i, \omega_i-\omega_j$. Um $\boldsymbol{J}$ aus $\boldsymbol{F}$ herauszuheben, muß man die Wurzelformen einteilen in Wurzelformen und Gewichte von $v(\boldsymbol{A}_l+\boldsymbol{A}_0)$; und zwar müssen zwei Systeme Σ_+, Σ_- von $l+1$ Gewichten auftreten, so daß aus $g\in\Sigma_+$ folgt $-g\in\Sigma_-$ und aus $g, g'\in\Sigma_+$ folgt: $g-g'$ ist Wurzelform. Σ_+ läßt sich im wesentlichen auf zwei Arten wählen:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{l+1}$$

oder

$$-\omega_1, \omega_2-\omega_1, \ldots, \omega_{l+1}-\omega_1.$$

Das zweite System entsteht aus dem ersten durch Spiegelung an der Wurzelebene $\omega_1=0$, also durch einen Automorphismus.

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{GElR}(n, \mathrm{ko})$ von $\sum|x_i|^2=0$ im komplexen projektiven Raum (komplex-elliptische Geometrie).

3. $\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_1)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{C}_{l+1}$. In bezug auf einen maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{C}_l$ sind die Wurzelformen $\neq 0$ und Gewichte von $\nu(\boldsymbol{C}_l)$:

$$\pm 2\omega_i,\ \pm\omega_i\pm\omega_j \quad \text{und} \quad \pm\omega_i.$$

Die von $\nu(\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_1)$ werden mit dem Parameter ϑ, der von dem maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{A}_1$ abhängt:

$$\pm 2\omega_i,\ \pm\omega_i\pm\omega_j,\ \pm 2\vartheta \quad \text{und} \quad \pm\omega_i\pm\vartheta.$$

Der maximal abelsche Unterring von $\boldsymbol{C}_l+\boldsymbol{A}_1$ ist auch einer von $\boldsymbol{C}_{l+1}$. Wir sondern aus den Wurzelformen von $\boldsymbol{C}_{l+1}$ $4l$ Gewichte ab, die folgende Eigenschaften besitzen müssen: Sind g und g' Gewichte, so ist $g+g'$ oder $g-g'$ Wurzelform; niemals ist $g\pm 2g'$ Wurzelform. Diese Bedingungen bestimmen im wesentlichen eindeutig die Wahl: $\pm\omega_i\pm\omega_{l+1}$.

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{GElR}(n, \mathrm{qu})$ von $\sum|x_i|^2=0$ im quaternionprojektiven Raum (quaternion-elliptische Gruppe).

4. $\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{G}_2)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{B}_3$. Man ergänze einen maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{J}$ mit einem Element von $\boldsymbol{F}$, das zum Gewicht 0 gehört. Das ist dann ein maximal abelscher Unterring von $\boldsymbol{F}$. Man gehe von diesem aus. Die Wurzelformen sind $\pm\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$ $(i, j=1, 2, 3)$. Um $\boldsymbol{J}$ aus $\boldsymbol{F}$ herauszuheben, muß man im maximal abelschen Unterring von $\boldsymbol{F}$ eine lineare Relation einführen, die 12 Wurzelformen paarweise zusammenfallen läßt, aber so, daß keine 0 wird (denn jedes Gewicht $\neq 0$ von $\boldsymbol{J}$ ist einer Wurzelform von $\boldsymbol{J}$ gleich). Im wesentlichen die einzige derartige Relation ist $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$. Der maximal abelsche Unterring von $\boldsymbol{J}$ ist hierdurch bestimmt. Um ganz $\boldsymbol{J}$ zu erhalten, muß man noch

$$e_{\omega_i-\omega_j},\quad \alpha_1 e_{\omega_2+\omega_3}+\beta_1 e_{-\omega_1},\quad \text{usw.}$$

hinzufügen. Man schließt dann wie bei $\nu(\boldsymbol{B}_l)$, $\boldsymbol{D}_{l+1}$ weiter auf die eindeutige Bestimmtheit.

F wird auf der 7-Sphäre induziert durch die Spindarstellung von B_3 im 8-Raum.

5. $\boldsymbol{J}=\nu'(\boldsymbol{B}_4)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_4$. Die Wurzelformen $\neq 0$ und Gewichte von $\nu'(\boldsymbol{B}_4)$ sind

$$\pm\omega_i,\ \pm\omega_i\pm\omega_j \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3\pm\omega_4).$$

Zusammen bilden sie das Wurzelformensystem der $\boldsymbol{F}_4$. Geht man umgekehrt von diesem aus, so sieht man, daß die $\pm\omega_i\pm\omega_j$ als Gewichte nicht in Frage kommen, denn zu jedem Gewicht g muß es eine Wurzelform α geben, so daß $\alpha-2g$ Wurzelform ist, und das ist bei $\pm\omega_i\pm\omega_j$ nicht der Fall. Also müssen die $\pm\omega_i\pm\omega_j$ notwendig Gewichte sein. Man darf weiter annehmen, daß auch ω_1 eine Wurzelform ist; dann ergeben sich alle $\pm\omega_i$ als Wurzelformen.

F ist die elliptische Gruppe der Oktavenebene $\mathrm{GElR}(2, \mathrm{ok})$.

6. $\boldsymbol{J}=\nu(\boldsymbol{A}_2)$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}_2$. Die Wurzelformen und Gewichte von $\nu(\boldsymbol{A}_2)$ sind

$$\omega_i-\omega_j \quad \text{und} \quad \pm\omega_i \qquad (\omega_1+\omega_2+\omega_3=0).$$

Das sind auch die Wurzelformen $\neq 0$ von $\boldsymbol{G}_2$. Zu jeder Wurzelform $\neq 0$ gibt es ein Gewicht g, so daß $\alpha - 3g$ Wurzelform ist. Das ist aber nur bei den $\pm\omega_i \pm \omega_j$ der Fall.

F wird auf der 6-Sphäre induziert von der Darstellung von G_2 als Automorphismengruppe der Oktaven.

Damit ist in allen elliptischen Fällen die Existenz und Eindeutigkeit der Einbettung nachgewiesen.

5.9. Wir untersuchen nun die Einbettungen im hyperbolischen Fall.

$\boldsymbol{F}$ ist nach Satz IV reelle Form einer einfachen Gruppe (von einer Ausnahme abgesehen). Eine reelle Form ist durch ihre Signatur[17]) gekennzeichnet (δ = Anzahl der positiven minus Anzahl der negativen Quadrate der Killing-Cartanschen Form). Die Anzahl der negativen Quadrate ist die maximale Dimension kompakter Untergruppen, also $\geqq \dim J$. Die Summe beider Anzahlen ist $\dim F$. Hieraus folgt:

$$\delta \leqq \dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J}.$$

Wir suchen in der Cartanschen Aufzählung die reellen Formen, die dieser Ungleichung genügen. Die unitären Formen lassen wir weg.

1. $\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{B}_l)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{D}_{l+1}$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = (l+1)(2l+1) - 2l(2l+1) = -2l^2 + l + 1.$$

$$\delta = -l - 1; \quad l + 1 - 2m^2 \qquad (m = 0, 1, \ldots, l+1).$$

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{GHyR}(2l+1, \mathrm{re})$ von $\sum_1^{2l+1} x_i^2 - x_{2l+2}^2 = 0$ (Gruppe des hyperbolischen Raumes).

$\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{D}_l)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}_l$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = l(2l+1) - 2l(2l-1) = l(3-2l).$$

$$\delta = l - 2m(m+1) \qquad (m = 0, 1, \ldots, l).$$

F ist die Invarianzgruppe $\mathrm{GHyR}(2l, \mathrm{re})$ von $\sum_1^{2l} x_i^2 - x_{2l+1}^2 = 0$ (Gruppe des hyperbolischen Raumes).

2. $\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{A}_l + \boldsymbol{A}_0)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}_{l+1}$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = (l+3)(l+1) - 2(l+1)^2 = 1 - l^2.$$

$$\delta = l + 1, \; -l - 3^{18}); \; 1 - m^2 \qquad (m = l+2, l, \ldots, \geqq 0).$$

Für $l = 2$ ist $\delta = -l - 3 = -5$ mit der Ungleichung verträglich. Wir haben dann als reelle Form die Drehgruppe im 6-Raum. Die maximal kompakte Untergruppe ist der B_2 isomorph; sie muß J enthalten. Das kann die

[17]) Bei Cartan „caractère" genannt. Siehe Oeuvres I, 399—491.

[18]) Nur für gerades l. — Man korrigiere bei Cartan, S. 400, Zeile 7:

$$\left[\frac{l+3}{2}\right] \text{ statt } \left[\frac{l+2}{2}\right]; \quad \text{Zeile 8: } \left[\frac{l+1}{2}\right] \text{ statt } \left[\frac{l}{2}\right].$$

B_2 aber nicht, denn das würde die Existenz einer treuen Darstellung der B_2 in einer (dim B_2 − dim J)-dimensionalen (= 1-dimensionalen) Mannigfaltigkeit bedeuten. Übrig bleibt:

F ist die Invarianzgruppe GHyR$(l+1, \text{ko})$ von $\sum_1^{l+1} x_i^2 - x_{l+2}^2 = 0$ (Gruppe des komplex hyperbolischen Raumes).

3. $\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{C}_l + \boldsymbol{A}_1)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}_{l+1}$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = (l+1)(2l+3) - 2\big(l(2l+1)+3\big) = -2l^2 + 3l - 3$$

$$\delta = l+1; \quad -l-1-2m^2 \qquad (m = l+1, l-1, \ldots, \geqq 0).$$

F ist die Invarianzgruppe GHyR(l, qu) von $\sum_1^{l} x_i^2 - x_{l+1}^2 = 0$ (Gruppe des quaternionhyperbolischen Raumes).

4. $\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{G}_2)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}_3$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = 21 - 28 = -7.$$

$$\delta = 3, \; -1, \; -9, \; -21.$$

Im Falle $\delta = -9$ ist die maximal kompakte Untergruppe der D_3 isomorph, die somit die G_2 enthalten müßte. Das ist unmöglich, denn dann besäße die G_2 eine lineare Darstellung im 6-Raum.

Es gibt hier keine hyperbolische Form.

5. $\boldsymbol{J} = \nu'(\boldsymbol{B}_4)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_4$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = 52 - 72 = -20.$$

$$\delta = 4, \; -20, \; -52.$$

F ist die hyperbolische Gruppe der Oktavenebene GHyR$(2, \text{ok})$.

6. $\boldsymbol{J} = \nu(\boldsymbol{A}_2)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}_2$.

$$\dim \boldsymbol{F} - 2\dim \boldsymbol{J} = 14 - 16 = -2.$$

$$\delta = 2; \; -8, \; 0.$$

Keine hyperbolische Form.

In allen Fällen stimmten die Dimension von J und die der maximal kompakten Untergruppe überein. Hieraus folgt die eindeutige Bestimmtheit der Einbettung.

5.10. Die zulässigen Paare $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{F}$ sind hiermit vollständig aufgezählt. Die im elliptischen und hyperbolischen Fall angegebenen Beispiele von Paaren J, F geben eine vollständige Aufzählung im Kleinen bei zusammenhängendem F.

6. Die Verhältnisse im Großen

6.1. Sei F zusammenhängend. Die einfach zusammenhängende Überlagerung heiße $\tilde{F}$. Es gibt eine Untergruppe $\tilde{J}$ von $\tilde{F}$, so daß die kanonische Isomorphie zwischen F/J, $\tilde{F}/\tilde{J}$ und R stattfindet.

Sei $\tilde{J}_0$ die Einskomponente von $\tilde{J}$. Dann ist $\tilde{R} = \tilde{F}/\tilde{J}_0$ die einfach zusammenhängende Überlagerung von R.

Das Paar $\tilde{J}_0, \tilde{F}$ ist durch $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{F}$ eindeutig bestimmt. Wir erhalten alle zugehörigen Typen im Großen, wenn wir $\tilde{J}_0$ *innerhalb* $\tilde{F}$ zu einer gemischten Standuntergruppe $\tilde{J}$ mit der Einskomponente $\tilde{J}_0$ erweitern. Das ergibt das Paar $\tilde{J}/\tilde{J} \cap Z, \tilde{F}/\tilde{J} \cap Z$, wenn Z das Zentrum von $\tilde{F}$ ist.

Wir können $\tilde{J}_0, \tilde{F}$ auch ersetzen durch $\tilde{J}_0/\tilde{J}_0 \cap Z$, $\tilde{F}/\tilde{J}_0 \cap Z$, die wir J^*, F^* nennen, mit dem zugehörigen einfach zusammenhängenden $R^* = F^*/J^*$. Alle zu $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{F}$ gehörigen zusammenhängenden Typen ergeben sich dann wieder durch Erweiterung von J^* zu einer gemischten Standuntergruppe mit der Einskomponente J^*. Um zu gegebenem $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{F}$ das Paar J^*, F^* zu finden, braucht man nur eine Form im Großen zu wählen mit einfach zusammenhängendem F^*/J^*.

Sei M die Menge der Fixpunkte von J^* in R^*. Sei J eine gemischte Erweiterung von J^* innerhalb F^*. Dann ist J^* Normalteiler von J. Ist $j \in J$ und $m \in M$, so ist $J^* jm = j J^* m = jm$, also $jm \in M$. Also $JM = M$.

Ist J echte Erweiterung von J^*, so muß also M aus mehr als einem Punkt bestehen. J^* vertauscht dann die Punkte von M. Ist J^* „asystatisch", d.h. besitzt J^* nur einen Fixpunkt, so ist keine echte Erweiterung möglich.

6.2. In den parabolischen Fällen nehme man als R^* das abelsche Ideal $\boldsymbol{K}$ von $\boldsymbol{F}$. Als F^* nehme man die von $\exp \boldsymbol{J}$ und der Translationsgruppe des linearen Raumes $\boldsymbol{K}$ erzeugte Gruppe. R^* ist einfach zusammenhängend; $\exp \boldsymbol{J}$ ist die größte kompakte Untergruppe von F^*, also innerhalb F nicht erweiterbar. Zu $\boldsymbol{J}$ gibt es also im Großen nur ein parabolisches Paar J, F.

6.3. In den hyperbolischen Fällen ist R^* ein hyperbolischer Raum, d.h. die Menge

$$\sum_1^n |x_i|^2 < |x_{n+1}|^2$$

im projektiven n-Raum (die x_j sind reell, komplex, Quaternionen oder Oktaven). R^* ist zusammenziehbar:

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \to \left(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{1-\lambda}\, x_{n+1}\right), \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Also ist R^* sicher einfach zusammenhängend. F^* besteht aus den mit der Identität verbindbaren Projektivitäten, die $\sum |x_i|^2 = |x_{n+1}|^2$ invariant lassen; J^* läßt obendrein etwa $(0, 0, \ldots, 1)$ invariant, und das ist der einzige Fixpunkt. Also ist J^* nicht erweiterbar und gibt es im Großen keine anderen Typen.

6.4. Wir behandeln nun die elliptischen Fälle. Der komplex projektive Raum, der quaternion projektive Raum und die projektive Oktavenebene sind einfach zusammenhängend, die Gruppen sind asystatisch. Im Großen kommt also nichts Neues hinzu. Der reelle projektive Raum ist nicht

einfach zusammenhängend; die einfach zusammenhängende Überlagerung ist die der sphärischen Geometrie. J^* hat zwei Fixpunkte, die Erweiterung von J^* führt zur elliptischen Geometrie zurück.

In den übrigen zwei Fällen war R die 6-Sphäre und die 7-Sphäre. J^* besitzt zwei Fixpunkte, die Erweiterung von J^* führt zu entsprechenden Gruppen des projektiven 6-Raumes und 7-Raumes.

7. Der Übergang zu gemischten F

7.1. F_0, die Einskomponente eines F, ist nun vollständig zu übersehen. Nach 2.3 (Anfang des Beweises) erhalten wir F aus F_0, wenn wir $J \cap F_0$ geeignet erweitern, nun aber *außerhalb* F_0. Über die möglichen Erweiterungen von $J \cap F_0$ haben wir ein Bild auf Grund von 4.

7.2. Parabolisch: Die Drehgruppen J werden ergänzt zu orthogonalen Gruppen (mit Spiegelungen). Im unitären Fall kann J eine abgeschlossene Gruppe zwischen $\nu(A_l)$ und $\nu(A_l + A_0)$ sein, noch erweitert mit $x \to \bar{x}$; im quaternion-unitären Fall eine abgeschlossene Gruppe zwischen $\nu(C_l)$ und $\nu(C_l + A_1)$; im oktaven-unitären Fall $(J = \nu'(B_3))$ ist keine Erweiterung möglich. Im Fall $J = \nu(G_2)$ ist Erweiterung mit $x \to -x$ möglich. Im Fall $J = \nu'(B_3)$ gibt es keine Erweiterung.

Alle möglichen Erweiterungen von J sind ohne weiteres zu Erweiterungen von F fortzusetzen.

7.3. Elliptisch: Die sphärischen Geometrien werden mittels einer Spiegelung erweitert. Bei den elliptischen Geometrien gerader Dimension ist das keine echte Erweiterung, bei denen ungerader Dimension wohl. Die unitären Geometrien werden mit $x \to \bar{x}$ erweitert. Für die elliptische Quaternionen- und Oktavengeometrien existiert keine Erweiterung. Von den übrigen besitzt nur die der 6-Sphäre eine Erweiterung.

7.4. Hyperbolisch: Die reelle hyperbolische Geometrie wird mittels einer Spiegelung erweitert, die unitäre mittels $x \to \bar{x}$. Die anderen sind nicht zu erweitern.

7.5. Als Resultat ergibt sich nun die Aufzählung von Hauptsatz I (Einleitung).

8. Ein Nachtrag

8.1. Wir müssen nun noch einen Schluß zu Satz I (s. 2.8) rechtfertigen. Wir zeigen, daß eine Faktorkette von Liegruppen F, wie sie im Hauptsatz I aufgezählt werden, $F, F', F'', \ldots$, in der jede Gruppe echte Faktorgruppe (nach abgeschlossenem Normalteiler) der eventuell vorhergehenden ist, nach höchstens fünf Schritten abbricht.

8.2. Jeder diskrete Normalteiler F_1 eines F besteht aus höchstens zwei Elementen. Denn sei F_0 die Einskomponente von F, $f_1 \in F$. Dann ist die Menge der $f_0 f_1 f_0^{-1}$ mit $f_0 \in F_0$ einerseits zusammenhängend, andererseits diskret,

also einpunktig, also $=(f_1)$. Also f_1 im Zentralisator von F_0. Für jedes $x \in R$ bilde man die Menge $M(x)$ der $x' \in R$ mit der Eigenschaft: aus $fx = x$ $(f \in F_0)$ folgt $fx' = x'$. Dann vertauscht jedes $f_1 \in F_1$ die Elemente von $M(x)$ untereinander. Man sieht in der Aufzählung, daß $M(x)$ für jedes x höchstens zweipunktig ist. Hieraus folgt die Behauptung.

8.3. Wir betrachten in der Faktorkette $F, F', \ldots$ die Dimensionen der auftretenden Gruppen. Ist $\dim F^{(i)} = \dim F^{(i+1)}$, so ist der zugehörige Normalteiler diskret, also von der Mächtigkeit 2; der Kern des Homomorphismus $F^{(i+1)} \to F^{(i+2)}$ kann dann nicht diskret sein. Also $\dim F^{(i+1)} > \dim F^{(i+2)}$. Nun ist ein Absinken der Dimensionen höchstens zweimal möglich; dieses Maximum tritt ein, wenn F oder F' parabolisch und die Faktorgruppe nach dem Abelschen Normalteiler eine Gruppe von der Dimension 6 ist, die selber einen Normalteiler von der Dimension 3 besitzt. Die Länge der Kette ist dann höchstens 5.

Mathematisch Instituut, Rijks-Universiteit, Utrecht (Niederlande)

(Eingegangen am 9. August 1955)

Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache [1957d]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 60 (1957), 352–363
[MR 0096561]

(Communicated at the meeting of April 27, 1957)

1. Logisch-semantische Untersuchungen werden, wie mir scheint, im Allgemeinen beherrscht vom Bestreben, alle semantischen Fragen auf syntaktische zu reduzieren. Mit Vorliebe schliesst man jede Bezugnahme auf den Sprachgebraucher aus. Man versucht nicht nur die Sprache, sondern auch die Beziehung zwischen Bezeichnung und Bezeichnetem zu formalisieren. Bei jenen Untersuchungen gilt die Sprache als ein Mittel, erworbene Erkenntnisse zu fixieren; die Untersucher wollen die Exaktheit der Fixierung verschärfen. Die Umgangssprache dient aber vielmehr der Erwerbung von Erkenntnissen und der Mitteilung von Erkenntnissen und Wünschen. Die Sprache als Verkehrsmittel soll uns im Folgenden interessieren.

Was eine Sprache ist, lässt sich wohl schwer sagen. Wesentlich ist jedenfalls, dass die Ausdrücke einer Sprache nicht (nur) für sich selbst stehen, sondern etwas *bezeichnen*. *Natur*objekte bezeichnen im Allgemeinen nichts; bezeichnende Dinge sind meistens *Kultur*objekte und menschbezogen. Doch schwanken hier die Auffassungen. Der Astrolog sieht die Konstellationen als Zeichen ("es steht in den Sternen geschrieben"). Ein Komet wurde ehedem als Zeichen des göttlichen Zornes gesehen. Die Kräutersucher früherer Zeiten erkannten heilkräftige Pflanzen an Zeichen, die man deuten musste. Der Gebrauch gewisser Objekte kann schwanken. Ein Baum ist an und für kein sprachlicher Ausdruck, er kann es aber sein, z.B. wenn er eine Flurgrenze bezeichnet.

Sprachabläufe zeichnen sich gegenüber kausalen Reihen, stochastischen Reihen, Ornamenten, Krähenfüssen usw. durch Regelmässigkeiten aus, deren Art man bis jetzt noch nicht näher charakterisiert hat. Doch wird es im Rahmen der rationalen Wissenschaft wenig Meinungsunterschiede geben über die Frage, wie man gegebenfalls den sprachlichen Charakter einer Ereignisreihe feststellt. Es wird kaum zweifelhaft sein, wie man die Behauptung erhärten müsse, die kosmische Strahlung sei eine sprachliche Äusserung. Man müsste die kosmische Strahlung dann entziffern, also Ereignisgruppen deuten als Ausdrücke, die etwas bezeichnen.

Dass die Ausdrücke auch der stärkst formalisierten Sprache etwas bezeichnen müssen, wenn die Sprache irgendwie interessant sein soll,

wird heute wohl auch von formalistischen Logistikern anerkannt. Auch ist man heute wohl damit einverstanden, dass bei normalem Sprachgebrauch im Satze von der syntaktischen Form wie "Sokrates ist ein Mensch" "Sokrates" ein Individuum, nämlich einen gewissen griechischen Philosophen namens Sokrates bezeichnet. "Ist ein Mensch" bezeichnet nach einigen ein Prädikat, nämlich das Prädikat der Zugehörigkeit zu einer gewissen Spezies, die man gebräuchlicherweise "Mensch" nennt. Nach andern dagegen bezeichnet "ist ein Mensch" auch ein Individuum, allerdings so, dass dies Individuum wechseln kann. Dagegen bezeichnet ein Satz von syntaktischer Form wie "Sokrates ist ein Mensch" bei manchen nichts, bei manchen die Wahrheit oder die Falschheit (je nachdem ob er wahr oder falsch ist). Das ist dann ein merkwürdiges Rudiment der Fregeschen Metaphysik. Es ist aber viel natürlicher, einen gewissen Parallelismus zu respektieren. Wenn "Sokrates" ein Subjekt und "ist ein Mensch" ein Prädikat bezeichnet, so liegt es auf der Hand, "Sokrates ist ein Mensch" als Bezeichnung einer Aussage aufzufassen, nämlich der Aussage, die besagt, dass Sokrates ein Mensch ist. Parallel dem "wahr" oder "falsch", das nach der gebräuchlichen Meinung durch ein "Sokrates ist ein Mensch" bezeichnet werden soll, wäre nämlich für "Sokrates" die Existenz und für "ist ein Mensch" die Erfüllbarkeit. Überdies beachte man, dass vollständige sprachliche Äusserungen nicht durchaus von der Form "Sokrates ist ein Mensch" zu sein brauchen. Es gibt ja auch solche der Form "Ist Sokrates ein Mensch?" und "Du, Sokrates, sollst ein Mensch sein!". Es wäre ganz unerklärlich, was diese Ausdrücke bezeichnen müssten, wenn der Ausdruck "Sokrates ist ein Mensch" seinen Wahrheitswert bezeichnet. Dagegen ist es ganz natürlich zu sagen, dass "Ist Sokrates ein Mensch?" eine ganz bestimmte Frage und "Du, Sokrates, sollst ein Mensch sein!" einen ganz bestimmten Befehl bezeichnet. Und dem entspricht durchaus die Auffassung, dass "Sokrates ist ein Mensch" eine ganz bestimmte Aussage bezeichnet.

Das Vorstehende möchte manchem vielleicht als Binsenwahrheit erscheinen. Es ist aber nicht überflüssig, denn es hebt sich als eigner Standpunkt ab gegenüber den meistens auf eine Syntaktisierung der Semantik gerichteten Bestrebungen der logischen Semantiker. Für unsern Zweck, die Sprache als Verkehrsmittel zu behandelen, ist es aber sehr wichtig, dass wir gewisse sprachliche Ausdrücke als Bezeichnungen von Aussagen, Fragen, Befehlen usw. deuten können.

2. Es werden hier die Grundzüge eines Entwurfes für eine kosmische Verkehrssprache entwickelt. Die genauere Ausführung, die sehr weitläufig ist, wird einer anderen Veröffentlichung vorbehalten.

In der Sprache, die wir Lincos (lingua cosmica) nennen wollen, soll nach unserer Absicht ein Gespräch mit intelligenten Geschöpfen auf andern Weltkörpern möglich sein. Als Sprachvehikel werden Radiosignale verschiedener Dauer und Wellenlänge verwandt. Mit diesen zwei

Dimensionen verfügt man über beträchtlichen Ausdrucksreichtum. Verglichen mit dem bei uns gebräuchlichen akustischen Sprachvehikel fehlt die dritte Dimension, die der Intensität, da ihre radiographische Verwendung kaum zweckmässig wäre. Aber bei gleicher Bandbreite ist der Informationsreichtum im Äther millionenmal grösser als im akustischen Medium.

Von den Empfängern wird vorausgesetzt, dass sie eine Geistesverfassung besitzen, die von unserer nicht zu sehr abweicht. Sie sollen die Begriffe, die durch die sprachlichen Ausdrücke der Lincos bezeichnet werden, im Wesentlichen kennen. Ihre Aufgabe ist es dann, die mitgeteilten Texte zu entziffern und in ihre Sprache zu übersetzen. Sie haben es aber in gewissem Sinne bequemer als Leute hier, die verschlüsselte Texte dechiffrieren müssen, denn von einer *absichtlichen* Erschwerung der Dechiffrier-Arbeit kann bei uns keine Rede sein; im Gegenteil, das Verständnis des Textes soll möglichst erleichtert werden. Natürlich hat man keinerlei Sicherheit, dass Empfänger die Signalfolgen wirklich als Sprache und nicht etwa als Sphärenmusik deuten.

Von den technischen Möglichkeiten zur Verwirklichung bin ich nicht auf der Höhe. Wenn man Empfänger ausserhalb unseres Planetensystems erreichen will, braucht man wohl sehr hohe Energien. Man muss dann auch lange auf die Antworten warten. Es ist übrigens denkbar, dass fortwährend solche sprachlichen Nachrichten das Weltall durcheilen, aber von uns nicht beachtet, durch irdische Störungen unkenntlich gemacht oder durch die Atmosphäre und Ionosphäre abgeschirmt werden. Von einem künstlichen Satelliten aus könnte man sich leichter in einen etwaigen kosmischen Radioverkehr einschalten.

Es ist unwahrscheinlich, dass intelligente Geschöpfe auf andern Weltkörpern immer genauso wie wir organisiert sind. Wir können uns aber die möglichen Abweichungen kaum vorstellen. Doch ist es nicht überflüssig, in der Hinsicht seine Phantasie etwas spielen zu lassen. Von den vier Besitztümern,

1. Körper, 2. Empfindung, 3. Erinnerung, 4. Wille,

sind bei den Erdenmenschen Nummer 1 und 4 ganz individuell, dagegen 2 und 3 überwiegend individuell und nur in bescheidenem Masse gruppenkollektiv. Man kann sich anderswo Geschöpfe denken, die etwa eines oder mehrere dieser Besitztümer ganz kollektiv besitzen. Für solche Geschöpfe könnten gewisse unserer Mitteilungen unverständlich sein.

3. Bei der Anbahnung des kosmischen Sprachverkehrs verfügen wir nicht über das Mittel, dem wir selber unsere Bekanntschaft mit der Muttersprache verdanken. Wir können die sprachlich bezeichneten Dinge, Ereignisse, Wunschziele nicht *zeigen*. Das Einzige, was wir im Anfang direkt zeigen können, sind elementare Signale und sehr einfach gebaute Signalgruppen. Bilder irdischer Gegenstände nach dem Radar- oder Fernsehsystem in Signalfolgen aufgelöst zu senden, hat erst einen Sinn,

wenn man den Auflösungsschlüssel mitsenden kann. Das setzt aber eine schon hochentwickelte geometrische Terminologie voraus, die eben erst vorbereitet werden muss. Da uns vorzüglich sprachliche Probleme interessieren, gehen wir auf Bildsendungen vorläufig nicht ein.

Es liegt nahe, die kosmische Verständigung anzufangen mit der Mitteilung eines Stoffes, der von jeher sprachlich stark formalisiert war, nämlich mit der Mathematik.

Diese soll das 1. Kap. des Lincos-Entwurfes bilden.

In einem Stadium der Arithmetik und Algebra, das noch nicht lange überwunden ist, spielte eine grosse Rolle, was ich anderswo den quasi-allgemeinen Beweis genannt habe. Euklid beweist etwa die Existenz unendlich vieler Primzahlen, indem er zeigt, dass zu drei Primzahlen eine von ihnen verschiedene vierte existiert. So wie das geschieht, sieht man aber ohne weiteres ein, dass auch zu je n Primzahlen eine $(n+1)$-te existiert. Euklid kann aber solche Aussage nicht genügend formalisieren, da ihm jedes Symbol für eine allgemeine Anzahl fehlt. Er beweist die Behauptung hinsichtlich n für $n=3$, und zwar "quasi-allgemein", d.h. so dass der Leser das Beweisschema auf jedes n übertragen kann. Übrigens ist die Auffassung vom geometrischen Beweis, die bis zum Ende des 19. Jahrhunderts herrscht, auch die, dass er ein quasi-allgemeiner Beweis ist: man beweist an der gezeichneten Figur, jedoch so, dass der Beweis auf jede zu zeichnende Figur übertragen werden kann. Auch heute ist der quasi-allgemeine Beweis ein wichtiges didaktisches Hilfsmittel.

Dem quasi-allgemeinen Beweis entspricht bei den Definitionen die quasi-allgemeine Definition. Innerhalb der Mathematik beim Schulunterricht und ausserhalb der Mathematik überhaupt herrscht die Methode der quasi-allgemeinen Definition. Man definiert in einem Spezialfall, doch so, dass der Andere im Stande ist, stillschweigend die Definition in der gewünschten Richtung zu verallgemeinern.

Das Prinzip der quasi-allgemeinen Definition war auch beim Auf- und Ausbau des Lincos-Sprachschatzes führend, sowohl im mathematischen Kapitel wie in den folgenden. Allerdings haben wir nirgends die logische *Form* der Definition gewählt. Wir sagen also nicht etwa "das heisst eine Uhr", sondern "das ist eine Uhr".

Ein anderes Prinzip wird durch die folgenden Beispiele erläutert: Man führe das Prädikat "ganze Zahl" nicht ein, ehe man nicht andere als ganze Zahlen kennt. Man führe das Wort "Handlung" nicht ein, so lange nur eine Handlung benannt ist; usw.

Aus Obigem erhellt, dass die mathematischen Begriffe nicht axiomatisch begründet werden. Wohl könnte man, wenn der mathematische Wortschatz der Lincos weit genug gediehen ist, noch eine Axiomatik anschliessen. Man hat dann natürlich die Axiomatik mit der vorangehenden inhaltlichen Mathematik durch eine Semantik zu verbinden. Wir werden all dieses aber unterlassen, da es unsere Hauptfrage nicht berührt. Wir werden übrigens auch, wenn einmal der Wortschatz der Mathematik im

Wesentlichen vorliegt, die weiteren Entwicklungen im mathematischen Kapitel nur andeuten.

Auf das Kapitel "Mathematik" folgt ein Kapitel "Zeitrechnung", das dritte Kapitel heisst "Behaviour", das vierte "Mechanik". Geplant sind weitere Kapitel: Stoffkunde, Geographie, Anatomie und Physiologie. Dem soll sich eine Fortsetzung des Kapitels "Behaviour" anschliessen. Hier folgen einige näheren Angaben [1]).

4. *Mathematik*

Man fängt an mit einer grossen Zahl von Mitteilungen der Art

$$\begin{aligned} &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot > \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot < \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \cdot\ \cdot = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{aligned}$$

usw. Die Punkte stehen für kurze Radiosignale, $>$, $<$, $=$, $+$ für irgendwelche Gruppen von Radiosignalen. Ähnliches gilt für alle später bei uns auftretenden Zeichen.

Der Empfänger soll natürlich aus dem Kontext schliessen, dass die Punktegruppen Zahlen und die andern Worter die uns wohlbekannten arithmetischen Verknüpfungen und Relationen bezeichnen.

Danach wird für die Zahlen ein andere Schreibweise eingeführt, am besten die im dualen Positionssytem:

$$\cdot = 1,\ \cdot\ \cdot = 10,\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 11,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 100,$$

usw. Weiter:

$$\begin{aligned} 101 + 1101 &= 10010, \\ 10010 - 1101 &= 101, \\ 10010 - 1110 &= 100, \end{aligned}$$

usw.

$$\begin{aligned} 10010 - 10010 &= 0, \\ 10010 - 10011 &= -1, \end{aligned}$$

usw.

Logische Symbole werden eingeführt durch

$$\begin{aligned} (a > 11) &\to (a > 10), \\ (a < 101) &\to (a < 110), \\ (a > 11) &\to (a > 11), \end{aligned}$$

usw. Auch der Begriff der Variablen soll aus diesem Zusammenhang erhellen. Es ist zweckmässig, verschiedene Wellenlängen den Zeichen für Zahlen, den arithmetischen Operationszeichen, den logischen Zeichen,

[1]) Ich habe mich nicht der üblichen Sorgfalt beim Gebrauch von Anführungsstrichen befleissigt. Ich muss allerdings auch zugeben, dass ich jene Usances nicht ganz habe durchschauen können.

den Variablen usw. zu reservieren. Um die Dinge nicht zu sehr zu komplizieren, ist der Formalisierung des Klammersetzens keine Aufmerksamkeit gewidmet; als Klammern verwendet man wohl am besten Spatien verschiedener Grösse.

Weitere logische Zeichen erhalten ihre Bedeutung durch:

$$[(a > 11) \wedge (b > 10)] \to (a + b > 101),$$
$$[(a > b) \wedge (b > c)] \to (a > c),$$
$$(a > 11) \to [(a = 100) \vee (a > 100)],$$

usw.

$\neq$ wird quasi-allgemein definiert durch

$$1 \neq 10, \quad 1 \neq 11,$$

usw. Ähnliches gilt von der Multiplikation, die hinterher auch induktiv erklärt wird.

Durch Beispiele werden die Prädikate Num (natürliche Zahl, numerus), Int (ganze Zahl, integer), Pri (Primzahl) eingeführt:

$$1 \in \mathrm{Num}, \quad 10 \in \mathrm{Num},$$
$$1 \in \mathrm{Int}, \quad 10 \in \mathrm{Int}, \quad 0 \in \mathrm{Int}, \quad -1 \in \mathrm{Int},$$

usw.

$$(a \in \mathrm{Num}) \to (a + 1) \in \mathrm{Num},$$
$$(a \in \mathrm{Int}) \to (a - 1) \in \mathrm{Int},$$
$$-1 \notin \mathrm{Num},$$
$$\mathrm{Num} \subset \mathrm{Int},$$

usw.

Gleichungen:

$$(?x)(11 \cdot x = 110),$$
$$(11 \cdot x = 110) \to (x = 10).$$

usw. Hierauf folgen die rationalen Zahlen:

$$(?x)(11 \cdot x = 100),$$
$$(11 \cdot x = 100) \to (x = 100/11),$$
$$100/11 = 1000/110,$$
$$110/11 \in \mathrm{Rat},$$
$$[(a \in \mathrm{Int}) \wedge (b \in \mathrm{Int}) \wedge (b \neq 0)] \to [(a/b) \in \mathrm{Rat}],$$
$$\mathrm{Int} \subset \mathrm{Rat},$$

usw.

Ein wichtiger Schritt ist die Dualbruchentwicklung:

$$1/10 = 0{,}1, \quad 1/100 = 0{,}01,$$
$$1/11 = 0{,}010101 \text{ Etc}, \quad 1/101 = 0{,}00110011 \text{ Etc},$$

usw. Im Gegensatz zu "usw." das dem Metatext angehört, gehört Etc zum übermittelten Text. Die periodische Dualbruchentwicklung

wird gerade gebraucht, um die Bedeutung dieses Etc zu erklären.

$(?x)[(x^{10}=10) \wedge (x>0)]$
$x=1{,}0110101111$ Etc.
$\pi=0{,}01\cdot(1-1/11+1/101-1/111+1/1001+\text{Etc})$,
$e=1+1/1+1/10+1/(10\cdot 11)+1/(10\cdot 11\cdot 101)+\text{Etc}$,
$ee=1+10/1+100/10+1000/(10\cdot 11)+10000/(10\cdot 11\cdot 101)+\text{Etc}$,

usw. Dann wird durch eine grosse Anzahl von Beispielen erklärt, was eine reelle Zahl ist; Bezeichnung: Rea (realis). Die Quantoren werden mittels des Etc als unbeschränkte Konjunktionen und Disjunktionen an Beispielen erläutert.

Hierauf folgen, auch wieder in Beispielen, die Operationen mit Mengen (Vereinigung, Durchschnitt, Teilmenge, Paarbildung), der Begriff Menge (Agg, aggregatum), Funktion. Womöglich werden nach den Beispielen auch exakte Definitionen gegeben. Etwa

$(A \in \text{Agg}) \to \{(\wedge x)(\wedge y)[((x \in A) \wedge (y \in A)) \to (x=y)] \leftrightarrow (A \in \boxed{1})\}$.
$[(A \in \text{Agg}) \wedge (B \in \text{Agg})] \to (\wedge x)\{(x \in \langle A, B\rangle) \leftrightarrow (\vee a)(\vee b)[(a \in A) \wedge$
$\wedge (b \in B) \wedge (x=(a,b))]\} \wedge (\langle A, B\rangle \in \text{Agg})$.
$(f \in B^A) \leftrightarrow [(f \subset \langle A, B\rangle) \wedge (\wedge C)(\wedge x)\{(\wedge y)[(y \in C) \leftrightarrow ((x,y) \in f)] \to (C \in \boxed{1})\}]$.

Zwischendurch werden die logischen Operationen genauer behandelt: Man schreibt eine Anzahl wahrer Aussagen auf, versehen mit der Angabe $\in$ Ver (verum), und eine Reihe unwahrer, versehen mit $\in$ Fal (falsum); und man erklärt die Konnektive und die Quantifikation (von Neuem), indem man sich auf Wahrheitswerttafeln beruft.

Bei diesen Angaben über die Mathematik wollen wir es hier bewenden lassen. An Bezeichnungen, die wir später brauchen erwähnen wir noch: $(\wedge x)$: alle x, $(\vee x)$: es gibt ein x, $\hat{x}\cdots$: alle x mit der Eigenschaft $\cdots$, $\check{x}\cdots$: ein x mit der Eigenschaft $\cdots$ (dies insbesondere verwandt, wenn es nur eines gibt). $\hat{}f$: Wertebereich der Funktion f.

5. *Zeitrechnung*

Es werden auf verschiedenen Wellenlänge Zeichen verschiedener Länge gegeben; bei jedem wird die Dauer in Sekunden und die Zahl der in ihm enthaltenen Schwingungen angegeben. Die Aussagen haben also die Form

Dur ———— = Sec a, [1])
Osc ———— = Sec b,

wo a und b reelle Zahlen sind.

Osc x = Dur $x \cdot$ Fre x.

---

[1]) Sec wird als Funktionszeichen behandelt: Abbildung von Rea in die Menge der Zeiten. So verfahre man überhaupt bei benannten Zahlen.

Dur (Dauer, duratio), Osc (Anzahl der Schwingungen, oscillationes), Fre (Frequenz, frequentia).

Aus der Tatsache, dass zu verschiedenen Zeiten und auf verschiedenen Wellenlängen Zeichen derselben Dauer mit derselben Angabe (Sec a) empfangen werden, soll der Empfänger schliessen, dass Dur Dauer bedeutet und Sec a die Dauer ist. Ebenso soll er aus der Übereinstimmung der angegebenen Schwingungszahl mit der von ihm gemessenen die Bedeutung der Funktion Osc ermitteln. (Eine gewisse verfälschung der Zeiteinheit durch die Relativbewegung muss spätter eliminiert werden.)

Wie ganz im Anfang bei den natürlichen Zahlen, so werden auch hier Objekte "gezeigt". Die Zeitzeichen, die wir mit Strichen angedeutet haben, stehen als Bezeichnungen für sich selber. Nachdem die wichtigsten Bezeichnungen eingeführt worden sind, werden jene Zeitzeichen wegen ihrer Umständlichkeit nicht mehr gebraucht.

Zwei Zeitzeichen auf verschiedenen Wellenlängen, von denen das zweite anfängt, wenn das erste aufhört, erklären, was Fin (Ende, finis) und Ini (Anfang, initium) ist:

$$\text{Fin} \longleftarrow = \text{Ini} \longleftarrow$$

Oder: $(\text{Fre}\ x=a) \wedge (\text{Fre}\ y=b) \wedge (\text{Fin}\ x=\text{Ini}\ y)$.

$$\text{Ant} \longleftarrow$$

Oder: $(\text{Fre}\ x=a) \wedge (\text{Fre}\ y=b) \wedge (x\ \text{Ant}\ y)$
Ant bedeutet: vor (ante).

Es wird jetzt auf einer festen Wellenlänge ($\text{Fre}=\omega$) eine "Uhr" eingerichtet, d.h. jede Sekunde erscheint ein kurzes Zeichen. Dem Empfänger wird eine Anweisung übermittelt, wie er diese Sekundenzeichen zu numerieren hat:

$$x\ \text{Pre}\ y \leftrightarrow \{(\text{Fre}\ x=\omega) \wedge (\text{Fre}\ y=\omega) \wedge (x\ \text{Ant}\ y) \wedge \neg(\vee z)\ [(\text{Fre}\ z=\omega) \wedge (x\ \text{Ant}\ z) \wedge (z\ \text{Ant}\ y)]\}.$$
$$[(\text{Ini}\ x=\text{Sec}\ n) \wedge (x\ \text{Pre}\ y)] \rightarrow (\text{Ini}\ y=\text{Sec}\ (n+1)).$$

Ein gewisses "gezeigtes" Zeichen wird als "Sec 0" angewiesen. Die Uhr wird weiterhin zur Numerierung und Identifikation von Mitteilungen gebraucht.

Tem (Zeit, tempus) ist die Funktion, die einem Ereignis seinen Zeitpunkt zuordnet. ^Tem ist die Zeitachse.

6. *Behaviour*

Es scheint ausgeschlossen zu sein, Behaviour durch Regeln zu beschreiben, die den mathematischen und chronometrischen der vorigen

Kapitel ähneln. Der Weg, den ich einschlage, ist der, Geschichten zu erzählen, aus denen der Empfänger selber die Züge des menschlichen Benehmens und den zugehörigen Wortschatz ableiten soll.

Um solche Erzählungen zu konstruieren, braucht man mindestens eine Handlungsart, einige Handelnden und einige Werturteile. Da die Körper der Handelnden vorläufig nicht eingeführt werden sollen, ist die nächstliegende Handlung die des Mitteilens, bezeichnet durch Inq (spricht, inquit). Die Handelnden werden durch Xa, Xb, Xc, usw. angedeutet; in einem späteren Stadium wird mitgeteilt, dass sie zur Klasse Hom (Mensch, homo) gehören. Die Werturteile sind Ben (gut, bene) und Mal (schlecht, male).

Die Geschichten, die erzählt werden, bestehen aus Akten der Form

$$^{t_1}Xa \text{ Inq } Xb : p^{t_2}. \quad (*)$$

Die oberen Marken t_1 und t_2 gehören nicht zum Text, sondern zum Metatext. Sie weisen dem Leser dieses Aufsatzes die Anfangs- und Endzeit des Aktes an. Der Empfänger liest diese Zeiten auf der Uhr (Frequenz ω) ab.

Ausdruck (*) soll bedeuten: Xa sagt zu Xb : p. Hier braucht p nicht eine Aussage zu sein; vielmehr kann es auch eine Frage, eine unvollständige Antwort, ein Befehl oder ganz sinnlos sein; auch könnte Xa dem Xb etwas vorsingen.

Ausdruck (*) ist keine Aussage, sondern ein Ereignis. Derartige Ereignisse finden im weiteren Verlauf häufig statt. Wir wollen aber Ereignisse auch zitieren können. Dies wird folgendermassen erreicht. Man sendet

$$^{t_1}p^{t_2} \cdot t_1, t_2 \text{ Fit } : p.$$

Hier wird als p eine ganz sinnlose Zeichenfolge übermittelt (und zwar wiederholt mit verschiedenen p). Der zweite Teil ist zu lesen: Von t_1 bis t_2 geschieht [1]) (fit) p. Dieser zweite Teil ist eine Aussage.

Ausdruck (*) wird zitiert:

$$t_1 t_2 \text{ Fit } : (Xa \text{ Inq } Xb : p),$$

was wir aber auch abkürzen wollen:

$$t_1, t_2 \; Xa \text{ Inq } Xb : p.$$

Statt des dreifachen Punktes verwenden wir meistens einen Doppelpunkt. Der dreifache Punkt soll stehen, wenn die Wörtlichkeit des Zitates betont wird. (Man denke an die drei Parallelstriche beim Identitätszeichen und die zwei Parallelstriche beim Gleichheitszeichen). Was ein wörtliches und was ein sinngemässes Zitat ist, wird an Beispielen gezeigt. Der Begriff "sinngemäss" lässt sich erst in einem fortgeschrittenen Studium der Behaviour-Terminologie einigermassen formalisieren.

---

[1]) Verbformen denken wir uns in der 3. Person Sing. Praes. Andere Tempora werden mittels expliziter Zeitangaben gebildet.

Was nun die Gespräche zwischen Xa, Xb, Xc, $\cdots$ betrifft, so ist es im Anfang zweckmässig, sie mathematischer Art sein zu lassen, also Fragen und Antworten bei mathematischen Aufgaben. Man denke sich etwa in eine mathematische Unterrichtsstunde versetzt.

Die ersten Geschichten, aus denen der Empfänger dann die Bedeutung von Ausdrücken der Art (*) erschliessen soll, lauten z.B.:

Xa Inq Xb : $[(?x)\ (100x=110)]$. Xb Inq Xa : 11/10. Xa Inq Xb : Ben. Durch die Unvollständigkeit der Antwort, die ja formal keine Aussage ist, soll gerade der Zusammenhang mit der vorhergehenden Frage betont werden. Wenn die Antwort etwa $x=11/10$ lautet oder $(100x=110) \rightarrow (x=11/10)$, wird das Werturteil ebenfalls Ben lauten. Dagegen:

Xa Inq Xb: $[(?x)(100x=110)]$. Xb Inq Xa: 110/100. Xa Inq Xb: Mal. Xb Inq Xa: 11/10. Xa Inq Xb: Ben.

Das ungekürzte Resultat 6/4 wird also als schlecht bezeichnet, obwohl es als Aussage aufgefasst wahr ist. Auch, wenn statt des Angeredeten ein Anderer antwortet, ist das Werturteil Mal.

Man beachte im Folgenden, dass sich Werturteile immer auf Handlungen, nicht auf Aussagen beziehen. Das Werturteil würde hier also ausführlicher lauten

$$\overset{\approx}{\underset{\sim}{y}}\ (t_1, t_2\ \text{Fit} : y) \in \text{Ben bzw. Mal}$$

wo t_1, t_2 das Intervall ist, in dem die zu beurteilende Antwort gegeben wurde [1]).

Mittels solcher Gespräche zwischen mehreren Personen werden die Fragewörter durchexerziert. Wer?, wem?, was?, wann? — fragen nach einer Unbekannten x in einer Gleichung, die mit $(?x)$ eingeleitet wird:

$$\begin{aligned}
&(?x)\ t_1, t_2\ x\ \text{Inq}\ Xb : p,\\
&(?x)\ t_1, t_2\ Xa\ \text{Inq}\ x : p,\\
&(?x)\ t_1, t_2\ Xa\ \text{Inq}\ Xb : x,\\
&(?x)\ x\quad Xa\ \text{Inq}\ Xb : p.
\end{aligned}$$

Auch die Tatsachenfrage lässt sich so formulieren:

$$(?x)\ [x=\text{Jud}\ (t_1, t_2\ Xa\ \text{Inq}\ Xb : p)].$$

Gesucht ist der Wahrheitswert (Jud, iudicium) der Aussage $t_1, t_2\ Xa$ Inq $Xb : p$; also: hat Xa dem Xb das p gesagt?

Nur das "Warum?" lässt sich so kaum wiedergeben. Es wird mit Cur (warum, cur) bezeichnet; die Antwort fängt dann mit Qia an (weil, quia). Der Empfänger entnimmt die Bedeutung dieser Wörter gewissen Fragen von Xa, in denen von Xb verlangt wird, eine kurze Antwort auf eine schwierige Aufgabe näher zu begründen.

In ähnlicher Weise wird Sci (weiss, scit) eingeführt. Zu einer schwierigen Frage erklärt Xb, dass er das Resultat zur Zeit t_1, t_2 nicht weiss, aber zur

[1]) Diese Schreibweise ist nicht ganz befriedigend. Sie wird später verbessert.

(späteren) Zeit t_3, t_4 wohl weiss; inzwischen rechnet er die Aufgabe vor.

Manche Gespräche, bei denen Xa von Xb immer wieder eine Begründung seiner vorherigen Begründung verlangt, enden mit den Zeugenaussage des Xb, dass er ein gewisses Ereignis mitgemacht hat. Die Bezeichnung hierfür lautet Ani (hat wahrgenommen, animadvertit). In andern Fällen erklärt Xb, dass er etwas nicht weiss, weil er es nicht wahrgenommen hat.

Eine Fülle von Behaviour-Termen lassen sich mittels mathematischer Spiele, Lud (ludus), einführen, die von zwei oder mehr Personen Xa, Xb, Xc, $\cdots$ gespielt werden. Da die Beschreibung der Spiele recht weitläufig ist, verzichten wir auf Einzelheiten. Die Spiele enden damit, dass ein Spieler gewinnt, Vin (vincit), oder sogar einem andern Spieler einen Betrag bezahlt; Bezeichnungen: Dat (gibt), a Den (a Pfennige, denarii),

$$t_3, t_4 \; Xb \text{ Dat } Xc : a \text{ Den}.$$

Ein Beobachter macht zu den Zügen Bemerkungen, und zwar Werturteile, oder: "Xb will gewinnen", "Xb kann gewinnen", "kann nicht gewinnen", "Xb darf die und die Züge machen", "Xb muss einen Zug machen". Bezeichnungen: Vul: (will, vult), Pot: (kann, potest), Lic: (darf, licet), Deb: (muss, debet).

Das Vokabular wird besonders erweitert durch Spiele mit Koalitionsmöglichkeiten. Ein Ereignis zu einer bestimmten Zeit kann für einen Spieler Xb einen gewissen Nutzen besitzen, der eine Funktion Uti (utilitas) des Ereignisses ist. Wenn x das Ereignis ist, so ist

$$Xb \text{ Uti } (x \text{ Dum } (t_1, t_2 \text{ Fit} : x))$$

ein Wert, der unter der Bedingung (t_1, t_2 Fit : x) berechnet wird (Dum = während, etwa gebraucht wie der senkrechte Strich bei der Andeutung bedingter Wahrscheinlichkeiten). Die Werte von Uti können Ben und Mal sein, oder eine teilweise geordnete Menge bilden, oder mit Den benannte Zahlen.

Die Auswertung von Uti spielt eine Rolle bei Feststellungen, dass ein Spieler dem andern hilft – Bezeichnung Aux (auxiliatur). Spieler können andern eine Leistung versprechen; Bezeichnung Pol (polliciscitur). Auch das Wort Ius (gerecht, iustus) lässt sich hier einführen. Ebenso führt man am besten in solchen Zusammenhängen den Ausdruck für Wahrscheinlichkeit For (fortuna) ein.

Ein logisch überflüssig scheinendes, aber als Behaviour-Term wichtiges Wort ist Sed (aber).

7. *Mechanik*

Hier wird das Kap. Zeitrechnung fortgesetzt. Wichtig ist das Wort Loc (Ort, locus). Es ist aber erst mittels Behaviour-Worten einzuführen. Zwei Personen befinden sich an verschiedenen Orten, wenn der eine eine Mitteilung des anderen verspätet erfährt (Ani, Sci). Loc ist

eine Funktion, ihr Wertebereich ist der Raum (^Loc). Danach wird ^Loc analytisch geometrisch beschrieben.

Dann folgt, wenn $x \in$ Scr (Massenpunkt, scrupulus) ist,

$$\text{Mot } x \in \hat{}\text{Loc}^{\hat{}\text{Tem}}:$$

eine Bewegung von x (motus) ist eine Abbildung von ^Tem in ^Loc.

$$\text{Mot } x \in \text{Uni}$$

(gleichförmig, uniformis) wird durch die Linearität der Abbildung von Tem in ^Loc erklärt. Aus der Tatsache, dass diese Elemente von ^Loc$^{\hat{}\text{Tem}}$ ausdrücklich hervorgehoben und ausführlich behandelt werden, soll der Empfänger schliessen, dass mit Uni eine mechanisch bevorzugte, nämlich die gleichförmige geradlinige Bewegung gemeint ist. Durch diese Auszeichung ist dann auch das gemeinte Koordinatensystems bis auf Galilei-Transformationen festgelegt.

Weiter wird mitgeteilt, dass die maximale Geschwindigkeit Cm/Sec $3 \cdot 10^{10}$ ist. Der Empfänger weiss dann, mit welcher Längeneinheit bei uns gerechnet wird.

Nun wird analytisch-geometrisch das Stossgesetz für Massenpunkte aufgeschrieben, aus dem der Empfänger schliessen muss, dass

$$\text{Mas } x = \text{Gr } y$$

die Masse des Massenpunktes x ist (auf eine Einheitsmasse bezogen).

Es folgt (analytisch-geometrisch) die gleichmässig beschleunigte Bewegung und das Gravitationsgesetz (aus dem der Empfänger zurückschliessen kann auf die Grösse der bei uns gebräuchlichen Masseneinheit).

Es werden Massen aufgezählt, die ihrer Grösse nach nur die von Sternen sein können, jeweils mit Namen und gegenseitigen Abständen und Geschwindigkeiten, so dass der Empfänger sie eventuell identifizieren kann. Auch wird unser Planetensystem beschrieben mit den Massen, Formen und Bahnelementen seiner Mitglieder. Es wird mit besonderem Nachdruck hingewiesen auf eines dieser Mitglieder, Ter (Erde, terra), durch die Mitteilung

$$\text{Ecc Ter}$$

Hier Erde (ecce terra). Der Empfänger soll daraus schliessen, dass sich der Absender auf Ter befindet. Auch wird erwähnt, dass sich die Mitglieder von Hom auf Ter befinden.

Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilberts "Grundlagen der Geometrie" [1]) [1957e]

Nieuw Arch. Wisk. (3) 5 (1957), 105–142
[Zbl 0078.12902; MR0098003]

Mir ist in der höheren Mathematik kein Buch bekannt, das in gut fünfzig Jahren acht Auflagen erlebt hat (und in der höheren geometrischen „textbook"-Litteratur wüsste ich nur eines, A. M. LEGENDRE, Elements de géométrie, mit mindestens 12 französischen Auflagen). Wie kaum ein anderer Mathematiker kann HILBERT mit seinem antiken Kollegen EUKLID wetteifern. Auch die „Elemente" kannten Revisionen und „Ergänzungen". Zu EUKLIDS dreizehn Büchern haben Spätere zwei hinzugedichtet, während HILBERT es zeitlebens auf zehn Anhänge gebracht hat. Was die Revisoren (oder „Rezensoren") angestellt haben, ist bei EUKLID schwieriger festzustellen als bei HILBERT, dessen acht Auflagen man ja noch nebeneinanderlegen kann. Worauf EUKLID aufbaute und was er selber leistete — diese Frage zu beantworten, erfordert delikate historische Untersuchungen. Liest man historische Bemerkungen zu den Grundlagen der Geometrie in allerlei modernen Aufsätzen und Büchern, so könnte man manchmal beinahe meinen, dass es nicht weniger schwer ist, etwas Sicheres über die Entwicklung der Geometrie in den letzten hundert Jahren auszusagen. Doch umfasst die ganze diesbezügliche Litteratur kaum mehr als zweihundert Titel, von denen etwa zwanzig genügen, um die Entwicklung zu übersehen; auch handelt es sich dabei im Ganzen um Bücher und Zeitschriften, die leicht erreichbar sind.

[1]) D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 8. Aufl., mit Revisionen und Ergänzungen, von P. BERNAYS. Mit 124 Abb. B. G. TEUBNER, Stuttgart 1956, DM 11.40, Hln. DM 13.40.

Es wäre kaum sinnvoll, der 8. Aufl. von HILBERTS „Grundlagen" nun eine normale Buchbesprechung zu widmen. Darum ergreife ich die Gelegenheit beim Schopfe, einige historische Betrachtungen anzustellen, zu zeigen, wie es um die Grundlagen der Geometrie stand, als HILBERTS Abhandlung erschien, wie sich diese Schöpfung in einer Anzahl von Auflagen weiter entwickelt und wie sie die Entwicklung beeinflusst hat. Die Kritik, die man, fast sechzig Jahre später, an HILBERTS Grundlagen üben kann, wird der Leser wohl nicht missverstehen, denn sie ist ja dem Geiste des Werkes entsprungen und nur in ihm denkbar. Bearbeiter neuer Auflagen und besonders der der letzten müssen manchmal mit sich gerungen haben: wo sie dies oder jenes erneuern durften, und wo sie ehrfürchtig das Alte alt liessen. Man kennt ihre Erwägungen nicht, und es bedeutet keine Geringschätzung ihrer Arbeit, wenn man hier und da andeutet, was man gern anders gesehen hätte.

Bei allen Betrachtungen will ich mich auf die Grundlagen der *Geometrie* beschränken und die Anhänge vom sechsten bis zehnten, die sich allmählich angesammelt haben, negieren. Es handelt sich dabei um Aufsätze zu den Grundlagen der Mathematik, die niemals recht in den Rahmen des Werkes passten und nur sehr unvollkommen von HILBERTS Genie zeugen. Man darf es nur begrüssen, dass der Bearbeiter der 8. Aufl. sie weggelassen hat. Von den verschiedenen deutschen Auflagen haben mir die 1.(1899), 3.(1909), 4.(1913), 7.(1930), 8.(1956) bei der Abfassung dieses Aufsatzes vorgelegen.

* * *

Weitverbreitet ist die Meinung, es sei HILBERTS Verdienst gewesen, als erster ein logisches System der Euklidischen Geometrie angegeben zu haben, in das nichts mehr aus der Anschauung hineingeschmuggelt werde. Dieser Prioritätskonstatierung stehen jedenfalls M. PASCHS „Vorlesungen über neuere Geometrie" von 1882 entgegen. Ich habe PASCHS Beweise nicht in allen Einzelheiten nachgeprüft, es gibt dort wohl noch Lücken, aber schon nach einer oberflächlichen Lektüre weiss der Leser, dass PASCH das Programm gewissenhaft zu erfüllen bestrebt ist, das er in § 12 formuliert: „Es muss in der Tat, wenn anders die Geometrie wirklich deduktiv sein soll, der Prozess des Folgerns überall unabhängig sein vom *Sinn* der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Defini-

tionen niedergelegten *Beziehungen* zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen". Solch ein Programm konnte wohl auch vor PASCH formuliert werden (und das geschah bisweilen), aber dann blieb es auch bei der Formulierung. Als exakt deduktiver Geometer hat PASCH wohl Zeitgenossen, die mit ihm wetteifern, wie STOLZ und F. SCHUR, aber keine Vorläufer. Die Italiener, wie VERONESE, ENRIQUES, PIERI, PADOA, sind von ihm abhängig, und es möchte mir sogar scheinen, als ob PEANOS logistische Untersuchungen dem PASCH'schen Beispiele, wie man Axiome exakt formuliert, viel zu verdanken haben. Wenn es HILBERTS „Grundlagen", kaum 20 Jahre später, gelang, PASCHS Vorlesungen zu verdunkeln, so müssen es wohl ganz neue, ganz überragende Qualitäten sein, die jene vor diesen auszeichnen. Welche es gewesen sind, will ich hier gerade auseinandersetzen.

Die euklidische Geometrie ist ein logisch recht kompliziertes Gebilde; ein vollständiges Axiomensystem für sie aufzustellen, konnte keine Kleinigkeit sein, solange man sich noch nicht im modernen axiomatischen Denken geübt hatte. Eine der historischen Voraussetzungen der Lösung dieser Aufgabe war das Abschwenken der Geometer vom euklidischen zum projektiven Standpunkt im Anfang des 19. Jahrhunderts. Mit einem Male war die Vielfalt der geometrischen Relationen auf *eine* reduziert, auf die der Inzidenz, zu der sich allerdings bei näherer Betrachtung noch die der Ordnung gesellte.

Bei G. K. CH. V. STAUDT (Geometrie der Lage 1847) scheint das Ziel einer rein deduktiven Geometrie eigentlich schon erreicht zu sein. Jede Berufung auf metrische Relationen wird vermieden. Die harmonische Lage wird durch Inzidenzrelationen definiert (vollständiges Vierseit!), und mit einem ganz modern anmutenden Kunstgriff wird die projektive Abbildung zwischen Geraden eingeführt als eine, die den Begriff der harmonischen Lage invariant lässt. Dann ergibt sich schnell der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, der sich wirklich als Grundlage der projektiven Geometrie erweist. Erst F. KLEIN (Math. Ann. 6(1873), 135—136) entdeckte die versteckten Stetigkeitsbetrachtungen in V. STAUDTS Beweis. Die sind unumgänglich, wenn man von der Invarianz der Punkte eines harmonischen Netzes auf die aller Punkte der Geraden schliessen will. Es gelingt F. KLEIN nicht, die Lücke auszufüllen oder auch nur das Problem zu durchschauen. Wie freibleibend damals Geometrie betrieben wurde, zeigt KLEINS Stil: Über diese

Möglichkeit hilft, soviel ich sehe, nur das Axiom hinweg, *dass es gestattet sein soll, den Grenzpunkt* [1]), *auch wenn er in dieser Weise durch einen unendlichen Prozess definiert ist, als fertig vorhanden aufzufassen*". Oder einige Seiten vorher: „dass man einen Punkt, der durch einen konvergenten Prozess erzeugt werden soll, als wirklich existierend annehmen darf. Im nächsten Band der Math. Ann. zitiert er sich selber: „Ich verlangte zunächst: Wenn auf einem Gebilde erster Stufe eine unendliche Reihe von Elementen gegeben ist, die in ein Segment des Gebildes nicht eindringt, so soll es gestattet sein, von einem Grenzelemente, dem die Reihe zustrebt, als einem völlig bestimmten Elemente zu sprechen.... Sollten in der Reihe der harmonischen Elemente solche Grenzelemente aufstehen, so dürfen sie der Reihe zugezählt werden". Gegen Ende dieser Arbeit, nachdem er einen Beweis des Fundamentalsatzes von ZEUTHEN und LÜROTH abgedruckt hat, schwant ihm etwas, und er schreibt: „Die Forderung, wie sie durch unsere zweite Voraussetzung ansgesprochen worden ist, kann prägnanter als Forderung der *Stetigkeit* der projektivischen *Beziehung* bezeichnet werden". Und was er dann wirklich formuliert, ist nicht die Stetigkeit, sondern die Ordnungsinvarianz der Abbildung: „Vier Elementen des einen Gebildes, die in einem Sinne liegen, sollen vier Elemente des andern entsprechen, die ebenfalls in einem Sinne liegen". Mit dieser Forderung will er erreichen, dass bei der Abbildung auch den Grenzpunkten des harmonischen Netzes etwas entspricht (und dabei war die Abbildung doch als auf der ganzen Geraden existierend vorausgesetzt worden). Erst nach DARBOUX' Eingreifen merkt er (Math. Ann. 17 (1880), 52—54), was los ist, aber zu vollständiger Klarheit hat er es in dieser Materie auch später nicht gebracht.

Für KLEIN ist die Gerade, die Ebene und der Raum immer noch eine „Zahlenmannigfaltigkeit"; anders weiss er die topologischen Eigenschaften dieser Gebilde nicht zu formulieren. Darum halten damals auch viele seine autonome Begründung der projektiven und der hyperbolischen Geometrie (das Cayley-Klein-Modell) für einen logischen Zirkel: Man muss ja erst einmal mit einer Zahlenmannigfaltigkeit anfangen — sagen sie — doch hat man mit der Zahlenmannigfaltigkeit auch schon den ganzen euklidischen Raum eingeführt. KLEIN hatte hier natürlich Recht, aber andererseits hat er auch nach PASCH und HILBERT niemals recht begriffen, dass man

---

[1]) einer Folge im harmonischen Netz.

die „Zahlenmannigfaltigkeit" als Grundlage der Geometrie entbehren könne. Auch sonst hat es recht lange gedauert, bis diese Erkenntnis sich wirklich durchgesetzt hat. Die Überzeugung, dass es ohne die analytische Stetigkeit nicht gehe, war so stark, dass manche noch in HILBERTS Grundlagen einen Trugschluss vermuteten.

Man muss sich das alles klar machen, wenn man PASCHS Leistung recht würdigen will; man muss wirklich KLEINS mit PASCHS geometrischen Stil verglichen haben und KLEINS sogen. Axiom mit PASCHS „Kernsätzen". Aber auch PASCH ist historisch bedingt. Seine Arbeit wird erst ermöglicht (oder wenigstens erleichtert) durch die Analyse des Zahlenkontinuums, die 1871 und 1872 unabhängig von einander CANTOR und DEDEKIND geglückt war. Ganz so einfach ging es nun allerdings beim geometrischen Kontinuum nicht. Denn die Überalldichtheit des rationalen Netzes, die für das Zahlenkontinuum selbstverständlich war, muss beim geometrischen Kontinuum axiomatisch erzwungen werden, und zwar mit Hilfe des sogen. Archimedischen Axioms (das — allerdings nicht als Axiom — schon von EUDOXOS formuliert worden war und so im 5. Buch der Elemente steht [1]). Offenbar unabhängig voneinander erkannten PASCH und O. STOLZ (Math. Ann. 18 (1881), 22 (1883)) die Bedeutung dieses Axioms.

PASCHS Name wird von HILBERT bei den Ordnungsaxiomen genannt; er hätte es ebenso bei den Verknüpfungs- und den Kongruenzaxiomen verdient, wenn man auch zugeben muss, dass HILBERT sich hier weniger eng an PASCH anschliesst. Dass PASCH auch Kongruenzaxiome hat, ist eigentlich merkwürdig, denn alles ist bei ihm auf die projektive Geometrie zugespitzt. Aber er fühlt sich verpflichtet, das Archimedische Axiom von der Kongruenz her einzuführen. Der Methodenreinheit zuliebe macht es dann F. ENRIQUES (Ist. Lomb. 27 (1894)) mit einer projektiven Form der DEDEKINDschen Stetigkeit. Aus dem chaotischen Werk G. VERONESES (Atti Accad. Linc., Memorie cl. fis. (4)6 (1890); Fondamenti di geometria, Padova 1891) tauchen nicht-Archimedische Geometrien auf, denen T. LEVI-CIVITA (Atti Istituto Veneto (7) 51 (1892—93)) eine feste Grundlage gibt; man kann diese Leistungen nicht hoch genug einschätzen. Heutzutage ganz vergessen — er wird in HILBERTS Grundlagen nicht erwähnt — ist H. WIENER, der (Jahres-

[1]) Eudoxos definiert: Dass sie ein Verhältnis haben, sagt man von Grössen, die vervielfältigt einander übertreffen können. Archimedes fordert von gewissen Grössen, *dass* sie ein Verhältnis haben.

bericht DMV 1 (1893), 3(1894)) die Bedeutung des Desargues und des Pappus-Pascal als fundamentaler Schliessungssätze erfasst (auch die Bezeichnung Schliessungssatz rührt von ihm her). Sogar die Möglichkeit einer nicht-Desarguesschen Geometrie war schon erkannt worden von KLEIN (Math. Ann. 6(1873)), dem es nur an den nötigen Exaktheit im Ausdruck fehlte, und man kannte sogar schon endliche projektive Geometrien seit G. FANO (Giorn. di Mat. 30 (1892)) und E. H. MOORE (Am. J. 18(1896)).

So stand es mit den Grundlagen der Geometrie im Jahre 1899. Alle fundamentalen Schwierigkeiten waren bewältigt, so schien es. Was blieb für HILBERT eigentlich noch zu tun?

* * *

1899 erschienen in der Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen HILBERTS „Grundlagen der Geometrie", die erste Auflage des späteren Buches. „Grundlagen der Geometrie" war damals schon der Name eines *Gebietes* der Mathematik. Unter dem Namen waren schon Arbeiten und Bücher verschiedener Verfasser erschienen (als erster sprach — glaube ich — Helmholtz von Grundlagen der Geometrie [Verhandl. Naturhist. med. Verein Heidelberg 4 (1868) = Wiss. Abh. II, 610—617], aber auch früher, 1854, hatte RIEMANN gesprochen von Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen). wie ja auch EUKLIDS Elemente Vorläufer hatten. (Aber während EUKLIDS Elemente jene Reihe schlossen, haben die modernen Mathematiker HILBERT nicht das Recht zugesprochen, die letzten Grundlagen der Geometrie geschrieben zu haben.) Dass HILBERT sich schon lange vor 1899 mit den Grundlagen der Geometrie beschäftigt hatte, zeigt ein Brief von ihm an KLEIN aus dem Jahre 1894 (Math. Ann. 46(1895)), der von der 2. Aufl. an den „Grundlagen" als Anhang I einverleibt wurde. Es werden da Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome und ein Stetigkeitsaxiom aufgezählt, in anderer Fassung als die der 1. Aufl. der „Grundlagen".

Von PASCH zu HILBERT ist es wohl ebensoweit wie von KLEIN zu PASCH. Während PASCH sich ängstlich bemüht, die Begriffe, die er einführt, aus der Erfahrung abzuleiten und axiomatisch nicht mehr zu fordern als die Analyse des Erfahrungsmaterials darzubieten scheint, hebt HILBERT nach kurzer Einleitung an:

Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$;

die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; die Punkte heissen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heissen die *Elemente der ebenen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heissen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen", „zwischen", „parallel", „congruent", „stetig"; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie* [1]).

Von altersher war ein Axiom eine evidente Wahrheit, die nicht bewiesen werden kann, aber auch nicht bewiesen zu werden braucht. Wer an die Evidenz eines Axioms nicht glauben wollte, nannte es ein Postulat oder sprach wie RIEMANN in seiner Antrittsvorlesung von „Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" oder wie HELMHOLTZ von „Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen". Ob die Axiome, wie bei KANT, aus der reinen Anschauung stammen, ob und wieweit sie idealisierte Erfahrung (HELMHOLTZ) oder hypothetisches Urteil über die Wirklichkeit (RIEMANN) sind — das ist immer wieder eine Streitfrage. Aber kein Geometer oder Philosoph zweifelt daran, dass die Geometrie vom wirklichen Raume handelt und *seine* Eigenschaften untersucht — PASCH, ENRIQUES, VERONESE, PIERI, KLEIN, sie alle betonen es, und kurz vor Toresschluss schreibt B. RUSSELL (An Essay on Foundations of Geometry 1897) noch eine Philosophie, in der wohl KANTS verwehte Fussstapfen, aber noch keine Spuren von der Tatze des Löwen sichtbar sind.

„Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen..." — damit ist die Nabelschnur zwischen Realität und Geometrie durchgeschnitten. Die Geometrie ist reine Mathematik geworden, und die Frage, ob und wie sie auf die Wirklichkeit angewandt werden kann, beantwortet sich bei ihr ganz wie bei irgendeinem anderen Zweige der Mathematik. Die Axiome sind nicht mehr evidente Wahrheiten, ja es hat nicht einmal mehr Sinn, nach ihrer Wahrheit zu fragen.

Man sollte sagen, dieser Gedanke habe damals in der Luft gelegen. Nachdem PASCH Ernst gemacht hatte mit der strengen Deduktivität, nachdem nicht-Euklidische, nicht-Desarguessche, nicht-Archimedische und endliche Geometrien erschienen waren, hätte man sagen sollen, dass es endlich soweit war. Wenn alles mit

[1]) Die Reihenfolge der Axiomgruppen ist nach der 1. Aufl. geändert worden.

rechten Dingen zugegangen wäre, hätte es ein Italiener [1]) sein müssen, der als erster dem neuen Gedanken das Wort verliehe, denn nirgendwo ist man ihm so nahe wie in den Arbeiten jener Schule. Doch kommt A. PADOA ein Jahr zu spät, wenn er — offenbar unabhängig von HILBERT — alles Wesentliche zur Idee der Axiomatik ausspricht (Bibl. Congrès Intern. de Philos. 1900; C.r. du 2 ème congrès intern. des math. 1900), mit voller Klarheit und ausdrücklicher, als HILBERT es jemals getan hat. Aber auch PADOA wird von HILBERT überschattet, denn die „Grundlagen" enthalten eben soviel mehr als nur die Einsicht in das Wesen der Axiomatik.

Was bei PADOA ausdrücklich formuliert wird, schimmert oft bei HILBERT nur durch das Dickicht der echt mathematischen Tatsachen, so z.B. die Idee der impliziten Definition, vielen damals eine logisches Monstrum und ein Ärgernis. HILBERT spricht nicht von impliziter Definition. Aber die Axiome der Anordnung leitet er ein mit den Worten: „Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff „zwischen"..." Und nochmals, bei den Kongruenzaxiomen: „Die Axiome dieser Gruppe definieren den Begriff der Congruenz oder der Bewegung". Schon in der Fassung von 1894 kann man hinterdrein diese Idee erkennen, aber damals merkte es noch niemand.

Was Punkte, Geraden, Ebenen sind, was die Worte „liegt auf", „zwischen", „kongruent" bedeuten, wird implizit durch die Axiome festgelegt, wie durch Spielregeln, die sagen, wie man mit den Dingen spielen darf. Nein — sagen manche und erheben den Einwand: Wenn ich etwa im Euklidischen Raum eine Inversion ausführe, entstehen aus den Geraden und Ebenen Kreise und Kugeln, die als System genausogut die Axiome befriedigen, obwohl sie nicht Geraden und Ebenen sind; also definieren die Axiome garnicht die in ihnen auftretenden Begriffe. Solche Einwände werden damals ernsthaft erhoben. Beispielsweise von E. B. WILSON (Arch. Math. Phys. (3) 6 (1904)), der wünscht „a postulate which demands that the objects under consideration shall be sufficiently restricted qualitatively as well as quantitatively to correspond, nearly enough for practical uses, to the objects of experience which is their purpose

---

[1]) Es *war* auch ein Italiener. Erst nachdem ich diesen Aufsatz geschrieben hatte, merkte ich es. G. FANO war 1892 schon so weit (Giorn di mat. 30, 106—132). Er leitet seine Axiomatik mit Worten ein, die an die zitierten HILBERTschen erinnern: A base del nostro studio noi mettano una *varietà* qualsiasi di enti di qualunque natura; enti che chiameremo, per brevità, *punti*, independemente però, ben intesto, dalla lora stessa natura.

to explain or to coordinate". Das ist die Meinung vieler, auch wenn sie nicht so gereizt reagieren wie WILSON.

Auch G. FREGE wendet sich nach einer Korrespondenz gegen HILBERT (Jahresbericht DMV 12 (1903)): „Von altersher nennt man Axiom einen Gedanken, dessen Wahrheit feststeht, ohne jedoch durch eine logische Schlusskette bewiesen zu werden können ... Nie darf etwas als Definition hingestellt werden, was eines Beweises oder der Anschauung zur Begründung seiner Wahrheit bedarf. Andererseits können Grundsätze und Lehrsätze nie die Bedeutung eines Wortes oder Zeichens erst feststellen *wollen*". „Erfahren wir hierdurch[1]), wann die Beziehung des Zwischenliegens stattfindet? Nein, sondern umgekehrt, wenn wir diese Beziehung erfasst haben, erkennen wir die Wahrheit der Axiome". HILBERTS Axiomensystem ist ein Gleichungssystem mit vielen Unbekannten, das man nicht lösen kann. „Wenn wir die Frage beantworten wollen, ob ein Gegenstand — z.B. meine Taschenuhr — ein Punkt sei, stossen wir gleich beim ersten Axiom auf die Schwierigkeit, dass da von zwei Punkten die Rede ist..." Frege parodiert Hilbert: „Erklärung. Wir denken uns Gegenstände, die wir Götter nennen. Axiom 1. Jeder Gott ist allmächtig. Axiom 2. Es gibt wenigstens einen Gott".

Frege konnte es kaum plastischer sagen. Bis HILBERT hatten die Mathematiker sich wirklich benommen, als könnten sie mathematisch feststellen, ob Freges Taschenuhr ein Punkt sei. Und Axiomensysteme von der Art des gerügten hat es wirklich gegeben (SPINOZA), solang man meinte, dass die Geometrie etwas über die Realität aussage. HILBERTS Auffassung hat sich durchgesetzt. Die jüngeren Mathematiker liessen sich gern erlösen von Definitionen wie „Punkt ist was keine Teile hat", „Einheit ist, wonach jedes Ding eins heisst". (Siehe A. KORSELT, Jahresbericht DMV 12 (1903).) Mit der reinlichen Scheidung zwischen Mathematik und Wirklichkeitswissenschaft hat HILBERT einer neuen Methodologie den Weg gewiesen. Als EINSTEIN sein populäres Büchlein „Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie" schrieb (1916), machte sie Schule bei Wissenschaftlern und Philosophen, und klassisch ist die geworden in markanten Sätzen, die EINSTEIN in seinem Vortrage „Geometrie und Erfahrung" (Berlin, Springer 1921) prägte: „Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich

[1]) Durch HILBERTS Axiome der Anordnung.

nicht auf die Wirklichkeit... Der von der Axiomatik erzielte Fortschritt besteht nämlich darin, dass durch sie das Logisch-Formale vom sachlichen oder anschaulichen Gehalt sauber getrennt wurde... Diese Axiome sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes... Die Axiome definieren erst die Gegenstände, von denen die Geometrie handelt ... Dieser geschilderten Auffassung der Geometrie lege ich deshalb besondere Bedeutung bei, weil es mir ohne sie unmöglich gewesen wäre, die Relativitätstheorie aufzustellen."

* * *

Ich hatte hier unter den von HILBERT Beeinflussten eigentlich POINCARÉ nennen wollen, der in „La Science et l'Hypothèse" (Paris 1903?) Gedanken zur Geometrie ausgesprochen hat, die ganz HILBERTS Grundlagen zu entstammen scheinen. POINCARÉ fragt da, ob es synthetische Urteile a priori gebe. Ja — sagt er — in der vollständigen Induktion: „Qu'on essaie ensuite de s'y soustraire et de fonder ... une fausse arithmétique analogue à la géométrie non-euclidienne — on n'y pourra pas parvenir". Aber die geometrischen Sätze sind weder a priori, noch empirisch (denn dann wären sie nicht exakt). Sie sind Konventionen, sie sind „des définitions déguisées". Die Frage nach dem Wahrheitsgehalt ist für die euklidische Geometrie so sinnvoll wie für das metrische System von Massen und Gewichten, also sinnlos. Wohl ist die euklidische Geometrie die bequemste.

Ich war nicht wenig erstaunt, als ich in der Revue générale des sci.p. et appl. von 1891 (2, 769—774) einen Aufsatz von POINCARÉ entdeckte, in dem all dies schon wörtlich steht (wie überhaupt La Science et l'Hypothèse die wörtliche Wiedergabe einer Reihe von Aufsätzen aus den neunziger Jahren ist). War POINCARÉ also HILBERT um acht Jahr zuvorgekommen mit seinen Gedanken über die Geometrie?

Noch erstaunlicher war aber, was ich feststellte, als ich die ganze Reihe von POINCARÉS Aufsätzen und die Kontroversen las, die sie veranlassten (hauptsächlich in der Revue de métaphysique et de morale). Da zeigte sich nämlich, dass POINCARÉS Ausführungen, die man in Science et Hypothèse, also nach HILBERTS „Grundlagen" ohne Mühe liest als eine Auseinandersetzung des logischen Status der Geometrie im HILBERTschen Sinne, mit dieser Frage kaum etwas zu tun haben. Das Wesen der Axiomatik kommt niemals zur Sprache.

Es handelt sich für POINCARÉ immer nur um die Entscheidung zwischen euklidischer und nichteuklidischer Geometrie (und er ist dann auch, wenn er im Bull. sci. math. (2) 26 (1902) HILBERTS „Grundlagen" bespricht, ganz überrascht, dass man noch andere Axiome als das euklidische verneinen kann). „Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie", sagt POINCARÉ (Revue métaph. morale 3 (1895), 631—646), und das bedeutet, dass er noch ganz empiristisch im Sinne des HELMHOLTZschen Raumproblems denkt und noch nicht einmal bis zu RIEMANNS Auffassung durchgedrungen ist, die eine Metrik ohne starre Körper kennt — die Homogenität des Raumes ist obligatorisch, und das Krümmungs*mass* ist „Konvention". Obwohl POINCARÉ manchmal sehr gut die Bedeutung der impliziten Definition durchsieht (Revue métaph. morale 5 (1897), 59—70) ist der logische Status der Geometrie ihm garnicht klar; dass die Axiome verschleierte Definitionen seien, hat garnichts mit der „impliziten Definition" zu tun, sondern ist die noch immer vage Wiederholung eines empiristischen Wahlspruches, den man zurückverfolgen kann über STUART MILL, STEWART DUGALL, ja bis LOCKE. Erst in seiner Besprechung von HILBERTS „Grundlagen" erkennt POINCARÉ in aller Schärfe, worauf es logisch ankommt; auf die Möglichkeit des „confier les axiomes à une machine à raisonner". Bis dahin hatte die Geometrie bei den Geometern immer einen Gegenstand, in der Erfahrung oder (nach KANT) in der reinen Anschauung, und die Exaktheit eines geometrischen Beweises beruhte (etwa nach COUTURAT, Revue métaph. morale 1 (1893), 63—85), darauf, dass er nicht abhängt „de la figure particulière que l'on considère, et que l'on voit clairement que la construction s'applique également à tous les cas possibles". PASCHS und der Italiener Leistungen haben POINCARÉ damals kaum beeinflusst; sie waren ihm vielleicht nicht einmal bekannt, wie sich ja überhaupt die Entwicklung in den verschiedenen Sprachgebieten damals noch recht unabhängig vollzieht.

* * *

Es ist wirklich erstaunlich, wie man so ganz andere Auffassungen *nach* HILBERTS „Grundlagen" zwanglos im HILBERTschen Sinne interpretieren kann. Die menschliche Sprache ist offenbar ein merkwürdiges Instrument. Der Historiker nehme sich in acht: ein ganzes Buch kann in einem andern historischen Kontext etwas ganz Anderes bedeuten — Science et Hypothèse ist ein Beispiel.

Wunderbare Schicksale der mathematischen Sprache will ich nun vorläufig verfolgen. Zuerst etwas, was die implizite Definition betrifft. Wie lange Freges Ärger nachwirkte, sieht man bei Logisten wie RUSSELL und CARNAP, die sich mit ihr niemals recht haben befreunden können. Auf ihre Bedeutung hat zum ersten Male ein Mathematiker hingewiesen, GERGONNE (Ann. de Math. 9(1818)). Seit HILBERT wurde sie bewusst verwandt. Nur drücken wir uns heute etwas präziser aus. Man stelle sich vor, dass jemand die Axiomatik des Gruppenbegriffes folgendermassen einführte: Wir denken uns Dinge, die wir Gruppenelemente nennen, und zwischen ihnen eine Beziehung, die Multiplikation heisse, und deren genaue Beschreibung durch die Gruppenaxiome erfolgt. (Und danach schreibt man diese Axiome auf.) So drückt HILBERT sich nämlich aus. Und — Traditionen sind zähe — viele, die sich der grössten Sorgfalt im Sprachlichen befleissigen, machen es HILBERT noch nach, sobald Geometrie auf der Tagesordnung steht. Aber bei aller Pietät sollte man heutzutage lieber sagen:

Eine System von drei Mengen (Punkte, Geraden, Ebenen) und von ... Relationen (Inzidenz, zwischen, Kongruenz, ...) heisst eine räumliche Geometrie, wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt — und nun erst sollten die geometrischen Axiome folgen.

Die Inzidenzbeziehung wird von HILBERT ursprünglich durch das Wort „bestimmen" umschrieben; später wurde dies durch das wenig glückliche „zusammengehören" ersetzt (das überdies einige Zeilen vorher in den „Grundlagen" noch in anderem Sinne gebraucht wird). Aber auch „zusammengehörig" wird nicht konsequent angewandt.

Im ersten Anordnungsaxiom ist in späteren Auflagen eine unnötige Komplikation aufgetaucht (wenn B zwischen A und C liegt so sind A, B, C verschiedene Punkte einer Geraden — überflüssig weil nach einer vorhergehenden Erklärung die „Zwischenrelation" nur für Punkte einer Geraden erklärt ist).

„Strecke" wird als Punktepaar definiert, aber nachher auch für die Menge ihrer inneren Punkte gebraucht.

„Satz: Sind irgendeine endliche Anzahl von Punkten einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in einer Reihe $A, B, C, D, E, \ldots, K$ anordnen, sodass B zwischen A einerseits und $C, D, E, \ldots, K$ andererseits, ferner C zwischen A, B einerseits und $D, E, \ldots, K$ andererseits, sodann D zwischen A, B, C einerseits und $E, \ldots, K$ andererseits u.s.w. liegt. Ausser dieser Anordnung gibt es nur

noch die umgekehrte Anordnung $K, \ldots, E, D, C, B, A$, die von der nämlichen Beschaffenheit ist".

Wenn man demonstrieren will, wie die mathematische Sprache sich seit einem Halbjahrhundert gewandelt hat, so kann man wohl kein besseres Beispiel finden als dieses. Niemand würde es heute wagen, sich so auszudrücken. Will man aber umgekehrt das zähe Leben von Traditionen bewundern, so soll man sich die 5. Axiomgruppe ansehen mit der Überschrift „Axiome der Stetigkeit". In der geometrischen Axiomatik spricht man auch heute noch von Stetigkeitsaxiomen, wiewohl man anderswo schon lange den Doppelsinn des Wortes „stetig", der soviel Unheil gestiftet hat (siehe KLEIN) vermeidet und, wenn es sich nicht um Abbildungen, sondern um Mengen handelt, von Kompaktheit, Zusammenhang, usw. redet, je nachdem was man eigentlich meint.

Das zweite HILBERTsche Stetigkeitsaxiom heisst das der Vollständigkeit. Eine Forderung wie die dort ausgesprochene nennt man heute „Maximalität". („Vollständigkeit" hat viele irregeführt, die an vollständige Axiomensysteme erinnert wurden.) Dies unglückselige Axiom fehlt in der 1. Auflage, es taucht zuerst in der französischen Auflage auf (Ann. E. N. S. (3) 17 (1900)) und ist trotz wiederholter (auch sachlicher) Änderungen immer wieder logisch defekt formuliert worden. Ursprünglich heisst es:

Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist, d.h.: zu dem System der Punkte, Geraden, Ebenen ist es nicht möglich, ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so dass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche aufgeführten Axiome I—IV, V 1 erfüllt sind.

In dieser Formulierung war es obendrein irreführend, da ungeübte Leser meinten, es solle die Dimension der Geometrie beschränken. In der letzten Auflage lautet es (auf lineare Vollständigkeit beschränkt): Das System der Punkte einer Geraden mit seinen Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen ist keiner solchen Erweiterung fähig, bei welcher die zwischen den vorigen Elementen bestehenden Beziehungen sowie auch die aus den Axiomen I—III folgenden Grundeigenschaften der linearen Anordnungen und Kongruenz, und V I erhalten bleiben.

Immer noch wird versäumt, zuzulassen, dass der Definitionsbereich der (Anordnungs- und Kongruenz-) Relationen bei den

zur Konkurrenz zugelassenen grösseren Geometrien grösser sei.

Es lohnt, glaube ich, die Mühe, sich die Entwicklung des mathematischen Stils auch an diesem Beispiel klar zu machen. Wie würde man das heute formulieren? Es haben sich für so etwas Kunstgriffe herausgebildet, von denen man kaum sagen kann, wer sie erfunden hat. Man definiere, was eine Geometrie ist — dazu gehört eine Menge M von Dingen und eine Menge von Relationen zwischen den Dingen, mit gewissen Eigenschaften (Axiomen). Nun definiere man „Verengung auf eine Teilmenge M' von M'': M wird durch M' ersetzt und die Relationen werden auf M' eingeschränkt. Bleiben die Axiome gültig, so heisst die Verengung eine Untergeometrie der gegebenen; die ursprüngliche heisst Obergeometrie der neuen. Vollständig, oder lieber maximal, heisst dann eine Geometrie, die mit ihren Obergeometrien zusammenfällt.

Was heute ein geordneter Körper heisst, das nennt HILBERT ein „komplexes Zahlensystem" — eine recht unglückliche Bezeichnung, da dann *das* komplexe Zahlensystem kein „komplexes Zahlensystem" ist.

Was HILBERT den „Pascal" nennt, heisst heute „Pappus", evtl. mit einer Konzession an HILBERT: „Pappus-Pascal".

Dagegen spricht man mit HILBERT heute noch von „Streckenrechnung", wenn man nicht Strecken, sondern Vektoren meint.

Eine geordneter Schiefkörper heisst bei HILBERT ein Desarguessches Zahlensystem.

Wenn man heutzutage jemanden zitiert mit den Worten „er hat in strenger Weise dargetan, dass..." (8. Aufl. S. 81), so wird jedermann denken, dass der Zitierte verulkt werden soll; vor einem Halbjahrhundert war aber Strenge in geometricis wirklich noch etwas Besonderes.

Eine unerträgliche Verwirrung hat sich bis zur letzten Auflage in Anhang II behauptet. Auf S. 152 (8. Aufl.) wird von einer Geometrie gesagt: „In unserer Geometrie gilt nun auch der pythagoreische Lehrsatz, demzufolge die beiden Quadrate über den Katheten irgendeines rechtwinkligen Dreieckes zusammen ergänzungsgleich dem Quadrate über der Hypothenuse sind". Und auf der nächsten Seite: „Da in unserer Geometrie die bekannte Beziehung zwischen der Hypothenuse und den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, welche in der gewöhnlichen Geometrie aus dem pythagoreischen Lehrsatz erschlossen wird, nicht gilt, so möchte ich unsere Geometrie eine *Nicht-Pythagoreische Geometrie* nennen.

Die Darstellung auf S. 182 (8. Aufl.) ist logisch sehr schwach. Erst werden Bewegungen explizit als orientierte topologische Abbildungen definiert, und danach werden sie implizit eingeschränkt. Überdies wird mit dem Gruppenbegriff recht unklar umgegangen.

* * *

Wenn ich nun aufzähle, was man heute anders machen würde als HILBERT, so bewege ich mich immer noch einigermassen auf dem Gebiete mathematischen Stils, der sich nun einmal seit einem Halbjahrhundert geändert hat.

Man würde, glaube ich die Anordnungsaxiome nicht so früh eingreifen lassen, wie HILBERT es gemacht hat; übrigens hat schon POINCARÉ das beanstandet. Man weiss, dass man sich dadurch in der projektiven Geometrie viele Wege versperrt (endliche, komplexe usw. Geometrien). Wie lange HILBERTS System dann doch nachgewirkt hat, sieht man bei RUTH MOUFANG, die in ihren ersten Arbeiten ganz unnötigerweise an den Anordnungsaxiomen festhält. Es ist wohl auch ein Ausfluss des HILBERTschen Standpunktes, dass die axiomatische Untersuchung von Kongruenzgeometrien wie der unitären, quaternionalen und der Oktavengeometrien lange Zeit unterblieben ist und schliesslich erst wieder vom Helmholtz-Lieschen Raumproblem her gefördert wurde. Ein jeder wird heute die Anordnungsaxiome irgendwie zu den topologischen Axiomen rechnen und dementsprechend behandeln. In der Tat, sobald man die Teilung des Raumes in zwei Halbräume hat, ist auch eine nichttriviale Topologie da: man setzt fest, dass die Halbräume eine Basis der offenen Mengen bilden. Das wird eine Hausdorffsche, ja sogar reguläre (auch normale?) Topologie. (Die Inzidenzaxiome allein mit der Festsetzung, dass die Ebenen eine Basis der abgeschlossenen Mengen bilden, ergeben nur eine pathologische Topologie.)

Was nun die Anordnungsaxiome selber betrifft, würde man heute kaum noch die „Zwischen"-Relation als Ausgangspunkt wählen. „Zwischen" ist eine dreistellige Relation, und die erste nicht-triviale Aussage über sie beansprucht vier Argumente. Man kann es einfacher haben, und man findet den schnellsten Anschluss an die modernen algebraischen Gebräuche, wenn man mit der zweistelligen Relation der Ordnung arbeitet und fordert, dass auf jeder Geraden zwei bevorzugte (einander entgegengesetzte) Ordnungen existieren.

Solche künstlichen Formulierungen wie die des ebenen Anordnungsaxioms II 4 liebt man nicht mehr. Was unnötigerweise

verschleiert hinter diesem Axiom steckt, ist die Tatsache, dass eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen teilt, und so würden wir es heute auch aussprechen. Übrigens lautet es auch in HILBERTS Axiomensystem von 1894 (Anhang I der „Grundlagen") im Wesentlichen so. Später ist B. L. v. d. WAERDEN (CHR. HUYGENS 13—14 (1934—6)) zu dieser Formulierung zurückgekehrt.

Man muss wohl auch v. d. WAERDEN recht geben, wenn er statt des Kongruenzbegriffes den Bewegungsbegriff als Ausgangspunkt gewählt und somit die Kongruenzaxiome durch Axiome mit Bezug auf die Bewegungsgruppe ersetzt hat. Die HILBERTsche Auffassung, die übrigens schon von POINCARÉ beanstandet worden ist, hat ein umständliches Axiomensystem und viel geistreiche Detailarbeit gezeitigt. In den ersten Auflagen merkte man das nicht so, weil die Kongruenzlehre sehr summarisch behandelt und etwa die Grösser-Kleiner-Relation der Winkel und der Satz vom Aussenwinkel nicht zur Sprache kamen; es hat dann später viel Mühe gekostet, was man in andern Kapiteln brauchte, mit Hilfe jenes Axiomensystems zu erhärten.

Die sogen. Stetigkeitsaxiome werden von HILBERT eingeführt, um zu zeigen, dass sie eigentlich entbehrlich sind. In der 1. Aufl. stand da nur das Archimedische Axiom, das durch die Tradition gegeben war, aber als topologisches Axiom heutzutage kaum befriedigen kann: es setzt ja die Anordnungsaxiome voraus, die die Möglichkeiten von vornherein zu empfindlich einschränken. Dazu kommt noch etwas: Das Archimedische Axiom ist, wie man es in der Grundlagenforschung ausdrückt, nicht elementar; als einziges im ganzen Axiomensystem spricht es wesentlich von natürlichen Zahlen, indem es einen Quantor enthält, der über die natürlichen Zahlen läuft. Eine Geometrie mit dem Archimedischen Axiom muss also unentscheidbar bleiben, während man bei anderer Wahl der Stetigkeitsaxiome eine entscheidbare Geometrie erhält. (Siehe hierzu A. TARSKI, A decision method for elementary algebra and geometry, 2nd. ed. 1951.) Die von der Topologie her naheliegende Form des Stetigkeitsaxioms ist die Forderung der lokalen Kompaktheit, aber dann ohne Anordnungsaxiome. Die Resultate von D. v. DANTZIG und L. PONTRJAGIN (Diss. Groningen 1931, resp. Annals of Math. 33 (1932)) über lokal kompakte Körper legen diesen Aufbau nahe. Für ein so singuläres Instrument wie das sogen. Vollständigkeitsaxiom hat man in diesem Zusammenhang natürlich keine Verwendungsmöglichkeit. Der Anschluss au die Entwickelung in der Topologie ist einer jener Anschlüsse, den HILBERTS „Grund-

lagen", trotz allmählicher Weiterbildung im Laufe der verschiedenen Auflagen, versäumt haben und wohl auch nicht wiederherstellen können; davon zeugt die Zitatensammlung am Ende des ersten Kapitels.

* * *

Die „Grundlagen" (ohne die Anhänge) sind heute um etwa ein siebtel länger als ursprünglich. Viele Beweise waren anfangs durch eine der gebräuchlichen Weglassungsfloskeln ersetzt. Allmählich haben die Bearbeiter der einzelnen Auflagen diese Lücken ausgefüllt, manchmal auch Unschönheiten und Komplikationen beseitigt. Einige wenige Behauptungen haben den Beweisversuchen widerstanden und sich als falsch erwiesen. Jedenfalls war manches, das HILBERT als „leicht" übergangen hatte, hinterdrein wirklich nicht so leicht. Im 1. Kap. klafft auch in der 8. Aufl. noch eine solche Lücke. Zum Satze (S. 10), dass ein einfaches Polygon die Ebene in zwei Gebiete zerlegt, gelangt man noch immer „ohne Schwierigkeit", d.h. ohne Beweis. Es wäre interessant zu erfahren, wie HILBERT sich 1899 den Beweis vorgestellt hat. Der Beweis ist recht mühselig, wenn man ihn nicht sehr geschickt aufzieht. Wie man das machen kann, hat v. D. WAERDEN sehr elegant gezeigt (CHR. HUYGENS 13—14 (1934—6)). Soll man von jedem Leser der „Grundlagen" verlangen, dass er sich den Beweis zurechtlegt?

Schon in der 1. Aufl., die soviel Beweise übergeht, findet man einen recht ausführlichen Beweis für den Satz: Alle rechten Winkel sind einander congruent. (8. Aufl. S. 23.) Davor liest man: „Auf Grund der Sätze 12 und 13 gelingt der Nachweis des folgenden einfachen Satzes, den Euklid — meiner Meinung nach mit Unrecht — unter die Axiome gestellt hat: Alle rechten Winkel sind einander congruent". Man kann sich kaum des Eindruckes erwehren, dass HILBERT auf diesen Beweis besonders stolz war, und wiederholt habe ich ihn von anderen als ein besondere Leistung HILBERTS erwähnt gefunden. Nun sind Satz und Beweis in Wirklichkeit eine Trivialität, was in den ersten Auflagen allerdings durch den unbeholfenen Aufbau der Kongruenzlehre (ohne Grössenbeziehungen für Winkel) etwas verschleiert wird. In späteren Auflagen (7.)wird der Satz dann auch in wenigen Worten bewiesen. Zu dem Satz gehört nun von der 2. oder 3. Auflage an eine Fussnote: „TH. VAHLEN bemerkt in seinem Buche „Abstrakte Geometrie", dass bereits Legendre diesen Satz bewiesen hat. Doch setzt Legendre voraus, dass die Winkel ein stetiges Grössensystem bilden."

Das ist nun wirklich erstaunlich. Offenbar hat seit einem Halbjahrhundert kein Mathematiker mehr die Eléments de Géométrie von A. M. LEGENDRE aus der Bibliothek geholt und aufgeschlagen. HILBERTS Behauptung ist nämlich einfach falsch. Der Satz von der Gleichheit der rechten Winkel ist Nummer 1 in Legendres Buch, und der Beweis ist genau derselbe wie der in den späteren Auflagen der „Grundlagen". Wie wird HILBERT zu einer solchen Behauptung gekommen sein? Man kann das einigermassen rekonstruieren. Natürlich hat HILBERT nicht bei Legendre nachgeschlagen. Denn was von Legendre interessant war, das wusste er schon. Das waren die zwei Legendreschen Sätze, die auch in spätere Auflagen der Grundlagen aufgenommen wurden, der Satz, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte nicht übertrifft, und der Satz, dass die Winkelsumme entweder in allen Dreiecken oder in keinem zwei Rechte ist. Beim Beweis dieser Sätze (ebenso wie bei Legendres falschen Beweisen des Parallelenaxioms) wird nun ausgiebig das Archimedische Axiom verwandt. Durch diese Erinnerung hat HILBERT sich offenbar täuschen lassen. (Wohl wäre es denkbar, dass unter den zahlreichen Auflagen von Legendres Buch doch noch eine existiert, in der er die Gleichheit der rechten Winkel aus einem Stetigkeitsaxiom herleitet, aber ich kann mir garnicht vorstellen, wie er das hätte machen sollen.)

Ich behaupte übrigens keineswegs, dass die Priorität nun Legendre gebührt. Im Gegenteil: ich fand in der Euklid-Ausgabe des Clavius von 1607 auch einen — etwas zu komplizierten — Beweis der Gleichheit der rechten Winkel, auch ohne Stetigkeitsvoraussetzungen. Man müsste übrigens noch die antiken Kommentatoren daraufhin nachsehen.

Natürlich bleibt die Frage offen, warum Euklid einen so einfach zu beweisenden Satz zum Axiom oder Postulat erhoben habe. Die Frage ist eigentlich noch komplizierter: Wie konnte Euklid, der sonst in solchen Sachen ganz unkritisch war, auf die Idee kommen, die Gleichheit der rechten Winkel ausdrücklich (als Axiom oder sonstwie) zu erwähnen? Über dies Problem ist schon so viel geschrieben und vermutet, dass das Bedürfnis an einer neuen Erklärung nicht sehr dringend ist. Ich habe mir auch eine zurecht gelegt, die mir — selbstredend — besonders einleuchtet; da sie zuviel Raum erfordert, werde ich sie anderswo mitteilen.

* * *

Ich habe vorhin zitiert, was PASCH von einer geometrischen Axiomatik erwartete. HILBERT fügt dem etwas Wichtiges hinzu. „Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein einfaches und vollständiges System von einander unabhängiger Axiome aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen möglichst klar zutage tritt" — so heisst es in der Einleitung der 1. Aufl., und im Schlusswort wird das noch stärker betont: „Die vorstehende Abhandlung ist eine kritische Untersuchung der Principien der Geometrie; in dieser Untersuchung leitete uns der Grundsatz, eine jede sich darbietende Frage in der Weise zu erörtern, dass wir zugleich prüften, ob ihre Beantwortung auf einem vorgeschriebenen Wege mit gewissen eingeschränkten Hilfsmitteln möglich oder nicht möglich ist. Dieser Grundsatz scheint mir eine allgemeine und naturgemässe Vorschrift zu enthalten; in der That wird, wenn wir bei unseren mathematischen Betrachtungen einem Probleme begegnen oder einen Satz vermuten, unser Erkenntnistrieb erst dann befriedigt, wenn uns entweder die völlige Lösung jenes Problems und der strenge Beweis dieses Satzes gelingt oder wenn der Grund für die Unmöglichkeit des Gelingens und damit zugleich die Notwendigkeit des Misslingens von uns klar erkannt worden ist."

„In der That sucht die vorstehende geometrische Untersuchung allgemein darüber Aufschluss zu geben, welche Axiome, Voraussetzungen oder Hilfsmittel zum Beweise einer elementargeometrischen Wahrheit nötig sind, und es bleibt dann dem jedesmaligen Ermessen anheim gestellt, welche Beweismethode von dem gerade eingenommenen Standpunkte aus zu bevorzugen ist."

(In der 1. Aufl. war HILBERTS Axiomensystem nicht vollständig, und in keiner Auflage waren die Axiome von einander unabhängig; der Wortlaut der Einleitung wurde in der 2. oder 3. Aufl. dementsprechend korrigiert. Für das Folgende spielt das aber keine Rolle.)

Der historisch älteste Unmöglichkeitsbeweis ist wohl der für die Irrationalität von $\sqrt{2}$, die Unmöglichkeit eines gemeinsamen Masses von Diagonale und Seite des Quadrats. Zu beweisen, dass ein gewisser Satz aus anderen nicht folge, ist eine Aufgabe ganz anderen Niveaus. Wie sie anzugreifen ist, zeigte sich erst im Anfang des 19. Jahrhunderts, bei der Entdeckung der nichteuklidischen

Geometrie. Will man zeigen, dass ein Axiom unabhängig ist von den übrigen, so konstruiere man eine Geometrie, in der alle bis auf das eine erfüllt sind. Nach den nicht-Euklidischen, nicht-Desarguesschen, nicht-Archimedischen Geometrien war das Prinzip des Unabhängigkeitsbeweises durch Angabe eines Gegenbeispiels also nicht mehr neu. Aber seine systematische Anwendung setzt doch erst mit PEANO, PADOA und HILBERT ein.

In der 1. Aufl. findet man solche Unabhängigkeitsbeweise für die Gruppe der Kongruenzaxiome, für das Parallelenaxiom, für das Archimedische Axiom; für den Desargues die Unabhängigkeit von den ebenen Axiomen (das recht komplizierte Beispiel ist erst in spätern Auflagen durch ein durchsichtigeres, von MOULTON, ersetzt worden), für den Pappus-Pascal die Unabhängigkeit von den Verknüpfungs- und Anordnungsaxiomen einschliesslich des Parallelenaxioms; es wird angegeben, dass Ergänzungs- und Zerlegungsgleichheit ohne Archimedisches Axiom nicht zusammenfallen (den Beweis findet man erst in der 7. Aufl.); und natürlich gibt es solche Beweise auch in dem Kapitel der geometrischen Konstruktionen. Von der 3. Aufl. an findet man einen Hinweis auf Beispiele von Dehn für die Unbeweisbarkeit des 1. Legendreschen Satzes (wenn man das Parallelenaxiom und das Archimedische fallen lässt) und die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms aus dem Satz von den Winkelsumme im Dreieck, wenn man Archimedes nicht fordert. Von Dehn rührt auch der Beweis her, dass im Raume die Zerlegungsgleichheit nicht zur Begründung des Inhaltslehre ausreicht. Unbeweisbarkeitsbeweise bzgl. des Satzes von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck findet man von der 2. Aufl. an im Anhang II.

Die Unabhängigkeit eines Axioms wird aus der Widerspruchslosigkeit einer dem Axiom widersprechenden Geometrie gefolgert. Der Begriff der Widerspruchslosigkeit war schon lange vor HILBERT geläufig; man hatte ja die Widerspruchslosigkeit nicht-euklidischer Geometrien durch Modelle innerhalb der euklidischen erhärtet (wer zuerst in diesen Zusammenhang von Modellen gesprochen hat, weiss ich nicht). Die Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems der euklidischen Geometrie war dagegen kein Problem, solange man an einen Gegenstand der Geometrie glaubte, entweder in der Wirklichkeit oder in der reinen Anschauung.

Seit Descartes wusste man, dass man die euklidische Geometrie algebraisieren kann, und diese Tatsache wird von HILBERT interpretiert als ein Beweis für die Widerspruchslosigkeit seines Axio-

mensystem der euklidischen Geometrie: man gibt eine Koordinatengeometrie an, die den Axiomen genügt. Jedem Widerspruch in der Geometrie (d.h. einem Satze „A und non-A") entspräche einer im „Zahlensystem". Damit ist der Widerspruchslosigkeitsbeweis aufgeschoben und gleichzeitig HILBERTS nächste Aufgabe gestellt: der Widerspruchslosigkeitsbeweis für die Zahlentheorie. Man weiss heute, dass HILBERT, wenn er glaubte, den erbringen zu können, einer Täuschung erlegen ist (übrigens hat in dieser Hinsicht schon PADOA klarer gesehen als HILBERT). Andererseits weiss man heute auch, dass man die Schwierigkeiten vermeiden kann, wenn man sich auf eine (im Sinne der Grundlagenforschung) elementare Geometrie beschränkt, d.h. das Archimedische Axiom vermeidet.

* * *

Die Rollen von Algebra und Geometrie sind vertauscht, seit EUKLID seine Elemente und Data schrieb. Fühlte man damals das Bedürfnis, die Algebra geometrisch zu rechtfertigen (offenbar weil vom algebraischen Standpunkt das Irrationale unerklärlich erschien), so ist nun gerade die Algebra letzten Endes Fundament der Geometrie. Desto merkwürdiger ist es, dass umgekehrt in der Proportionenlehre HILBERT etwas gelingt, das griechisches Ideal hätte sein können: ein echt geometrischer Ansatz.

Mit der Entdeckung der Inkommensurablen war das Problem entstanden einer Proportionenlehre, die begründe, wie man aus den Kongruenzsätzen ableite, dass Rechtecke mit gleicher Höhe sich wie die Bases verhalten, oder dass Parallelen auf zwei Geraden proportionale Stücke abschneiden (Strahlensatz). Vor Eudoxos muss man das mit einem kettenbruchartigen Grenzübergang getan haben. Diese explizite Methode ersetzte Eudoxos durch eine implizite. Sein Kunstgriff, alles in eine Definition zu stecken, mutet modern an. Er definiert nicht, was ein Verhältnis ist, sondern wann zwei Verhältnisse gleich und wann eins grösser als das andere ist:

$$a : b = a' : b'$$

bedeute, dass für natürliche m und n

$$ma \gtreqless nb \text{ bzw. } ma' \gtreqless nb'$$

immer nur gleichzeitig gelten. Und

$$a : b > a' : b'$$

bedeute die Existenz eines Paares m, n so dass

$$ma > nb, \text{ aber } ma' \leqq nb'$$

ist. Nun entsteht eine Schwierigkeit. Will man etwa zeigen, dass für

$$a < b$$

gilt

$$a : a > a : b,$$

so muss man m, n suchen, so dass

$$ma > na, \text{ aber } ma \leqq nb.$$

Versucht man es mit $m = n + 1$, so heisst das

$$(n + 1)\, a \leqq nb,$$

oder

$$a \leqq n(b - a).$$

Zu den Grössen a und d $(= b - a)$ muss man also ein natürliches n finden, so dass

$$nd \geqq a$$

wird, und das ist gerade das sogen. Archimedische Axiom.

Hier nimmt HILBERT den Draht wieder auf. Er will das Archimedische Axiom vermeiden. Wie kann das geschehen? Heute, nach HILBERT, ist das ganz klar. Man definiert die Gleichheit zweier Verhältnisse nicht mehr halbarithmetisch, wie Eudoxos es machte, sondern mittels eines der geometrischen Sätze, in denen von Verhältnisgleichheit die Rede ist (und die Eudoxos aus *seiner* Definition erschloss). Etwa, mit dem Strahlensatz vor Augen (Fig. 1; $ac \,//\, bd$) setzt man die Gleichheit der Verhältnisse

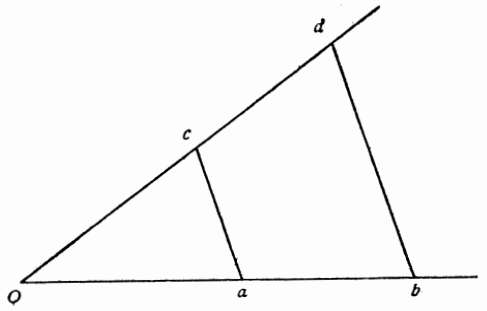


Fig. 1

$$oa : ob = oc : od$$

fest; dass für $oa = ob$ dann wirklich $oc = od$ gilt, zeigt der Satz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck. Nun muss man (unter anderm) die Transitivität dieser Definition zeigen; aber die kommt gerade auf einen Spezialfall des Desargues (Fig. 2) hinaus. Nichttrivial ist hier (im Gegensatz zum

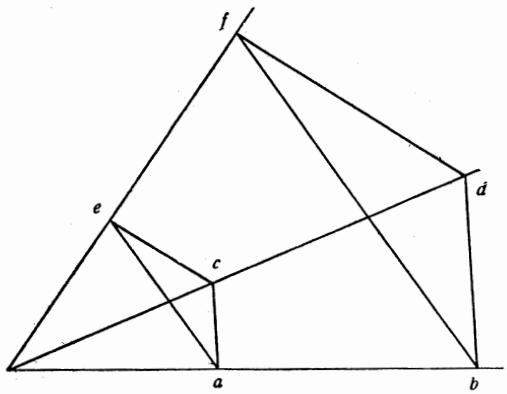


Fig. 2

Ansatz des Eudoxos) die Vertauschbarkeit der Mittelglieder, d.h. dass aus obiger Gleichheit folgt:

$$oa : oc = ob : od.$$

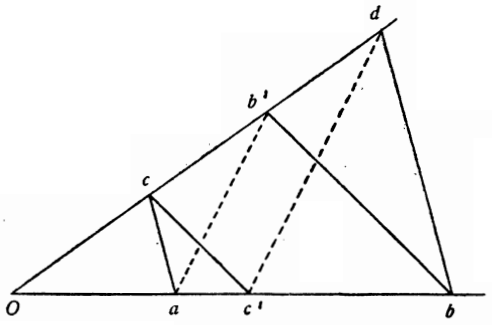


Fig. 3

Sie ist einem Spezialfall des Pappus äquivalent: man ziehe (Fig. 3) $cc' \parallel bb'$, $ob = ob'$, $oc = oc'$; dann muss sich $ab' \parallel c'd$ ergeben. Am einfachsten beweist man die Vertauschbarkeit der Mittelglieder am Kreise (Fig. 4), wenn man einmal aus den ähnlichen Dreiecken $oab \backsim ocd$ die eine Proportion und dann aus $oac \backsim obd$ die andere ableitet. (Der angewandte Ähnlichkeitssatz folgt unmittelbar aus dem vorausgesetzten Strahlensatz.) Aufgrund der Proportionenlehre kann man schliesslich die Geometrie koordinatisieren, ohne irgendwo Archimedes zu verwenden. Man erhält eine Koordinatengeometrie über einem Körper, der nicht archimedisch zu sein braucht.

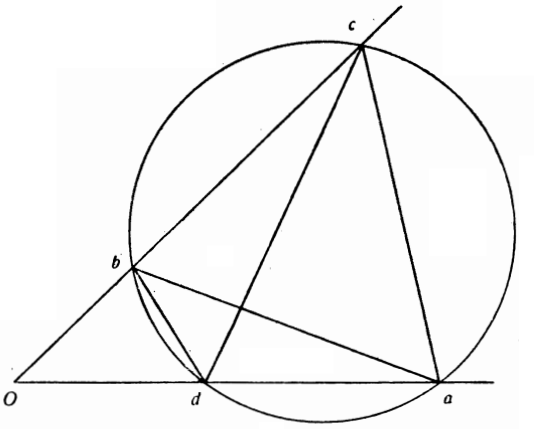


Fig. 4

So würden wir es heute machen, und ich glaube, dass auch HILBERTS Ansätze erst in diese Richtung gegangen sein müssen. Was man im 3. Kap. der „Grundlagen" findet, ist aber viel umständlicher und undurchsichtiger, und eine bei weitem einfachere Darstellung findet man erst in der 8. Aufl. als Supplement II vom Bearbeiter dieser Aufl. Warum hat HILBERT jene Umwege eingeschlagen? Ich nehme an, weil er den DESARGUES vermeiden und nur von den ebenen Axiomen Gebrauch machen wollte (aus denen DESARGUES nicht folgt). DESARGUES ergibt sich zwar aus PAPPUS, aber das konnte HILBERT damals noch nicht wissen; das hat später erst HESSENBERG bewiesen.

So hatte das 3. Kap. bald nur noch eine historische Bedeutung und ist nun nach Supplement II ganz veraltet. Man konnte es aber

nicht recht umarbeiten, ohne den Zusammenhang der „Grundlagen" zu zerstören. HILBERTS historisches Verdienst wird dadurch nicht geschmälert. Die Begründung der Geometrie unabhängig von „Stetigkeitsaxiomen" ist eine originelle HILBERTsche Idee, die sich gewaltig ausgewirkt hat, auch — meine ich — in der Algebra. Denn sie führt ja geradenwegs zum modernen Körperbegriff, der ebenfalls einer Abstraktion von der Topologie (des reellen oder komplexen Zahlkörpers) sein Dasein verdankt.

Hätten schon die Griechen solch eine Proportionenlehre ohne Archimedisches Axiom erfinden können? Man wäre geneigt, die Frage zu bejahen, so einfach ist der prinzipielle Gedankengang. EUDOXOS' Definition der Gleichheit von Verhältnissen ist als geistige Leistung von mindestens demselben Format wie HILBERTS Definition mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze. Aber das allein genügt nicht. Entscheidend ist vielmehr ein gewisser historischer Hintergrund, der EUDOXOS fehlt. EUDOXOS muss eine Proportionenlehre begründen für allerlei Grössen der „geometrischen Algebra", Strecken, Inhalte, Winkel usw., ohne a priori die eine durch die andere ersetzen zu können; er muss sagen können, dass zwei Inhalte sich wie zwei Strecken verhalten, ohne diese oder jene mit Zahlen zu identifizieren. HILBERTS Definition passt (a priori) nur für Strecken, und das kann EUDOXOS wenig helfen. Aber für HILBERT ist das genug. Irgendwann zwischen EUDOXOS und HILBERT war der Alptraum der geometrischen Algebra ausgeträumt, hatte man sich aus der Sklaverei der verschiedenen Grössenarten befreit und hatte man wieder angefangen, frisch und fröhlich mit Grössen zu rechnen. Und schliesslich hatte DESCARTES gezeigt, wie man ohne Gewissensbisse die Geometrie algebraisiert. So wusste HILBERT: habe ich nur einmal die Proportionenlehre für Strecken, so kann ich schlimmstenfalls über die Koordinatengeometrie zu der für andere geometrische Grössenarten gelangen. Diese Erkenntnis hatte HILBERT vor EUDOXOS voraus.

* * *

Doch war die Sache für HILBERT noch nicht erledigt. Liest man eine Proportion

$$a : b = c : d \tag{1}$$

in moderner Weise als

$$ad = bc, \tag{2}$$

so taucht eine Beziehung zu Flächeninhalten auf, die die Griechen wieder nicht recht ausbeuten konnten, weil a, b, c, d eben keine

Strecken zu sein brauchten. Fasst man sie aber doch so auf, so erweist sich (Fig. 5) die Proportion als äquivalent mit einer Aussage über die Gleichheit zweier Rechtecksinhalte, die entstehen, wenn man aus einem Paar kongruenter Dreiecke zwei Paare kongruenter Dreiecke weglässt — die klassische Gnomonfigur. Konnte man nicht von solch einer elementaren Inhaltsdefinition her die Gleichheit (2) (und damit auch (1)) per definitionem festsetzen? Die Vertauschbarkeit der Innenglieder fällt einem dann noch in den Schoss. Vielleicht war dieser Gedanke für HILBERT die Überleitung zum 4. Kap., das die Inhaltslehre behandelt. Er kann die Anregung aber auch aus der Litteratur geschöpft haben. Denn das Problem einer nicht-algorithmischen Inhaltslehre war damals schon gestellt und einigermassen gefördert. Nach dem Grundsatz „Gleiches zu Gleichem addiert ergibt Gleiches" verwandelt Euklid Polygone in inhaltsgleiche, indem er irgendwo ein Stück abschneidet und anderswo wieder (kongruent) anklebt. So findet er zu einem Polygon ein inhaltsgleiches Rechteck mit vorgeschriebener Höhe, dessen Basis als Inhaltsmass verwendet werden kann. Dies Inhaltsmass galt lange Zeit als die Hauptsache, und im Schulunterricht herrscht auch heute noch dieser algorithmische Standpunkt, wenn man dem Grundschüler am Rechteck beibringt, dass Inhalt gleich Länge mal Breite ist, statt ihm am Polygon zu zeigen, was „Inhalt" nun eigentlich bedeutet. Eine aus der Flächenverwandlung entspringende Inhaltslehre wurde von P. GERVIN und W. BOLYAI etwa gleichzeitig (1832—33) angestrebt und von J. M. C. DUHAMEL (1865—68) entwickelt. A. DE ZOLT (1881) bemerkte eine Annahme, die man dabei stillschweigend machte (etwa wenn man aus der Inhaltsgleichheit zweier Rechtecke mit gleicher Höhe auf die Gleichheit der Bases schloss): „Ein Polygon kann keinem echten Teil inhaltsgleich sein". EUKLID hatte sich hier auf das Axiom berufen: „Das Ganze ist grösser als der Teil". Aber es war ja keineswegs klar, ob dieses Axiom für Inhaltsgrössen widerspruchslos war. W. KILLING (1885), F. SCHUR (1892) und andere hatten dann de

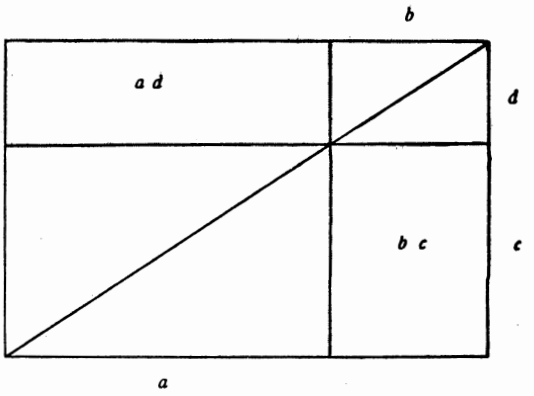


Fig. 5

Zolts Postulat bewiesen, aber, wie HILBERT bemerkt, mit Hilfe des Archimedischen Axioms.

HILBERT greift die Inhaltslehre systematisch an. Zwei Polygone heissen zerlegungsgleich (in der 1. Aufl. flächengleich), wenn sie sich in bzw. kongruente Dreiecke zerlegen lassen. Nimmt man von zerlegungsgleichen Polygonen zerlegungsgleiche weg, so heissen die Reste ergänzungsgleich (in der 1.—4. Aufl. inhaltsgleich) (in der 1. Aufl. scheint man nur eines weglassen zu dürfen; später auch mehrere). Ob die Definition der Zerlegungsgleichheit wirklich das deckt, was HILBERT sich vorgestellt hatte, ist nicht sicher, denn die unentbehrliche Transitivität der Ergänzungsgleichheit wird auch in der 8. Aufl. nicht bewiesen, und man sieht auch nicht, wie das an der Stelle geschehen kann, wo behauptet wird, dass sie sich ohne Schwierigkeit ergibt (S. 71). Ebenso wird später (S. 73) stillschweigend angenommen, dass Ergänzungsgleiches zu Ergänzungsgleichem addiert Ergänzungsgleiches ergibt, eine Annahme, die jedenfalls nicht evident ist. Eine ähnliche Schwierigkeit zeigt sich im Supplement III (S. 247, Z. 14—8 v.u.); der Beweis ist dort ersichtlich falsch. Sollten das wirkliche Lücken sein, so müsste man die Inhaltsgleichheit neu definieren (entweder rekursiv oder axiomatisch). — Inzwischen hat Herr P. BERNAYS, dem ich meine Einwände mitteilte, sich der Mühe unterzogen, alle Beweise nachzuholen. Er hat sie mir brieflich mitgeteilt; sie sind keineswegs trivial.

HILBERT beweist nun de Zolts Postulat, indem er ein additives Inhaltsmass einführt — für Dreiecke das halbe Produkt von Basis und Höhe, das nach der Proportionenlehre von der Basiswahl nicht abhängt. (Seit der 7. Aufl. sehr vereinfacht.) Ergänzungsgleichheit und Inhaltsmassgleichheit erweisen sich als äquivalent. Im Raume gilt das Entsprechende nicht, wie M. DEHN (Math. Ann. 55 (1902)) bewiesen hat.

* * *

Nach der Unterbrechung durch die Inhaltslehre setzt HILBERT die Untersuchungen zum DESARGUES und PAPPUS fort. Er zeigt, wie man die affine Ebene auf grund des Desargues koordinatisiert. Die Punkte einer festen Geraden werden als Elemente eines Schiefkörpers aufgefasst — wir würden heute sagen: indem man die Quasiperspektivitäten mit uneigentlicher Achse und uneigentlichem Zentrum als Vektoradditionen deutet und die Quasiperspektivitäten mit uneigentlicher Achse und dem „Nullpunkt" als

Zentrum als Multiplikationen mit Skalaren. (Fig. 6—7). So formuliert HILBERT es allerdings nicht — wie bei den Kongruenzen vernachlässigt er noch zu sehr den Abbildungsstandpunkt. Die ganz undurchsichtigen Beweise der Schiefkörperaxiome sind erst in der 7. Aufl. vereinfacht worden, aber es geht auch nun noch einfacher. Ganz überflüssigerweise werden immer noch die Anordnungsaxiome mitgeschleppt (die dem Schiefkörper eine Ordnung auferlegen).

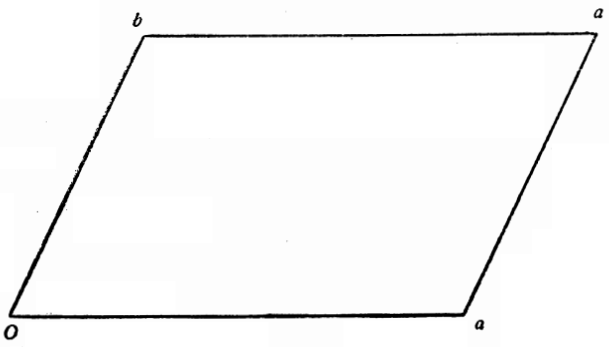


Fig. 6

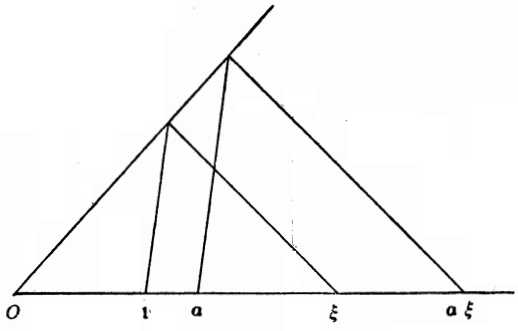


Fig. 7

Der PAPPUS erweist sich als mit dem kommutativen Gesetz der Multiplikation äquivalent. Mit dem Archimedischen Axion kann man es erzwingen, da dann der Körper der rationalen Zahlen im Koordinatenkörper überall dicht liegt. Aus dem PAPPUS folgen alle Inzidenzsätze — diesen HILBERTschen Satz würde man heute wohl präziser formulieren und ausführlicher beweisen. HESSENBERGS Satz, dass DESARGUES aus PASCAL folgt (Math. Ann. 61), steht seit der 7. Aufl. in diesem Kap.

HILBERTS Idee, die Punkte einer festen Geraden als Elemente eines Schiefkörpers aufzufassen und die Addition und Multiplikation durch Inzidenzfiguren zu definieren, die in der Proportionenlehre vorbereitet und hier klar herausgearbeitet wird, erscheint ganz neu und überraschend. Doch ist sie damals schon recht alt. Dasselbe macht nämlich schon der — immer noch nicht recht gewürdigte — G. CHR. K. v. STAUDT (Beiträge zur Geometrie der Lage 1856—60), wenn er seine (projektive) Rechnung mit „Würfen" (d.h. mit Klassen projektiv äquivalenter geordneter Quadrupel) aufbaut.

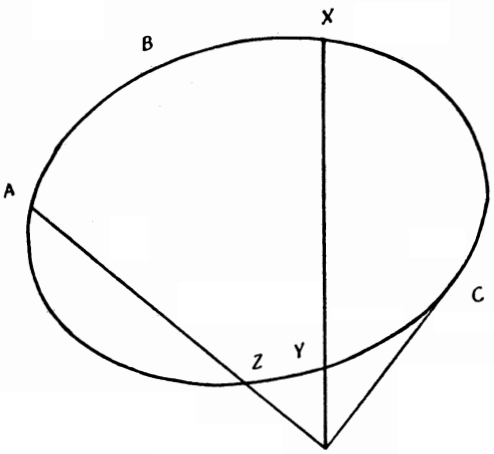


Fig. 8

Er definiert die Addition

$$(ABCX) + (ABCY) = (ABCZ)$$

durch eine Involution (Fig. 8; wir haben die Geometrie der Geraden durch Projektion auf einen Kegelschnitt verpflanzt), die C festlässt und A mit Z, X mit Y vertauscht; ferner die Multiplikation durch

$$(AXBY)\ (AYBZ) = (AXBZ).$$

Die Kommutativität der Multiplikation ergibt sich hier wieder am Kegelschnitt (Fig. 9); es sind nämlich

$$(AXBY) = (AUBZ),$$
$$(AYBZ) = (AXBU),$$

wie aus der Kegelschnittlehre folgt. Um die Rechenregeln für Würfe zu beweisen, beruft v. Staudt sich also auf die Kegelschnittlehre, also indirekt auf den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, oder, wenn man will, auf den Pappus (dessen Bedeutung aber damals noch nicht erkannt war).

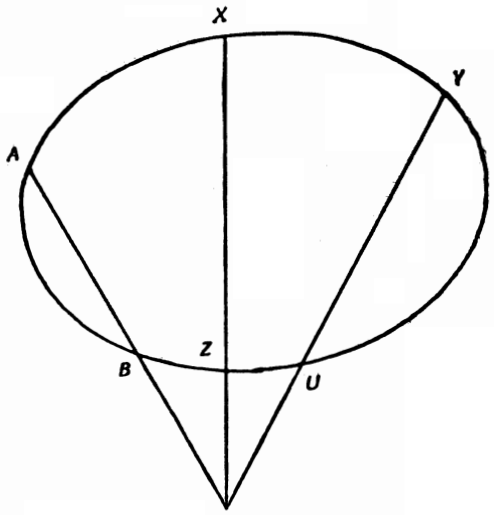


Fig. 9

Hilberts grosses Verdienst ist es also nicht, dass er, wie manche meinen, die Streckenrechnung erfunden habe, denn die liegt ja mit v. Staudts Wurfrechnung schon eim Wesentlichen vor; sondern dass er die Kegelschnitte eliminiert und als Quelle der Rechengesetze lineare Inzidenzsätze, statt quadratischer erkannt hat.

Hilbert hat die grundlegenden Untersuchungen nicht weiter in dieser Richtung fortgesetzt. Die Anordnungsaxiome versperrten den Weg. Auch hat Hilbert sich niemals positiv für „neue" Geometrie interessiert. Das unterscheidet ihn von Riemann, der neue Möglichkeiten suchte und fand. Andersartige Geometrien waren Hilbert immer Mittel zum Zweck (um die Unabhängigkeit von Axiomen zu zeigen), und sie waren bei ihm mehr oder weniger

pathologisch. Weder die komplexe Geometrie wird erwähnt noch die quaternioniale, die ja das schönste Beispiel einer nicht-PAPPUS-Geometrie (aber eben ohne Anordnungsaxiome) ist. Ruth MOUFANG ist hier neue Wege gegangen (Math. Ann. 105, 106, usw.). Sie hat die Bedeutung eines Inzidenzsatzes erkannt, der schwächer ist als der Desargues; eines Satzes, der die eindeutige Bestimmtheit des vierten harmonischen zu drei Punkten aussagt (Fig. 10). Der Abschwächung der Desargueschen zur „harmonischen" Geometrie entspricht algebraisch die vom Schiefkörper zum Alternativkörper,

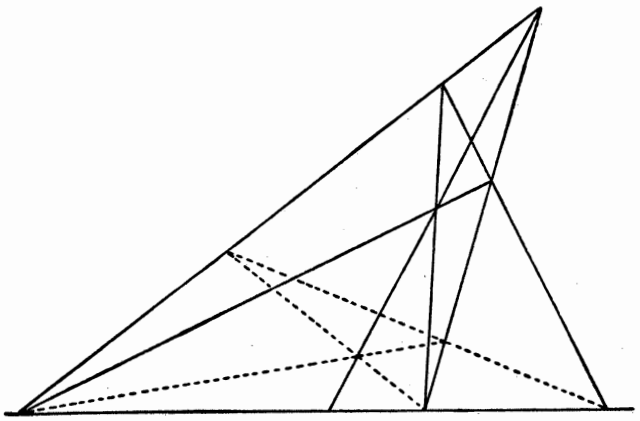


Fig. 10

in dem statt des assoziativen Gesetzes die schiefe Symmetrie des „Assoziators"

$$\{a, b, c\} = (ab)\, c - a(bc)$$

gilt: $\{a, b, c\} = -\{b, a, c\} = -\{a, c, b\}$.

Die Cayley-Zahlen (Oktaven) bilden solch einen Alternativkörper. Über jedem Alternativkörper gibt es eine *ebene* Geometrie; höherdimensionale gibt es wegen des Desargues eben nur über Schiefkörpern. In der Oktavengeometrie kann man gewisse Ausnahmegruppen der Killing-Cartanschen Klassifikation der halbeinfachen Gruppen als projektive und als Kongruenzgruppen interpretieren (H. FREUDENTHAL, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie Utrecht 1951).

RUTH MOUFANG hat noch in anderer Hinsicht neue Aussichten eröffnet; sie greift eigentlich mit ihrer systematischen Behandlung der Inzidenzsätze auf H. WIENER zurück, dessen Programm damals unter dem Einfluss der „Grundlagen" nicht zur Entwicklung gelangte. Andererseits muss man zugeben, dass HILBERTS

Idee der Koordinatisierung auf grund von linearen Inzidenzsätzen auch die meisten neueren Untersuchungen (z.B. von M. HALL) beherrscht.

* * *

Das letzte Kap. der „Grundlagen" ist den geometrischen Konstruktionen gewidmet. Es ist eigentlich nur *eine* Aufgabe, die HILBERT hier behandelt, und sie entspringt der zentralen Idee, die die ganzen „Grundlagen" beherrscht, und die HILBERT mit einer wunderbaren Selbstzucht bis zum Ende verfolgt: der Geometrie ohne Stetigkeitsaxiome.

Ohne Stetigkeitsaxiome kann man nicht aussagen, dass ein Einheitskreis und eine Gerade im Abstand $\rho < 1$ vom Mittelpunkt Schnittpunkte besitzen; der minimale Koordinatenkörper, über dem eine Geometrie der Axiomgruppen I—IV möglich ist, enthält $\sqrt{1-\rho^2}$ nicht (notwendig). Die einzigen irrationalen Operationen (man erkennt sie jedenfalls an ihrer Mehrdeutigkeit), die durch die Axiomgruppen I—IV gefordert werden, sind das Abtragen von Strecken und Winkeln. Das Abtragen etwa einer Einheitsstrecke auf der Geraden $y = ax$ vom Ursprung aus kommt hinaus auf das Lösen des Gleichungssystems $x^2 + y^2 = 1$, $y = ax$, also auf das Ziehen der Quadratwurzel $\sqrt{1+a^2}$. Mit derselben algebraischen Operation erledigt man auch das Winkelabtragen. Über einem Körper der mit a auch $\sqrt{1+a^2}$ ist die Geometrie der Axiomgruppen I—IV möglich. Natürlich kann man auch ohne Stetigkeitsaxiome erzwingen, dass ein Kreis eine Gerade schneidet, sobald ihr Abstand vom Mittelpunkt kleiner als der Radius ist, und dann muss man, algebraisch, das Quadrawurzelziehen aus *allen* positiven Elementen zulassen. Aber HILBERT stellt sich nun gerade die Frage: Welche Konstruktionen sind möglich, wenn man neben dem Lineal statt des klassischen Zirkels nur einen Streckenabtrager zulässt, oder wie es seit der 2. oder 3. Aufl. heisst: ein Eichmass, d.h. einen Streckenabtrager fester Länge — dass der schon genügt, hatte KÜRSCHAK bemerkt.

Die Quadratwurzel aus einer Quadratsumme wie $1 + a^2$ hat vor einer beliebigen Quadratwurzel $\sqrt{c}$ den Vorzug, dass sie für jede reelle Parameterwahl ein reelles Resultat ergibt. Sind für die Lösung einer Konstruktionsaufgabe n Quadratwurzelziehungen erforderlich, so müssen alle 2^n algebraisch Konjugierten, die die Aufgabe lösen, bei beliebiger Parameterwahl reell sein. Diese not-

wendige Bedingung erweist sich auch als hinreichend, in den ersten Auflagen auf grund tiefliegender Sätze aus der Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper, und seit der 7. Aufl. aufgrund eines allgemeinen Satzes, den HILBERT vermutete und als sehr schwierig zu beweisen bezeichnete, und den erst Artin (1927) bewältigte: eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten, die für reelle Argumente nichtnegativ ist, ist Summe von Quadraten rationaler Funktionen mit rationalen Koeffizienten.

Wie ehedem die Kreisquadratur, die Trisektion, die Konstruktion der regelmässigen Polygone, hat also wieder eine geometrische Konstruktionsaufgabe ein schwieriges algebraisches Problem angeregt.

So schön dieses Kap. auch sein möge, seine Formulierungen befriedigen heute kaum noch. Allerdings hat man im Streben nach Strenge die Konstruktionsgeometrie bis heute recht vernachlässigt. Ein Versuch, wirklich alle Konstruktionsmittel aufzuzählen, ist erst kürzlich gemacht worden (D. KIJNE, Plane construction field theory, Diss. Utrecht, 1956); es zeigte sich die Unvollständigkeit der traditionellen Schemata. Was bei HILBERT besonders auffällt, ist, dass er die Anordnungsaxiome als Konstruktionsmittel wohl nennt, aber ihren Einfluss nirgends berücksichtigt — in welchem Masse ist es möglich und nötig, zu entscheiden, nach welcher Seite das Eichenmass abgetragen wird? Der Hauptsatz, den wir oben zitierten, ist so, wie HILBERT ihn formuliert hat, nicht richtig. Das sieht man an folgendem Beispiel: Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn eine Kathete in Länge und Lage gegeben ist. Diese Aufgabe hat zwei Lösungen, obwohl sie keine Quadratwurzel erfordert. Allgemein kann eine mit Lineal und Eichmass lösbare Aufgabe 2^n oder 2^{n+1} reelle Lösungen besitzen, wenn n die Anzahl der nötigen Quadratwurzeln ist. Sobald aber ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck zu den Daten des Problems gehört, ist HILBERTS Satz richtig, allerdings auch nur, wenn man unter die Konstruktionspostulate eines aufnimmt, das sich auf die Anordnung bezieht (D. KIJNE, a.a.O.).

* * *

Die fünf geometrischen Anhänge, die in der 8. Aufl. beibehalten worden sind, gehören schon zur 2. Aufl. der „Grundlagen"; es sind Aufsätze aus allerlei Zeitschriften. Im ersten wird von einer verallgemeinerten Cayleyschen Massbestimmung, in bezug auf eine beschränkte konvexe Menge gezeigt, dass sie das Dreiecksaxiom

erfüllt — so würden wir es heute ausdrücken. Es dürfte wohl kaum bekannt sein, dass HILBERT als erster die Bedeutung dieses Axioms erkannt hat.

Den fünften Anhang kann man kaum zur geometrischen Grundlagenforschung rechnen. Wohl hat er die Differentialgeometrie im Grossen angeregt und bis heute stark beeinflusst. HILBERT zeigt hier, dass die hyperbolische Ebene als Fläche konstanter negativer Krümmung nicht regulär-analytisch im Grossen in den gewöhnlichen Raum eingebettet werden kann (der Beweis ist von der 7. Aufl. an nach Arbeiten anderer stark vereinfacht), und dass die einzigen regulär-analytischen geschlossenen Flächen konstanter positiver Krümmung im gewöhnlichen Raum die Kugelflächen sind.

* * *

An die Sätze, die ich aus dem Schlusswort der 1. Aufl. zitierte, wird man lebhaft erinnert, wenn man sich den Anhang II vornimmt — „unser Erkenntnistrieb ist erst dann befriedigt, wenn ...". HILBERT entdeckt bei den Kongruenzaxiomen einen kleinen Verstoss gegen seinen Grundsatz, die ebene Geometrie rein eben zu begründen. Die Kongruenzgruppe, die er forderte, sollte jedes geordnete Punktepaar in jedes kongruente auf genau *zwei* Arten überführen, durch eine Abbildung, die die Orientierung erhält (Bewegung) und durch eine, die sie umkehrt (Umlegung). Die Umlegungen aber sind der Ebene nicht eigentümlich; die Anschauung bezieht sie aus dem Raume. So schränkt HILBERT nun das Axiom der Dreieckskongruenz (SWS) ein, indem er es nur fordert für Dreiecke mit gleichem Umlaufsinn.

Es sieht mehr nach Kleinigkeitskrämerei als nach unbefriedigtem Erkenntnisdrang aus, noch ein Eckchen von einem Axiom abzuzwacken (oder zu zeigen, dass es sich nicht abzwacken lässt). Aber sobald man sich in das Problem vertieft, staunt man über die neue Wendung und über die Fülle von Anregungen, die einem zuströmen.

Mit den gebräuchlichen Stetigkeitsaxiomen kann man die Umlegungen aus den abgeschwächten Kongruenzaxiomen herleiten, aber wie ist es, wenn man die Stetigkeitsaxiome vermeidet? Nun, dann geht es nicht, wie HILBERT an Beispielen zeigt. Ja, man schafft es noch nicht einmal mit dem Archimedischen Axiom. Man braucht ein zweites, ein ganz überraschendes, das wir heute so formulieren würden: Durch die Anordnungsaxiome wird eine Topologie festgelegt und durch die Kongruenzaxiome eine Art von

Metrik (allerdings nicht mit Zahlenwerten und noch ohne Dreiecksaxiom). Die Metrik soll nun mit der Topologie in gewisser Weise verträglich sein; es soll nämlich der Abstand zweier Punkte x, y beliebig klein werden, wenn diese Punkte sich nur in einer genügend kleinen Umgebung eines festen Punktes a befinden.

Man braucht also diese zwei Stetigkeitsaxiome, um die Umlegungen aus den abgeschwächten Kongruenzaxiomen abzuleiten, aber man kann sie doch auch wieder vermeiden, wie HILBERT überraschend einfach zeigt, wenn man de ZOLTS Axiom über Flächenvergleichung annimmt (nur muss man wohl HILBERTS Formulierung revidieren; dieser Abschnitt war in der 7. Aufl. verschwunden und ist in der 8. Aufl. als Supplement III wiederaufgetaucht).

Dem Anhang II ist es recht abenteuerlich ergangen. Ursprünglich waren alle Beweise nur angedeutet. Der Beweis, dass man mit den beiden erwähnten Stetigkeitsaxiome die Umlegungen erhält, war an mehreren Stellen ganz offensichtlich falsch, aber die Leser werden wohl gemeint haben, dass sie den Beweis nur wegen der Kürze der Darstellung nicht begriffen. Doch gab es eine *wesentliche* Lücke, und auf die hat, wie es scheint, zuerst W. ZABEL aufmerksam gemacht. HILBERT hatte gemeint, dass allerlei Sätze aus der Kongruenzlehre auch aus den abgeschwächten Kongruenzaxiomen folgten. Nun war die Kongruenzlehre in den ersten Auflagen nur andeutungsweise entwickelt. Insbesondere fehlte alles über die Grösser-Kleiner-Beziehungen zwischen Winkeln, und gerade da ging es schief. (Es ist übrigens noch ein Wunder, dass so wenig schief ging, denn aus den Fragmenten der Kongruenzlehre zu erkennen, welche geometrische Sätze mit abgeschwächten Kongruenzaxiomen richtig bleiben, ist eine übermenschliche Aufgabe.)

Die Drehungen um einen Punkt sind aufgrund der Kongruenzaxiome Kollineationen, und HILBERT hatte offenbar gemeint, dass diese Kollineationen notwendig die zyklischen Ordnungsbeziehungen im Strahlenbüschel erhalten, anders ausgedrückt, dass die Winkel ein anständiges Grössensystem bilden, und dass ein Winkel nicht einem ganz in seinem Inneren enthaltenen kongruent sein kann. Das ergibt sich aber gerade erst aus dem Kongruenzaxiom in seiner ursprünglichen Fassung (mit Umlegungen). Es ist schade, dass dies auch in der 8. Aufl. bei der Kongruenzlehre noch nicht klar herausgearbeitet ist, obwohl gerade der heutige Bearbeiter in einem Aufsatz in „Studies and Essays, presented to R. Courant" (New York 1948, S. 29—44) die Zusammenhänge in

aller Schärfe auseinandergesetzt hat. Der entscheidende Schluss findet sich in der 7.—8. Aufl. bei Satz 15. Es soll gezeigt werden: wenn die Strahlen k und l bzw. k' und l' an verschiedenen Seiten von h bzw. h' liegen und $\sphericalangle hk = \sphericalangle h'k'$, $\sphericalangle hl = \sphericalangle h'l'$ ist, so ist auch $\sphericalangle kl = \sphericalangle k'l'$. Das macht man mit dem Kongruenzsatz SWS, indem man Punkte auf den Schenkeln annimmt. Aber mit den eingeschränkten Kongruenzaxiomen geht das nur, wenn man noch weiss, dass k' auf derselben Seite von h' liegt wie k von h (und l' auf derselben von h' wie l von h). Sonst wird die Addition der Winkel abhängig von der Reihenfolge. P. BERNAYS hat nun a.a.O. gezeigt, dass man alles auch schon retten kann mit dem zusätzlichen Axiom: Ein Winkel kann nicht einem ganz in seinem Inneren gelegenen kongruent sein. Erst unter dieser zusätzlichen Annahme werden die von HILBERT behaupteten Sätze über die Existenz der Umlegungen richtig.

Eine Folge der Existenz von Umlegungen ist der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck. HILBERT hatte ursprünglich gemeint, dass dieser Satz schon zusammen mit den Kongruenzaxiomen ohne Umlegung die Kongruenzaxiome mit Umlegung produziere; aber auch hier braucht man wieder das zusätzliche Axiom über die Winkelvergleichung.

Als ein etwas komisches Detail möchte ich erwähnen, dass — wie mir scheint — HILBERT als erster in der Weltgeschichte den Satz von den Basiswinkeln im gleichschenkligen Dreieck aus dem Kongruenzsatz (SWS) abgeleitet hat, ohne die (ganz überflüssige) Höhe oder Mittellinie zu ziehen — aus $AC = BC$, $BC = AC$ und $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCA$ folgt ohne weiteres $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$.

Anhang II in seiner jetzigen Form rührt von dem Bearbeiter der 7. Aufl., ARNOLD SCHMIDT, her, der übrigens in seiner sehr lesenswerten Dissertation (Math. Ann. 109 (1934)) das Verhältnis der Umlegungen zu anderen Axiomen gründlich untersucht hat. Ich habe in diesem Zusammenhang auch eine Arbeit von BERNAYS zitiert; es ist noch eine zweite zu nennen (Elemente der Math. 8 (1953)), in der auch die Inhaltslehre herbeigezogen wird. Von den Anordnungsaxiomen hat man sich in diesem Zusammenhang merkwürdigerweise niemals befreit.

* * *

Den dritten Anhang erwähne ich nur kurz. HILBERT baut da die hyperbolische Geometrie auf, indem er das Parallelenaxiom ersetzt

durch die Annahme, dass es durch einen Punkt zu einer Geraden zwei „letzte" nichtschneidende Geraden gibt, ein verschleiertes Stetigkeitsaxiom, das die Einführung uneigentlicher Punkte (des absoluten Kegelschnittes) gestattet. In der Menge der uneigentlichen Punkte wird eine der v. Staudtschen analoge Rechnung (mit Würfen) definiert, die zur Koordinatisierung der Geometrie führt. Der Anhang ist in allen Auflagen ziemlich unverändert geblieben; vermutlich sind da allerlei Vereinfachungen möglich.

Ganz fundamental ist wieder Anh. IV. Wenn ich über geometrische Grundlagenforschung sprach, habe ich immer eine Richtung vernachlässigt. Eigentlich hätte ich schon früher erwähnen müssen, dass man am Ende des vorigen Jahrhunderts unter „Grundlagen der Geometrie" vielfach etwas Anderes verstand als was HILBERT in seiner Festschrift betrieb: nämlich die Weiterentwicklung von RIEMANNS und HELMHOLTZ' Ideen. Ich habe diese Geschichte in meinem Vortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1954 auseinandergesetzt (siehe auch die Einleitung zu meiner Arbeit in Math. Zeitschr. 63) und fasse mich hier kürzer.

RIEMANN, philosophisch beeinflusst von HERBART, meint, dass von den Eigenschaften des Raumes uns unmittelbar gegeben ist nur seine stetige Struktur im Kleinen, die (genügend oft differenzierbare) Mannigfaltigkeit, und dass wir seine metrische Struktur (die „Hypothesen, welche der Geometrie zum Grunde liegen") aus der physikalischen Erfahrung beziehen müssen — in der Relativitätstheorie hat sich seine Meinung bestätigt. HELMHOLTZ, Kantianer, aber wenig strenger Observanz, entdeckt demgegenüber „Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen" in der Existenz und freien Beweglichkeit starrer Körper. Er fordert die Existenz einer Funktion zweier Punkte, die Abstand heissen möge, und verlangt, dass die Transformationen, die diesen Abstand invariant lassen, dem Raume die freie Beweglichkeit des euklidischen verleihen, d.h. im Wesentlichen: jedes Dreieck soll in jedes kongruente übergeführt werden können, aber nach Fixierung dreier Punkte soll keine Bewegung mehr möglich sein. HELMHOLTZ hat gemeint, aus diesen Voraussetzungen abgeleitet zu haben, dass der Raum euklidisch oder einer der bekannten nichteuklidischen Räume ist. Später hat LIE den gruppentheoretischen Charakter der Helmholtzschen Annahmen erkannt und HELMHOLTZ' Schlussweisen einer Kritik und Berichtigung unterworfen.

Was nun in den Helmholtz-Lieschen Untersuchungen dem Ge-

schmack des Geometers widerstreitet, sind die Differenzierbarkeitsannahmen. HILBERT hat das wohl zuerst erkannt. Er hat ja auch allgemein das (inzwischen gelöste) Problem gestellt, die Theorie der kontinuierlichen Gruppen von solchen Annahmen zu befreien. In der Arbeit, die in Anh. IV abgedruckt wurde, ist er nun einen ersten Schritt in dieser Richtung gegangen. Er fängt es ganz topologisch an. Er legt eine topologische Mannigfaltigkeit zugrunde, allerdings eine ganz spezielle, homöomorph der Euklidischen Ebene. In der setzt er eine Gruppe G von orientierungstreuen topologischen Transformationen voraus, von der er sehr wenig verlangt: 1) Wenn ein Punkt festgehalten wird, kann jeder andere noch unendlich viel Lagen bei G annehmen. 2) Wenn durch G ein Punktetripel A, B, C in beliebige Nähe eines Punktetripels A', B', C' übergeführt werden kann, so kann es auch in A', B', C' übergeführt werden. Er beweist, dass diese Forderungen die Euklidische oder die hyperbolische Geometrie nach sich ziehen.

Man sieht, dass viel weniger verlangt wird als bei HELMHOLTZ und LIE. Erstens fehlen alle Differenzierbarkeitsannahmen. Zweitens ist sogar die invariante Abstandsfunktion verschwunden; aber das ist ein bisschen scheinbar. Die zweite Forderung verlangt nämlich nicht nur eine topologische Vollständigkeit der Gruppe, sondern auch eine gewisse Starrheit des Raumes. Lässt man etwa B' und C' zusammenfallen, so verbietet sie, dass ein Punktepaar übergeführt wird in Punktepaare, die sich einander beliebig nähern. Diese Forderung ersetzt die fehlende invariante Metrik. Auch die erste Forderung ist viel schwächer als die entsprechende bei HELMHOLTZ-LIE. Es werden bei Drehungen nur unendlich viele Bildpunkte verlangt und nicht eine ganze geschlossene Bahnkurve wie bei HELMHOLTZ-LIE.

HILBERTS Methode ist natürlich topologisch. Es versteht sich, dass wir heute den ganzen Beweis anders einrichten und darstellen würden. Die Idee aber ist klassisch geblieben und hat sich — reichlich spät — als fruchtbar erwiesen. Es ist eine Idee, die der Tendenz der „Grundlagen" diametral widerspricht. Die „Grundlagen" hatten das Ziel einer Geometrie ohne Stetigkeitsaxiome. Aber dies Ziel war kein Dogma. Hier, in dieser neuen Untersuchung, lässt HILBERT gerade Stetigkeitsaxiome vom Anfang an mit voller Gewalt eingreifen, ja alle Forderungen sind topologischer Natur. In der projektiven Geometrie ist diese Idee später weiterverfolgt worden in einer Reihe von Arbeiten, auf die ich in meinem Vortrag

auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1954 hingewiesen habe (siehe auch meine Arbeit Math. Zeitschr. 63). Beim mehrdimensionalen Helmholtz-Lieschen Raumproblem hat A. KOLMOGOROFF (Göttinger Nachr. 1930) HILBERTS Gedanken fortgesetzt (allerdings ohne Beweise). Eine Entwicklung, an der MONTGOMERY, ZIPPIN, GARRET BIRKHOFF, BUSEMANN, H. C. WANG mitgewirkt haben, hat mit einer Arbeit von J. TITS die (vorläufig) endgültige Lösung des Problems gezeitigt:

Man verlangt vom Raum nur noch Kompaktheit im Kleinen und Zusammenhang, von der Gruppe G Transitivität, eine gewisse topologische Starrheit und Vollständigkeit, und weiter, wenn man einen Punkt fixiert, die Existenz einer „Bahn", die den Raum zerlegt (statt der Hilbertschen Unendlichkeit). Dann kann man alle Räume und Gruppen, die zulässig sind, aufzählen; erlegt man der *Bahn* dieselbe Forderung auf (d.h. dass sie durch eine Bahn zweiter Ordnung zerlegt wird) und fährt man so noch einmal fort, so bleiben nur die klassischen euklidischen und nichteuklidischen Geometrien beliebiger Dimensionen übrig. Fordert man die Existenz einer invarianten Metrik, so bedeutet das die Charakterisierung der klassischen Gruppen durch eine Bedingung wie: jedes Dreieck lässt sich durch G in jedes kongruente überführen. (Siehe H. FREUDENTHAL Math. Zeitschr. 63.)

Bei aller Vielseitigkeit von Anregungen, die man HILBERTS „Grundlagen" verdankt, kann ein Aufsatz, der diese Anregungen aufzählt, keinen Überblick über die Geschichte der Grundlagen der Geometrie in diesem Jahrhundert gewähren. Sucht man z.B. die Wurzel der Spiegelungsgeometrie (die elementaren Figuren werden durch Spiegelungen charakterisiert), so muss man zu H. WIENER und nicht zu HILBERT zurückgehen. v. NEUMANNS verbandstheoretische Behandlung der projektiven Geometrien verrät ganz andere als geometrische Ursprünge. Vielleicht hätte ich mehr Aufmerksamkeit der Axiomatik der topologischen Räume schenken sollen, die Poincaré in HILBERTS „Grundlagen" vermisste, und die später — sicher unter dem Einfluss der Hilbertschen Axiomatik — von anderen nachgeholt wurde. Dass der Axiomatik der Algebra in den „Grundlagen" vorgearbeitet wurde habe ich erwähnt. Dass zu einer grundlagentheoretischen Behandlung der allgemeinen Riemannschen Geometrie (bis auf einen Waldschen Satz) fast noch alles fehlt, ist verwunderlich. Dagegen hätte ich mich mit einer papiernen

Aufzählung begnügen müssen, wenn ich vollständig hätte angeben wollen, was man seit den Arbeiten von R. MOUFANG über die Schliessungssätze weiss.

HILBERTS „Grundlagen" haben sich in 8 Auflagen weiter entwickelt, wenn auch in bescheidenem Masse. Diese Geschichte ist nun wohl abgeschlossen, wie es eines schönen Tages auch die von EUKLIDS Elementen war. Aber von EUKLIDS Elementen kann man lernen, was man nun vielleicht mit HILBERTS „Grundlagen" machen müsste: sie kommentieren. Solch eine Tätigkeit steht heutzutage nicht in grossem Ansehen. Man überlässt sie gerne Historikern. Das sollen dann Leute sein, die sich einer Wissenschaft erbarmen, wenn sie mausetot ist. Wenn man das als Kriterium gelten lässt, ist es allerdings für HILBERTS „Grundlagen" noch zu früh.

(Received 16 May 1957)

Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen [1958c]

Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 61 (1958), 379–383
[Zbl 0083.02104; MR0101282]

(Communicated at the meeting of April 26, 1958)

1. E. Cartan's Methode [1]) der komplexen Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen wurde von B. L. v. d. WAERDEN [2]) durch eine geometrische ersetzt. Danach hatte E. DYNKIN [3]) die Idee, einen ausgiebigen Gebrauch von der Anordnung der Wurzelformen und dem Begriff der irreduzibelen Wurzelformen zu machen. Dynkins Methode wurde übersichtlicher dargestellt in einer Publikation des Séminaire Sophus Lie 1954/55 [4]). Hier folgt eine Darstellung, die vielleicht noch etwas durchsichtiger ist.

2. Die Bestimmung der einfachen Lie-Algebren über dem komplexen Körper reduziert sich bekanntlich auf das

Problem: Man bestimme die Menge $\mathfrak{P}$ aller Systeme P von Vektoren reeller euklidischer Räume mit den Eigenschaften:

A: Aus $\alpha \in P$ folgt $|\alpha| = 1$.

B: Die Elemente von P sind linear unabhängig.

C: Für $\alpha, \beta \in P$, $\alpha \neq \beta$ ist das innere Produkt
$$(\alpha, \beta) = -\tfrac{1}{2}/s \quad \text{mit } s = 0, 1, 2 \text{ oder } 3.$$

D: P ist nicht Vereinigung zweier Mengen P_1, P_2 mit $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ für alle $\alpha_i \in P_i$ $(i = 1, 2)$.

3. Mit den Bezeichnungen von 2C heisst das Paar α, β *s-fach gebunden* für $s \neq 0$, und *ungebunden für* $s = 0$.

Denkt man sich zwischen gebundenen Paaren Strecken, so entsteht ein (wegen 2D) zusammenhängender Graph.

4. Ist $P \in \mathfrak{P}$, $P' \subset P$, und ist der Graph von P' zusammenhängend, so ist wieder $P' \in \mathfrak{P}$.

5. Der Graph eines $P \in \mathfrak{P}$ kann kein "Kreis" sein. Denn sei

$$P = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \text{ mit } (\alpha_j, \alpha_{j+1}) \neq 0 \qquad (\text{für } j = 1, \ldots, m \bmod m).$$

---

[1]) Thèse 1889.

[2]) Math. Zeitschr. 37 (1933), 446–462.

[3]) Mat. Sbornik N.S. 18(60) (1946), 347–352.

[4]) Théorie des Algèbres de Lie, topologie des groupes de Lie. Ecole Normale Supérieure Paris.

Dann ist

$$\begin{aligned}|\sum \alpha_j|^2 &= \sum |\alpha_j|^2 + \sum_{i \neq j} (\alpha_i, \alpha_j) \\ &\leqslant m + 2 \sum (\alpha_j, \alpha_{j+1}) \\ &\leqslant 0\end{aligned}$$

wegen 2C, und das ist unmöglich wegen 2B.

6. Der Graph eines $P \in \mathfrak{P}$ kann wegen 4–5 keinen Kreis enthalten, ist also nach 3 ein *Baum*.

7. Ein Element von P heisst k-seitig, wenn es an k andere Elemente von P gebunden ist. Ist $P \in \mathfrak{P}$ und α k-seitig, so zerfällt $P \backslash (\alpha)$ in genau k nichtleere Teilsysteme mit zusammenhängendem Graph, die *durch* α *bestimmten Zweige*.

8. Ist P eine Menge von Vektoren, so ist $L(P)$ der von ihr erzeugte lineare Raum.

9. Für $P \in \mathfrak{P}$ und $\alpha \in P$ definieren wir:

$$\varphi(P, \alpha) = \text{Quadrat des Abstandes } (\alpha, L(P \backslash (\alpha))).$$

Also

$$0 < \varphi(P, \alpha) \leqslant 1.$$

Ferner für $P' \in \mathfrak{P}$, $P' \subset P$, $\alpha \in P'$:

$$\varphi(P', \alpha) \geqslant \varphi(P, \alpha).$$

10. Sei $\alpha \in P \in \mathfrak{P}$. Seien P_j die von α in P bestimmten Zweige. Sei $\alpha_j \in P_j$ s_j-fach gebunden an α. (Man beachte, dass wegen 6 diese α_j eindeutig bestimmt sind.) Sei

$$\begin{aligned}a_j &= \varphi(P_j, \alpha_j), \\ a &= \varphi(P, \alpha).\end{aligned}$$

Dann ist

$$a \leqslant 1 - \sum \frac{s_j}{4 a_j}.$$

(Dieser Satz ist der Schlüssel zu allem, was folgt.)

Beweis: Definitionsgemäss gibt es ein

$$\gamma_j \in L(P_j \backslash (\alpha_j))$$

mit

$$|\alpha_j - \gamma_j|^2 = a_j.$$

Die Elemente verschiedener P_j sind untereinander orthogonal, also

$$(\alpha_i - \gamma_i, \alpha_j - \gamma_j) = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Weiter

$$(\alpha, \alpha_j - \gamma_j) = (\alpha, \alpha_j) = -\tfrac{1}{2} \sqrt{s_j}.$$

Wir setzen

$$\beta = \alpha - \Sigma x_j(\alpha_j - \gamma_j),$$

also

$$|\beta|^2 = 1 + \Sigma \sqrt{s_j}\, x_j + \Sigma a_j x_j^2.$$

Dabei bestimmen wir die x_j so, dass dies minimal wird, nämlich

$$x_j = -\frac{\sqrt{s_j}}{2a_j}.$$

Also

$$|\beta|^2 = 1 - \sum \frac{s_j}{4a_j},$$

und hieraus folgt die Behauptung.

11. Die Elemente eines $P \in \mathfrak{P}$ können höchstens dreiseitig sein.

Denn in der Summe aus 10 ist jeder Summand $\geqslant \frac{1}{4}$, also gibt es wegen $a > 0$ höchstens drei Summanden.

12. Sei P, $P_i \in \mathfrak{P}$, $P_i \subset P$ $(i = 1, 2)$, $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2 = (\alpha)$. Sei

$$\varphi(P_1, \alpha) \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Dann ist auch $\varphi(P, \beta) \leqslant \frac{1}{2}$ für $\beta \in P_2$.

Für $P_2 = \{\alpha, \beta\}$ folgt das aus 10:

$$\varphi(P, \beta) \leqslant 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}.$$

Induktion und Anwendung von 9 (Ende) ergibt die allgemeine Aussage.

13. Für jedes mindestens zweiseitige Element $\alpha \in P \in \mathfrak{P}$ gilt

$$\varphi(P, \alpha) \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Sei nämlich α an α_1, α_2 gebunden. Es genügt, die Behauptung für das aus α, α_1, α_2 bestehende System P zu beweisen. Hier ist nach 10:

$$\varphi(P, \alpha) \leqslant 1 - \frac{1}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} = \tfrac{1}{2}.$$

14. Besitzt $P \in \mathfrak{P}$ ein dreiseitiges Element β, so ist $\varphi(P, \alpha) \leqslant \frac{1}{2}$ für alle $\alpha \in P$.

Denn sei P' ein von β bestimmter Zweig, so dass $\alpha \in P'$, falls $\alpha \neq \beta$. Sei $P'' = P \backslash P'$. Dann ist $\beta \in P'' \in \mathfrak{P}$. β ist in P'' mindestens zweiseitig, also (nach 13) $\varphi(P'', \beta) \leqslant \frac{1}{2}$, also (nach 12) $\varphi(P, \alpha) \leqslant \frac{1}{2}$.

15. Kein $P \in \mathfrak{P}$ besitzt mehr als *ein* dreiseitiges Element.

Denn seien α und β in P dreiseitig, P_j $(j = 1, 2, 3)$ die von α bestimmten Zweige, $\alpha_j \in P_j$ gebunden an α, und $\beta \in P_1$. Dann ist $\varphi(P_j, \alpha_j) \leqslant 1$ und (nach 14 oder, für $\beta = \alpha_1$, nach 13) $\varphi(P_1, \alpha_1) \leqslant \frac{1}{2}$, also nach 10:

$$\varphi(P, \alpha) \leqslant 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{1}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} = 0.$$

Das ist nach 2B unmöglich.

16. Kein $P \in \mathfrak{P}$ mit mehr als zwei Elementen besitzt ein dreifach gebundenes Paar.

Es genügt, die Unmöglichkeit des Systemes $P = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ mit dreifacher Bindung zwischen α und β und Bindung zwischen β und γ zu beweisen. Dies ergibt sich nach 10:

$$\varphi(P, \beta) \leqslant 1 - \frac{3}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} = 0.$$

17. Hat $P \in \mathfrak{P}$ ein Paar mit doppelter Bindung, so gilt $\varphi(P, \gamma) \leqslant \frac{1}{2}$ für alle $\gamma \in P$.

Es genügt nach 12, dies zu beweisen für $P = \{\alpha, \beta\}$ mit doppelter Bindung. Nach 10 ist

$$\varphi(P, \beta) \leqslant 1 - \frac{2}{4 \cdot 1} = \tfrac{1}{2}.$$

18. Kein $P \in \mathfrak{P}$ besitzt zugleich ein dreiseitiges Element und eine doppelte Bindung.

Denn sei $\alpha \in P$ dreiseitig, seien β, γ doppelt gebunden, P' ein von γ bestimmter Zweig und $\alpha, \beta \in P'$. Ist $\alpha \neq \beta$, so ist α dreiseitig in P', also nach 14: $\varphi(P', \beta) \leqslant \frac{1}{2}$. Ist $\alpha = \beta$, so gilt dasselbe nach 13. Nun folgt nach 10:

$$\varphi(P' \cup (\gamma), \gamma) \leqslant 1 - \frac{2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 0.$$

19. Kein $P \in \mathfrak{P}$ hat mehr als *eine* doppelte Bindung.

Seien nämlich α und β doppeltgebunden, ebenso γ und δ. Sei P' ein von δ bestimmter Zweig und $\alpha, \beta, \gamma \in P'$. Nach 17 ist $\varphi(P', \gamma) \leqslant \frac{1}{2}$, also nach 10:

$$\varphi(P' \cup (\delta), \delta) \leqslant 1 - \frac{2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 0.$$

20. Ein $P \in \mathfrak{P}$ mit doppelter Bindung besitzt wegen 18 einen linear geordneten Graph. Hat P mehr als vier Elemente, so kann die doppelte Bindung nur am Anfang (oder Ende) stehen.

Denn sei $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ mit Bindung zwischen α_j und α_{j+1} und doppelter Bindung zwischen α_2 und α_3. Sei $P_j = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_j\}$.

$$\varphi(P_2, \alpha_2) = 1 - \frac{1}{4 \cdot 1} = \tfrac{3}{4},$$

$$\varphi(P_3, \alpha_3) = 1 - \frac{2}{4 \cdot \frac{3}{4}} = \tfrac{1}{3},$$

$$\varphi(P_4, \alpha_4) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \tfrac{1}{4},$$

$$\varphi(P_5, \alpha_5) - 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 0.$$

21. Sei $K_q \in \mathfrak{P}$ das System der q Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ mit einfachen Bindungen zwischen α_j, α_{j+1}. Dann ist

$$\varphi(K_q, \alpha_q) = \frac{q+1}{2q}.$$

Für $q=1$ ist das klar. Induktionsschluss:

$$\varphi(K_{q+1}, \alpha_{q+1}) = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{q+1}{2q}} = \frac{q+2}{2(q+1)}.$$

22. Sei $P \in \mathfrak{P}$ und δ dreiseitig in P. Die drei von δ bestimmten Zweige sind von der Art K_p, K_q, K_r (siehe 21) mit gewissen p, q, r. Also

$$\varphi(P, \delta) = 1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)}.$$

Zu dem Ausdruck $y = \frac{x}{2(x+1)}$ gehört die Funktionstafel

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$y = \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{2}{5}, \ldots \tfrac{5}{12}, \text{ monoton.}$$

Also:

$$p, q, r \text{ nicht alle } \geqslant 2,$$

$$\text{keine zwei } \geqslant 3.$$

Man nehme $p \leqslant q \leqslant r$. Dann ist nur zulässig:

$$p = q = 1, \; r \text{ beliebig},$$

$$p = 1, \; q = 2, \; r \leqslant 4.$$

23. Nach all diesen Ausschliessungen bleiben gerade die bekannten Systeme übrig.

Symplektische und metasymplektische Geometrien [1962c]

Algebraical and Topological Foundations of Geometry
(Proc. Colloq., Utrecht, August 1959), 29–33
[Zbl 0111.17503; MR 0139970]

1. *Die klassischen Koeffizientenkörper* sind der reelle, komplexe, Quaternionen- und Oktaven-Körper mit den Dimensionen

$$p = 1,\ 2,\ 4,\ 8.$$

Die Gruppe der stetigen Automorphismen dieser Körper hat die Dimension

$$0,\ 0,\ 3,\ 14.$$

2. *Projektive Geometrien* über diesen Körpern erfüllen für

$p = 1$: Pappus,
$p = 2$: Pappus,
$p = 4$: Desargues, nicht Pappus,
$p = 8$: Harmonizität, nicht Desargues.

Für $p = 1, 2, 4$ existieren solche Geometrien in allen Dimensionen. Für $p = 8$ geht es nur bis zur Dimension 2 (Moufang-Ebene).

Wir beschränken uns auf projektive Ebenen. Die Dimension der Ebene ist in allen Fällen $2p$.

3. *Die Gruppe der stetigen Automorphismen der projektiven Ebene.*

Ihre Dimension ergibt sich heuristisch so: Vier Punkte gehen in vier willkürliche andere über — ergibt $4 \cdot 2p$ Dimensionen; hierzu kommen die Automorphismen des Koeffizientenkörpers. Also in den vier Fällen

$$8,\ 16,\ 35,\ 78 = 8p + 0, 0, 3, 14.$$

Hierzu gehören die Liegruppen

$$A_2,\ A_2 + A_2,\ A_5,\ E_6.$$

Von den drei ersten ist das unmittelbar zu sehen; für die vierte bedarf es eines Beweises. Die drei ersten besitzen lineare Darstellungen in $3p$ Dimensionen, dementsprechend kann man wie üblich diese projektiven Ebenen mit 3 homogenen Koordinaten koordinatisieren. Für die E_6 existiert solch eine lineare Darstellung nicht. Die gebräuchliche Methode versagt. Aber allgemein funktioniert die Darstellung im Raume der symmetrischen (Hermiteschen) Matrices; Dimension:

$$6,\ 9,\ 15,\ 27 = 3p + 3.$$

$$x \to Ax$$

im Raum der Vektoren x induziert

$$P \to APA^*$$

im Raum der Hermiteschen Matrices. In diesen Raum ist die projektive Ebene eingebettet durch

$$x \to xx^*.$$

Die Punkte der projektiven Ebene sind unter den Matrices P als irreduzibele Idempotente, also

$$P^2 = \alpha P, \quad \text{rang } P = 1$$

gekennzeichnet. Dieser Zugang erweist sich auch für $p = 8$ als möglich, wo aber die irreduziblen Idempotente nicht als xx^* faktorisiert werden können.

4. *Projektive Ebenen, koordinatisiert.*

Man beschreibt also im Jordan-Ring der hermiteschen Matrices (mit Oktaven-Koeffizienten) mit dem Produkt

$$X \circ Y = \tfrac{1}{2}(XY + YX)$$

Punkte und Geraden als irreduzibele Idempotente. Die Inzidenzrelation ist

$$X \circ U = 0.$$

Die Automorphismengruppe der Geometrie erscheint als Invarianzgruppe einer kubischen Form, der — in naheliegender Weise definierten — Determinante. Zu der Determinante gehört eine symmetrische Trilinearform (, ,). Also

$$(X, X, X) = \det X.$$

Mit dieser definiert man ein $\times$-Produkt durch die Identität

$$(X \times Y, Z) = 3(X, Y, Z),$$

wo

$$(U, A) = \text{sp } U \circ A$$

gesetzt ist.

Zu zwei verschiedenen Punkten X, Y ist $X \times Y$ die Verbindungsgerade (analog dual).

5. *Elliptische (hyperbolische) Ebenen.*

Man zeichnet eine nichtentartete Polarität, also ein Element E von J mit nicht verschwindender Determinante, etwa die 1-Matrix (oder die Diagonalmatrix, 1, 1, -1), aus. Die Forderung der Invarianz dieses Elementes führt zur elliptischen (hyperbolischen) Gruppe, dargestellt im Raum der X mit $(X, E) = 0$, also in

$$5,\ 8,\ 14,\ 26 = 3p + 2$$

Dimensionen. Die Dimension der elliptischen Gruppe ist

$$3,\ 8,\ 21,\ 52 = 5p - 2 + 0, 0, 3, 14;$$

die Gruppe selbst ist eine

$$B_1, A_2, C_3, F_4.$$

Auch das bedarf im Falle $p = 8$ eines ausdrücklichen Beweises.

6. *Fünfdimensionale symplektische Geometrien.*

Symplektische Geometrie ist projektive Geometrie mit bezug auf eine nichtentartete antisymmetrische Bilinearform — in den Fällen $p = 2, 4$ nimmt man eine antihermitesche. Die Bilinearform bestimmt zu jedem Punkt eine Polhyperebene, zu jedem projektiven Unterraum einen Polraum. Elemente der symplektischen Geometrie sind *die* projektiven Unterräume, die in ihren Polräumen enthalten sind. In der 5-dimensionalen symplektischen Geometrie gibt es Punkte, Geraden und Ebenen. Zwei Punkte sind im allgemeinen nicht verbindbar (in einer Geraden enthalten).

Für die Dimension der symplektischen Gruppe (stetige Automorphismengruppe der 5-dimensionalen symplektischen Geometrie) erhält man

$$21,\ 35,\ 66,\ 133 = 14\,p + 7 + 0, 0, 3, 14.$$

Die ersten drei Zahlen sind evident, die vierte ist zahlenmystisch ergänzt. Die Gruppen selbst sind

$$C_3,\ A_5,\ D_6,\ E_7,$$

wobei das letzte wieder ausdrücklich bewiesen werden muß. Die ersten drei sind in gebräuchlicher Weise in $6\,p$ Dimensionen linear darstellbar; für $p = 8$ versagt diese Darstellung wieder. Allgemein funktioniert eine in

$$14,\ 20,\ 32,\ 56 = 6\,p + 8$$

Dimensionen.

7. *Axiomatik der 5-dimensionalen symplektischen Geometrie.*

Elemente der Geometrie sind

1. eine Punktmenge N, 2. eine zweistellige, reflexive, symmetrische Relation zwischen Elementen von N, die Verbundenheit.

Maximale Mengen verbundener Punkte heißen Ebenen; Durchschnitte von Ebenen heißen Geraden, wenn sie aus mehr als einem Punkt bestehen.

Axiom A_p: Jede Ebene ist mit ihren Punkten und Geraden eine projektive Ebene im Sinne von Nr. 2.

Axiom B: Ist Θ ein Punkt, P eine Ebene, $\Theta \notin P$, so ist die Menge der mit Θ verbundenen Punkte aus P eine Gerade.

Auf Grund dieses Axioms entsteht eine Korrelation $P \to Q$ zwischen je zwei fremden Ebenen P, Q.

Axiom C: $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$ ist eine Polarität.

Diese Axiome charakterisieren die symplektischen Geometrien für $p = 1$ und $p = 8$.

In der symplektischen Geometrie ist die Dimension der Mannigfaltigkeit der

Punkte	$5,\ 9,\ 17,\ 33 = 4p + 1,$
Geraden	$7,\ 12,\ 22,\ 42 = 5p + 2,$
Ebenen	$6,\ 9,\ 15,\ 27 = 3p + 3.$

8. *Das magische Quadrat.*

$p=$	1	2	4	8
2-dim. ellipt. Geo.	B_1	A_2	C_3	F_4
2-dim. proj. Geo.	A_2	$A_2 + A_2$	A_5	E_6
5-dim. sympl. Geo.	C_3	A_5	D_6	E_7
metasympl. Geo.	F_4	E_6	E_7	E_8

Die ersten drei Zeilen sind bekannt. Die vierte ist zahlenmystisch und symmetrisch ergänzt. Die Dimensionen der Gruppen in der vierten Zeile sind

$$52,\ 78,\ 133,\ 248 = 26p + 26 + 0,\ 0,\ 3,\ 14.$$

Was bedeutet die vierte Zeile? Diese Frage hat einige Mathematiker mehrere Jahre lang beunruhigt. Die Antwort lautet: Eine neue Geometrie, die metasymplektische.

Die Geometrie der i-ten Zeile besitzt i Raumelemente (in der elliptischen 1, denn die Geraden sind durch eine feste Polarität mit den Punkten zu identifizieren; in der projektiven 2, nämlich Punkte und Geraden; in der symplektischen 3, Punkte, Geraden, Ebenen; in der metasymplektischen 4, Punkte, Geraden, Ebenen und Symplekta, d. h. symplektische Geometrien).

Es gibt hier drei Relationen zwischen Punkten:

verbunden → verflochten → scharnierend.

„Verbunden" heißt: zu *einer* Geraden gehörig.

„Verflochten" heißt: zu *einem* Symplekton gehörig.

„Scharnierend" heißt: es gibt einen Punkt, mit dem beide verbunden sind.

Ebenso gibt es drei Relationen zwischen Symplekta:

verbunden → verflochten → scharnierend.

„Verbunden" heißt: der Durchschnitt ist eine Ebene.

„Verflochten" heißt: der Durchschnitt ist ein Punkt.

„Scharnierend": es gibt ein Symplekton, das mit beiden verbunden ist.

Scheinbar herrscht hier Dualität. Aber die Symplekta durch einen Punkt bilden eine 5-dim. Quadrik statt eines Symplektons.

Die algebraische Darstellung ist vollständig durchgeführt. Für $p = 1$ spielt eine mit $\det X$ komplex-äquivalente kubische Form eine Rolle,

$$\det A + \det B + \det C - \operatorname{sp} ABC,$$

wo A, B, C reelle 3×3-Matrizes sind.

Allgemein arbeitet man mit gewissen Nilpotenten der zugehörigen Lie-Algebra.

Eine Axiomatik steht noch aus.

	Dimension der Manigfaltigkeit der Punkte	Geraden	Ebenen	Symplekta	
überhaupt	15	20	20	15	$p=1$
durch einen gegebenen Punkt		6	7	5	
durch eine gegebene Gerade			2	2	
durch eine gegebene Ebene				1	
überhaupt	24	31	29	21	$p=2$
durch einen gegebenen Punkt		9	9	6	
durch eine gegebene Gerade			2	2	
durch eine gegebene Ebene				1	
überhaupt	42	53	47	33	$p=4$
durch einen gegebenen Punkt		15	13	8	
durch eine gegebene Gerade			2	2	
durch eine gegebene Ebene				1	
überhaupt	78	97	83	57	$p=8$
durch einen gegebenen Punkt		27	21	12	
durch eine gegebene Gerade			2	2	
durch eine gegebene Ebene				1	

9. Die hier skizzierten Untersuchungen sind in reger Wechselwirkung mit Herrn J. Tits entstanden. Siehe hierzu des Verfassers Arbeiten in *Proc. Kon. Akad. Wet.* A **56**, 95—98 (1953); A **57**, 218—230, 363—368 (1954); A **58**, 151—157, 277, 285 (1955); A **62**, 447—474 (1959) (= *Indag. Math.* **16**, **17**, **18**, **22**), und die dort zitierte Literatur.

Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen [1962d]

Algebraical and Topological Foundations of Geometry
(Proc. Colloq., Utrecht, August 1959), 35–37
[Zbl 0111.17601; MR 0139971]

(Teilweise unter Benutzung der Arbeit, die B. A. Rosenfeld hätte vortragen wollen.)

Das magische Quadrat (siehe den Vortrag: H. Freudenthal, Symplektische und metasymplektische Geometrien) spielt auch bei B. A. Rosenfeld eine Rolle. Wir numerieren nicht nur die Spalten mit $p = 1, 2, 4, 8$, sondern auch die Kolonnen mit $q = 1, 2, 4, 8$. Rosenfeld bemerkte:

Die Gruppe im Kreuzpunkt der p-ten Spalte und q-ten Zeile besitzt eine Darstellung in einem Cartanschen symmetrischen Raum der Dimension $2pq$. Die zugehörigen Isotropiegruppen sind Spindarstellungen gewisser orthogonaler Gruppen.

Früher schon hatte Rosenfeld ein Prinzip entwickelt, etwa projektive Geometrien als elliptische zu interpretieren. Im projektiven P_n betrachtet man Paare von Punkten (x) und Hyperebenen (u). Zwei solche Paare besitzen bekanntlich eine projektive Invariante $(x, v)(y, u)/(x, u)(y, v)$. Man kann x und u zusammenfassen zu $A = xe_+ + ue_-$, analog $B = ye_+ + ve_-$. Dabei sollen $e_+ = \frac{1}{2}(1 + e)$, $e_- = \frac{1}{2}(1 - e)$ „Dualzahlen" sein ($e^2 = 1$). A läßt sich als Punkt eines projektiven Raumes über den Dualzahlen deuten; denn Multiplikation mit einer Dualzahl $\alpha e_+ + \beta e_-$ liefert $\alpha x e_+ + \beta u e_-$, also Multiplikation von x und u einzeln. Bedient man sich in der Dualzahlenalgebra des Automorphismus $\alpha \to \bar{\alpha}$, der von $e \to -e$ induziert wird, so kann man mittels

$$A\bar{A} = (x, u),\ B\bar{B} = (y, v),\ A\bar{B} \cdot B\bar{A} = (x, u)(y, u)$$

obige Invariante von *vier* Elementen als eine von *zwei* Punkten auffassen:

$$A\bar{B} \cdot B\bar{A}/A\bar{A} \cdot B\bar{B}.$$

Damit hat man eine elliptische Geometrie über der Dualzahlenalgebra. Hat man angefangen mit einer projektiven Geometrie über dem komplexen oder Quaternionen-Körper, so kommt eine elliptische Geometrie heraus über einer Algebra von Dualzahlen mit komplexen bzw. Quaternionen-Koeffizienten, anders ausgedrückt eine elliptische Geometrie über einer Algebra, die Tensorprodukt ist der Dualzahlenalgebra über dem reellen Körper und der komplexen bzw. Quaternionenalgebra über dem reellen Körper. (Mit der Reihenfolge der Faktoren in obiger Invariante muß man etwas vorsichtig sein.) So kommt man zu ebenen elliptischen Geometrien in der zweiten Zeile des magischen Quadrats.

Ganz analog kann man die symplektische Geometrie als elliptische Geometrie über den Antiquaternionen interpretieren (hyperkomplexe Zahlen mit Basis 1, i, e, ei, wie die Quaternionen, aber $e^2 = (ei)^2 = +1$). Den Geraden entsprechen

Punkte, zwei Geraden in der symplektischen Geometrie haben ein Doppelverhältnis mit ihren Polaren: dies DV wird die elliptische Invariante. Bildet man wieder Tensorprodukte der Algebra der Antiquaternionen mit der der komplexen Zahlen bzw. Quaternionen, so kommt man auch in der dritten Zeile des magischen Quadrats zu elliptischen Ebenen.

Rosenfeld bildet allgemein aus den „klassischen" Algebren und ihren Antialgebren Tensorprodukte. Was in der p-ten Spalte und q-ten Zeile des magischen Quadrats steht, soll dann als ebene elliptische Gruppe über dem Tensorprodukt einer p-dim. und einer q-dim. klassischen Algebra (oder Antialgebra) interpretiert werden, $A_p \times A_q$. Hinsichtlich der vierten Zeile und Spalte ist das vorläufig ein hypothetisches Desideratum; wegen der Nichtassoziativität kann man dort nämlich schon die Punkte nicht als affine Strahlen definieren.

Rosenfeld hat die Jordanalgebra J der 3×3-hermiteschen Matrizes herangezogen, nun mit Koeffizienten aus der Algebra $A_p \times A_q$. In der Algebra definiert man einen Antiautomorphismus $z \to \bar{z}$, indem man in beiden Faktoren zum Konjugierten übergeht; hinsichtlich dieses $z \to \bar{z}$ ist die Hermitizität gemeint. Analog zum Oktaven-Fall nimmt er an, daß die Automorphismen von J darzustellen sind durch: antihermitesche Matrizes mit Spur 0 und Automorphismen des Koeffizientenbereichs. Zählt man die Koeffizienten, so stimmt alles. Man hat in den antihermiteschen Matrizes 3 Koeffizienten mit pq Parametern, zwei Koeffizienten der Form $a = -\bar{a}$, die je $(p-1)+(q-1)$ Parameter besitzen; dazu kommen noch evtl. Zahlen 0, 0, 3, 14.

$3.1.1+2(0+0)+0$	$3.1.2+2(0+1)+0$	$3.1.4+2(0+3)+3$	$3.1.8+2(0+7)+14$
	$3.2.2+2(1+1)+0$	$3.2.4+2(1+3)+3$	$3.2.8+2(1+7)+14$
		$3.4.4+2(3+3)+3+3$	$3.4.8+2(3+7)+\ 3+14$
			$3.8.8+2(7+7)+14+14$

Zählt man dagegen die Parameter in den hermiteschen Matrizes, so stimmt nichts. Lineare Darstellungen in solchem Raume können schon aus Dimensionsgründen nicht existieren. Zum Beispiel rechnet man nach, daß der Darstellungsraum für die E_8 die Dimension 27000 haben müßte. Insbesondere kann man die elliptischen Ebenen über $A_8 \times A_2$, $A_8 \times A_4$, $A_8 \times A_8$ sicher nicht durch die Idempotenten von J definieren. Rosenfeld hat mir kürzlich eine andere Methode mitgeteilt, die mich aber bis jetzt auch nicht überzeugt hat.

Doch existieren diese Mannigfaltigkeiten der Dimension $2pq$. Was man zeigen müßte, ist:

(1) Es gibt in ihnen invariant ausgezeichnete Mannigfaltigkeiten der Dimension pq (Geraden) und zwar im allgemeinen durch zwei Punkte genau eine.

(2) Es gibt einen invarianten Polaritätsbegriff, der sie zu elliptischen Ebenen macht.

(3) Die Struktur dieser Mannigfaltigkeiten läßt sich irgendwie mittels der Algebren $A_p \times A_q$ beschreiben.

Besonders interessant sind die Fälle von Algebren (nicht Antialgebren) A_p und A_q, die zu den kompakten Gruppen führen müßten.

Rosenfeld hat mir kürzlich im Hinblick auf die symplektischen und metasymplektischen Geometrien noch das Folgende mitgeteilt:

Nach seinen Theorien ist klar, daß man die symplektischen Geraden im symplektischen Raum als Punkte der Absoluten der elliptischen Ebenen der dritten Zeile interpretieren soll. Die Dimension der Absoluten ist nun: Dimension der Ebene $(2\,pq)$ minus Anzahl der die Polarität bestimmenden Gleichungen [= Anzahl der selbstkonjugierten Elemente von $A_p \times A_q = (p-1)(q-1)+1$], also

$$2\cdot 1\cdot 4-(0\cdot 3+1)\;\; 2\cdot 2\cdot 4-(1\cdot 3+1)\;\; 2\cdot 4\cdot 4-(3\cdot 3+1)\;\; 2\cdot 8\cdot 4-(7\cdot 3+1).$$

Das stimmt genau überein mit den von uns in der symplektischen Geometrie angegebenen Dimensionen der Menge der Geraden. Aber auch in der vierten Zeile stimmt es:

$$2\cdot 1\cdot 8-(0\cdot 7+1)\,2\cdot 2\cdot 8-(1\cdot 7+1)\,2\cdot 4\cdot 8-(3\cdot 7+1)\,2\cdot 8\cdot 8-(7\cdot 7+1)$$

sind genau die Dimensionen der Punktmannigfaltigkeiten der metasymplektischen Geometrien.

Das Helmholtz-Liesche Raumproblem bei indefiniter Metrik*

[1964b]

Math. Ann. 156 (1964), 263–312
[Zbl 0173.50302; MR 0175068]

HEINZ HOPF von seinem dankbaren ersten Promovenden zum 70. Geburtstag gewidmet

0. Einleitung

0.1. Wenn früher[1]) von einem „gewissen Abschluß" der Untersuchungen zum Raumproblem die Rede war, soll nun der Nachdruck auf das Adjektiv „gewiß" fallen. Es ist seinerzeit TITS geglückt, die Klasse der euklidischen und nichteuklidischen Geometrien topologisch-gruppentheoretisch zu charakterisieren. Geometrien mit indefiniter Metrik wie die der speziellen Relativitätstheorie fielen aber unter den Tisch, während die ursprüngliche Helmholtzsche Formulierung sie wohl zuließ. Die vorliegende Arbeit ist ein – noch reichlich unbefriedigender – Versuch, einen weiteren Rahmen zu finden, in den auch die pseudo-euklidischen und pseudo-nichteuklidischen Geometrien passen.

Im Falle definiter Metrik ist das zweckmäßige Substrat der metrische Raum, dessen Isometriegruppe axiomatischen Forderungen unterworfen wird. Wie verallgemeinert man aber zweckmäßig Metriken, die von einer *indefiniten* quadratischen Form verursacht werden? In der Literatur kann man keine Anhaltspunkte zur Beantwortung dieser Frage finden. Sie ist auch hier kaum beantwortet worden. Die Forderungen, die wir einer „Quasimetrik" auferlegen, sind teilweise metrischer und teilweise gruppentheoretischer Art. Die gruppentheoretischer Art schneiden tief ein. Man sollte aber erst einmal versuchen, wie weit man mit rein metrischen Forderungen kommen kann.

Auch an den Forderungen, die der Isometriegruppe auferlegt werden, ist allerlei auszusetzen. Eine von ihnen ist ungebührlich scharf formuliert; eine andere, die zwar ganz unschuldig aussieht, ist in Wirklichkeit eine Forderung ad hoc. Doch glaube ich, die vorläufige Publikation rechtfertigen zu können, wenn auch mit dem Vorbehalt, das sie das Problem nur sehr vorläufig löst.

0.2. Allgemeine Voraussetzungen. R ist ein im Kleinen kompakter, zusammenhängender, separabel metrisierbarer Raum.

ϱ ist eine stetige Funktion der Punktepaare von R (die Quasimetrik) mit

$$\varrho(x, x) = 0 .$$

* Die Arbeit ist teilweise während des Aufenthaltes an Yale University im Rahmen eines N.S.F. grant entstanden.

[1]) H. FREUDENTHAL, Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. Math. Z. **63**, 374—405 (1956). Zitiert als RHL.

F ist eine *transitive* Gruppe von Homöomorphismen von R, die ϱ *invariant* lassen,

$$\varrho(fx), fy)) = \varrho(x, y) \quad \text{für} \quad f \in F .$$

F ist im Sinne der stetigen Konvergenz topologisiert,

$$\lim f_n x_n = (\lim f_n)(\lim x_n) ,$$

im *Kleinen kompakt* und *separabel metrisierbar*.

Die Standuntergruppe von $x \in R$ heiße J_x. Statt J_{x_0} sagen wir auch J.

0.3. F erfüllt die Bedingung

$\Theta_i(R, \varrho, F)$: Wenn $x_1, \ldots, x_i \in R, f_n \in F \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

$$\lim_n f_n x_j = x_j , \qquad (j = 1, \ldots, i) ,$$

so gibt es $g_n \in F$ mit

$$\lim_n g_n = 1 ,$$

$$g_n x_j = f_n x_j \qquad (j = 1, \ldots, i;\ n = 1, 2, \ldots) .$$

Diese Bedingung wird eigentlich nur bis $i = 3$ gebraucht. Θ_1 hat zur Folge, daß R als Nebengruppenraum F/J nach einer Standuntergruppe aufgefaßt werden kann. Ist nämlich J die Standuntergruppe von x_0, so folgt aus Θ_1, daß die Abbildung $fJ \to fx_0$ topologisch ist[2]).

Für $i > 1$ wirkt Θ_i sich analog auf den Bahnen der Standuntergruppen aus.

0.4. Für $x \in R$ bedeute L_x den Lichtkegel von x, d. h. die Menge der y mit $\varrho(x, y) = 0$. $S_{x,\alpha}$ bedeute die α-Abstandssphäre, d. h. die Menge der y mit $\varrho(x, y) = \alpha$.

F erfüllt weiter Bedingungen Φ_1, Φ_2, Φ_3:

Φ_1 soll im wesentlichen fordern, daß die Lichtkegel verschiedener Punkte nirgends im Kleinen zusammenfallen, daß es also zu $x_0 \neq x_1$ kein offenes $W \subset R$ gibt mit $L_{x_0} \cap W = L_{x_1} \cap W \neq 0$ gibt. Mit dieser Bedingung wird leider die 2-dimensionale Relativitätstheorie ausgeschlossen. Man könnte das vermeiden, indem man $L_{x_0} \neq L_{x_1}$ für $x_0 \neq x_1$ forderte, aber das reicht für unsere Zwecke nicht aus.

Wir formulieren Φ_1 schwächer. Wir fordern nur:

$\Phi_1(R, \varrho, F)$: Sei $y \in L_{x_0}$, $y \neq x_0$. Sei $M_{x_0 y}$ die Menge der $x_1 \neq y$ mit der Eigenschaft: es gibt eine Umgebung W von y mit $L_{x_0} \cap W = L_{x_1} \cap W$. Dann ist $M_{x_0 y}$ zusammenhangslos.

Vorhin wurde verlangt, $M_{x_0 y}$ sei leer.

$\Phi_2(R, \varrho, F)$: Jedes $x \in R$, $x \neq x_0$, hat eine Umgebung W, so daß zu jedem $y \in W$ mit

$$\varrho(x_0, x) = \varrho(x_0, y)$$

ein $f \in J_{x_0}$ existiert mit

$$fx = y .$$

Diese Forderung der *lokalen Transitivität* von J auf der Abstandssphäre $S_{x_0,\alpha}$ wäre durchaus vernünftig, wenn man sie unter der Voraussetzung

[2]) H. FREUDENTHAL: Einige Sätze über topologische Gruppen. Ann. Math. (2) **37**, 46—56 (1936).

$\alpha = \varrho(x_0, x) \neq 0$ formulierte. Wir brauchen sie leider auch auf dem Lichtkegel L_{x_0}.

Wegen Θ_2 gilt Φ_1 sogar in der schärferen Form:

Zu $x \in R, x \neq x_0$ und einer Umgebung U von 1 in J gibt es eine Umgebung W von x_0, so daß zu jedem $y \in W$ mit $\varrho(x_0, x) = \varrho(x_0, y)$ ein $f \in U$ existiert mit $fx = y$.

Wäre das nämlich nicht so, so könnte man eine 1-Umgebung U in J bestimmen und eine Folge y_n mit $\lim y_n = x$, so daß

$$f_n x_0 = x, \quad f_n x = y_n$$

wohl lösbar wäre, aber nicht mit $f_n \in U$. Das widerspräche Θ_2.

Nach Θ_2 kann ϱ nicht mehr identisch verschwinden. Sonst wäre nämlich $R \backslash (y)$ für jedes y zusammenhangslos, trotz des Zusammenhangs des im Kleinen kompakten R.

$\Theta_3(R, \varrho, F)$: In einer gewissen Umgebung von x_0 ist kein $S_{x_0 \alpha}$ $(\alpha > 0)$ nulldimensional, außer etwa in x_0 selber.

Diese Bedingung schließt eindimensionale R aus. Das wäre nicht so schlimm. Es ist aber durchaus eine Bedingung ad hoc.

0.5. Unter diesen Bedingungen zeigt man (2.11), daß F eine (eventuell gemischte) Liegruppe und **J** maximale Subalgebra von **F** ist[3]). Wenn **F** nicht einfach ist, kommt man dann mühelos weiter (4.4), aber bei einfachem **F** erheben sich ziemliche Schwierigkeiten, die vielleicht nicht wesentlich sind. Sie werden überwunden (5.3), indem man Bedingungen Φ *zweiter Stufe* heranzieht:

Sei R_x die x-Komponente der Bahn $J_{x_0} x$ und F_x die von J_{x_0} in R_x induzierte Gruppe; die Restriktion von ϱ auf R_x heiße auch noch ϱ.

Die Bedingungen zweiter Stufe lauten:

$\Phi_i(R_x, F_x, \varrho)$ für alle x einer gewissen Umgebung von x_0 mit $\varrho(x_0, x) \neq 0$.

Mit ihrer Hilfe läßt sich die Klassifikation der zulässigen Standuntergruppen auf folgendes algebraisches Problem zurückführen (6):

P: J ist eine in einem reellen endlich dimensionalen linearen Raum T linear (irreduzibel) dargestellte Lie-Gruppe. J ist, bis auf einen fakultativen, eindimensionalen kompakten, lokal-direkten Faktor halbeinfach. ϱ ist eine nichtkonstante stetige Funktion, definiert in einer Umgebung U von 0 in T; ϱ ist (soweit definiert) bei J invariant; $\varrho(0) = 0$. Jedes $x_0 \neq 0$ aus U kann in jedes benachbarte x mit $\varrho(x_0) = \varrho(x)$ durch ein $j \in J$ in der Nähe der 1 überführt werden.

Man suche die J, die dieser Bedingung genügen.

Die lokale Transitivität wird also auch wieder auf dem „Lichtkegel" gefordert.

Die Feststellung der zulässigen **J** ist langwierig. Sie geschieht in 7—17.

Die Einbettung der zulässigen Standuntergruppen in geeignete F geschieht ungefähr wie im definiten Fall (von RHL); siehe 18—19.

Um schließlich die Klasse der euklidischen, nichteuklidischen, pseudoeuklidischen und pseudo-nichteuklidischen Geometrien zu charakterisieren,

[3]) Die fetten Buchstaben werden in 1 erklärt.

hat man entweder analoge Forderungen Φ_i dritter und vierter Stufe zu stellen oder zu verlangen, daß F die *volle* Isometriegruppe ist; siehe Hauptsatz 19.2.

0.6. Es ist unbefriedigend, daß man zur Reduktion auf das Problem P, das eigentlich von erster Stufe ist, Bedingungen Φ_i von zweiter Stufe stellt. Es ist mir nicht gelungen, das zu vermeiden.

1. Bezeichnungen

1.1. Lie-Gruppen dürfen im allgemeinen „gemischt" sein, dann aber mit diskretem Komponentenraum.

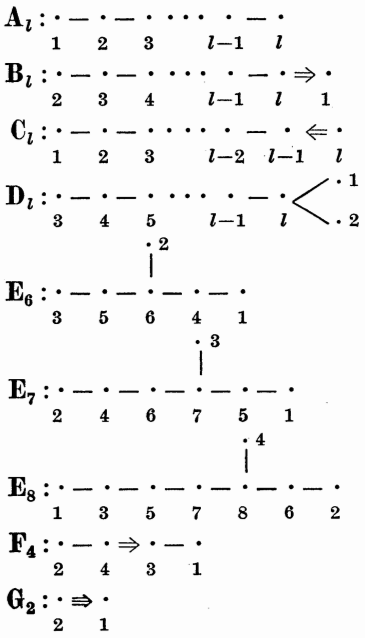
1.2. Die Algebra einer Lie-Gruppe wird mit dem entsprechenden fetten Buchstaben bezeichnet. Auch Elemente und Teilmengen von Lie-Algebren werden fett bezeichnet.

1.3. Das zu $a \in G$ adjungierte wird mit $\tilde{a}$ bezeichnet, also $\tilde{a}x = axa^{-1}$. Ebenso $\tilde{a}\,\mathbf{x} = a\,\mathbf{x}a^{-1}$ und $\tilde{\mathbf{a}}\,x = [\tilde{\mathbf{a}}, \mathbf{x}]$. $\tilde{G}$ ist die adjungierte Darstellung von G.

1.4. Die komplexen einfachen Lie-Gruppen (-Algebren) werden gemäß der Cartanschen Klassifikation angegeben. Hinzugefügt werden $\mathbf{A_0}$ für die 1-dimensionale und $\mathbf{0}$ für die 0-dimensionale Lie-Algebra. Außerdem werden die Doppelbezeichnungen $\mathbf{A_1} = \mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2} = \mathbf{C_2}$, $\mathbf{A_3} = \mathbf{D_3}$, $\mathbf{A_1} + \mathbf{A_1} = \mathbf{D_2}$ gebraucht.

1.5 Die Menge der Wurzelformen einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathbf{L}$ auf einem Stamm (Cartan-Subalgebra) $\mathbf{H}$ heiße $W(\mathbf{L}, \mathbf{H})$ oder kurz W, die der nichtverschwindenden W^*, die der positiven (in einer gewissen Ordnung) W^+, die der primitiven W^{++}.

1.6. Die primitiven Wurzelformen werden wie bei E. CARTAN die fundamentalen Gewichte numeriert[4]). Also:



[4]) Es ist recht störend, daß jeder Verfasser seine eigene Numerierung hat.

1.7. Zu den primitiven Wurzelformen $\varrho_1, \ldots, \varrho_l$ gehören die fundamentalen Gewichte π_i mit

$$2\frac{(\pi_i, \varrho_j)}{(\varrho_j, \varrho_j)} = \begin{matrix} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{matrix}.$$

Die zugehörigen fundamentalen Darstellungen werden mit denselben Buchstaben bezeichnet.

Das Nullgewicht wird jedenfalls mit π_0 bezeichnet.

Ist $\mathbf{L}$ direkte Summe einfacher $\mathbf{L}_j$,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \cdots + \mathbf{L}_p ,$$

so bezeichnet

$$\pi_{i_1, \ldots, i_p}$$

das Gewicht dessen $\mathbf{L}_j$-Restriktion π_{i_j} ist.

1.8[5]). Sei $\mathbf{M}$ eine reelle Lie-Algebra und $\mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$ ihre komplexe Fortsetzung. C sei der involutorische Semimorphismus von $\mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$, der genau die Elemente von $\mathbf{M}$ invariant läßt. C_0 sei ein involutorischer Semimorphismus, der eine unitäre Beschränkung von $\mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$ definiert. Für einfaches $\mathbf{M}$ hat man drei Fälle:

(1) $\mathbf{L} = \mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$ ist einfach, CC_0 ist innerer Automorphismus — $\mathbf{M}$ heißt ein innerer reeller Typ von $\mathbf{L}$,

(2) $\mathbf{L} = \mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$ ist einfach, CC_0 ist äußerer Automorphismus — $\mathbf{M}$ heißt äußerer reeller Typ von $\mathbf{L}$,

(3) $\mathbf{L} = \mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$ zerfällt als $\mathbf{L} + CC_0\mathbf{L} - \mathbf{M}$ heißt (reeller) Zwillingstyp von $\mathbf{L}$.

Man darf annehmen, daß $T = CC_0$ einen gewissen Stamm von $M \otimes \mathrm{co}$ invariant läßt, und zwar im Fall

(1) elementweise,

(2) mittels eines wohlbestimmten[6]) nicht-trivialen Automorphismus A von W^{++} und gemäß $A\mathbf{e}_\varrho = \mathbf{e}_{A\varrho}$ für $\varrho \in W^{++}$.

In (1) und (2) kann $T = CC_0$ bzw. CC_0A durch eine ganze Zahl $j > 0$ charakterisiert werden, die anzeigt, daß

$$T\mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_\alpha \quad \text{oder} \quad \mathbf{e}_\alpha ,$$

je nachdem die primitive Wurzelform ϱ_j in α mit ungeradem oder geradem Koeffizienten auftritt, und durch $j = 0$, wenn

$$T\mathbf{e}_\alpha = e_\alpha \quad \text{für alle} \quad \alpha \in W^*$$

gilt.

Dementsprechend wird der reelle Typ $\mathbf{M}$

$$(1) \quad \mathbf{L}_j, \qquad (2) \quad \mathbf{L}_{j,*}, \qquad (3) \quad \mathbf{L}_{**}$$

genannt. (j braucht nicht eindeutig bestimmt zu sein.)

Bei dieser Bezeichnungsweise kann man die maximal kompakte Subalgebra leicht aus dem Graphen W^{++} ablesen.

---

[5]) Siehe hierzu auch Verf.'s Yale Lectures on Lie Groups, 1960—61, zitiert als YLG.

[6]) Im Falle D_4 soll A das Paar ϱ_1, ϱ_2 vertauschen.

1.9. Außer den unitären und Zwillingstypen erhält man so Algebren mit zugehörigen Gruppen:

$\mathbf{A}_{1,j}$: Invarianzgruppen indefiniter Hermitescher Formen des $(l+1)$-Raumes.

$\mathbf{A}_{2m-1,0,*}$: Gruppe des projektiven $(m-1)$-Quaternionenraums.

$\mathbf{A}_{2m-1,m,*}$, $\mathbf{A}_{2m,0,*}$: Gruppe des projektiven $(2m-1)$- bzw. $2m$-reellen Raumes.

$\mathbf{B}_{l,j}$:
$\mathbf{D}_{l,j}, j \neq 1,2$:
$\mathbf{D}_{l,j,*}$
} Invarianzgruppen indefiniter reeller quadratischer Formen.

$\mathbf{D}_{l,1}$: Invarianzgruppen antihermitescher l-Quaternionen-Formen.

$\mathbf{C}_{l,j}, j \neq l$: Invarianzgruppen indefiniter hermitescher l-Quaternionen Formen.

$\mathbf{C}_{l,1}$: Invarianzgruppe schiefer $2l$-reeller Bilinearform.

$\mathbf{E}_{6,1}$, $\mathbf{E}_{6,2}$, $\mathbf{E}_{6,0,*}$, $\mathbf{E}_{6,2,*}$

$\mathbf{E}_{7,1}$, $\mathbf{E}_{7,2}$, $\mathbf{E}_{7,3}$.

$\mathbf{E}_{8,1}$, $\mathbf{E}_{8,2}$.

$\mathbf{F}_{4,1}$, $\mathbf{F}_{4,2}$.

$\mathbf{G}_{2,2}$.

1.10. Hinsichtlich einer irreduziblen Darstellung f des komplexen halbeinfachen $\mathbf{L}$ mit höchstem Gewicht λ und des reellen Typs $\mathbf{L}_{\mathrm{re}}$ von $\mathbf{L}$ mit dem Semimorphismus C ist dreierlei möglich:

(1) λ und $C\lambda$ sind inäquivalent,

(2) λ und $C\lambda$ sind äquivalent, $\varepsilon = -1$,

(3) λ und $C\lambda$ sind äquivalent, $\varepsilon = 1$,

wo ε sich wie folgt ergibt:

$$C\lambda - \lambda = \Sigma\, q_\nu \varrho_\nu, \qquad (W^{++} = (\varrho_1, \ldots, \varrho_l))$$

$$\varepsilon_\nu = -1 \quad \text{für} \quad \nu \neq j\,,$$

$$\varepsilon_\nu = 1 \quad \text{für} \quad \nu = j\,,$$

$$\varepsilon = \Pi\, \varepsilon_\nu^{q_\nu}\,.$$

Dabei bezeichnet j die für die einfachen Summanden von $\mathbf{L}$ charakteristischen Indices (1.8.).

In (1) und (2) ist die Darstellung f von $\mathbf{L}_{\mathrm{re}}$ wesentlich komplex; um eine reelle Darstellung zu erhalten, muß man die Dimension verdoppeln; in (3) ist sie wesentlich reell. In (2) kann f als Darstellung im Quaternionen-Raum halber Dimension interpretiert werden.

Die drei Fälle werden auch als

(1) areell,

(2) antireell,

(3) reell

unterschieden.

Die so zu f gehörige reelle Darstellung von $\mathbf{L}_{\mathrm{re}}$ wird mit ${}^r f$ bezeichnet.

1.11. Bei $\mathbf{A}_0$ haben wir hier nur den kompakten reellen Typ zu betrachten. Einer 1-dimensionalen Darstellung von $\mathbf{A}_0$ werden die Gewichte $\pm\pi_1$ zugeschrieben.

Weiter sind folgende Festsetzungen zweckmäßig:

$$\begin{aligned}
\pi_2(\mathbf{B}_1) &= 2\pi_1(\mathbf{A}_1)\\
\pi_i(\mathbf{B}_2) &= \pi_i(\mathbf{C}_2)\\
\pi_3(\mathbf{D}_{3,0}) &= \pi_2(\mathbf{A}_{3,0}) && (0)\\
\pi_3(\mathbf{D}_{3,0,*}) &= \pi_2(\mathbf{A}_{3,0,*}) && (1)\\
\pi_3(\mathbf{D}_{3,3}) &= \pi_2(\mathbf{A}_{3,2}) && (2)\\
\pi_3(\mathbf{D}_{3,3,*}) &= \pi_2(\mathbf{A}_{3,2,*}) && (3)\\
\pi_3(\mathbf{D}_{3,1}) &= \pi_2(\mathbf{A}_{3,1}) && (q)\\
\mathbf{D}_{3,**} &= \mathbf{A}_{3,**}\\
\pi_3(\mathbf{D}_{2,0}) &= \pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,0} + \mathbf{A}_{1,0}) && (0)\\
\pi_3(\mathbf{D}_{2,0,*}) &= \pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,**}) && (1)\\
\pi_3(\mathbf{D}_{2,3}) &= \pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,1}) && (2)\\
\pi_3(\mathbf{D}_{2,1}) &= \pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,0} + \mathbf{A}_{1,1}) && (q)\\
\mathbf{D}_{2,**} &= \mathbf{A}_{1,**} + \mathbf{A}_{1,**}\,.
\end{aligned}$$

Bei den $\mathbf{D}_3$ und $\mathbf{D}_2$ bedeuten die Zahlen in Klammern die Anzahlen negativer Quadrate in der invarianten quadratischen Form; (q) bezeichnet den „Quaternionen-Typ".

2. Topologische Auswertung der Bedingungen Φ

$\Theta_i(R, F, \varrho)$ und $\Phi_i(R, F, \varrho)$ werden vorausgesetzt.

2.1. Hilfssatz: Seien F_0 und J_0 die 1-Komponenten von F und J. Sei K eine zusammenhängende Untergruppe von F mit $K \supset J_0$. Sei weiter

entweder a: $K = J_0 N$, wo N kompakter Normalteiler von F ist, und $F_0 \subset J N$,

oder b: F (gemischt) Liesch, $K \neq F_0$ und K erzeugt von einer Lie-Algebra $\mathbf{K}$ (aber nicht notwendig in F_0 abgeschlossen).

Dann ist $K = J_0$.

Der Beweis erfolgt in 2.2–2.4.

2.2. Wir beweisen: $\varrho(x_0, Kx_0)$ besteht aus *einer* Zahl. Wir nehmen an, dies sei nicht der Fall.

Dann wählen wir einen kompakten Teil K' von K, so daß die Zahlenmenge $\varrho(x_0, K'x_0)$ ein Intervall mit Mittelpunkt $\alpha \neq 0$ enthält (im Falle a nehme man etwa $K' = N$). Weiter wählen wir eine 1-Umgebung U in F, so daß auch noch

$$\alpha \in \varrho(x_0, fK'x_0) \quad \text{für alle} \quad f \in U$$

gilt.

Zu $f_n \in U$, $\lim f_n = 1$, gibt es dann $k_n \in K'$ mit

$$\alpha = \varrho(x_0, f_n k_n x_0)\,.$$

Ersetzt man f_n durch eine Teilfolge, so darf man annehmen:

$$\lim k_n = k \in K'$$

$$\alpha = \varrho(x_0, kx_0).$$

Wegen $\alpha \neq 0$ ist $kx_0 \neq x_0$. Nach Φ_2 gibt es zu kx_0 eine Umgebung W, so daß für alle $y \in W$ mit

$$\varrho(x_0, y) = \varrho(x_0, kx_0)$$

ein $j \in J \cap U$ existiert mit

$$jkx_0 = y$$

und für fast alle n ein $j_n \in J \cap U$ mit

$$j_n k x_0 = f_n k_n x_0 ,$$

also

$$f_n k_n \in j_n k J , \tag{1}$$

$$f_n \in J k J k_n^{-1} .$$

Im Falle a ergibt sich $f_n \in JN$. Jede 1-Folge f_n aus F besitzt dann eine in JN liegende Teilfolge. Dann enthält JN eine 1-Umgebung aus F, also auch eine aus F_0. $JN \cap F_0$ ist offene Untergruppe der zusammenhängenden Gruppe F_0 also $JN \supset F_0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Im Falle b wählen wir die j_n so, daß auch noch $\lim j_n = 1$ gilt. Da mit F nun auch J (gemischt) Liesch ist, gilt dann $j_n \in J_0$ für fast alle n. Aus (1) folgt

$$k^{-1} j_n^{-1} f_n k_n \in J.$$

Außerdem

$$\lim k^{-1} j_n^{-1} f_n k_n = 1 ,$$

also wieder für fast alle n

$$k^{-1} j_n^{-1} f_n k_n \in J_0 ,$$

$$f_n \in j_n k J_0 k_n^{-1} \subset J_0 k J_0 k_n^{-1} \subset J_0 N J_0 N = K ,$$

während die f_n sich wegen $K \neq F_0$ im Widerspruch dazu wählen lassen.

2.3. Wegen des Zusammenhangs von K und $\varrho(x_0, x_0) = 0$ ist also

$$\varrho(x_0, kx_0) = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K ,$$

also

$$K x_0 \subset L_{x_0} .$$

Wir zeigen nun:

$K x_0 \backslash (x_0)$ ist offen in L_{x_0}.

Sei $x \in K x_0$, $x \neq x_0$. Nach Φ_2 gibt es eine Umgebung W_x von x so, daß für jedes $y \in L_{x_0} \cap W_x$ ein $j \in J$ existiert mit

$$y = jx \in jK x_0 .$$

Nun ist im Falle a

$$jK x_0 = j J_0 N x_0 \subset JN x_0 = NJ x_0 = N x_0 = K x_0 ,$$

und im Falle b, wo man, wie oben, sogar $j \in J_0$ annehmen darf,

$$jK x_0 \subset J_0 K x_0 = K x_0 ,$$

also allgemein

$$y \in Kx_0 .$$

Also

$$L_{x_0} \cap W_x \subset Kx_0 ,$$

was behauptet wurde.

2.4. Bei Anwendung eines $k \in K$ bleibt Kx_0 invariant, während

$$kL_{x_0} = L_{kx_0}$$

ist. Daraus folgt, daß für $x_1 \in Kx_0$ auch gilt:

$$Kx_0\backslash(x_1) \quad \text{ist offen in} \quad L_{x_1} .$$

Sei $y \in Kx_0$, $y \neq x_0, x_1$. Nun ist

$$Kx_0\backslash(x_0, x_1)$$

eine Umgebung von y sowohl in L_{x_0} als auch in L_{x_1}, und daher gibt es eine Umgebung W von y mit

$$L_{x_0} \cap W = L_{x_1} \cap W .$$

Die Menge der x_1 mit dieser Eigenschaft soll nach Φ_1 zusammenhangslos sein. Also ist für jedes $y \in Kx_0$ die Menge $Kx_0\backslash(y)$ zusammenhangslos, also jede echte Teilmenge von Kx_0 nicht zusammenhängend.

$Kx_0\backslash(y)$ zerfällt, wenn es nichtleer ist, in Stücke A, B, und $A \cup (y)$ zerfällt in Stücke C, D mit etwa $y \in D$. Als Stück des abgeschlossenen $A \cup (y)$ ist C in Kx_0 abgeschlossen; als Stück des offenen A ist C in Kx_0 offen. Also ist C Stück von Kx_0. Wegen des Zusammenhangs von K ist Kx_0 zusammenhängend, und das ergibt einen Widerspruch.

Also besteht Kx_0 aus genau einem Punkt, nämlich x_0. Also $K \subset J$. Andererseits $J_0 \subset K$ und K zusammenhängend. Also $K = J_0$.

Damit ist der Hilfssatz 2.1 bewiesen.

2.5. Sei F_1 eine offen-abgeschlossene Untergruppe von F. Dann ist F_1 noch transitiv über R.

Beweis: $F_1, F_2, \ldots$ seien die rechten Nebenklassen von F_1 in F. Die Mengen $F_n x_0$ sind bei F_1 invariant und paarweise fremd oder identisch; $\cup F_n x_0 = R$. Für jede Menge M von natürlichen Zahlen ist $\bigcup_{n \in M} F_n x_0$ offen. Also ist $F_1 x_0$ offen-abgeschlossen in R, also $= R$.

2.6. Auch die Eigenschaften Θ_i, Φ_i vererben sich von F auf F_1. Da uns vorläufig ihr Einfluß auf die 1-Komponente F_0 von F_1 interessiert, können wir F auch durch F_1 ersetzen. Wir können dabei F_1 so wählen, daß F_1/F_0 kompakt ist, indem wir in F/F_0 eine offene kompakte Untergruppe wählen.

2.7. Sei G eine kompakte zusammenhängende Gruppe und A eine kompakte Gruppe topologischer Automorphismen von G. Dann gibt es beliebig kleine A-invariante abgeschlossene Normalteiler N von G mit (gemischt) Lieschen G/N.

Zum Beweise bilde man die kompakte Gruppe G' aus den Paaren $\lceil g, \alpha \rceil$ mit $g \in G$, $a \in A$, und

$$\lceil g_1, \alpha_1 \rceil \lceil g_2, \alpha_2 \rceil = \lceil g_1(\alpha_1 g_2), \alpha_1 \alpha_2 \rceil .$$

Sie besitzt[7]) beliebig kleine abgeschlossene Normalteiler N' mit (gemischt) Lieschen G'/N'. In G' ist G in natürlicher Weise eingebettet. $N = N' \cap G$ leistet das Gewünschte.

2.8. Sei G eine im Kleinen kompakte Gruppe mit der 1-Komponente G_0 und kompaktem G/G_0. Dann enthält G_0 beliebig kleine abgeschlossene Normalteiler N von G mit Lieschem G_0/N.

Beweis: Sei G_1 der maximale kompakte Normalteiler[7]) von G_0. Dann ist G_1 direkter Faktor in G_0. Jedes $g \in G$ induziert einen Automorphismus $\gamma = \varphi(g)$ von G_1 mit $\gamma g = g g_1 g^{-1}$ für $g_1 \in G_1$. Sei U eine relativ kompakte 1-Umgebung in G. Dann ist UG_0/G_0 eine in G/G_0. Endlich viele $f_i U G_0$ ($f_i \in G$) überdecken G. Die abgeschlossene Hülle C von $\cup f_i U$ ist kompakt. Also $G = CG_0$ mit kompaktem C. $\varphi(G_0) = \varphi(G_1)$ ist kompakt, ebenso $\varphi(C)$. Also ist $\varphi(G)$ kompakt. Man wende nun 2.7 mit G_1 statt G und $\varphi(G)$ statt A an.

2.9. Wieder werden $\Theta_i(R, F, \varrho)$ und $\Phi_i(R, F\varrho)$ vorausgesetzt. F_0 sei die 1-Komponente von F. Wir zeigen: $\dim F_0 < \infty$.

Wir dürfen F/F_0 kompakt annehmen (2.6). Ist $\dim F_0 = \infty$, so enthält F_0 nach 2.8 beliebig kleine kompakte Normalteiler N von F mit $\dim N = \infty$. Die 1-Komponente N_0 von N ist auch noch Normalteiler von F mit $\dim N_0 = \infty$. Mit $K = J_0 N_0$ wende man Hilfssatz 2.1 an; wenn N_0 genügend klein ist, ist das erlaubt, denn wäre immer $JN_0 \supset F_0$, so wäre sogar $J \supset F_0$ und F wirkte in R nicht treu. Der Hilfssatz liefert $L_0 N_0 = J_0$, $N_0 \subset J$, und das ist aus demselben Grunde verboten.

2.10. Nach 2.9 dürfen wir nun einen 0-dimensionalen kompakten Normalteiler N von F wählen mit (gemischt) Lieschem F/N.

Sei $x_1 \in Nx_0$, $x_1 \neq x_0$. Nach Φ_2 finden wir eine Umgebung W von x_1, so daß zu $y \in W$ mit $\varrho(x_0, y) = \varrho(x_0, x_1) = \alpha$ ein $j \in J$ existiert mit

$$y = jx_1 \in jNx_0 = Njx_0 = Nx_0 .$$

Da N kompakt ist, ist N homöomorph mit $N/N \cap J$, also 0-dimensional. Also ist $S_{x_0 \alpha}$ 0-dimensional in x_1. Nach Φ_3 kann x_1 nicht in beliebiger Nähe von x_0 liegen. Nx_0 ist diskret. Das gilt bei beliebiger Wahl von x_0. Also ist N diskret und daher F bereits Liesch.

Hier erst wurde Φ_3 verwendet. Man sieht, daß es eine Bedingung ad hoc ist.

2.11. **Satz:** Unter den Voraussetzungen $\Theta_i(R, F, \varrho)$, $\Phi_i(R, F, \varrho)$ ist F (gemischt) Liesch. $\mathbf{J}$ ist maximal in $\mathbf{F}$.

Das letzte folgt wieder aus dem Hilfssatz: ist $\mathbf{K}$ eine Lie-Algebra mit $\mathbf{J} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{F}$, $\mathbf{K} \neq \mathbf{F}$, so ergibt sich $J_0 = K$, wenn K die von $\mathbf{K}$ erzeugte Gruppe ist. Also $\mathbf{K} = \mathbf{J}$.

3. Einiges über homogene Räume Liescher Gruppen

3.1. Sei F eine Lie-Gruppe, J eine abgeschlossene Untergruppe. Der homogene Raum $R = F/J$ ist eine analytische Mannigfaltigkeit, auf die F analytisch durch Linksmultiplikation wirkt. Die Darstellung ist treu dann und nur dann, wenn J keinen Normalteiler von F enthält.

[7]) H. YAMABE: Ann. Math. (2) 58, 351—365 (1953).

Sei durch $f_t \in F$, $f_0 = 1$ $\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = \mathfrak{f} \in \mathbf{F}$ eine differenzierbare Kurve $f_t J$ auf R definiert. Ihr Tangentialvektor in $x_0 = J$ darf mit $\mathfrak{f} + \mathbf{J}$ identifiziert werden, der Tangentialraum T von R in x_0 also mit dem linearen Raum $\mathbf{F} \bmod \mathbf{J}$. Ein $j \in J$ führt $f_t J$ in $j f_t j J = j f_t j^{-1} J$ über, also $\mathfrak{f} + \mathbf{J}$ in $\tilde{j}\mathfrak{f} + \mathbf{J}$. Somit benimmt J sich in T als lineare Gruppe, und zwar wirkt da j wie $\tilde{j}$ in $\mathbf{F} \bmod \mathbf{J}$.

Diese Darstellung von J in T braucht aber nicht treu zu sein; J braucht durch seinen linearen Teil nicht erschöpfend beschrieben zu sein. (Man nehme als R, F die projektive Gerade mit ihrer projektiven Gruppe; die Translationen lassen ∞ und alle Vektoren in ∞ invariant.)

Sei K die Menge der $j \in J$, die T elementweise invariant lassen, also $k \in K$ dann und nur dann, wenn $\tilde{k}\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{f} \bmod J$ für alle $\mathfrak{f} \in \mathbf{F}$. K ist Normalteiler in J, und J/K beschreibt das Benehmen von J auf T treu. (Bei Lie heißt J/K die (erste) Verkürzung von J.)

Die $\mathfrak{k} \in \mathbf{K}$ sind durch $\tilde{\mathfrak{k}} f \equiv 0 \bmod \mathbf{J}$ charakterisiert. $\mathbf{K}$ ist also die größte Teilmenge von $\mathbf{J}$, die $[\mathbf{K}, \mathbf{F}] \subset \mathbf{J}$ erfüllt.

3.2. $\mathbf{F}$ kann als linearer Raum als direkte Summe $\mathbf{J} + \mathbf{F}_1$ geschrieben werden. Durch die lokale Abbildung

$$\mathfrak{f}_1 \to (\exp \mathfrak{f}_1)\, J \quad (\mathfrak{f}_1 \in \mathbf{F}_1)$$

kann $R = F/J$ im kleinen mit $\mathbf{F}_1$ identifiziert werden. Ist obendrein $\mathbf{F}_1$ invariant bei allen $\tilde{j}$ mit $j \in J$, so benimmt sich $j \in J$ in einer Umgebung von $x_0 = J$ wie $\tilde{j}$ in $\mathbf{F}_1$. Die Umgebung ist bei K also punktweise invariant, und wegen der Analyzität gilt das für den ganzen Raum R, wenn er zusammenhängt; K ist dann trivial.

3.3. In der Nähe von 1 gilt für $f \in F$ eine eindeutige Zerlegung $f = f_1 j$ mit $f_1 \in \mathbf{F}_1 = \exp \mathbf{F}_1$ und $j \in J$.

Ist obendrein $\mathbf{F}_1$ Ideal (und F_1 Normalteiler), so existiert die Zerlegung sogar im großen: $F_1 J_0 = F_0$. (Hier sind F_0, J_0 die 1-Komponenten von F, J.) F_1 ist transitiv über R (wenn R zusammenhängt).

3.4. Sei $\mathbf{F}_1$ schließlich sogar minimales abelsches Ideal von $\mathbf{F}$. Wegen der Minimalität ist die Darstellung von J_0 in T irreduzibel. $J \cap F_1$ ist zusammenhangslos und bei $\tilde{j}$ $(j \in J_0)$ invariant, also elementweise invariant; die Beziehung exp zwischen $\mathbf{F}_1$ und F_1 ist auch $\tilde{j}$-invariant. Also ist die (wieder zusammenhangslose) Menge der $\mathfrak{f}_1 \in \mathbf{F}_1$ mit $\exp \mathfrak{f}_1 \in J \cap F_1$ elementweise invariant bei $\tilde{j}$ mit $j \in J_0$. Enthielte sie ein Element $\neq 0$, so ergäbe sich ein Widerspruch zur Irreduzibilität der Darstellung von J_0 durch $j \to \tilde{j}$ in $\mathbf{F}_1$. Also ist $J \cap F_1 = (1)$ und F_1 einfach zusammenhängend.

Zusammenfassend:

3.5. **Satz:** Sei $R = F/J$ zusammenhängender homogener Raum mit der Gruppe F und der Standuntergruppe J, und sei $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{F}_1$ (direkt im Sinn linearer Räume), wo $\mathbf{F}_1$ minimal abelsches Ideal ist. Dann ist R ein euklidischer Raum, F_1 seine Translationsgruppe und J lineare irreduzible Gruppe in dem durch R und $x_0 = J$ bestimmten linearen Raum.

Wir nennen solch einen homogenen Raum *parabolisch*.

4. Nicht-einfaches F

Wir setzen wieder Θ_i, Φ_i, außerdem den Zusammenhang von F voraus. Ferner sei F über co nicht-einfach.

4.1. Sei **F** nicht-halbeinfach.

Sei **A** minimales abelsches Ideal von **F**. Dann liegt $\mathbf{K} = \mathbf{J} + \mathbf{A}$ zwischen **J** und **F**, ist also nach Satz 2.11 mit **F** identisch: $\mathbf{J} + \mathbf{A} = \mathbf{F}$. Sei $\mathbf{A}_1 = \mathbf{J} \cap \mathbf{A}$.

$$[\mathbf{J}, \mathbf{A}_1] \subset [\mathbf{J}, \mathbf{J}] \cap [\mathbf{J}, \mathbf{A}] \subset \mathbf{J} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 ,$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{A}_1] = \mathbf{0} ,$$

also

$$[\mathbf{F}, \mathbf{A}_1] = [\mathbf{J}, \mathbf{A}_1] \subset \mathbf{A}_1 ,$$

also wegen der Minimalität von **A**:

$$[\mathbf{J} \cap \mathbf{A}] = \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \quad \text{oder} \quad = \mathbf{0} .$$

Der erste Fall ist unmöglich, da J sonst einen nicht-trivialen Normalteiler von F enthielte. Also

$$\mathbf{J} + \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{J} \cap \mathbf{A} = \mathbf{0} .$$

Wir können Satz 3.5 anwenden und erhalten:

R mit der Gruppe F ist *parabolisch.*

4.2. Da J durch $j \to \tilde{j}$ in $R = A$ irreduzibel dargestellt ist, ist es bis auf einen zentralen direkten Summand **M** von Skalarmultiplikationen (über $R \otimes$ co) halbeinfach. Ist $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$, so kann die Darstellung nicht komplex (d. h. in $R \otimes$ co) irreduzibel sein, denn sonst bestände **M** aus reellen Skalarmultiplikationen und gäbe es $m_i \in M$ mit $m_i x = \frac{1}{i} x$ für alle $x \in R$ und $\lim m_i x = 0$, also $\varrho(m_i x, 0) = \varrho(x, 0)$, also $\varrho(x, 0)$ identisch 0 im Widerspruch zu der Bemerkung bei $\Phi_2(R, \varrho, F)$ in 0.4.

Ist $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ und die Darstellung komplex reduzibel, so gibt es Unterräume $\mathbf{B}, \overline{\mathbf{B}}$ von $R \otimes$ co mit

$$mx = \alpha x, \quad m\bar{x} = \bar{\alpha}\bar{x} \quad \text{für} \quad x \in \mathbf{B}, m \in M .$$

Mit

$$y_1 = \frac{1}{2}(x + \bar{x}) , \quad y_2 = \frac{1}{2i}(x - \bar{x})$$

wird

$$m y_1 = |\alpha| (\cos\varphi \cdot y_1 - \sin\varphi\, y_2) .$$

Gibt es m mit $|\alpha| \neq 1$, so gibt es auch welche mit $|\alpha| < 1$. Wie oben zeigt man, daß das unmöglich ist. Also $|\alpha| = 1$.

Eine Lie-Algebra linearer Abbildungen, die direkte Summe einer halbeinfachen und einer eindimensionalen kompakten von (komplexen) Skalarmultiplikationen ist, heiße *schwach halbeinfach.*

Es hat sich gezeigt:

Ist **F** nicht-halbeinfach, so ist **F** parabolisch mit schwach halbeinfachem **J**.

4.3. Sei **F** halbeinfach, aber nicht einfach.

Sei $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ echtes Ideal von **F**. Wie oben schließt man:

$$\mathbf{J} + \mathbf{N} = \mathbf{F} .$$

Weiter

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{N}_1$$

direkt mit geeignetem Ideal $\mathbf{N}_1$,

$$[\mathbf{N}, \mathbf{N}_1] = \mathbf{0} .$$

Wie oben schließt man, daß auch

$$\mathbf{J} + \mathbf{N}_1 = \mathbf{F} .$$

$\mathbf{J} \cap \mathbf{N}$ ist Ideal in $\mathbf{J}$, aber sogar in $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{N}_1$, da $[\mathbf{J} \cap N, N_1] = \mathbf{0}$ ist. Da J keinen nichttrivialen Normalteiler von F enthält, ist

$$\mathbf{J} \cap \mathbf{N} = \mathbf{0} ,$$

ebenso

$$\mathbf{J} \cap \mathbf{N}_1 = \mathbf{0} .$$

Die Zerlegung der $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ nach

$$\mathbf{j} = \mathbf{n} + \mathbf{n}_1 \, (\mathbf{n} \in \mathbf{N}, \mathbf{n}_1 \in \mathbf{N}_1)$$

verursacht einen Automorphismus zwischen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{N}_1$. Die Gruppen J, N, N_1 sind im kleinen isomorph. Im kleinen kann R mit N identifiziert werden: dabei ist F im kleinen die Gruppe der Abbildungen

$$n \to anb^{-1} \quad (a, b \in N)$$

von N auf sich.

Wir nennen diesen Fall den *hyperbolischen*.

4.4. Sei $\mathbf{F}$ einfach über re, aber nicht-einfach über co.

Dann gibt es bekanntlich eine (reelle) Lie-Algebra $\mathbf{F}_1$ so, daß $\mathbf{F}$ als $\mathbf{F}_1 \otimes$ co gedeutet werden kann. Dabei wird $\mathbf{J} + i\mathbf{J}$ sinnvoll und eine Lie-Algebra zwischen $\mathbf{J}$ und $\mathbf{F}$, also wegen der Maximalität von J entweder

$$\mathbf{J} + i\mathbf{J} = \mathbf{J}$$

oder

$$= \mathbf{F} .$$

Im ersten Fall ist $i\mathbf{J} = \mathbf{J}$; mit $\mathbf{J}_1$ als Menge der $\mathbf{j} = \bar{\mathbf{j}} \in \mathbf{J}$ wird $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \otimes$ co. Das Paar $\mathbf{F}, \mathbf{J}$ ist also aus einem Paar $\mathbf{F}_1, \mathbf{J}_1$ von reellen Lie-Algebren, wo $\mathbf{J}_1$ maximal in $\mathbf{F}_1$ ist, durch simultane komplexe Fortsetzung entstanden. R besitzt dann eine F-invariante komplex analytische Struktur. Die Bahnen Jx haben also eine gerade Kodimension. Das widerspricht aber, wie man leicht sieht, der lokalen Transitivität auf den Abstandssphären $\Phi_2(R, F, \varrho)$. Dieser Fall ist also unmöglich.

Zum zweiten Fall bemerken wir, daß $\mathbf{J} \cap i\mathbf{J}$ Ideal in $\mathbf{J}$ ist (denn mit $\mathbf{j}$, $i\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2 \in \mathbf{J}$, auch $[\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2]$, $[i\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2] \in \mathbf{J}$), also auch Ideal in $\mathbf{F}$. Wegen der Einfachheit von $\mathbf{F}$ ist daher $\mathbf{J} \cap i\mathbf{J} = \mathbf{0}$. $\mathbf{F}$ ist somit die komplexe Fortsetzung der halbeinfachen reellen Lie-Algebra $\mathbf{J}$. Wir nennen diesen Fall den *elliptischen*.

4.4. **Satz**: Unter den Bedingungen $\Theta_i(R, F, \varrho)$, $\Phi_i(R, F, \varrho)$ liegt einer der folgenden vier Fälle vor:

1. *Einfach*: $\mathbf{F}$ ist einfach über co.

2. *Parabolisch*: $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ abelsches Ideal von $\mathbf{F}$, $\mathbf{J} \cap \mathbf{A} = \mathbf{0}$, A Translationengruppe des (euklidischen) R, J lineare Gruppe des in x_0 punktierten R, $\mathbf{J}$ schwach halbeinfach, irreduzibel.

3. *Hyperbolisch*: $\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{N}_1$ direkt, $\mathbf{N}, \mathbf{N}_1$ einfach, halbeinfach; isomorph durch γ, $\mathbf{J}$ besteht aus den Paaren $\overline{\mathbf{n}}$, $\gamma\overline{\mathbf{n}}$ mit $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$.

4. *Elliptisch*: $\mathbf{F}$ ist die komplexe Fortsetzung des einfachen halbeinfachen reellen $\mathbf{J}$.

5. Einfaches F

5.1. Um in diesem Falle weiter zu kommen, müssen wir, wie in 0.5 angekündigt, Bedingungen zweiter Stufe stellen.

R_x sei die x-Komponente der Bahn Jx und F_x die von J in R_x induzierte Gruppe; die Restriktion von ϱ auf R_x heiße auch noch ϱ. Man fordert außer $\Theta_i(R, F, \varrho)$, $\Phi_i(R, F, \varrho)$ noch

$$\Phi_i(R_x, F_x, \varrho) \quad \text{für alle } x \text{ einer gewissen Umgebung } U$$

von x_0 mit $\varrho(x_0, x) \neq 0$.

Es genügt übrigens, dies für $i = 1, 2$ zu fordern, da $\Phi_3(R, F, \varrho)$ nur mitwirkte, um den Lieschen Charakter von F zu erzwingen. Der ist aber für F_x als Faktorgruppe von J schon gewährleistet.

Wir setzen weiter voraus, daß $\mathbf{F}$ einfach halbeinfach über co ist. Zwar brauchen wir nur die Halbeinfachheit, aber im Falle eines nicht-einfachen F wurden in 4 schon Resultate erreicht, die schärfer sind, als was wir hier erreichen werden.

Unter den angegebenen Voraussetzungen zeigen wir, daß $\mathbf{J}$ halbeinfach ist.

5.2. Sei N_x die Menge der $j \in J$ mit $jy = y$ für alle $y \in R_x$. N_x ist Normalteiler von J und

$$\mathbf{F}_x \cong \mathbf{J} \bmod \mathbf{N}_x .$$

Sei $U' \subset U$, U' offen, nichtleer, und $\varrho(x_0, x) \neq 0$ für alle $x \in U'$. Aus $j \in \bigcap_{x \in U'} N_x$ folgt $jy = y$ für alle $y \in U'$. Wegen der Analytizität von j ist dann sogar $jy = y$ für alle $y \in R$. Also $\bigcap_{x \in U'} N_x = (1)$,

$$\bigcap_{x \in U'} \mathbf{N}_x = \mathbf{0} .$$

Sei $\mathbf{Q}$ das Radikal von $\mathbf{J}$ und $\mathbf{Q}_x$ das von $\mathbf{N}_x$. Es ist $\mathbf{Q}_x = \mathbf{Q} \cap \mathbf{N}_x$.

$\mathbf{N}_x$ ist unterhalb stetig in x. Man wähle obiges U' so, daß $\mathbf{N}_x$ und $\mathbf{N}_x + \mathbf{Q}$ sogar stetig in $x \in U'$ sind. Dann ist auch $\mathbf{N}_x + \mathbf{Q} \bmod \mathbf{Q}$ als Ideal in $\mathbf{J} \bmod \mathbf{Q}$ stetig in $x \in U'$. Da es halbeinfach ist, ist es sogar konstant. Also ist

$$\mathbf{N}_x + \mathbf{Q} \quad \text{unabhängig von } x \in U' .$$

Man hat Levische Zerlegungen

$$\mathbf{N}_x = \mathbf{G}_x + \mathbf{Q}_x, \quad \mathbf{N}_y = \mathbf{G}_y + \mathbf{Q}_y$$

mit halbeinfachen $\mathbf{G}_x$, $\mathbf{G}_y$. Also

$$\mathbf{G}_x + \mathbf{Q} = \mathbf{G}_y + \mathbf{Q} .$$

$\mathbf{G}_x$, $\mathbf{G}_y$ sind in der von $\mathbf{G}_x + \mathbf{Q}$ erzeugten Gruppe konjugiert[8]), also auch in J. Da $\mathbf{G}_y \subset \mathbf{N}_y$ und $\mathbf{N}_y$ Ideal in $\mathbf{J}$ ist, ist auch das konjugierte $\mathbf{G}_x \subset \mathbf{N}_y$. Das gilt

[8]) Diese Verschärfung des Levischen Satzes dürfte wohl bekannt sein.

für alle $y \in U'$. Also $\mathbf{G}_x = \mathbf{0}$ und daher

$$\mathbf{N}_x \subset \mathbf{Q} .$$

5.3. Sei $\mathbf{F}_x \cong \mathbf{J} \bmod \mathbf{N}_x$ halbeinfach. Dann muß $\mathbf{N}_x$ das Radikal $\mathbf{Q}$ von $\mathbf{J}$ enthalten, also nach 5.2: $\mathbf{N}_x = \mathbf{Q}$ für alle $x \in U'$, also $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, also ist $\mathbf{J}$ halbeinfach, w.z.b.w.

5.4. Sei dagegen $\mathbf{F}_x = \mathbf{J} \bmod \mathbf{N}_x$ nicht halbeinfach. Dann befinden wir uns im parabolischen Fall von Satz 4.4 hinsichtlich F_x, J_x.

Für $\mathbf{J}$ hat man eine Levische Zerlegung

$$\mathbf{J} = \mathbf{G} + \mathbf{Q}$$

mit halbeinfachem $\mathbf{G}$, weiter eine lineare Zerlegung

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}_x + \mathbf{N}_x$$

mit $\tilde{G}$-invariantem $\mathbf{S}_x$, das man in einer offenen Teilmenge U'' von U' konstant annehmen kann:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S} + \mathbf{N}_x ,$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{G} + \mathbf{S} + \mathbf{N}_x .$$

Nach Satz 4.4 kann man weiter linear und $\tilde{G}$-invariant zerlegen:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} + \mathbf{B} ,$$

wo $\dim C \leqq 1$, die Wurzeln von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{B}$ rein imaginär und $\neq 0$ sind und $\mathbf{B} + \mathbf{N}_x \bmod \mathbf{N}_x$ abelsch ist.

Also direkt linear

$$\mathbf{J} = \mathbf{G} + \mathbf{C} + \mathbf{B} + \mathbf{N}_x$$

mit den Eigenschaften:

5.4.1. $\mathbf{G}$ halbeinfach,

5.4.2. $\mathbf{C}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{N}_x$ sind $\tilde{G}$-invariant,

5.4.3. $\tilde{G}$ irreduzibel in $\mathbf{B}$,

5.4.4. $\dim \mathbf{C} \leqq 1$,

5.4.5. die Wurzeln von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{B}$ rein imaginär, $\neq 0$,

5.4.6. $\mathbf{N}_x$ Ideal,

5.4.7. $\mathbf{B} + \mathbf{N}_x$ Ideal,

5.4.8. $\mathbf{C} + \mathbf{B} + \mathbf{N}_x$ konstantes Ideal.

$\mathbf{C} + \mathbf{B} + \mathbf{N}_x$ zerlegt sich in G-irreduzibel-invariante lineare Unterräume $\mathbf{M}_x^{(i)}$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C} + \mathbf{B} + \mathbf{N}_x = \sum_i \mathbf{M}_x^{(i)} .$$

Sie seien so gewählt und numeriert, daß

$$\mathbf{M}_x^{(1)} = \mathbf{B}$$

ist (siehe 5.4.3),

$$\dim \mathbf{M}_x^{(i)} > 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, p$$

$$\dim \mathbf{M}_x^{(i)} = 1 \quad \text{für} \quad i = p+1, \ldots, q$$

und

$$\mathbf{M}_x^{(p+1)} = \mathbf{C}$$

ist.

Wegen $\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{J} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{J}$ können wir das auflösbare $\tilde{\mathbf{Q}}$ auf $\mathbf{F} \bmod \mathbf{J}$ betrachten. Es hat dort die Menge Λ von Gewichten.

Da $\mathbf{Q}$ Ideal in $\mathbf{J}$ ist, gilt $j^{-1}\mathbf{Q}j = \mathbf{Q}$ für $j \in J$, also ist mit λ auch $\lambda(j^{-1}\mathbf{a}j)$ (als Funktion von $\mathbf{a}$) ein Gewicht, das stetig von j abhängt und wegen der Endlichkeit von Λ konstant ist.

$$\lambda(\tilde{j}\,\mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a}) \quad \text{für} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{Q}, j \in J\,,$$

speziell

$$\lambda(\tilde{g}\,\mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a}) \quad \text{für} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{Q}, g \in G\,.$$

Der Kern von λ ist $\tilde{G}$-invarianter linearer Unterraum. Also verschwindet λ auf allen $\mathbf{M}_x^{(i)}$ mit $i = 1, \ldots, p$.

Sei $\mathbf{P} \subset \mathbf{Q}$ definiert durch

$$\mathbf{a} \in \mathbf{P} \leftrightarrow \lambda(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \Lambda.$$

Nach dem vorigen ist

$$\sum_{i=1\ldots p} \mathbf{M}_x^{(i)} \subset \mathbf{P}\,. \tag{*}$$

Da auf einem Kommutator alle Wurzeln verschwinden, ist

$$\mathbf{P} \text{ Ideal von } \mathbf{J}\,.$$

Aus der Definitionseigenschaft von $\mathbf{P}$ folgt

$$sp_{\mathbf{F} \bmod \mathbf{J}}\ \tilde{\mathbf{a}}\,\tilde{\mathbf{j}} = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{P}, \mathbf{j} \in \mathbf{J}\,.$$

Weiter

$$sp_{\mathbf{J}}\ \tilde{\mathbf{a}}\,\tilde{\mathbf{j}} = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{P}, \mathbf{j} \in \mathbf{J},$$

also

$$sp_{\mathbf{F}}\ \tilde{\mathbf{a}}\,\tilde{\mathbf{j}} = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{a} \in \mathbf{P}, \mathbf{j} \in \mathbf{J}\,.$$

Sei $\mathbf{X} \subset \mathbf{F}$ definiert durch: $\mathbf{f} \in \mathbf{X}$ dann und nur dann, wenn

$$sp_{\mathbf{F}}\ \tilde{\mathbf{f}}\,\tilde{\mathbf{j}} = 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{j} \in \mathbf{J}\,.$$

Dann ist nach dem Vorigen

$$\mathbf{P} \subset \mathbf{X}\,. \tag{**}$$

$x \in U''$ wird durch $\varrho(x_0, x)$ in eine 1-dimensionale Zahlenmenge abgebildet. Die Menge der Zahlen mit $(\dim R - 1)$-dimensionaler Urbildmenge ist überall dicht. Es gibt also ein $x \in U''$ mit $\dim R_x = \dim R - 1$. Weiter hängt aus Analytizitätsgründen $\dim R_x$ unterhalb stetig von x ab. Einschränkung von U'' auf ein offenes U''' liefert

$$\dim R_x = \dim R - 1 \quad \text{für} \quad x \in U'''\,.$$

Nun ist

$$\dim R = \dim \mathbf{F} - \dim \mathbf{J}\,,$$

$$\dim R_x = \dim \mathbf{B}\,,$$

ferner wegen der Halbeinfachheit von $\mathbf{F}$

$$\dim \mathbf{X} = \dim \mathbf{F} - \dim \mathbf{J}\,,$$

also nach (**)

$$\dim \mathbf{P} \leqq \dim \mathbf{X} = \dim \mathbf{B} + 1\,.$$

Wegen (*) und $\mathbf{M}_x^{(1)} = \mathbf{B}$, $\dim \mathbf{M}_x^{(i)} > 1$ $(i = 1, \ldots, p)$ ist also $p = 1$ und

$$\dim (\mathbf{P} \cap \Sigma_{2 \ldots q} \mathbf{M}_x^{(i)}) \leqq 1 .$$

Jeder $\tilde{G}$-invariante lineare Unterraum $\mathbf{D}$ von $\mathbf{Q}$ zerlegt sich in der Form

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D} \cap \mathbf{B}) + (\mathbf{D} \cap \Sigma_{2 \ldots q} \mathbf{M}^{(i)}) .$$

Da $\mathbf{N}_x \cap \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ist, gilt

$$\mathbf{N}_x \subset \sum_{2 \ldots q} \mathbf{M}_x^{(i)} .$$

Die Summe rechts ist unabhängig von x und gleich dem Zentralisator von $\mathbf{G}$ in $\mathbf{J}$.

$$\mathbf{N}_y \subset \mathbf{N}_x + \mathbf{C} .$$

Da $\cap \mathbf{N}_x = \mathbf{0}$ ist, ist mit $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ auch $\mathbf{N}_x = \mathbf{0}$. Sei $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{N}_x \not\equiv \mathbf{0}$. Dann ist für geeignete x, y auch

$$\mathbf{C} \subset \mathbf{N}_x + \mathbf{N}_y .$$

Nun ist

$$[\mathbf{N}_x, \mathbf{B}] \subset \mathbf{P} \cap \mathbf{N}_x \subset \mathbf{P} \cap \sum_{2 \ldots q} \mathbf{M}_x^{(i)} ,$$

$$[N_y, \mathbf{B}] \subset \mathbf{P} \cap \mathbf{N}_y \subset \mathbf{P} \cap \sum_{2 \ldots q} \mathbf{M}_y^{(i} .$$

Die rechten Glieder sind gleich und von der Dimension 1, also

$$\dim [\mathbf{C}, \mathbf{B}] \leqq 1,$$

und andererseits

$$[\mathbf{C}, \mathbf{B}] = \mathbf{B} .$$

Da $\dim \mathbf{B} > 1$ ist, führt $\mathbf{N}_x \neq \mathbf{0}$ zum Widerspruch. Also $\mathbf{N}_x = \mathbf{0}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{C} + \mathbf{B}$.

Auf Grund seiner Definition ist $\mathbf{X}$ bei J invariant. Nach (**) ist $\mathbf{B} \subset \mathbf{P} \subset \mathbf{X}$, und wegen $\dim \mathbf{X} = \dim \mathbf{B} + 1$ ist $\mathbf{J} + \mathbf{X}$ noch eine Lie-Algebra. Also wegen der Maximalität von $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{X} \subset \mathbf{J} .$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cap (\mathbf{G} + \mathbf{C})$$

ist eindimensional. Sie $\mathbf{X}''$ die Menge der $\mathbf{f} \in \mathbf{G} + \mathbf{C}$ mit

$$sp_{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{j}} = 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{j} \in \mathbf{G} + \mathbf{C} .$$

Dann ist $\mathbf{X}'' \supset \mathbf{X}', \dim \mathbf{X}'' \geqq 1$; $\mathbf{X}''$ ist $\tilde{G}$-invariant, muß aber wegen der Halbeinfachheit von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{G}$ einen trivialen Durchschnitt haben. Also

$$\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}'' = \mathbf{C}$$

und daher insbesondere

$$sp_{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{c}}^2 = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{c} \in \mathbf{C} .$$

Bei dem Homomorphismus $J \to F_x$ durch Faktorbildung nach N_x wird die von $\mathbf{C}$ erzeugte Untergruppe C auf eine kompakte abgebildet, da die Wurzeln von $\mathbf{C}$ in $\mathbf{B}$ rein imaginär sind. Also $C/(N_x \cap C)$ kompakt. N_x hängt stetig von x ab und ist nun *diskreter* Normalteiler von J, also auch zentraler Normalteiler, während $\mathbf{J}$ kein nicht-triviales Zentrum besitzt. Andererseits

ist $\cap N_x = (1)$ und daher C selber kompakt. Somit sind überhaupt alle Wurzeln von $\mathbf{C}$ rein imaginär (und die in $\mathbf{B}$ nicht identisch null). Also

$$sp_{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{c}}^2 < 0 ,$$

womit schließlich die Annahme, $\mathbf{J}$ sei nicht halbeinfach, widerlegt ist.

Wir haben bewiesen:

5.3. **Satz:** Unter den Bedingungen $\Theta_i(R, F, \varrho)$, $\Phi_i(R, F, \varrho)$ und $\Phi_i(R_x, F_x, \varrho)$ (für alle x mit $\varrho(x_0, x) \neq 0$ aus einer Umgebung von x_0) gilt: Ist $\mathbf{F}$ komplex einfach, so ist $\mathbf{J}$ halbeinfach.

6. Das Problem P

6.1. In allen Fällen hat sich $\mathbf{J}$ als mindestens schwach halbeinfach ergeben. $\mathbf{F}$ gestattet daher eine lineare Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{K}$$

mit $\mathbf{J}$-invariantem $\mathbf{K}$, das in einer Umgebung U von x_0 mit R zu identifizieren ist. In U definiere man ϱ durch

$$\varrho(\mathrm{x}) = \varrho(x_0, x)$$

(wo $x = \exp \mathrm{x}$ mit x identifiziert ist).

$$\varrho(\mathbf{0}) = 0$$

$$\varrho(\tilde{\jmath}\,\mathrm{x}) = \varrho(\mathrm{x}) \quad \text{für} \quad j \in J, \mathrm{x} \in \mathbf{K} ,$$

und die Nullmenge von ϱ enthält keinen inneren Punkt.

6.2. Wir sehen nun vorläufig von der Beziehung von $\mathbf{J}$ zu $\mathbf{F}$ ab und studieren das

Problem P: $\mathbf{J}$ ist schwach halbeinfach treu linear dargestellt im linearen Raum K. J ist von $\mathbf{J}$ erzeugt. In einer Umgebung des Ursprungs von K ist eine stetige Funktion ϱ definiert mit $\varrho(0) = 0$, die in keiner offenen Menge identisch verschwindet, und die J-invariant ist. Für $x_1 \neq 0$ ist J im kleinen transitiv auf der Menge der x mit $\varrho(x_1) = \varrho(x)$. Welche $\mathbf{J}$ sind möglich?

Man beachte, daß das eigentlich ein Problem erster Stufe ist. Daß wir in 5 auf die zweite Stufe vorgreifen mußten, um die Fragestellung hinsichtlich $\mathbf{J}$ auf dieses Problem zu reduzieren, ist ein Schönheitsfehler.

6.3. Sei für gewisses $x_1 \neq 0$ in der Nähe von 0 für ein α-Intervall um die Zahl 1

$$\varrho(\alpha x_1) = \varrho(x_1) .$$

Dann gibt es nach der Voraussetzung von P ein $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit

$$\mathbf{j} x_1 = x_1 ,$$

also ist

$$\alpha x_1 \in J x_1 \quad \text{für alle} \quad \alpha > 0 ,$$

also

$$\varrho(\alpha x_1) \quad \text{konstant} .$$

Wegen $\lim_{\alpha \to 0} \alpha x_1 = 0$ ist $\lim_{\alpha \to 0} \varrho(\alpha x_1) = 0$, also

$$\varrho(x_1) = 0 .$$

Die x mit $\varrho(\alpha x) = 0$ $(0 < \alpha < 1)$ heißen *Lichtvektoren*, die andern heißen *regulär*. Diese Eigenschaften bleiben bei Multiplikation mit skalaren $+0$ erhalten.

Es hat sich ergeben: Ist x regulär, so gibt es kein α-Intervall, wo $\varrho(\alpha x)$ konstant ist.

Sei x regulär. Es gibt ein Intervall I auf der Geraden $\{\alpha x\}$, das durch ϱ auf ein Zahlenintervall I' mit einem inneren Punkt $\gamma + 0$ abgebildet wird; $\gamma = \varrho(x') + 0$, $x' = \beta x$. Es gibt ein Teilintervall $I'' \subset I'$ und eine Umgebung W von x' in K, so daß für jede Gerade L in K durch den Ursprung, die W trifft, $\varrho(L \cap W) \subset I''$. Die Menge der y mit $\varrho(y) = \varrho(x')$ schneidet jedes zu x' benachbarte L. Wegen der lokalen Transitivität schneidet Jx' jedes zu x' benachbarte L; wegen der Analytizität ist der Tangentialraum von Jx' in x', also auch von Jx in x mindestens $(\dim K - 1)$-dimensional. Er enthält nicht den Vektor x, denn sonst gäbe es ein $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit $\mathbf{j}x = x$, und dann wäre x Lichtvektor.

Sei x Lichtvektor. Dann ist auch αx Lichtvektor; $\varrho(\alpha x) = 0$. Wegen der lokalen Transitivität gibt es dann wohl ein $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit $\mathbf{j}x = x$; dann ist x also wohl Tangentialvektor von Jx in x.

6.4. Es hat sich ergeben:

Satz: Jx ist in einem regulären Punkt $(\dim K - 1)$-dimensional; sein Tangentialraum enthält x nicht. Ist $x + 0$ Lichtvektor, so enthält der Tangentialraum von Jx in x den Vektor x.

6.5. Man zeigt leicht:

Satz: Jede Bahn Jx ist in $K\backslash(0)$ abgeschlossen.

6.6. **Satz:** Ist V eine zusammenhängende J-invariante Mannigfaltigkeit in K der Kodimension $\geqq 2$, so besitzt V keine nichttriviale invariante Teilmannigfaltigkeit. Invariante zusammenhängende Teilmannigfaltigkeiten $V_1 \supset V_2 \supset V_3$ sind nur auf triviale Weise möglich.

Denn nach 6.4 muß V aus Lichtvektoren bestehen; also ist J auf $V\backslash(0)$ transitiv. Weiter muß V_2 eine Kodimension $\geqq 2$ haben.

7. Allgemeines zum Problem P

7.1. Für das Weitere wählen wir einen geordneten Stamm $\mathbf{H}$ zu $\mathbf{J} \otimes \mathrm{co}$, in den auch der etwaige Zentrumsummand von $\mathbf{J}$ einbezogen wird. Den Bedingungen von 1 soll dabei genügt sein. Die Gewichte der Darstellung, in der $\mathbf{J}$ gegeben ist, bilden eine Menge Λ. Begriffe wie „reell" und „konjugiert" beziehen sich auf die reelle Struktur von $\mathbf{J}$ und K. Zur Bildung von Gewichtsvektoren wird natürlich $K \otimes \mathrm{co}$ herangezogen.

7.2. $\lambda \in \Lambda$ heißt *regulär*, wenn es zu λ einen Gewichtsvektor x gibt mit regulärem $x + \bar{x}$. Gibt es einen solchen nicht, so heißt λ *Lichtgewicht*.

7.3. Seien $\lambda, \mu \in \Lambda$ und λ regulär. Dann ist $\lambda - \mu$ oder $\lambda - \bar{\mu} \in W$ (d. h. Wurzelform).

Denn sei x Gewichtsvektor zu λ und $x + \bar{x}$ regulär. Dann erzeugt $x + \bar{x}$ zusammen mit dem Tangentialraum von $J(x + \bar{x})$ in $x + \bar{x}$ ganz K (siehe 6.4).

Es gibt also zu dem Gewichtsvektor y von μ ein $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit

$$\mathbf{j}(x + \bar{x}) = y + \bar{y} \bmod x + \bar{x} .$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{h} + \Sigma \tau_\alpha \mathbf{e}_\alpha , \quad \mathbf{h} \in \mathbf{H} .$$

$$\mathbf{j}(x + \bar{x}) = \mathbf{h}(x + \bar{x}) + \Sigma \tau_\alpha \mathbf{e}_\alpha (x + \bar{x}) .$$

Hier gehört der erste Summand zu den Gewichten $\lambda, \bar{\lambda}$ und der unter dem Summenzeichen evtl. zu $\lambda + \alpha$, $\bar{\lambda} + \alpha$. Für gewisses $\alpha \in W$ muß eines dieser Gewichte μ sein, w.z.b.w.

7.4. Ist $\lambda \in \Lambda$ und $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$, so ist λ Lichtgewicht. Denn dann gibt es ein reelles $\mathbf{h} \in \mathbf{H}$ mit $\mathrm{Re}\,\lambda(\mathbf{h}) < 0$, und dann geht mit reellem $\tau \to \infty$

$$(\exp \tau \mathbf{h})\,(x + \bar{x}) = (\exp \tau \lambda(\mathbf{h}))\, x + (\exp \tau \overline{\lambda(\mathbf{h})})\, \bar{x}$$

nach 0.

7.5. Sei umgekehrt $\lambda \in \Lambda$, x Gewichtsvektor zu λ und $x + \bar{x}$ Lichtvektor. Dann ist entweder $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ oder $2\lambda \in W^*$. — Anders formuliert: Ist λ rein imaginär, so ist es regulär oder halbe Wurzelform $\neq 0$.

Denn wenn $x + \bar{x}$ Lichtvektor ist, gibt es ein $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit

$$\mathbf{j}(x + \bar{x}) = x + \bar{x} ,$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{h} + \Sigma \tau_\alpha \mathbf{e}_\alpha , \quad \mathbf{h} \in \mathbf{H} \cap \mathbf{J} ,$$

also entweder $\lambda(\mathbf{h}) = 1$ oder ein $\mathbf{e}_\alpha x$ zum Gewicht $\bar{\lambda}$ gehörig und dann $\lambda - \bar{\lambda} = \alpha \in W^*$; da man $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ annehmen darf, ist sogar $2\lambda \in W^*$.

7.6. Seien $\lambda, \mu \in \Lambda$, λ Lichtgewicht, $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ und $\mathrm{Re}\,\mu$ nicht Negativfaches von $\mathrm{Re}\,\lambda$. Dann ist $\lambda - \mu$ oder $\lambda - \bar{\mu} \in W$.

Zum Beweise darf μ wegen 7.3 als Lichtgewicht angenommen werden. Aus der Voraussetzung folgt die Existenz eines $\mathbf{h} \in \mathbf{H} \cap \mathbf{J}$ mit

$$\mathrm{Re}\,\lambda(\mathbf{h}) < 0, \quad \mathrm{Re}\,\mu(\mathbf{h}) \leqq 0 .$$

x, y seien Gewichtsvektoren zu λ, μ.
$(\exp \tau \mathbf{h})\,((x + \bar{x}) + \sigma(y + \bar{y})) =$

$$(\exp \tau \lambda(\mathbf{h}))\, x + (\exp \tau \overline{\lambda(\mathbf{h})})\, \bar{x} + \sigma(\exp \tau \mu(\mathbf{h}))\, y + \sigma(\exp \tau \overline{\mu(\mathbf{h})})\, \bar{y}$$

(σ reell) konvergiert mit reellem $\tau \to \infty$ nach 0, wenn $\mathrm{Re}\,\mu(\mathbf{h}) < 0$ ist. Ist $\mathrm{Re}\,\mu(\mathbf{h}) = 0$, so bleibt der Ausdruck beschränkt; für eine τ-Teilfolge konvergiert er nach gewissem

$$\sigma(\varkappa y + \bar{\varkappa} \bar{y}) \quad \text{mit} \quad |\varkappa| = 1 .$$

Da μ Lichtgewicht ist, wird das ein Lichtvektor. Wegen 6.5 ist dann schon

$$(x + \bar{x}) + \sigma(y + \bar{y})$$

Lichtvektor für jedes reelle σ. Es gibt also $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit

$$\mathbf{j}(x + \bar{x}) = y + \bar{y} ,$$

und daraus ergibt sich wie früher das Behauptete.

7.7. Halbe Wurzelformen $\neq 0$ kommen als Gewichte λ bei einfachem $\mathbf{J}$ überhaupt nur vor, wenn $\mathbf{J}$ eine Darstellung von C_l ($l \geqq 1$) ist. Soll obendrein

$\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ sein, so muß es sich um einen inneren Typ $\mathbf{C}_{l,j}$ handeln (also nicht um einen Zwillingstyp).

7.8. Mit den bisherigen Methoden zeigt man:

Zählt das Gewicht λ mehrfach, so ist $\lambda \neq \bar{\lambda}$ und $\lambda - \bar{\lambda} \in W$.

7.9. **Satz:** Ein $\mathbf{J}$, das P genügt, ist (reell) irreduzibel.

Beim Beweise greifen wir vor auf die spätere Lösung (13.7) von

Problem Q: Sei $\mathbf{J}$ eine in K treu linear schwach halbeinfach dargestellte Lie-Algebra mit $\mathbf{J}x = K$ für jedes $x \neq 0$, $x \in K$ (also J transitiv in $K\backslash(0)$). Welche Form hat $\mathbf{J}$?

Es zeigt sich in 13.7, daß, abgesehen von einem direkten Summand vom Rang 0 oder 1 als $\mathbf{J}$ wesentlich nur

$$ {}^{r}\pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*}), \quad {}^{r}\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{l**}), \quad {}^{r}\pi_1(\mathbf{C}_{l,l}), \quad {}^{r}\pi_{1,0}(\mathbf{C}_{l**}), \quad {}^{r}\pi_1(\mathbf{D}_{5,0,*}) $$

in Frage kommen.

Beweis des Satzes: K sei $\mathbf{J}$-invariant linear zerlegt:

$$ K = K_1 + K_2 . $$

Wäre $\dim K_1 = 1$, so wäre K_1 wegen der schwachen Halbeinfachheit von $\mathbf{J}$ elementweise invariant, was unmöglich ist. Also ist $\dim K_i > 1$, $\dim K_i < \dim K - 1$, also besteht K_i nach 6.4 aus Lichtvektoren. Daher erfüllt $\mathbf{J}$ auf K_i die Bedingungen des Problems Q.

Benimmt sich $\mathbf{J}$ auf K_1 *nicht* wie $\pi_1(\mathbf{C}_{l,l})$, so gilt dort für seine Gewichte λ_1 (die ja Lichtgewichte sein müssen) $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \neq 0$ (siehe 7.5, 7.7). Seien λ_1, λ_2 Gewichte zu bzw. K_1, K_2 und bzw. x_1, x_2 zugehörige Gewichtsvektoren. Wäre $\mathrm{Re}\,\lambda_2$ nicht Negativfaches von $\mathrm{Re}\,\lambda_1$, so schlösse man wie in 7.6 auf die Existenz eines $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit $\mathbf{j}(x_1 + \bar{x}_1) = x_2 + \bar{x}_2$, im Widerspruch zur Invarianz von K_1. Also gilt: $\mathrm{Re}\,\lambda_2$ Negativfaches von $\mathrm{Re}\,\lambda_1$ für alle Gewichte λ_1, λ_2 bzw. zu K_1, K_2. Daraus folgt weiter:

1. alle $\mathrm{Re}\,\lambda_1$ (λ_1 Gewicht zu K_1) sind linear abhängig,
2. keine zwei sind einander entgegengesetzt.

Aus 1. schließt man leicht, daß von den Lösungen von Q nur die mit $l = 1$ und $\pi_1(\mathbf{D}_{5,0,*})$ in Frage kommen, und mit 2. schließt man auch diese Möglichkeiten aus.

Übrig bleibt noch der Fall, daß sich $\mathbf{J}$ auf K_1 und K_2 wie $\pi_1(\mathbf{C}_{l,l})$ benimmt. Sei $\mathbf{J}$ nicht-einfach, also $= \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, wo sich $\mathbf{J}_1$ auf K_2 und $\mathbf{J}_2$ auf K_1 wie $\mathbf{0}$ benimmt. Für $x_i \in K_i$, $x_i \neq 0$ häuft sich $J_2 x_2$ bei 0, also $J_2(x_1 + x_2)$ bei x_1, im Widerspruch zu 6.5 und der Invarianz von K_1. Also ist $\mathbf{J}$ einfach. Seine Restriktionen auf K_1, K_2 sind äquivalent. Aber dann gibt es eine stetige Schar $\mathbf{J}$-invarianter Teilräume von K, was ebenfalls unmöglich ist.

Damit ist der Satz bewiesen.

7.10. Obwohl K bei $\mathbf{J}$ irreduzibel ist, kann $K \otimes \mathrm{co}$ bei $\mathbf{J} \otimes \mathrm{co}$ reduzibel sein. Sei x ein Vektor vom höchsten Gewicht. Wir setzen

$$ K_+ = (\mathbf{J} \otimes \mathrm{co})\, x $$

und

$$ K_- = \bar{K}_+ . $$

Es ist dann direkt und ($\mathbf{J} \otimes$ co)-invariant

$$K \otimes \text{co} = K_+ + K_- .$$

Zerfällt $\mathbf{J} \otimes$ co direkt,

$$\mathbf{J} \otimes \text{co} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \cdots ,$$

so setzen wir, wieder mit x als Vektor vom höchsten Gewicht,

$$K_i = (J_i \otimes \text{co})\, x .$$

$$K_1 \otimes K_2 \otimes \cdots$$

läßt sich in natürlicher Weise mit $K \otimes$ co bzw. K^+ identifizieren (je nachdem ob $K \otimes$ co bei $\mathbf{J} \otimes$ co irreduzibel oder reduzibel ist).

Entsprechend der Zerlegung von $\mathbf{J} \otimes$ co zerfallen die Gewichte in Komponenten,

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots ,$$

wo λ_i höchstens auf $\mathbf{J}_i \cap \mathbf{H}$ nicht verschwinden soll. Auch die Wurzelformen zerfallen so, aber von einer Wurzelform verschwinden alle Komponenten bis auf höchstens eine.

Die i-ten Komponenten von Gewichten von $\mathbf{J} \otimes$ co zu $K \otimes$ co bzw. K_+ sind gerade die Gewichte von $\mathbf{J}_i$ zu K_i.

Mit der Zerlegung

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$$

hat man

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \cdots ,$$

falls die Zerlegung von $\mathbf{J} \otimes$ co eine entsprechende (reelle) von $\mathbf{J}$ induziert. Sind aber etwa J_1, J_2 komplex konjugiert, so hat man

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_1 + \cdots$$

zu schreiben.

Im ersten Fall besitzt $\mathbf{J}_i$ zu K_i nichtverschwindende Gewichte, da sonst auch die zu $\overline{K}_i$, also überhaupt alle Gewichte von $\mathbf{J}_i$ verschwinden würden, was der Treue der Darstellung widerspricht. Im zweiten Fall kann es vorkommen, daß etwa alle Gewichte von $\mathbf{J}_2$ zu K_1 verschwinden (und dann auch alle von $\mathbf{J}_1$ zu K_2).

7.11. Ein Gewichtepaar λ, μ heißt *brauchbar*, wenn entweder $\operatorname{Re}\lambda = 0$ oder $\operatorname{Re}\mu = 0$ oder $\operatorname{Re}\mu$ nicht Negativfaches von $\operatorname{Re}\lambda$ ist.

Es gilt:

U_1: Seien λ, μ brauchbar und sei $\mathbf{J}$ keine Darstellung von $\mathfrak{C}_{l,j}$. Dann ist $\lambda - \mu$ oder $\lambda - \bar{\mu} \in W$.

Zum Beweise dürfen wir $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$ annehmen. Ist $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, so wende man 7.6 an; ist λ oder μ regulär, so wende man 7.3 an; ist $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $\operatorname{Re}\mu \neq 0$, so wende man 7.6 mit Vertauschung von λ und μ an. Übrig bleibt der Fall:

$\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\mu = 0$, λ und μ Lichtgewicht, also nach 7.5 halbe Wurzelform $\neq 0$.

Nach 7.7 kann $\mathbf{J}$ nicht (reell) einfach sein. Sei also

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \cdots$$

direkt. Da λ halbe Wurzelform $\neq 0$ ist, müssen alle seine Komponenten bis auf genau eine verschwinden:

$$\lambda = \lambda_1 + 0 + \cdots .$$

Entsprechendes gilt für μ.

Sei auch

$$\mu = \mu_1 + 0 + \cdots .$$

Man darf annehmen, daß λ, μ zu K_1 gehören (evtl. ersetze man sie durch die Konjugierten). Auch

$$\lambda' = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \quad (\lambda_2 \neq 0)$$

ist Gewicht und sicher nicht halbe Wurzelform, also regulär, oder $\mathrm{Re}\,\lambda' \neq 0$ und $\mathrm{Re}\,\mu = 0$, demnach $\mathrm{Re}\,\mu$ nicht Negativfaches von $\mathrm{Re}\,\lambda'$. Also nach 7.6

$$\lambda' - \mu = (\lambda_1 - \mu_1) + \lambda_2 \in W$$

oder

$$\lambda' - \bar{\mu} = (\lambda_1 - \bar{\mu}_1) + \lambda_2 \in W ,$$

was wegen $\lambda_1 \neq \mu_1, \bar{\mu}_1$, $\lambda_2 \neq 0$ einen Widerspruch ergibt.

Sei andererseits neben

$$\lambda = \lambda_1 + 0 + \cdots$$

$$\mu = 0 + \mu_2 + \cdots ,$$

wo λ_1, μ_2 wieder halbe Wurzelformen $\neq 0$ sind und als Gewichte zu K_1 bzw. K_2 gehören. Dann ist auch

$$\lambda' = \lambda_1 + \mu_2 + \cdots$$

Gewicht, nicht halbe Wurzelform, also regulär. Also ist

$$0 + \mu_2 + \cdots = \lambda' - \lambda \in W$$

oder

$$\lambda_1 - (\mu_2 - \bar{\mu}_2) + \cdots = \lambda' - \bar{\lambda} \in W ,$$

im Widerspruch zur Annahme, daß μ_2 und λ_1 *halbe* Wurzelformen $\neq 0$ sind.

7.12. Das Kriterium U_1 läßt sich manchmal verschärfen.

Sei direkt

$$J \otimes \mathrm{co} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$$

und

$$\mathbf{J}_1 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,j}) .$$

Dann gilt für die $\mathbf{J}_2$-Komponenten der Gewichte:

U_2: Ist λ_2, μ_2 brauchbar und $\lambda_2 \neq \mu_2, \bar{\mu}_2$, so ist $\lambda_2 - \mu_2 \in W$.

Beweis: Da $\bar{\lambda}_1 = -\lambda_1$, $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0$ ist, ist auch

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 ,$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

brauchbar. Da $\mathbf{J}$ nicht einfach ist, liegt nicht C_l vor. Man wende U_1 an:

$$\lambda - \bar{\mu} = 2\lambda_1 + (\lambda_2 - \bar{\mu}_2) \notin W ,$$

also

$$\lambda_2 - \mu_2 \in W .$$

7.13. Sei $\mathbf{J} \otimes \mathrm{co}$ reduzibel. Dann gilt für seine K_+-Gewichte:

U_3: Ist λ, μ brauchbar, so ist $\lambda - \mu \in W$.

Beweis: Ist $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ und λ Lichtgewicht, so ist λ halbe Wurzelform, also auch $-\lambda = \lambda - 2\lambda$ Gewicht zu K_+; andererseits $-\lambda = \bar{\lambda}$ auch Gewicht zu K_-. Nach 7.8 ist das unmöglich. Also liegt einer der Fälle 7.3 oder 7.6 vor. In den dortigen Beweisen sind $x, y \in K_+$, $\bar{x}, \bar{y} \in K_-$ anzunehmen. Wegen der Invarianz von K_+ ist $\mathfrak{j}x = \bar{y}$ unmöglich, also muß bereits $\lambda - \mu \in W$ sein.

7.14. Sei L eine reelle einfache Lie-Algebra, in einem (reellen oder komplexen) Raum K irreduzibel dargestellt, nicht notwendig treu, aber mit mehr als zwei Gewichten, und $\pm\pi_k(\mathbf{A}_{l,j,*})$ mit $l = 2, 3$, $k = 1, l$.

Dann gibt es ein brauchbares Gewichtepaar λ, μ mit $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$, das im äußeren und Zwillingsfall obendrein $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$ erfüllt.

Beweis: **L** vom inneren Typ: Klar, da jedes Paar brauchbar ist.

L vom äußeren Typ: Sei λ das höchste Gewicht, α die höchste Wurzelform; $\mu = \lambda - \alpha$ ist dann auch Gewicht. Da α symmetrisch im Graphen ist, ist $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, also $\mathrm{Re}\,\mu = \mathrm{Re}\,\lambda$. Das Paar λ, μ ist jedenfalls brauchbar. $\lambda = \bar{\mu}$ würde bedeuten: $\lambda - \bar{\lambda} = \alpha$. Nun ist $\lambda = \sum p_i \pi_i$ mit ganzen $p_i \geqq 0$, und $\pi_i = -\pi_{i'}$ mit i' als Spiegelbild von i im Graphen, also $\lambda - \bar{\lambda} = \sum (p_i + p_i')\,\pi_i$. Daß die höchste Wurzelform echt Summe fundamentaler Gewichte ist, kommt aber nur bei $\mathbf{A}_l$ vor, und zwar für $\lambda = \pi_1(\mathbf{A}_l)$ (und $\pi_l(\mathbf{A}_l)$, was sich nicht wesentlich unterscheidet).

In diesem Ausnahmefall setzen wir $\lambda = \pi_1$, $\mu = \pi_1 - \varrho_1$. Wäre nun $\mathrm{Re}\,\mu = n\,\mathrm{Re}\,\lambda$ mit $n < 0$, so hätte man $(\varrho_1 - \varrho_2) = (1 - n)(\pi_1 - \pi_l)$; für $l > 3$ ist aber das innere Produkt mit ϱ_2 links $\neq 0$, rechts $= 0$. $\lambda = \bar{\mu}$ ist unmöglich; man hätte sonst $\pi_1 + \pi_l = \varrho_l$.

L vom Zwillingstyp: Entsprechend $\mathbf{L} \otimes \mathrm{co} = L_1 + L_2$ haben die Gewichte Komponenten,

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 .$$

Man wähle λ so, daß λ_1 und λ_2 dominant sind und etwa $\lambda_1 \neq 0$, ferner α als dominante Wurzelform, die auf $\mathbf{H} \cap \mathbf{L}_1$ nicht identisch verschwindet. Die Komponente von $\mathrm{Re}\,\xi$ auf $\mathbf{H} \cap \mathbf{L}_1$ heiße $\mathrm{Re}'\,\xi$. Dann ist $2\,\mathrm{Re}'\,\lambda = \lambda_1 + \bar{\lambda}_2$, $2\,\mathrm{Re}'\,\alpha = \alpha$.

Man setze weiter $\mu = \lambda - \alpha$. Mit $\mathrm{Re}\,\mu = n\,\mathrm{Re}\,\lambda (n < 0)$ hat man auch $\mathrm{Re}'\,\mu = n\,\mathrm{Re}'\,\lambda$, also

$$\alpha = (1 - n)(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2) .$$

So etwas kann nur bei $\pi_{1,0}(\mathbf{C}_{l,**})$ $(l > 1)$ vorkommen, wenn α obendrein die höchste Wurzelform ist; man wähle dann α als mittlere dominante Wurzelform.

$\lambda = \bar{\mu}$ ist offenbar unmöglich.

7.15. Ist (im Zwillingsfall) die Darstellung treu, so kann man λ sogar so wählen, daß λ_1, $\bar{\lambda}_2$ dominant $\neq 0$ sind. Man setze dann neben

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\mu = (\lambda_1 - \alpha) + (\lambda_2 - \bar{\alpha}) ,$$

wo α dominante Wurzelform $\neq 0$ ist. Es ist nun $2\,\mathrm{Re}'\,\lambda = \lambda_1 + \bar{\lambda}_2$, $2\,\mathrm{Re}'\,\mu = \lambda_1 + \bar{\lambda}_2 - 2\alpha$. Mit $\mathrm{Re}\,\mu = n\,\mathrm{Re}\,\lambda$ $(n < 0)$ wäre

$$2\alpha = (1 - n)(\lambda_1 + \bar{\lambda}_2) .$$

Das ist nur für $\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,**})$ und $\pi_{1,l}(\mathbf{A}_{l,**})$ möglich, kann aber im ersten Fall vermieden werden, indem man α als mittlere dominante Wurzelform wählt. Im andern Falle, für $l > 1$,

$$\lambda = \pi_1 + \bar{\pi}_l ,$$

setze man

$$\mu = (\pi_1 - \varrho_1) + \overline{(\pi_l - \varrho_l)} ,$$

um ein brauchbares Paar zu erhalten.

Daß $\lambda \neq \mu, \bar{\mu}$ ist, ist hier evident.

Im Unterschied zu 7.14 sind λ, μ hier so konstruiert, daß $\lambda - \mu, \lambda - \bar{\mu} \notin W$ sind. Die einzige Ausnahme ist $l = 1$, also $\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,**})$.

7.16. In den bei 7.14 ausgeschlossenen Fällen $\pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*})$, $l = 2, 3$ (und analog $\pi_l(\mathbf{A}_{l,j,*})$, $l = 2, 3$) hat man jedenfalls ein Gewicht λ mit $\lambda \neq \bar{\lambda}$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, nämlich $\lambda = \pi_1$, und dabei ist $\bar{\lambda}$ auch Gewicht derselben Darstellung.

8. Nichteinfaches J

8.1. Außer wenn etwas andres ausdrücklich zugelassen wird, ist in Zerlegungen

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \cdots$$

von den numerierten Summanden vorausgesetzt, daß sie nicht von der Form $\pi_k(\mathbf{A}_{l,j,*})$, $l = 2, 3$, $k = 1, l$ sind, so daß wir 7.14 anwenden können. Die Aussagen werden dann bis auf Summanden dieser Form gemacht. Das wird angedeutet durch den Zusatz „u.b.V." (unter bekanntem Vorbehalt).

Man beachte weiter, daß nicht-einfache $\mathbf{J}$ sicher nicht von der Form $\mathbf{C}_{l,j}$ sind, so daß U_1 auf sie angewandt werden kann.

8.2. Sei

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \cdots ,$$

wo die einfachen $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ mehr als zwei Gewichte auf K_1, K_2 haben.

Dann wähle man brauchbare Paare λ_i, μ_i zu K_i $(i = 1, 2)$ mit $\lambda_i \neq \mu_i, \bar{\mu}_i$ nach 7.14. Auch

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots$$
$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \lambda_3 + \cdots$$

sind dann brauchbar. Aber weder $\lambda - \mu$ noch $\lambda - \bar{\mu}$ kann Wurzelform sein, im Widerspruch zu U_1.

Es gibt also u.b.V. höchstens einen Summanden mit mehr als zwei Gewichten zu K_i.

8.3. Sei

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 + \cdots$$

mit einfachen $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$, von denen $\mathbf{J}_1$ mehr als zwei Gewichte hat, und $\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$ genau zwei Gewichte haben, zu bzw. K_1, K_2, K_3.

Dann wähle man nach 7.14 das brauchbare Paar λ_1, μ_1 zu K_1 mit $\lambda_1 \neq \mu_1, \bar{\mu}_1$ und setze man

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \cdots ,$$
$$\mu = \mu_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \cdots ,$$
$$\mu' = \mu_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \cdots .$$

Für $\mathrm{Re}\,\lambda_2 \neq 0$ ist λ, μ brauchbar, für $\mathrm{Re}\,\lambda_3 \neq 0$ ist λ, μ' brauchbar, für $\mathrm{Re}\,\lambda_2 = \mathrm{Re}\,\lambda_3 = 0$ sind gemäß der Wahl von λ_1, μ_1 beide Paare brauchbar. Jedenfalls kommt man mit U_1 zum Widerspruch.

Es gibt also u.b.V. neben einem Summand $\mathbf{J}_1$ mit mehr als zwei Gewichten zu K_1 noch höchstens einen, $\mathbf{J}_2$, mit genau zwei Gewichten, zu K_2.

8.4. Sei

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_4 + \cdots,$$

wo die einfachen $\mathbf{J}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ genau zwei Gewichte zu K_i haben.

Ist $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \neq 0$, so führt das Paar

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \cdots,$$
$$\mu = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 + \cdots$$

zum Widerspruch. Dasselbe gilt, wenn alle $\mathrm{Re}\,\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ verschwinden.

Es gibt also u.b.V. höchstens drei Summanden $\mathbf{J}_i$ mit genau zwei Gewichten zu bzw. K_i.

8.5. Sei direkt

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$$

und $\mathbf{J}_1$ von der Form $\pi_k(\mathbf{A}_{l,j,*})$, $l = 2, 3$, $k = 1, l$.

Dann ist $\mathbf{J}$ komplex irreduzibel oder $\mathbf{J}_2$ vom Rang 0.

Zum Beweise wähle man nach 7.16 die Gewichte $\lambda, \bar{\lambda}_1$ von $\mathbf{J}_1$ zu K_1 so, daß

$$\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1, \quad \mathrm{Re}\,\lambda_1 \neq 0$$

ist. Dann ist

$$\lambda_1 + \lambda_2, \quad \bar{\lambda}_1 + \mu_2$$

brauchbar, also falls $\mathbf{J}$ komplex reduzibel ist, $\lambda_2 = \mu_2$ wegen U_3. $\mathbf{J}_2$ hat dann nur ein Gewicht und ist vom Range 0.

8.6. Hat $\mathbf{J}$ einen Summand $\mathbf{J}_1$ der Form $\pi_k(\mathbf{A}_{l,j,*})$, $l = 2, 3$, $k = 1, l$, so ist entweder

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 \quad \text{mit einfachem} \quad \mathbf{J}_2$$

oder

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,j}), \mathbf{J}_3 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,j'}).$$

Zum Beweise wähle man λ_1 wie oben. Dann ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$
$$\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3$$

brauchbar, also nach U_1 entweder $\lambda_2 = \mu_2$, oder $\lambda_3 = \mu_3$, oder $\lambda_2 = \bar{\mu}_2$ und $\lambda_3 = \bar{\mu}_3$. Hat nun etwa $\mathbf{J}_2$ mehr als zwei Gewichte zu K_2, so kann man $\lambda_2 \neq \mu_2, \bar{\mu}_2$ wählen, und dann muß $\lambda_3 = \mu_3$ sein, also $\mathbf{J}_3$ vom Range 0 und $\mathbf{J}$ daher komplex reduzibel, im Widerspruch zu 8.5. Ein Summand mit zwei Gewichten kann nicht $\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**})$ sein, da $\mathbf{J}$ dann wieder komplex reduzibel würde.

8.7. $\mathbf{J} \otimes \mathrm{co}$ kann nicht direkt

$$\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3$$

sein mit einem $\mathbf{J}_1$ der Form $\pi_\alpha(\mathbf{A}_{l,j,*})$, $l = 2, 3$, $k = 1, l$, und einem $\mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3$ der Form $\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,**})$.

Denn mit λ_1 wie oben ist

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \bar{\lambda}_2 ,$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 - \bar{\lambda}_2$$

brauchbar, im Widerspruch zu U_1.

8.8. Sei $\mathbf{J}$ komplex reduzibel und in direkte Summanden von positivem Rang zerlegbar.

Nach 8.5 kann dann kein Summand der Form $\pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*})$, $l = 2, 3$, $k = 1, l$ auftreten. Nach 8.2–8.4 gibt es dann in $\mathbf{J}$, abgesehen von einem Summand vom Rang 0, als einfache direkte Summanden nur

1. $\mathbf{J}_1$ mit mehr als zwei Gewichten, $\mathbf{J}_2$ mit genau zwei Gewichten,
2. $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$ mit je zwei Gewichten,
3. $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ mit je zwei Gewichten.

Diese Fälle werden in 8.8.1–8.8.3 behandelt:

8.8.1. Die Gewichte von $\mathbf{J}_2$ zu K_2 sind $\pm\lambda_2$. Wäre $\mathrm{Re}\,\lambda_2 = 0$, so könnte man mit brauchbaren λ_1, μ_1 $(\lambda_1 \neq \mu_1, \bar{\mu}_1)$ nach 7.14 das brauchbare Paar

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots , \mu_1 - \lambda_2 + \cdots$$

bilden, das über U_3 zum Widerspruch führt.

Also $\mathrm{Re}\,\lambda_2 \neq 0$. Für jede Wahl von λ_1, μ_1 ist dann

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots , \mu_1 + \lambda_2 + \cdots$$

brauchbar, also nach U_3

$$\lambda_1 - \mu_1 \in W .$$

Das kommt (für beliebige Gewichtspaare) nur bei $\pi_1(\mathbf{A}_l)$, $\pi_1(\mathbf{C}_l)$ vor. Dabei lassen sich, was Realität betrifft, die äußeren und die Zwillingstypen ausschließen, denn bei ihnen kann man hier brauchbare λ_1, μ_1 mit $\lambda_1 \neq \mu_1, \bar{\mu}_1$ und $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \neq 0$ wählen (man beachte $l > 1$), und dann sind

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots , \mu_1 - \lambda_2 + \cdots$$

brauchbar, im Widerspruch zu U_3.

Übrig bleiben:

$$\pi_1(\mathbf{A}_{l,j}) \quad \text{mit} \quad \pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**}) \quad \text{und evtl.} \quad \pi_1(\mathbf{A}_0) , \qquad \#$$
$$\pi_1(\mathbf{C}_{l,j}) \quad \text{mit} \quad \pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**}) \quad \text{und evtl.} \quad \pi_1(\mathbf{A}_0) . \qquad \#$$

8.8.2. Nach demselben Prinzip kann das Auftreten dreier Summanden ausgeschlossen werden, nämlich durch das Paar

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots , \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \cdots ,$$

wo $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$ so numeriert sind, daß $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \neq 0$ ist, falls nicht alle $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ sind.

8.8.3. Bei zwei Summanden mit zwei Gewichten ergeben sich die Fälle

$$\mathbf{J}_1 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,j}) , \qquad \mathbf{J}_2 = \pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**}) ,$$
$$\mathbf{J}_1 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,j}) , \qquad \mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,j'}) ,$$
$$\mathbf{J}_1 = \pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**}) , \quad \mathbf{J}_2 = \pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**}) ,$$

von denen der erste unter die Ausbeute von 8.8.1 gerechnet werden kann, während der Rest sich als

$$\pi_3(\mathbf{D}_{2,j}) \qquad \text{mit evtl.} \quad \pi_1(\mathbf{A}_0)\,, \qquad \#$$

$$\pi_{3,0}(\mathbf{D}_{2,**}) \qquad \text{mit evtl.} \quad \pi_1(\mathbf{A}_0) \qquad \#$$

zusammenfassen läßt.

8.9. Nach dieser Aufzählung bleiben von den komplex reduziblen $\mathbf{J}$ nur die übrig, die bis auf einen Summanden vom Rang 0 einfach sind. Diese brauchen allerdings nicht komplex einfach zu sein. Wir behandeln nun den Fall eines Zwillingssummanden in $\mathbf{J}$ unabhängig von Reduzibilität und Irreduzibilität.

Sei direkt

$$\mathbf{J} \otimes \mathrm{co} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \cdots,$$

wo die $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ komplex konjugiert und einfach sind.

Sind $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ beide in K_+ nichttrivial dargestellt, so führen für $l > 1$ die Gewichte aus 7.15 einen Widerspruch herbei. Für $l = 1$ erhält man als $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$

$$\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,**}) \cong \pi_3(\mathbf{D}_{2,0,*})\,.$$

In 8.7 wurde gezeigt, daß dann Summanden der Form $\pi_k(A_{l,j,*})$, $l = 2, 3$, $k = 1, l$, nicht vorkommen können.

$\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ hat vier Gewichte, ein weiterer Summand $\mathbf{J}_3$ kann also höchstens zwei haben. Er kann kein $\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**})$ sein; denn dann wäre $\mathbf{J}$ komplex reduzibel und in Summanden von positivem Rang zerlegbar, also einer der Fälle 8.8. Aus demselben Grund sind Summanden $\pi_1(\mathbf{A}_{1,0})$, $\pi_1(\mathbf{A}_0)$ ausgeschlossen. Übrig bleibt:

$$\pi_3(\mathbf{D}_{2,0,*}) \quad \text{mit evtl.} \quad \pi_1(\mathbf{A}_{1,1})\,. \qquad \#$$

Sei nun etwa $\mathbf{J}_2$ in K_1 trivial dargestellt. Man erhält $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, indem man $\mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1$ als reell von doppelter Dimension interpretiert. Das Resultat dieses Prozesses, auf eine komplexe irreduzibel dargestellte Lie-Algebra $\mathbf{L}$ ausgeübt, heiße $\Gamma(\mathbf{L})$.

$\mathbf{J}$ ist nun reduzibel. Weitere Summanden von positivem Rang sind nach 8.8 nicht zu berücksichtigen. Man erhält

$$\Gamma(\mathbf{L}) \quad \text{mit evtl.} \quad \pi_1(\mathbf{A}_0)\,. \qquad \#$$

Man beachte, daß die Brauchbarkeitsbedingung sich bei $\Gamma(\mathbf{L})$ reduziert auf: μ nicht Negativfaches von λ.

9. Vorläufige Zusammenfassung

Sei $\mathbf{J}$ reduzibel und komplex zerlegbar in Summanden von positivem Rang. Dann ist $\mathbf{J}$ bis auf einen Summanden $\pi_1(\mathbf{A}_0)$ einer der Fälle

$\Gamma(\mathbf{L})$ ($\mathbf{L}$ einfach irreduzibel),

$\pi_{3,0}(\mathbf{D}_{2,**})$,

$\pi_3(\mathbf{D}_{2,j})$, $\pi_3(\mathbf{D}_{2,0,*})$,

$\pi_1(\mathbf{A}_{l,j})$ mit $\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**})$,

$\pi_1(\mathbf{C}_{l,j})$ mit $\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**})$.

Sei **J** irreduzibel und komplex nicht einfach. Dann gibt es keinen Summanden vom Rang 0. **J** zerlegt sich reell in $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, wo entweder

$$\mathbf{J}_1 \quad \text{komplex einfach oder} \quad = \pi_3(\mathbf{D}_{2,j})$$

und

$$\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,j}), \quad \pi_1(\mathbf{A}_{2,j,*}), \quad \pi_1(\mathbf{A}_{3,j,*}),$$

oder

$$\mathbf{J}_1 = \pi_3(\mathbf{D}_{2,0,*}), \quad \mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,1}), \mathbf{0}$$

ist.

(Im Fall dreier $\pi_1(\mathbf{A}_{1,j})$ haben wir zwei zu einem $\mathbf{D}_{2,j}$ zusammengefaßt.)

10. Komplex einfache J, die U genügen

10.1. Bei **J** vom inneren Typ sind alle Wurzelformen und Gewichte rein imaginär. Also ist jedes Paar brauchbar und gilt $\lambda + \mu$ oder $\lambda - \mu \in W$ für je zwei Gewichte λ, μ. In RHL wurde gerade diese Bedingung ausgewertet, und dabei wurden immer nur Gewichte eines komplex irreduziblen Unterraumes herangezogen[9]). Da wurde aber auch von andern Kriterien Gebrauch gemacht (z. B. zu hohe Dimension der reellen Darstellung). Man hat die Liste aus RHL also mit den aus andern Gründen weggelassenen Algebren zu erweitern. Man erhält dann die Liste:

$\mathbf{U}_1$, innerer Typ von

$\pi_1(\mathbf{A}_l)$ $(l \geqq 1)$, $2\pi_1(\mathbf{A}_1)$, $3\pi_1(\mathbf{A}_1)$, $\pi_2(\mathbf{A}_3)$, $\pi_3(\mathbf{A}_5)$,

$\pi_2(\mathbf{B}_l)$ $(l \geqq 2)$, $\pi_1(\mathbf{B}_l)$ $(l = 3, 4, 5)$,

$\pi_1(\mathbf{C}_l)$ $(l > 1)$, $\pi_2(\mathbf{C}_3)$, $\pi_3(\mathbf{C}_3)$,

$\pi_3(\mathbf{D}_l)$ $(l \geqq 4)$, $\pi_1(\mathbf{D}_6)$,

$\pi_1(\mathbf{G}_2)$.

In RHL wurde $\pi_1(\mathbf{F}_4)$ wegen des doppelten Gewichtes 0 weggelassen, es läßt sich aber auch mit $\mathbf{U}_1$ ausschließen. Dagegen genügt $\pi_2(\mathbf{C}_3)$, das auch doppelzählende Gewichte besitzt, wohl $\mathbf{U}_1$. Aus formellen Gründen muß es hier aufgezählt werden, spielt aber beim Problem P nicht mit.

10.2[10]). Bei den Zwillingstypen $\Gamma(\mathbf{L})$ bedeutet Brauchbarkeit von λ, μ, daß keines Negativfaches des andern ist. Will man die Tafel von RHL verwenden, so hat man sich davon zu überzeugen, daß bei den Schlüssen diese Bedingungen nicht verletzt wurden.

Zu RHL 3.9: λ dominant[11]), $\lambda - 2\varrho_i = n\lambda$ $(n < 0)$ ergibt $(1 - n)\lambda = 2\varrho_i$, also ϱ_i bis auf einen Faktor dominant, also $l = 1$; dann $\lambda = \frac{1}{2} m \varrho_i$ (m ganz), also $m = 1, 2, 3$, sonst Widerspruch.

[9]) Bei der Behandlung von $\pi_1(\mathbf{D}_l)$ wurde dort ein Versehen begangen. $\pi_1(\mathbf{D}_6)$ ist an und für sich zulässig, läßt sich aber anderweitig ausschließen. Wir kommen sowieso darauf zurück.

[10]) Bequemlichkeitshalber haben wir das hier eingereiht, obwohl es nicht unter die Kapitelüberschrift gehört.

[11]) Wir sagen immer λ statt g.

Zu RHL 3.10: $(\lambda - \varrho') = n(\lambda - \varrho)$ $(n < 0)$, also $(1 - n)\lambda = \varrho' - n\varrho$ bis auf einen Faktor dominant, also $l = 2$, $n = -1$, $2\lambda = \pi_1 + \pi_2$, Widerspruch.

Zu RHL 3.11: $n(\pi_i - \varrho_i) = \pi_i - \varrho_{i-1} - \varrho_i - \varrho_{i+1}$, also $(1 - n)\pi_i = \varrho_{i-1} + (1 - n)\varrho_i + \varrho_{i+1}$ bis auf Faktor dominant, Widerspruch.

Zu RHL 3.13–3.16: analog.

Mit λ zu K_+ gehört hier $\bar{\lambda}$ zu K_-. Für brauchbare Paare λ, μ hat also hier sogar $\lambda - \mu \in W$ zu gelten. Damit erhält man für

U_1: Zwillingstyp $\Gamma(\mathbf{L})$:

dieselbe Liste wie für U_1, innerer Typ, mit Streichung von

$$\pi_3(\mathbf{A}_5), \pi_1(\mathbf{B}_4)\,,\ \pi_1(\mathbf{B}_5)\,,\ \pi_2(\mathbf{C}_3)\,,\ \pi_3(\mathbf{C}_3)\,,\ \pi_1(\mathbf{D}_6)\,.$$

10.3. Zur Behandlung von $\mathbf{A}_{l,j,*}$ wird der Stamm von $\mathbf{A}_l$ mit der Basis $\omega_1, \ldots, \omega_{l+1}$ $(\sum \omega_\nu = 0)$ koordinatisiert und lexikographisch geordnet, so daß die Wurzelformen $\omega_i - \omega_j$ sind. Die Realitätsbedingung lautet im Stamm $\bar{\omega}_\nu = \omega_{l+2-\nu}$. Gewichte lauten

$$\sum p_\nu \omega_\nu \quad \text{mit} \quad p_\alpha \equiv p_\beta \bmod 1\ ;$$

es wird immer mit

$$\sum p_\nu = 0$$

normiert. Dominanzbedingung ist

$$p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_{l+1}\,.$$

Die Gewichtemenge einer Darstellung ist gegenüber Permutationen der ω_ν invariant. Für das fundamentale Gewicht π_k ist

$$q = p_1 = \cdots = p_k > p_{k+1} = \cdots = p_{l+1} = r, \quad q - r = 1\,.$$

10.3.1. Sei $l \geqq 3$.

$$\lambda = \sum p_\nu \omega_\nu$$

sei dominantes Gewicht mit

$$p_1 > p_l\,, \quad p_2 > p_{l+1}\,. \tag{*}$$

Dann ist auch

$$\mu = \lambda - (\omega_1 - \omega_2) - (\omega_2 - \omega_{l+1})$$

Gewicht derselben Darstellung. Da bei $\mathbf{A}_l$ $(l > 1)$ keine halben Wurzelformen als Gewichte vorkommen, ist λ entweder regulär oder $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$. Jedenfalls ist $\mathrm{Re}\,\mu = \mathrm{Re}\,\lambda$. Da $\lambda - \mu \notin W$, ist bei U_1

$$\lambda - \bar{\mu} = (p_1 - p_{l+1} - 1)(\omega_1 - \omega_{l+1}) + (p_2 - p_l - 1)(\omega_2 - \omega_l) \in W\,,$$

also

$$p_1 - p_{l+1} = 1$$

oder

$$p_1 - p_{l+1} = 2, \qquad p_2 - p_l = 1\,.$$

Daraus folgt

$$\lambda = \pi_k \quad \text{oder} \quad \pi_1 + \pi_k\,(1 < k < l) \quad \text{oder} \quad \pi_k + \pi_l\ (1 < k < l)\,.$$

Setzt man statt (*)

$$p_1 = p_l \quad \text{oder} \quad p_2 = p_{l+1}\,,$$

so erhält man

$$\lambda = m\pi_l \quad \text{oder} \quad m\pi_1 .$$

10.3.2. Wir betrachten weiter den Fall $\lambda = \pi_k$ $(k \neq 1, l)$. Da ist

$$q = p_1 = \cdots = p_k > p_{k+1} = \cdots = p_{l+1} = r,\ q - r = 1 .$$

Mit λ treten auch

$$q\omega_1 + r\omega_2 + \cdots + r\omega_l + q\omega_{l+1} ,$$

$$r\omega_1 + q\omega_2 + \cdots + q\omega_l + r\omega_{l+1}$$

als Gewichte auf; beide sind reell. Ihre Differenz ist nicht in W. Das Paar ist also unbrauchbar, die Realteile müssen Negativfache voneinander sein, und daher

$$q + r = 0$$

$$q, r = \pm \tfrac{1}{2}$$

$$l = 2k - 1 .$$

Aber dann ist π_k regulär und führen für $l \geqq 7$

$$\lambda = \pi_k$$

$$\mu = \pi_k - (\omega_1 - \omega_{l+1}) - (\omega_2 - \omega_l)$$

$$\bar{\mu} = \pi_k - (\omega_3 - \omega_{l-1}) - (\omega_4 - \omega_{l-2}) - \cdots$$

zum Widerspruch.

Unter den fundamentalen Gewichten sind für $l \geqq 3$ also nur zulässig:

$$\pi_2 \text{ für } l = 3, \quad \pi_3 \text{ für } l = 5, \quad \pi_1, \quad \pi_l .$$

10.3.3. Wir betrachten weiter $\pi_1 + \pi_k$ $(1 < k < l)$. Mit ihm tritt auch π_{k+1} als Gewicht auf, also nach 10.3.2

$$k = 2, \quad l = 5$$

oder

$$k = l - 1 .$$

Im ersten Fall $(\pi_1 + \pi_2)$ führen die Gewichte

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

zum Widerspruch; im zweiten Fall $(\pi_1 + \pi_{l+1})$ geschieht es für $l > 3$ mit

$$\lambda = \pi_1 + \pi_{l-1}$$

$$\mu = \lambda - (\omega_1 - \omega_l) - (\omega_3 - \omega_{l-1}) .$$

Also bleibt höchstens

$$\pi_1 + \pi_2 \quad \text{für} \quad l = 3$$

übrig.

10.3.4. Was $m\pi_1$ und $m\pi_l$ betrifft, können wir uns auf $m\pi_1$ beschränken. Mit $m\pi_1$ $(m \geqq 2)$ tritt auch $(m-2)\,\pi_1 + \pi_2$ als Gewicht auf. Nach 10.3.2 bis 10.3.3 muß dann $l = 3$, $m = 2, 3$ sein. Also höchstens

$$2\pi_1, 3\pi_1 \quad \text{für} \quad l = 3 .$$

10.3.5. Sei $l = 2$.

$$\lambda = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3$$

sei höchstes Gewicht. Für

$$p_1 - p_3 \geqq 2$$

ist auch

$$\mu = (p_1 - 2)\,\omega_1 + p_2\omega_2 + (p_3 + 2)\,\omega_3$$

Gewicht mit demselben Realteil. $\lambda - \mu \notin W$,

$$\lambda - \bar{\mu} = (p_1 - p_3 - 2)\,(\omega_1 - \omega_3)\,,$$

also

$$|p_1 - p_3 - 2| \leqq 1\,,$$

also

$$p_1 - p_3 \leqq 3\,.$$

Für $l = 2$ können wir uns also auf

$$3\pi_1,\ 2\pi_1 + \pi_2,\ 2\pi_1,\ \pi_1 + \pi_2,\ \pi_1$$

beschränken.

10.4. Zur Behandlung von $\mathbf{D}_{l,j,*}$ wird der Stamm von $\mathbf{D}_l$ ($l \geqq 4$) mit $\omega_1, \ldots, \omega_l$ koordinatisiert und lexikographisch geordnet, so daß die Wurzelformen $\pm\omega_i \pm \omega_j$ ($i \neq j$) sind. Die Realitätsbedingung lautet

$$\bar{\omega}_\nu = -\omega_\nu \text{ für } \nu < l, \quad \bar{\omega}_l = \omega_l\,.$$

$$\mathrm{Re} \sum p_\nu\omega_\nu = p_l\omega_l\,.$$

Gewichte $\sum p_\nu\omega_\nu$ sind durch

$$p_i \equiv p_j \bmod 1\,, \quad 2p_i \equiv 0 \bmod 1$$

charakterisiert. Dominanzbedingung ist

$$p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_{l-1} \geqq |p_l|\,.$$

Die Gewichtemenge einer Darstellung ist bei Permutationen der ω_ν invariant, obendrein bei Ersetzung einer geraden Anzahl von ω_ν durch $-\omega_\nu$.

Wir untersuchen wieder den Einfluß von U_1:

$$\lambda = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \cdots + p_l\omega_l$$

sei dominantes Gewicht. Dann tritt auch

$$\mu = -p_2\omega_1 + p_1\omega_2 - p_3\omega_3 + \cdots + p_l\omega_l$$

als Gewicht auf,

$$\bar{\mu} = p_2\omega_1 - p_1\omega_2 + p_3\omega_3 - \cdots + p_l\omega_l\,.$$

λ, μ ist brauchbar. Aus U_1 folgt jedenfalls

$$|p_1 + p_2| \leqq 1\,,$$

also

$$p_1 = 1,\ p_2 = \cdots = 0$$

oder

$$p_1 = \cdots = p_{l-1} = \tfrac{1}{2},\ p_l = \pm\tfrac{1}{2}\,.$$

Die zweite Möglichkeit läßt sich noch für $l = 6$ und $l > 7$ ausschließen:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\omega_1 + \tfrac{1}{2}\omega_2 + \tfrac{1}{2}\omega_3 + \tfrac{1}{2}\omega_4 + \cdots + \tfrac{1}{2}\omega_l ,$$

$$\mu = -\tfrac{1}{2}\omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega_2 - \tfrac{1}{2}\omega_3 - \tfrac{1}{2}\omega_4 + \cdots + \tfrac{1}{2}\omega_l ,$$

$$\bar{\mu} = \tfrac{1}{2}\omega_1 + \tfrac{1}{2}\omega_2 + \tfrac{1}{2}\omega_3 + \tfrac{1}{2}\omega_4 - \cdots + \tfrac{1}{2}\omega_l$$

führen dann zum Widerspruch. (Analog für $p_l = -\frac{1}{2}$.)

Übrig bleiben also

$$\pi_3(\mathbf{D}_{l,j,*}) ,$$

$$\pi_1(\mathbf{D}_{4,j,*}),\ \pi_1(\mathbf{D}_{5,j,*}),\ \pi_1(\mathbf{D}_{7,j,*}) .$$

10.5. $\mathbf{E}_{6,j,*}$ wird ganz ausgeschlossen:

Sei

$$\lambda = \sum p_\nu \pi_\nu$$

höchstes Gewicht und α die (rein imaginäre) Wurzelform

$$\alpha = \varrho_1 + 2\varrho_4 + 2\varrho_6 + \varrho_2 + 2\varrho_5 + \varrho_3 .$$

Ist auch $\lambda - 2\alpha$ Gewicht, so muß nach U_1

$$\lambda - \bar{\lambda} - 2\alpha \in W$$

sein. In

$$\lambda - \bar{\lambda} = (p_1 + p_3)(\pi_1 + \pi_3) + (p_4 + p_5)(\pi_4 + \pi_5) + 2p_2\pi_2 + 2p_6\pi_6$$

ist der Koeffizient von ϱ_6

$$4(p_1 + p_3) + 8(p_4 + p_5) + 6p_2 + 12p_6 .$$

In 2α ist er 4 und in einer Wurzelform höchstens 3, zusammen 7. Also verschwinden alle p_ν bis auf höchstens eines, das p_1, p_2, p_3 sein kann. Angesichts der Koeffizienten in α ist aber $\lambda - 2\alpha$ sicher Gewicht, wenn eines der p_4, p_5, p_6 nicht verschwindet, ebenso wenn $p_1 + p_2 + p_3 > 1$ ist. Es bleiben also nur die Möglichkeiten $\lambda = \pi_1, \pi_2, \pi_3$.

$\lambda = \pi_1$ wird mittels der Gewichte

$$\pi_1 - (\varrho_1 + \varrho_4 + \varrho_6 + \varrho_2) , \qquad \pi_1 - (\varrho_1 + \varrho_4 + \varrho_6 + \varrho_5)$$

ausgeschlossen, $\lambda = \pi_3$ analog und $\lambda = \pi_2$ mittels

$$\pi_2 - (\varrho_2 + \varrho_6 + \varrho_4 + \varrho_3) , \qquad \pi_2 - (\varrho_2 + \varrho_6 + \varrho_5) .$$

10.6. Zusammenfassend:

U_1, äußerer Typ:

$\pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*})$,

$\pi_2(\mathbf{A}_{3,j,*})$, $\pi_3(\mathbf{A}_{5,j,*})$,

$2\pi_1(\mathbf{A}_{3,j,*})$, $3\pi_1(\mathbf{A}_{3,j,*})$, $(\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{A}_{3,j,*})$,

$(\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{A}_{2,0,*})$, $2\pi_1(\mathbf{A}_{2,0,*})$, $(2\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{A}_{2,0,*})$, $3\pi_1(\mathbf{A}_{2,0,*})$,

$\pi_3(\mathbf{D}_{l,j,*})$ $(l \geqq 4)$,

$\pi_1(\mathbf{D}_{l,j,*})$ $(l = 4, 5, 7)$.

11. Einfache J, die U_2 bzw. U_3 genügen

Man rechnet leicht nach, wie die Listen aus 10 sich reduzieren:

U_2, innerer Typ von

$\pi_1(A_l)$ $(l \geqq 1)$, $2\pi_1(A_1)$, $\pi_2(A_3)$,

$\pi_2(B_l)$ $(l \geqq 2)$, $\pi_1(B_3)$,

$\pi_1(C_l)$,

$\pi_3(D_l)$ $(l \geqq 4)$,

$\pi_1(G_2)$.

U_2, äußerer Typ:

$\pi_1(A_{l,j,*})$,

$\pi_2(A_{3,j,*})$,

$\pi_3(D_{l,j,*})$ $(l \geqq 4)$,

$\pi_1(D_{4,j,*})$, $\pi_1(D_{5,j,*})$.

U_3, innerer Typ von

$\pi_1(A_l)$ $(l \geqq 1)$

$\pi_1(C_l)$.

U_3 äußerer Typ:

$\pi_1(A_{l,j,*})$,

$\pi_1(D_{4,j,*})$.

12. Die Probleme Q und Q'

12.1. Unter der Voraussetzung von Problem Q (siehe 7.9) gilt: Zu je zwei $x, y \in K \otimes \mathrm{co}$ $(x \neq 0)$ gibt es ein $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit $j(x + \bar{x}) = y + \bar{y}$. Mit der Methode von 7.3 schließt man:

Die Kriterien U_1, U_2, U_3 gelten auch ohne die Voraussetzung der Brauchbarkeit und des Ausschlusses von $C_{l,j}$. Wir nennen diese verschärften Kriterien V_1, V_2, V_3.

Ferner gilt

V_4: Ist λ ein Gewicht mit $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, so ist λ halbe Wurzelform.

Denn zu x gibt es ein $\mathbf{j} \in \mathbf{J}$ mit $\mathbf{j}(x + \bar{x}) = x + \bar{x}$. Gehört x zum Gewicht λ mit $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, so muß ein e_α existieren mit $e_\alpha x = \bar{x}$.

12.2. Ist $\mathbf{J}$ nicht-einfach, so hat wegen V_1 einer der Summanden, $\mathbf{J}_2$ genannt, höchstens zwei Gewichte zu K_2. $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$.

Ist obendrein $\mathbf{J}$ komplex reduzibel, so kann $\mathbf{J}_2$ wegen V_3 zu K_2 höchstens ein Gewicht haben.

$\mathbf{J}_2$ kann also jedenfalls nicht vom Zwillingstyp sein; seine Gewichte sind rein imaginär.

12.3. Sei weiter $\mathbf{J}_1$ vom inneren Typ. Dann sind alle Gewichte von $\mathbf{J}$ imaginär, also nach V_4 halbe Wurzelformen, also $\mathbf{J} = \pi_1(C_{l,j})$. Nur $\pi_1(C_{l,l})$ kommt als Lösung von Q in Frage.

12.4. Wäre $\mathbf{J}_2$ von positivem Rang und $\mathbf{J}_1$ nicht-einfach, so müßte es aus zwei Summanden vom Rang 1 bestehen, also vom inneren Typ sein, aber dann ist $\mathbf{J}$ nach 12.3 einfach. Also ist $\mathbf{J}_1$ einfach, falls $\mathbf{J}_2$ von positivem Rang ist.

12.5. Sei $\mathbf{J}_1$ vom äußeren Typ. Mittels V_4 kann man in der Liste 10.6 streichen: $\pi_2(A_{3,j,*})$, $\pi_3(A_{5,j,*})$, $(\pi_1 + \pi_2)(A_{2,0,*})$, $\pi_3(D_{l,j,*})$. Mittels V_1 kann man die übrigen streichen, außer

$$\pi_1(A_{l,j,*}), \quad \pi_1(D_{5,j,*}).$$

Ist $\mathbf{J}$ obendrein reduzibel oder $\mathbf{J}_2$ von positivem Rang, so kann man weiter mittels V_3 oder V_2 das $\pi_1(\mathbf{D}_{5,j,*})$ eliminieren. Als kommt $\mathbf{J}_1 = \pi_1(\mathbf{D}_{5,j,*})$ nur reell mit $\mathbf{J}_2 = \mathbf{0}$ in Frage. Das bedeutet $j = 0$ oder 4. Von $\pi_1(\mathbf{D}_{5,4,*})$ kann man zeigen, daß es in $K\backslash(0)$ nicht transitiv ist; es läßt sogar eine höchstens 11-dimensionale Mannigfaltigkeit invariant (siehe 15.2). Dagegen wird Q von $\pi_1(\mathbf{D}_{5,0,*})$ erfüllt. Es läßt sich nämlich so beschreiben:

$\pi_1(\mathbf{D}_{5,0,*})$: K ist der 2-dimensionale lineare Raum über den Oktaven; $\mathbf{L}_1$ besteht aus den 2-2-Oktavenmatrices mit imaginärer Spur, $\mathbf{L}_2$ wird von den Automorphismen der Oktavenalgebra induziert, $\mathbf{J} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$. Beschränkung von $\mathbf{L}_1$ auf die antihermiteschen Matrices führt zur maximal kompakten Unteralgebra von $\mathbf{J}$, $\pi_1(\mathbf{B}_{4,0})$.

Sei $\mathbf{J}_1 = \pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*})$ reell und $\mathbf{J}$ irreduzibel. Dann muß ein etwaiges $\mathbf{J}_2$ vom Rang 1 und reell sein, also $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,1})$. $\mathbf{K}$ läßt sich dann durch die reellen $(l+1)$-2-Matrices beschreiben, auf die links die Elemente von $\pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*})$ und rechts die von $\pi_1(\mathbf{A}_{1,1})$ wirken. Die Matrices vom Rang 1 bilden eine invariante Mannigfaltigkeit. Das ist also ausgeschlossen.

Sei $\mathbf{J}_1 = \pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*})$ reell und $\mathbf{J}$ reduzibel. Dann muß $\mathbf{J}_2$ von Rang 0 sein. Ein analoger Schluß wie soeben (rechts wirken die 2—2-orthogonalen Matrices) führt zum Widerspruch.

Übrig bleiben

$$\pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*}) \ (l \text{ gerade}),\ \pi_1(\mathbf{A}_{l,m,*}) \ (l = 2m-1)\,,$$

$$\pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*}) \ (l \text{ ungerade}) \text{ mit evtl. } \pi_1(\mathbf{A}_{1,0}) \quad \text{oder} \quad \pi_1(\mathbf{A}_0)\,.$$

12.6. Sei $\mathbf{J}_1$ vom Zwillingstyp. Mittels V_1 bleiben von der Liste 10.2 übrig:

$$\pi_1(\mathbf{A}_{l,**}),\quad \pi_1(\mathbf{C}_{l,**})\,.$$

12.7. **Satz** (Lösung des Problems Q): Die linearen Lie-Algebren $\mathbf{J}$ in K mit in $K\backslash(0)$ transitiver Gruppe J sind die reellen Darstellungen zu

$\pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*})$ (l gerade), $\pi_1(\mathbf{A}_{l,m,*})$ $(l = 2m-1)$,

$\pi_1(\mathbf{C}_{l,l})$ $(l \geqq 1)$,

$\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{l,**})$, $\pi_1(\mathbf{C}_{l,**})$ mit evtl. $\pi_1(\mathbf{A}_0)$,

$\pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*})$ (l ungerade) mit evtl. $\pi_1(\mathbf{A}_{1,0})$ oder $\pi_1(\mathbf{A}_0)$.

$\pi_1(\mathbf{D}_{5,0,*})$.

(In der ersten Zeile stehen die reellen speziell linearen Gruppen, in der zweiten die reell symplektischen, in der dritten die komplex linearen und symplektischen mit Eins-Determinante oder -Absolutdeterminante, in der vierten die quaternion-linearen Gruppen, evtl. ergänzt mit einer Gruppe skalarer Quaternionen-Rechtsmultiplikationen.)

12.8. Wir formulieren und behandeln weiter das

Problem Q′: Sei $\mathbf{J}$ eine in K treu linear schwach halbeinfach dargestellte Lie-Algebra und J transitiv über der Menge der Geraden durch den Ursprung. Welche Form hat $\mathbf{J}$?[12])

[12]) Diese Frage wurde bereits von J. Tits, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, Mém. Acad. Roy. Belg. Sci. in 8°, **29**, 166—169 (1955), beantwortet.

Lösungen von Q sind auch Lösungen von Q'. Wir suchen die übrigen, nehmen also $\dim \mathbf{J}x = \dim K - 1$ für $x \neq 0$ an. Die Bahn Jx überlagert den projektiven Raum der Geraden durch 0 in K. Für $\dim K > 2$ trifft Jx jede dieser Geraden also höchstens zweimal, J ist also beschränkt und wegen der schwachen Halbeinfachheit sogar kompakt und als Drehgruppe aufzufassen, die auf der Abstandssphäre transitiv sein muß; diese Gruppen sind in RHL aufgestellt worden. Man sieht ohne weiteres, daß $\dim K = 2$ nichts Neues liefert. Also:

Satz (Lösung von Problem Q'): Die linearen schwach halbeinfachen Lie-Algebren $\mathbf{J}$ mit über den Geraden durch den Ursprung transitiver Gruppe J sind außer denen von Satz 12.7 nur noch die orthogonalen auf der Abstandssphäre transitiven Gruppen (von RHL).

13. Nichteinfache Lösungen des Problems P

$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$.

13.1. $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_0)$, $\mathbf{J}_1$ reell in K_1.

Dann ist K Tensorprodukt von K_1 und K_2 (mit den Lie-Algebren bzw. $\mathbf{J}, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$). Bezüglich Basen von K_1 und K_2 kann K durch die 2-Spalten-Matrices der Höhe $\dim K_1$ beschrieben werden; auf sie wirkt J_1 von links, J_2 von rechts (als Gruppe der 2—2-orthogonalen Matrices). Die Matrices vom Rang 1 bilden eine invariante Mannigfaltigkeit M_1 in K mit $\dim M_1 = \dim K_1 + 1$. Ferner $\dim K = 2 \dim K_1$. Für $\dim K_1 > 2$ ist $\dim M_1 < \dim K - 1$, also muß M_1 aus Lichtvektoren bestehen. Wegen der lokalen Transitivität von J auf $M_1 \backslash (0)$ gilt:

J_1 ist transitiv auf der Menge der Geraden durch 0 in K_1.

J_1 ist nicht kompakt, denn sonst wäre J auch kompakt, also auf M_1 nicht transitiv. J_1 muß also Lösung von Q sein.

Ist J_1 sogar transitiv über den Paaren unabhängiger Vektoren, so ist J im kleinen transitiv. Das ist unzulässig. Daher sind aus der Liste von Satz 12.7 zu streichen:

$${}^r\pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*}) \ (l \text{ gerade}),\ {}^r\pi_1(\mathbf{A}_{l,m,*}) \ (l = 2m-1),\ {}^r\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{l,**}) \ (l > 1)\,.$$

Für $\mathbf{J}_1 = {}^r\pi_1(\mathbf{C}_{l,l})$ $(l > 1)$ ist M_1 echt enthalten in der ebenfalls invarianten Mannigfaltigkeit der Matrices, für die das symplektische Produkt der Spalten verschwindet; sie bilden eine Bahn, die sich bei M_1 häuft; der Fall ist auch zu streichen. Dasselbe gilt für $\mathbf{J}_1 = {}^r\pi_{1,0}(\mathbf{C}_{l,**})$ $(l > 1)$.

$\mathbf{J}_1 = {}^r\pi_1(\mathbf{A}_{1,**}) = {}^r\pi_1(\mathbf{C}_{1,**})$ braucht in diesem Zusammenhang nicht berücksichtigt zu werden, da die Determinante als Invariante von Vektorpaaren komplexwertig und die Kodimension der Bahnen >1 ist.

In den übrigen Fällen läßt sich J_1 als quaternion-lineare oder oktav-lineare Gruppe auffassen. M_1 ist echt enthalten in der invarianten Mannigfaltigkeit M' der quaternion- bzw. oktavlinear abhängigen Spaltenpaare. Im Quaternionenfall ist diese Abhängigkeit als Rechtsabhängigkeit zu interpretieren. Im Oktavfall $({}^r\pi_1(\mathbf{D}_{5,0}))$ lautet die M' definierende Bedingung für die 2—2-Oktaven-Matrices $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$:

$$x_1 x_2^{-1} = y_1 y_2^{-1}\,.$$

Das einzige, das übrig bleibt, ist

$$\mathbf{J}_1 = {}^r\pi_1(\mathbf{A}_{1,1}) ,$$

also

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_0) . \qquad \S$$

13.2. $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_0)$, $\mathbf{J}_1$ antireell oder areell, komplex einfach oder $= \pi_3(\mathbf{D}_{l,1})$.

Dann muß $\mathbf{J}_1$ der Bedingung U_3 genügen. Damit fällt $\pi_3(\mathbf{D}_{l,1})$ weg und in der Tafel von 11 hat man die reellen Algebren zu streichen. $\pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*})$ fällt wegen Bahndichtheit weg; in 15 wird gezeigt, daß auch $\pi_1(\mathbf{D}_{4,j,*})$ wegfällt. Übrig bleiben

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{l,j} + \mathbf{A}_0) \quad \text{für} \quad l > 1 \quad \text{oder } j = 0 \qquad \S$$

$$ {}^r\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,j} + \mathbf{A}_0) \quad \text{für} \quad j \neq l . \qquad \S$$

13.3. $\mathbf{J}_2 = {}^r\pi_1(\mathbf{A}_0)$, $\mathbf{J}_1$ areell, Zwillingstyp.

Nach 9.1 hat man außer $\pi_{3,0}(\mathbf{D}_{2,**})$ die Liste von 10.2 zu verwenden. Daraus sind wegen überall dichter J-Bahn $\pi_1(\mathbf{A}_l)$ und $\pi_1(\mathbf{C}_l)$ zu streichen. $3\pi_1(\mathbf{A}_1)$ ist im linearen Raum der komplexen binären kubischen Formen zu interpretieren, auf die die Gruppe der komplexen 2–2-Matrices mit Absolutdeterminante 1 wirkt; dort gibt es die invarianten Mannigfaltigkeiten der Formen mit zwei bzw. drei gleichen Linearfaktoren; es fällt also weg. $\pi_2(\mathbf{A}_3)$ wird als $\pi_3(\mathbf{D}_3)$ interpretiert, $2\pi_1(\mathbf{A}_1)$ als $\pi_2(\mathbf{B}_2)$.

Übrig bleiben:

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_{2,0,1}(\mathbf{B}_{l,**} + \mathbf{A}_0),\ l \geqq 1 , \qquad \S$$

$$ {}^r\pi_{1,0,1}(\mathbf{B}_{3,**} + \mathbf{A}_0) , \qquad \S$$

$$ {}^r\pi_{3,0,1}(\mathbf{D}_{l,**} + \mathbf{A}_0),\ l \geqq 2, \qquad \S$$

$$ {}^r\pi_{1,0,1}(\mathbf{G}_{2,**} + \mathbf{A}_0) . \qquad \S$$

13.4. $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_0)$, $\mathbf{J}_1$ anders als in 13.1–13.3.

Nach 9.1 besitzt dann einen Summanden $\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**})$. Dieser Fall wird in 13.8 behandelt.

13.5. $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,1})$, $\mathbf{J}$ komplex reduzibel, hat keinen Summanden vom Rang 0.

Nach 9.1 kann $\mathbf{J} = \pi_3(\mathbf{D}_{2,j})$, $\pi_3(\mathbf{D}_{2,0,*})$ sein, und dann wegen der Reduzibilität nur $\pi_3(\mathbf{D}_{2,1})$, wobei aber $\dim K = 8 > 6 = \dim \mathbf{J}$ wäre. Oder $\mathbf{J}_1$ hat einen Summanden $\pi_{1,0}(\mathbf{A}_{1,**})$ und wird in 13.8 behandelt.

13.6. $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,1})$, $\mathbf{J}$ komplex irreduzibel.

Dann ist $\mathbf{J}_1$ in K_1 reell. K ist Tensorprodukt von K_1 und K_2 (mit den Lie-Algebren $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$). Wie in 13.1 wird K bezüglich Basen von K_1, K_2 durch Zweispalten-Matrices der Höhe $\dim K_1$ beschrieben, auf die J_1 von links und J_2 von rechts (als Gruppe der reellen 2–2-Matrices mit Einsdeterminante) wirkt. Wie in 14.1 definiert man M_1 und schließt man, daß J_1 auf der Menge der Geraden durch den Ursprung transitiv sein muß. Nach 12.8 unterscheidet man zwei Fälle:

13.6.1. J_1 kompakt.

J_1 ist auf der Abstandssphäre transitiv. Außer für $\mathbf{J}_1 = \pi_3(\mathbf{D}_{2,0})$ ist $\mathbf{J}_1$ nach 9.1 komplex einfach. $\mathbf{J}_1$ erfüllt U_2. Aus der Liste von 11 streiche man die

komplex reduziblen $\pi_1(\mathbf{A}_{l,0})$, $\pi_1(\mathbf{C}_{l,0})$. Man interpretiere $2\pi(\mathbf{A}_{1,0})$ als $\pi_2(\mathbf{B}_{1,0})$ und $\pi_2(\mathbf{A}_{3,0})$ als $\pi_3(\mathbf{D}_{3,0})$. Es ergibt sich für $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{l,0} + \mathbf{A}_{1,1}), \quad l \geqq 1, \qquad \S$$

$${}^r\pi_{3,1}(\mathbf{D}_{l,0} + \mathbf{A}_{1,1}), \quad l \geqq 2, \qquad \S$$

$${}^g\pi_{1,1}(\mathbf{B}_{3,0} + \mathbf{A}_{1,1}), \qquad \S$$

$${}^r\pi_{1,1}(\mathbf{G}_{2,0} + \mathbf{A}_{1,1})\,. \qquad \S$$

Als Invariante auf K erhält man

$$\operatorname{area}^2(x, y) = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix},$$

wo x, y die Spaltenvektoren des Elements von K sind und $(\ldots,\ldots)$ das invariante innere Produkt auf K_1 bezeichnet.

13.6.2. J_1 nicht kompakt.

$\mathbf{J}_1$ ist Lösung von Q. Man streiche aus der Liste 12.7 die komplex reduziblen und die über der Menge der Paare unabhängiger Vektoren transitiven. Weiter streiche man $\pi_1(\mathbf{D}_{5,0,*})$ und $\pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*})$ mit evtl. $\pi_1(\mathbf{A}_{l,0})$ aus demselben Grunde wie in 13.1. Auch fällt $\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,l} + \mathbf{A}_{1,1})$ für $l > 1$ weg, da M_1 in der Mannigfaltigkeit der Matrices mit verschwindendem symplektischen Produkt der Spaltenvektoren echt enthalten ist. $\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,1})$ wird

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_3(\mathbf{D}_{2,3})\,. \qquad \S$$

13.7. $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{2,0,*})$ oder $\pi_1(\mathbf{A}_{3,2,*})$.

Dann ist $\mathbf{J}_1$ reell in K_1. K ist Tensorprodukt von K_1 und K_2 (mit den Lie-Algebren $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$). Wie in 13.1 und 13.6 wird K bezüglich Basen von K_1 und K_2 durch die Drei- bzw. Vierspalten-Matrices der Höhe $\dim K_1$ beschrieben. Die Mannigfaltigkeiten M_i der Matrices vom Rang i sind invariant. Das führt zum Widerspruch.

13.8. $\mathbf{J}_2 = {}^r\pi_{1,0}(A_{1,**})$.

Nach 9.1 hat man entweder $\mathbf{J} = \pi_{3,0}(\mathbf{D}_{2,**})$ (siehe 13.3), oder $\mathbf{J}_1$ ist bis auf einen evtl. Summand vom Rang 0, $=$

$$\pi_1(\mathbf{A}_{l,j}) \quad \text{oder} \quad \pi_1(\mathbf{C}_{l,j})\,.$$

Man schließt wie in 13.1 und 13.6. K läßt sich durch die komplexen Zweispalten-Matrices der Höhe $l+1$ bzw. l beschreiben, auf die links $\pi_1(\mathbf{A}_{l,j})$ bzw. $\pi_1(\mathbf{C}_{l,j})$ wirken und rechts die Gruppe der 2–2-Matrices mit der Determinante 1 oder der Absolutdeterminante 1 (falls ein Summand $\pi_1(\mathbf{A}_0)$ vorhanden ist). Wie vorher zeigt man, daß J_1 auf der Menge der komplexen Geraden durch den Ursprung transitiv sein muß; damit fallen die $\pi_1(\mathbf{A}_{l,j})$ mit $j > 0$ und die $\pi_1(\mathbf{C}_{l,j})$ mit $0 < j < l$ weg. Bei $\pi_1(\mathbf{C}_{l,j})$ bemerkt man die invariante Mannigfaltigkeit der Matrices mit proportionalen Spalten und die der Matrices, für deren Spalten das symplektische Produkt verschwindet; für $l > 1$ ist die zweite echt größer, was zum Widerspruch führt. Übrig bleiben

$${}^r\pi_{1,1,0,1}(\mathbf{A}_{l,j} + \mathbf{A}_{1,**} + \mathbf{A}_0) \quad \text{mit} \quad l = 1 \quad \text{oder} \quad j = 0\,. \qquad \S$$

Die Invariante ist für $l > 1$ oder $j = 0$

$$\text{area}^2(x, y) = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix},$$

wo x, y die Spaltenvektoren sind und $(\ldots, \ldots)$ das invariante unitäre innere Produkt auf K_1 bezeichnet; für $l = j = 1$ ist die Invariante

$$|\det(x, y)| .$$

Man sieht ohne weiteres, daß der Summand $\mathbf{A}_0$ unentbehrlich ist.

13.9. $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{1,0})$.

Die komplex reduziblen $\mathbf{J}$, die hierher gehören, sind schon früher aufgetreten. Man darf $\mathbf{J}$ als komplex irreduzibel annehmen und daher $\mathbf{J}_1$ als antireell. $\mathbf{J}_1$ genügt U_2. In der Liste von 11 sind antireell:

$$\pi_1(\mathbf{A}_{1,0}),\quad \pi_2(\mathbf{A}_{3,1}),\quad \pi_1(\mathbf{B}_{3,1}),\quad \pi_3(\mathbf{B}_{3,2}),\quad \pi_1(\mathbf{C}_{l,j})\quad (j < l) ,$$

$$\pi_3(\mathbf{D}_{l,1}),\ \pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*})\ (l \text{ ungerade}),\ \pi_1(\mathbf{D}_{5,3,*}).$$

K läßt sich als quaternion-linearer Raum interpretieren, auf den J_1 als eine quaternion-lineare Gruppe von links wirkt und $\pi_1(\mathbf{A}_{1,0})$ durch Rechtsmultiplikation mit Quaternionen vom Absolutwert 1.

$\pi_1(\mathbf{A}_{l,0,*})$ (l ungerade) fällt wegen dichter Bahn weg.

$\pi_1(\mathbf{D}_{5,3,*})$ wird in 15 eliminiert.

$\pi_1(\mathbf{B}_{3,1})$, $\pi_1(\mathbf{B}_{3,2})$ werden in 15 eliminiert.

$\pi_3(\mathbf{A}_{3,1})$ wird $\pi_3(\mathbf{D}_{3,1})$.

$\pi_1(\mathbf{A}_{1,0})$ führt zu

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_3(\mathbf{D}_{2,0}) . \qquad \S$$

Weiter bleiben übrig:

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,j} + \mathbf{A}_{1,0}), \quad j < l > 1 \qquad \S$$

$$ {}^r\pi_{3,1}(\mathbf{D}_{l,1} + \mathbf{A}_{1,0}), \quad l \geqq 2 , \qquad \S$$

was für $l = 2$ mit einem in 13.6.1 aufgetretenen Typ $({}^r\pi_{3,1}(\mathbf{D}_{2,0} + \mathbf{A}_{1,1}))$ zusammenfällt.

Daß ${}^r\pi_{3,1}(\mathbf{D}_{l,1} + \mathbf{A}_{1,0})$ wirklich genügt, muß noch gezeigt werden:

$\mathbf{J}_1 = {}^r\pi_3(\mathbf{D}_{l,1})$ ist durch die Invarianz einer antihermiteschen quaternionialen Form charakterisiert, etwa

$$\varphi(x, x) = \sum \bar{x}_\nu i x_\nu$$

($1, i, j, k$ Quaternionenbasis).

$\mathbf{J} = {}^r\pi_{3,1}(\mathbf{D}_{l,1} + \mathbf{A}_{1,0})$ läßt $\psi = \varphi\bar{\varphi}$ invariant. Die Matrices von $\mathbf{J}_1$ mit rein komplexen Elementen (d. h. $\alpha + \beta i$ mit reellen α, β) bilden eine Unteralgebra, $\mathbf{J}_1'$, mit kompakter Gruppe J_1'. Man wähle x auf seiner J_1-Bahn so, daß erst $|x_1|$ und dann $|x_2|$ minimal wird. Weiter wähle man $\mathbf{a} \in \mathbf{J}_1'$ so, daß seine Matrixelemente bis auf a_{12}, a_{21} verschwinden. Mit

$$y(\tau) = \text{ erste Koordinate von } (\exp \tau\mathbf{a})x$$

wird

$$\left(\frac{d}{d\tau}|y(\tau)|^2\right)_{\tau=0} = 2\,\mathrm{Re}\, a_{12}x_2\bar{x}_1 .$$

Das muß für jede komplexe Wahl von a_{12} verschwinden, da sich $|x_1|$ sonst verkleinern ließe. Also muß

$$x_1 \bar{x}_2 = \gamma j$$

mit komplexem γ sein. Ebenso

$$x_1 \bar{x}_3 = \gamma' j, \quad x_2 \bar{x}_3 = \gamma'' j .$$

Also

$$\gamma \bar{\gamma}'' = \gamma' j ,$$

also muß eine der drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 verschwinden.

Allgemein schließt man, daß sich auf der J_1'-Bahn irgendeines x ein Punkt mit höchstens zwei nicht-verschwindenden Koordinaten befindet. Man darf annehmen, daß das x_1, x_2 sind. Mittels J_1' läßt sich x_1 weiter auf β_1 und x_2 auf $\beta_2 j$ mit reellen β_1, β_2 reduzieren. In einem solchen Punkt ergibt sich leicht die Kodimension des J-Bahn-Tangentialraumes zu 1 bzw. 3, je nachdem ob $\psi \not\equiv 0$ oder $= 0$ ist. Diese Kodimensionen stimmen mit denen von $\psi = \text{const}$ ($\neq 0$ oder 0) überein.

Damit erweist sich, daß **J** den Ansprüchen des Problems P genügt.

13.10. $\mathbf{J}_2 = \pi_1(\mathbf{A}_{3,0,*})$.

Wie in 13.9 kommen nur antireelle $\mathbf{J}_1$ in Frage, die U_2 genügen. K läßt sich durch Zweispalten-Matrices mit Quaternionen-Koeffizienten beschreiben; links wirkt J_1 und rechts die Gruppe der 2—2-Quaternionen-Matrices mit Einsdeterminante. Die Matrices mit reell proportionalen Spalten bilden eine invariante Mannigfaltigkeit, ebenso die mit rechts-quaternion-proportionalen Spalten. Das ist unzulässig.

14. Einfache Lösungen des Problems P

14.1. Komplex reduzible **J**.

Zwillingstypen kommen nicht in Frage, da bei den $\Gamma(\mathbf{L})$ (siehe auch 13.3) jede Bahn eine gerade Kodimension hat und daher ein Summand vom Rang 0 unentbehrlich ist.

Übrigens hat man in den Listen für U_3 in 11 die antireellen und areellen Typen auszuwählen:

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_1(\mathbf{A}_{l,j}) ,$$
$$= {}^r\pi_1(\mathbf{C}_{l,j}) , \quad j > l . \qquad \S$$

Wegen der Dichtheit der Bahn ist nämlich $\pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*})$ und $\pi_1(\mathbf{C}_{l,l})$ zu streichen; $\pi_1(\mathbf{D}_{4,j,*})$ wird in 15 ausgeschlossen. Bezüglich $\mathbf{C}_{l,j}$ siehe noch 14.3.

14.2. Komplex irreduzible **J**.

Der einzige Zwillingstyp ist

$$\mathbf{J} = \pi_3(\mathbf{D}_{2,0,*}) = \pi_{1,1}(\mathbf{A}_{1,**}) . \qquad \S$$

Aus den Listen für U_1 (10.1, 10.6) hat man die antireellen und areellen Typen auszuschließen.

$\pi_1(\mathbf{A}_{l,j})$ sind areell oder antireell, außer

$$\mathbf{J} = {}^r\pi_1(\mathbf{A}_{1,1}) . \qquad \S$$

$2\pi_1(\mathbf{A}_1)$ wird $\pi_2(\mathbf{B}_1)$.

$3\pi_1(\mathbf{A}_{1,0})$ ist antireell.

$3\pi_1(\mathbf{A}_{1,1})$ gibt an, wie $\pi_1(\mathbf{A}_{1,1})$ binäre kubische Formen transformiert; die mit zwei oder drei gleichen Linearfaktoren bilden invariante Mannigfaltigkeiten, die zum Widerspruch führen.

$\pi_2(\mathbf{A}_3)$ wird $\pi_3(\mathbf{D}_3)$.

$\pi_3(\mathbf{A}_{5,0})$, $\pi_3(\mathbf{A}_{5,2})$ werden in 16 ausgeschlossen.

Zulässig ist

$$^r\pi_2(\mathbf{B}_{l,j}), \quad l \geqq 1 \quad . \qquad \S$$

$\pi_1(\mathbf{B}_{3,1})$, $\pi_1(\mathbf{B}_{3,2})$, $\pi_1(\mathbf{B}_{4\ 2})$, $\pi_1(\mathbf{B}_{4,4})$, $\pi_1(\mathbf{B}_{5,0})$, $\pi_1(\mathbf{B}_{5,3})$, $\pi_1(\mathbf{B}_{5,5})$ sind antireell. Weitere werden in 15 ausgeschlossen, so daß

$$^r\pi_1(\mathbf{B}_{3,0}),\ ^r\pi_1(\mathbf{B}_{3,3}),\ ^r\pi_1(\mathbf{B}_{4,0}),\ ^r\pi_1(\mathbf{B}_{4,1}) \qquad \S$$

übrigbleiben.

$\pi_1(\mathbf{C}_{l,j})$, $j < l > 1$ sind antireell, $\pi_1(\mathbf{C}_{l,l})$ fällt wegen Bahndichtheit weg.

$\pi_2(\mathbf{C}_3)$ hat ein doppeltes Gewicht.

$\pi_3(\mathbf{C}_{3,1})$, $\pi_3(\mathbf{C}_{3,2})$ sind antireell.

$\pi_3(\mathbf{C}_{3,3})$ gibt an, wie $\pi_1(\mathbf{C}_{3,3})$ die 3-Schieftensoren p_{ijk} transformiert. Auf dem Lichtkegel $\sum p_{ijk}\, p_{i'j'k'}$ (i, j, k, i', j', k' gerade Permutation von 1...6) bilden die Trivektoren eine invariante Mannigfaltigkeit, die nicht erlaubt ist.

Zulässig sind

$$^r\pi_3(\mathbf{D}_{l,j}), \quad j \neq 1, 2, l \geqq 3\,. \qquad \S$$

Dagegen sind die

$\pi_3(\mathbf{D}_{l,1})$ antireell,

$\pi_1(\mathbf{D}_{6,0})$, $\pi_1(\mathbf{D}_{6,2})$, $\pi_1(\mathbf{D}_{6,4})$ antireell. Die übrigen werden in 15 ausgeschlossen.

Zulässig sind

$$^r\pi_1(\mathbf{G}_{2,0}),\ ^r\pi_1(\mathbf{G}_{2,2})\,. \qquad \S$$

$\pi_1(\mathbf{A}_{l,j,*})$ fallen wegen Bahndichtheit oder Antirealität weg.

$\pi_2(\mathbf{A}_{3,0,*})$ wird $\pi_3(\mathbf{D}_{3,0,*})$.

$\pi_2(\mathbf{A}_{3,2,*})$ wird $\pi_3(\mathbf{D}_{3,3,*})$.

$\pi_3(\mathbf{A}_{5,0,*})$ ist antireell.

$\pi_3(\mathbf{A}_{5,3,*})$ wird in 16 ausgeschlossen.

$2\pi_1(\mathbf{A}_{3,2,*})$ gibt an, wie $\pi_1(\mathbf{A}_{3,2,*})$ die quaternären quadratischen Formen transformiert; den verschiedenen Rängen dieser Formen entsprechen invariante Mannigfaltigkeiten, die zum Widerspruch führen.

$2\pi_1(A_{3,0,*})$ läßt sich so beschreiben:

K ist der lineare Raum der 2—2-antihermiteschen Quaternionen-Matrices q, die mit den 2—2-Quaternionen-Matrices a mit Einsdeterminante gemäß

$$q \to aq\bar{a}'$$

transformiert werden. $\dim K = 10$, $\dim \mathbf{J} = 15$. Entartetes q ist durch die Existenz eines 2-Quaternionen-Vektors $x \neq 0$ mit $qx = 0$ erklärt; die entarteten q bilden eine 7-dimensionale Mannigfaltigkeit. Man rechnet aus, daß der Bahntangentialraum bei $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ (und dann bei jedem nichtentarteten q) 9-dimensional

ist, und bei entartetem q $\left(\text{etwa} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ 7-dimensional. Als Invariante ist det brauchbar. Also ist

$$^r 2\pi_1(\mathbf{A}_{3,0,*}) \qquad \S$$

zulässig.

$3\pi_1(\mathbf{A}_{3,0,*})$ ist antireell, für $3\pi_1(\mathbf{A}_{3,2,*})$ ist $\dim K = 20 > \dim \mathbf{J} + 1$, also unzulässig. Dasselbe gilt für

$(\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{A}_{3,j,*})$.

$(\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{A}_{2,0,*})$ ist die adjungierte, hat also zwei verschwindende Gewichte und fällt weg.

$2\pi_1(\mathbf{A}_{2,0,*})$ gibt an, wie $\pi_1(\mathbf{A}_{2,0,*})$ die ternären quadratischen Formen transformiert; den verschiedenen Rängen entsprechen invariante Mannigfaltigkeiten, die zum Widerspruch führen.

$(2\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{A}_{2,0,*})$ und $3\pi_1(\mathbf{A}_{2,0,*})$ haben $\dim K = 15$ bzw. $20 > \dim \mathbf{J} + 1$ und fallen weg.

$$^r\pi_3(\mathbf{D}_{l,j,*}), \quad l \geqq 2 \qquad \S$$

sind zulässig (bezüglich $l = 2$ siehe den Anfang von 14.2).

$\pi_1(\mathbf{D}_{4,j,*})$ sind areell, $\pi_1(\mathbf{D}_{5,3,*})$, $\pi_1(\mathbf{D}_{7,0,*})$, $\pi_1(\mathbf{D}_{7,4,*})$ antireell. Die übrigen werden in 15 eliminiert.

14.3. Hinsichtlich $\mathbf{C}_{l,j}$ haben wir noch eine Lücke zu schließen. Das Kriterium $\mathbf{U}_1$ wurde aus den Voraussetzungen des Problems P unter der Bedingung abgeleitet, daß $\mathbf{J}$ keine Darstellung von $\mathbf{C}_{l,j}$ war. Nun sind bei $\mathbf{C}_{l,j}$ jedenfalls die Gewichte rein imaginär, und höchstens die halben Wurzelformen können Lichtgewichte sein. Man kann also noch $\lambda + \mu$ oder $\lambda - \mu \in W$ behaupten, sobald eines der Gewichte λ, μ nicht halbe Wurzelform ist. Wir prüfen das an den Stellen von RHL nach, wo von $\mathbf{C}_l$ die Rede war.

RHL 3.9 und 3.10: Aus der Voraussetzung folgt unmittelbar, daß λ nicht halbe Wurzelform ist[13]).

RHL 3.11: Sind $\lambda - \varrho_i$ und $\lambda - \varrho_{i-1} - \varrho_i - \varrho_{i+1}$ halbe Wurzelformen $\neq 0$, so ist ihre Differenz Wurzelform; die ist aber $\varrho_{i+1} + \varrho_{i-1}$.

RHL 3.13: Analog.

RHL 3.15: Sind $\lambda - \varrho_i$ und $\lambda - \varrho_i - 2\varrho_{i-1} - \varrho_{i-2}$ halbe Wurzelformen $\neq 0$, so ist ihre Differenz Wurzelform; die ist aber $2\varrho_{i-1} + \varrho_{i-2}$.

Damit zeigt sich, daß nur die $\mathbf{U}_1$ genügenden Darstellungen von $\mathbf{C}_l$ auftreten.

15. Spindarstellungen

15.1. Der Ausschluß gewisser $\pi_1(\mathbf{B}_l)$ und $\pi_1(\mathbf{D}_l)$ ist noch zu rechtfertigen.

Sei $\mathbf{L}$ eine komplexe $\mathbf{B}_l$ oder $\mathbf{D}_l$ mit den Vorstellungen $f = \pi_2$ bzw. π_3 im linearen Raum X und $g_i = \pi_i$ im Raum Y_i ($i = 1$ für $\mathbf{B}_l$, $i = 1, 2$ für $\mathbf{D}_l$).

$\dim X = 2l + 1$ bzw. $2l$,

$\dim Y_i = 2^l$ bzw. 2^{l-1}.

[13]) λ statt g.

Auf der invarianten Quadrik im zu X gehörigen projektiven Raum liegen maximale projektive Räume der Dimension $l-1$. Sie bilden eine irreduzible Mannigfaltigkeit S' bzw. ihrer zwei, S'_i. Durch fL wird S'_i in natürlicher Weise transformiert; die Standuntergruppen L_{x_1}, L_{x_2} sind konjugiert, wenn x_1 und x_2 zum selben S'_i gehören. Jedes L_x ($x \in S'_i$) ist auch Standuntergruppe eines (bis auf einen skalaren Faktor bestimmten) $y_i \in Y_i$. Diese y_i bilden eine bei $g_i L$ invariante Mannigfaltigkeit S_i. Es ist $\dim S_i = \dim S'_i + 1$. Die Elemente von S_i heißen reine Spinoren bzw. Halbspinoren.

Man rechnet aus

$$\dim S'_i = (2l-1) + (2l-2) + \cdots + l - l(l-1) = \binom{l+1}{2}$$

bzw.

$$= (2l-2) + (2l-3) + \cdots + (l-1) - l(l-1) = \binom{l}{2}.$$

Sei $\mathbf{L}_{re}$ eine reelle Form von $\mathbf{L}$ und charakterisiert durch eine bei $f\mathbf{L}$ invariante Quadrik in X_{re} mit n negativen und $\dim X_{re} - n$ positiven Quadraten. Die maximale Dimension reeller projektiver Räume auf der Quadrik ist $n-1$. Die komplex konjugierte $\bar{x}$ von $x \in S'_1$ (im Sinne von X_{re}) gehört zu S'_1 oder S'_2, je nachdem ob $g_1 \mathbf{L}_{re}$ nicht oder wohl areell ist. $g_1 \mathbf{L}_{re}$ ist reell dargestellt in einem Y_{1re}, der in Y_1 oder (im areellen Fall) in $Y_1 + Y_2$ enthalten ist.

$S'_{i,m}$ sei die Mannigfaltigkeit der $x \in S'_i$, die von ihrem konjugierten $\bar{x}$ mindestens $(m-1)$-dimensional geschnitten werden ($m \leqq n$), oder, mit andern Worten, die Mannigfaltigkeit der $x \in S'_i$, die einen $(m-1)$-dimensionalen reellen projektiven Raum enthalten.

$S_{i,m}$ sei die Mannigfaltigkeit der $y \in Y_i$, die zu den $x \in S'_{i,m}$ gehören. $\dim S_{i,m} = \dim S'_{i,m} + 2$, wo die Dimensionen nun im reellen Sinne zu nehmen. sind.

$$\dim S'_{i,m} = (2l-1) + (2l-2) + \cdots + (2l-m) + 2(2l-m-1) + \cdots + 2l - m(l-1) - 2(l-m)(l-1) = \binom{l+1}{2} + \binom{l-m+1}{2}$$

bzw.

$$= (2l-2) + (2l-3) + \cdots + (2l-m-1) + 2(2l-m-2) + \cdots + 2(l-1) - m(l-1) - 2(l-m)(l-1) = \binom{l}{2} + \binom{l-m}{2}.$$

T_m sei die Mannigfaltigkeit der $x + \bar{x}$ mit $x \in S_{1,m}$ für reelles und areelles $g_1 \mathbf{L}$; $T_m = S_{1,m}$ für antireelles $g_1 \mathbf{L}$. (Man beachte, daß im areellen Fall $\bar{x} \in S_{2,m}$ ist.)

$\dim T_m \leqq \dim S_{1,m}$

und für $m = l$

$\dim T_m \leqq \dim S_{1,m} - 1$.

T_m ist eine $g_1 L_{re}$-invariante Mannigfaltigkeit von Y_{re}.

15.2. Wir behandeln die auszuschließenden Typen.

Zu 13.9: ${}^r\pi_1(\mathbf{B}_{3,1})$ antireell, $n=1$, $m=1$, $\dim T_1 \leqq 11$. Bei ${}^r\pi_{1,1}(\mathbf{B}_{3,1} + \mathbf{A}_{1,0})$ wird die J-Bahn eines $x \in T_1$ höchstens 14-dimensional; die Nullmannigfaltigkeit der invarianten hermiteschen Form ist 15-dimensional und Lichtkegel.

Zu 13.9: ${}^r\pi_1(\mathbf{B}_{3,2})$ antireell, $n=2$, $m=2$, $\dim T_2 \leqq 9$. Weiter wie oben zum Ausschluß von ${}^r\pi_{1,1}(\mathbf{B}_{3,2}+\mathbf{A}_{1,0})$.

Zu 14.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{B}_{4,3})$ reell, $n=4$, $m=4$, $\dim T_4 \leqq 11$. Außerdem die 15-dimensionale Nullmannigfaltigkeit der invarianten quadratischen Form.

Zu 14.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{B}_{5,1})$ reell, $n=1$, $m=1$, $\dim T_1 \leqq 27$. Außerdem die 31-dimensionale Nullmannigfaltigkeit der invarianten quadratischen Form.

Zu 14.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{B}_{5,2})$ reell, $n=2$, $m=2$, $\dim T_2 \leqq 2$ usw.

Zu 14.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{B}_{5,4})$ reell, $n=5$, $m=5$, $\dim T_5 \leqq 17$ usw.

Zu 13.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{4,0,*})$ areell, $n=1$, $m=1$, $\dim T_1 \leqq 11$. J-Bahndimension $\leqq 12$ bei ${}^r\pi_{1,1}(\mathbf{D}_{4,0,*}+\mathbf{A}_0)$. Invariante hermitesche Form.

Zu 13.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{4,3,*})$ areell, $n=3$, $m=3$, $\dim T_2 \leqq 9$ usw.

Zu 13.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{4,4,*})$ areell, $n=5$, $m=3$, $\dim T_3 \leqq 7$ usw.

Zu 13.9: ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{5,3,*})$ antireell, $n=3$, $m=2$, $\dim T_2 \leqq 15$, J-Bahndimension bei ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{5,3}+\mathbf{A}_{1,0}) \leqq 18$; die Bildmenge von T_3 ist echt kleiner.

Zu 12.5 und 14.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{5,4,*})$ reell, $n=5$, $m=3$, $\dim T_3 \leqq 13$, $\dim T_5 \leqq 11$.

Zu 14.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{6,3})$ reell, $n=2$, $m=2$, $\dim T \leqq 23$. Invariante quadratische Form mit 31-dimensionaler Nullmenge.

Zu 14.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{7,3,*})$ reell, $n=3$, $m=2$, $\dim T_2 \leqq 33$. T_3 ist echt kleiner.

Zu 14.2: ${}^r\pi_1(\mathbf{D}_{7,5,*})$ reell, $n=7$ usw.

15.3. Noch nicht erfaßt wurde $\pi_1(\mathbf{D}_{6,1})$. Eine bequeme Darstellung dieser Algebra findet man in Verf. „Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I"[14]: es ergeben sich dort die invarianten Mannigfaltigkeiten $P \times P = 0$ und $\{(P \times P)\, P, P\} = 0$ der Dimensionen 31 und 16.

16. $\pi_5(\mathbf{A}_5)$

Wir haben noch

$$\pi_3(\mathbf{A}_{5,1}),\ \pi_3(\mathbf{A}_{5,3}),\ \pi_3(\mathbf{A}_{5,3,*})$$

auszuschließen.

$\pi_3(\mathbf{A}_5)$ gibt an, wie $\pi_1(\mathbf{A}_5)$ die schiefen 3-Tensoren $p_{\alpha\beta\gamma}$ transformiert. Man setze

$$p^{\varkappa\lambda\mu} = I^{\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu}\, p_{\alpha\beta\gamma}\,,$$

wo $I^{\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu} = \pm 1$ für gerade bzw. ungerade Permutationen $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu$ von $1\ldots6$ ist und übrigens verschwindet. Man definiere weiter

$$a_i^k = p_{i\alpha\beta}\, p^{k\alpha\beta}\,.$$

Bei $\pi_3(\mathbf{A}_{5,3,*})$ lautet die Realitätsbedingung für die 3-Tensoren: alle $p_{\alpha\beta\gamma}$ sind reell. Die verschiedenen Ränge der Matrix a_i^k liefern dann verschiedene invariante Mannigfaltigkeiten.

$\pi_1(\mathbf{A}_{5,1})$ und $\pi_1(\mathbf{A}_{5,3})$ haben invariante Hermitesche Formen

$$\sum \varepsilon_\nu x_\nu \bar{x}_\nu$$

mit

$$\varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_6 = 1$$

[14]) Proc. Kon. Akad. Wet. A **57**, 218—230 (1954), insbesondere 227 = Indag. Math. **16**.

bzw.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1 .$$

Die Realitätsbedingungen für die Tensoren lauten

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma p_{\alpha\beta\gamma} = p_{\varkappa\lambda\mu} ,$$

wo $\alpha\beta\gamma\varkappa\lambda\mu$ gerade Permutation von $1 \ldots 6$ ist. Die Matrix a_i^k hat im allgemeinen den Rang 6 (z. B. wenn $p_{123} = p_{456} = 1$ ist und die übrigen verschwinden). Weiter hat man die invarianten Mannigfaltigkeiten der $p_{\alpha\beta\gamma}$ mit Rang $(a_i^k) = 2$ und 4, nämlich für

$\pi_3(\mathbf{A}_{5,1})$ und $\pi_3(\mathbf{A}_{5,3})$: Wenn $p_{123} = p_{456} = p_{145} = p_{236} = 1$ und die übrigen verschwinden, ist Rang $(a_i^k) = 2$. Für

$\pi_3(\mathbf{A}_{5,1})$: Wenn $p_{124} = p_{365} = p_{125} = p_{346} = p_{134} = p_{265} = p_{135} = p_{245} = 1$ ist und die übrigen verschwinden, ist Rang $(a_i^k) = 4$. Für

$\pi_3(\mathbf{A}_{5,3})$: Wenn $p_{123} = p_{456} = p_{145} = p_{236} = p_{124} = -p_{356} = p_{135} = -p_{246} = 1$ ist und die übrigen verschwinden, ist Rang $(a_i^k) = 4$.

Damit sind auch diese ausgeschlossen.

17. Die Lösungen des Problems P

Zusammenfassend erhalten wir für **J** die reellen Darstellungen, die gehören zu:

(1) $\pi_1(\mathbf{A}_{l,j}), l \geqq 1.$
(2) $\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{l,j} + \mathbf{A}_0), l \geqq 1.$
(3) $\pi_{1,1,0,1}(\mathbf{A}_{l,0} + \mathbf{A}_{1,**} + \mathbf{A}_0), l \geqq 1.$
(4) $\pi_{1,1,0,1}(\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,**} + \mathbf{A}_0).$
(5) $2\pi_1(\mathbf{A}_{3,0,*}).$
(6) $\pi_2(\mathbf{B}_{l,j}), l \geqq 1.$
(7) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{l,0} + \mathbf{A}_{1,1}), l \geqq 1.$
(8) $\pi_{2,0,1}(\mathbf{B}_{l,**} + \mathbf{A}_0), l \geqq 1.$
(9) $\pi_1(\mathbf{B}_{3,j}), j = 0, 3.$
(10) $\pi_1(\mathbf{B}_{4,j}), j = 0, 1.$
(11) $\pi_{1,1}(\mathbf{B}_{3,0} + \mathbf{A}_{1,1}).$
(12) $\pi_{1,0,1}(\mathbf{B}_{3,**} + \mathbf{A}_0).$
(13) $\pi_1(\mathbf{C}_{l,j}), j < l > 1.$
(14) $\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,j} + \mathbf{A}_0), j < l > 1.$
(15) $\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,j} + \mathbf{A}_{1,0}), j < l > 1.$
(16) $\pi_3(\mathbf{D}_{l,j}), l \geqq 2, j \neq 1, 2.$
(17) $\pi_3(\mathbf{D}_{l,j,*}), l \geqq 2.$
(18) $\pi_{3,1}(\mathbf{D}_{l,0} + \mathbf{A}_{1,1}), l \geqq 2.$
(19) $\pi_{3,1}(\mathbf{D}_{l,1} + \mathbf{A}_{1,0}), l \geqq 3.$
(20) $\pi_{3,0,1}(\mathbf{D}_{l,**} + \mathbf{A}_0), l \geqq 2.$
(21) $\pi_1(\mathbf{G}_{2,j}).$
(22) $\pi_{1,1}(\mathbf{G}_{2,0} + \mathbf{A}_{1,1}).$
(23) $\pi_{1,0,1}(\mathbf{G}_{2,**} + \mathbf{A}_0).$

18. Einbettung von J

18.1. J sei Standuntergruppe eines *halbeinfachen* F. Dann ist

$$\dim \mathbf{F} = r + n ,$$

wo r die Dimension von $\mathbf{J}$ und n die der Darstellung ist, in der $\mathbf{J}$ vorliegt.

Ferner ist $\operatorname{rang}\mathbf{F} = \operatorname{rang}\mathbf{J}$ + Multiplizität der Wurzel 0 oder um 1 größer, wenn $\mathbf{J}$ einen Summanden $\mathbf{A}_0$ hat.

Man erhält in den Fällen von 17:

	r	n	rang $\mathbf{F}$
(1)	$l^2 + 2l$	$2(l+1)$	l
(2)	$l^2 + 2l + 1$	$2(l+1)$	$l+1$
(3)	$l^2 + 2l + 6 + 1$	$4(l+1)$	$l + 2 + 1$
(4)	$3 + 6 + 1$	8	$1 + 2 + 1$
(5)	15	10	3
(6)	$l(2l+1)$	$2l+1$	$l+1$
(7)	$l(2l+1) + 3$	$2(2l+1)$	$l+1$
(8)	$2l(2l+1) + 1$	$2(2l+1)$	$2l+1$
(9)	21	8	3
(10)	36	16	4
(11)	$21 + 3$	16	4
(12)	$42 + 1$	16	7
(13)	$l(2l+1)$	$4l$	l
(14)	$l(2l+1) + 1$	$4l$	$l+1$
(15)	$l(2l+1) + 3$	$4l$	$l+1$
(16)	$l(2l-1)$	$2l$	l
(17)	$l(2l-1)$	$2l$	l
(18)	$l(2l-1) + 3$	$4l$	$l+1$
(19)	$l(2l-1) + 3$	$4l$	$l+1$
(20)	$2l(2l-1) + 1$	$4l$	$2l+1$
(21)	14	7	$2 + 1$
(22)	$14 + 3$	14	$2 + 1$
(23)	$28 + 1$	14	$4 + 1$

Ist $\mathbf{F}$ nicht komplex einfach, so muß nach Satz 4.4 $\mathbf{J}$ einfach und $r = n$ sein. Das kommt nur bei (6) vor: $\mathbf{B}_1$ in $\mathbf{D}_2$. Übrigens können wir $\mathbf{F}$ als komplex einfach voraussetzen. Eine Vergleichung der Ränge und Dimensionen einfacher Lie-Algebren mit den sich aus der Aufzählung ergebenden führt zu den Möglichkeiten:

(1) $\pi_1(\mathbf{A}_{2,j})$ in $\mathbf{G}_2$.
(2) $\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{l,j} + \mathbf{A}_0)$ in $\mathbf{A}_{l+1}$, $l \geqq 1$.
(6) $\pi_2(\mathbf{B}_{l,j})$ in $\mathbf{D}_{l+1}$, $l \geqq 1$.
(10) $\pi_1(\mathbf{B}_{4,j})$ in $\mathbf{F}_4$, $j = 0, 1$.
(13) $\pi_1(\mathbf{C}_{4,j})$ in $\mathbf{F}_4$.
$\pi_1(\mathbf{C}_{7,j})$ in $\mathbf{E}_7$.
(15) $\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,j} + \mathbf{A}_{1,0})$ in $\mathbf{B}_{l+1}$ oder $\mathbf{C}_{l+1}$, $j < l > 1$ oder für $l = 5$ in $\mathbf{E}_6$.
(16) $\pi_3(\mathbf{D}_{l,j})$ in $\mathbf{B}_l$ oder $\mathbf{C}_l$, $l \geqq 2$, $j \neq 1, 2$ oder für $l = 6$ in $\mathbf{E}_6$.
(17) $\pi_3(\mathbf{D}_{l,j,*})$ in $\mathbf{B}_l$ oder $\mathbf{C}_l$, $l \geqq 2$, oder für $l = 6$ in $\mathbf{E}_6$.
(21) $\pi_1(\mathbf{G}_{2,j})$ in $\mathbf{B}_3$ oder $\mathbf{C}_3$.

Hier läßt sich noch allerlei mit den Argumenten von RHL, S. 398 ausschließen[15]). Übrig bleiben nur:

(1) $\pi_1(\mathbf{A}_{2,j})$ in $\mathbf{G}_2$.
(2) $\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{l,j} + \mathbf{A}_0)$ in $\mathbf{A}_{l+1}$, $l \geqq 1$.
(6) $\pi_2(\mathbf{B}_{l,j})$ in $\mathbf{D}_{l+1}$, $l \geqq 1$.
(10) $\pi_1(\mathbf{B}_{4,j})$ in $\mathbf{F}_4$.
(15) $\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,j} + \mathbf{A}_{1,0})$ in $\mathbf{C}_{l+1}$, $j < l > 1$.
(16) $\pi_3(\mathbf{D}_{l,j})$ in $\mathbf{B}_l$, $l \geqq 2, j \neq 1, 2$.
(17) $\pi_3(\mathbf{D}_{l,j,*})$ in $\mathbf{B}_l$.
(21) $\pi_1(\mathbf{G}_{2,j})$ in $\mathbf{B}_3$.

18.2. In 18.1 wurde zu $\mathbf{J}$ nur der *komplexe* Typ der halbeinfachen $\mathbf{F}$ angegeben, in das $\mathbf{J}$ sich einbetten läßt. Wir stellen nun die reellen Typen fest.

Sei $\mathbf{J}$ in $\mathbf{F}$ gegeben, C der durch $\mathbf{F}$ bestimmte Semimorphismus von $\mathbf{F} \otimes$ co, C' seine Restriktion auf $\mathbf{J} \otimes$ co. Der Stamm $\mathbf{H}'$ von $\mathbf{J} \otimes$ co sei so gewählt und geordnet, daß $C\mathbf{H}' = \mathbf{H}'$ und C' bezüglich $\mathbf{H}'$ die übliche Form besitzt. $\mathbf{H}'$ sei zu einem Stamm $\mathbf{H}$ von $\mathbf{F} \otimes$ co erweitert durch evtl. Hinzunahme der Vektoren vom Gewicht 0 (bei der Darstellung von $J \otimes$ co als Subalgebra der adjungierten von $\mathbf{F} \otimes$ co).

In RHL ergab sich die Lage von $\mathbf{F} \otimes$ co bezüglich $\mathbf{J} \otimes$ co als wesentlich eindeutig bestimmt. Man hat noch festzustellen, auf welche Weisen sich gegebenes C' zu einem Semimorphismus von $F \otimes$ co fortsetzen läßt.

Man beachte, daß in allen Fällen von 18.1 außer im Fall (17), CC_0 auf $\mathbf{H}$ die Identität ist. Wir behandeln die einzelnen Fälle:

(2) Die primitiven Wurzelformen von $\mathbf{J}$ seien wie üblich $\varrho_1, \ldots, \varrho_l$; ferner sei ϱ_{l+1} ein Gewicht, so daß $\varrho_1, \ldots, \varrho_l, \varrho_{l+1}$ in üblicher Weise den Graphen von $\mathbf{F}$ bilden. $CC_0 = \tilde{h}$, wo

$$\varrho_j(\mathbf{h}) = \pi i, \quad \varrho_{l+1}(\mathbf{h}) = 0 \quad \text{oder} \quad \pi i, \varrho_i(\mathbf{h}) = 0 \quad \text{übrigens.}$$

Das $\mathbf{h}$ im zweiten Fall kann mit üblichen Methoden (siehe YLG) durch eines mit

$$\varrho_{j+1}(\mathbf{h}) = \pi i, \quad \varrho_i(\mathbf{h}) = 0 \quad \text{übrigens}$$

ersetzt werden. Dies ergibt die Einbettungen

$$\mathbf{A}_{l,j} + \mathbf{A}_0 \quad \text{in} \quad \mathbf{A}_{l+1,j} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}_{l+1,j+1} \quad \text{für} \quad j \neq 0,$$
$$\mathbf{A}_{l,0} + \mathbf{A}_0 \quad \text{in} \quad \mathbf{A}_{l+1,0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}_{l+1,1}.$$

(15) Die primitiven Wurzelformen von $\mathbf{J}$ seien (in dieser Reihenfolge) $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_l$, wo $\varrho_1, \ldots, \varrho_l$ in üblicher Weise den Graphen von $\mathbf{C}_l$ ergeben. $CC_0 = \tilde{h}$ mit (für $j \neq 0$)

$$\varrho_j(\mathbf{h}) = \pi i, \quad \varrho_0(\mathbf{h}) = 0 \quad \text{oder} \quad \pi i, \varrho_i(\mathbf{h}) = 0 \quad \text{übrigens}.$$

Wie im Fall (2) schließt man auf Einbettungen:

$$\mathbf{C}_{l,j} + \mathbf{A}_{1,0} \quad \text{in} \quad \mathbf{C}_{l+1,j} \quad \text{oder} \quad \mathbf{C}_{l+1,j+1}.$$

(6) Der Stamm von $\mathbf{J} = \mathbf{D}_l$ kann so gewählt werden, daß er aus dem von $\mathbf{F} = \mathbf{B}_l$ durch Identifikation von ϱ_1 und ϱ_2 entsteht; der Ast $\mathbf{e}_{\varrho_1} + \mathbf{e}_{\varrho_2}$ von $\mathbf{J}$

[15]) Das Argument bei $\mathbf{C}_5 + \mathbf{A}_1$ bezieht sich in Wirklichkeit auf $\mathbf{D}_6$. Bei $\mathbf{C}_5 + \mathbf{A}_1$ betrachte man die Wurzelformen und Gewichte.

ersetzt $\mathbf{e}_{\varrho 1}$, $\mathbf{e}_{\varrho 2}$ von $\mathbf{F}$. $CC_0 = \tilde{h}A$ mit

$$\varrho_j(\mathbf{h}) = \pi_i, \quad \varrho_i(\mathbf{h}) = 0 \quad \text{übrigens},$$

$A = 1$ auf ganz $\mathbf{H}$ oder mit Ausnahme durch $A\varrho_1 = \varrho_2$.

Das ergibt die Einbettungen

$$\mathbf{B}_{l,j} \text{ in } \mathbf{D}_{l+1,j+1} \text{ oder } \mathbf{D}_{l+1,j+1,*} \text{ für } j \neq 0, 1, 2,$$
$$\mathbf{B}_{l,0} \text{ in } \mathbf{D}_{l+1,0} \text{ oder } \mathbf{D}_{l+1,0,*},$$
$$\mathbf{B}_{l,1} \text{ in } \mathbf{D}_{l+1,0,*} \text{ oder } \mathbf{D}_{l+1,3}.$$

(16) Der Stamm kann so gewählt werden, daß aus dem Graphen von $\mathbf{B}_l$

$$\varrho_2 - \varrho_3 - \cdots - \varrho_l \Rightarrow \varrho_1$$

der von $\mathbf{D}_l$ als

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \varrho_l \\ & & & & & \nearrow & \\ \varrho_2 & - & \varrho_3 & - & \cdots & - & \varrho_{l-1} \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & & \varrho_l + 2\varrho_1 \end{array}$$

entsteht. $CC_0 = \tilde{h}$ mit

$\varrho_{j-1}(\mathbf{h}) = \pi i$, $\varrho_1(\mathbf{h}) = 0$ oder πi, $\varrho_i(\mathbf{h}) = 0$ übrigens für $j \neq 0, 1, 2$ führt zu den Einbettungen:

$$\mathbf{D}_{l,j} \text{ in } \mathbf{B}_{l,j-1} \text{ oder } \mathbf{B}_{l,l-j+2} \text{ für } j \neq 0, 1, 2,$$

$\mathbf{D}_{l,0}$ in $\mathbf{B}_{l,0}$ oder $\mathbf{B}_{l,1}$

($j = 1, 2$ sind ausgeschlossen).

(17) Man verwende die orthogonale Basis $\omega_1, \ldots, \omega_l$ von $\mathbf{H}$.

$$\begin{aligned} CC_0\mathbf{e}_{\omega_l} &= \varepsilon\mathbf{e}_{-\omega_l}, & \varepsilon &= \pm 1, \\ CC_0\mathbf{e}_{\pm\omega_i} &= -\varepsilon\mathbf{e}_{\pm\omega_i}, & i &\leqq j-1, \\ CC_0\mathbf{e}_{\pm\omega_i} &= \varepsilon\mathbf{e}_{\pm\omega_i}, & j &\leqq i < l. \end{aligned}$$

Den reellen Typ von $\mathbf{B}_l$ bestimmt man hier aus der Signatur der Killing-Cartan-Form. Die Zahl der positiven Quadrate wird für $j \neq 0$ und

$$\varepsilon = \quad 1 : 2(j-1) + 4(j-1)(l-j) + 1 + 2(l-1) + 1,$$
$$\varepsilon = -1 : 2(l-j) + 4(j-1)(l-j) + 1 + 2(l-1) + 1.$$

Das ergibt die Einbettungen:

$$\mathbf{D}_{l,j,*} \text{ in } \mathbf{B}_{l,j} \text{ oder } \mathbf{B}_{l,l-j+1} \text{ für } j \neq 0.$$

Analog für $j = 0$:

$$\mathbf{D}_{l,0,*} \text{ in } \mathbf{B}_{l,1} \text{ oder } \mathbf{B}_{l,2}.$$

(1) Als Graphen von $\mathbf{A}_2$ in $\mathbf{G}_2$ erhält man

$$\varrho_1 \text{———} \varrho_1 + \varrho_2$$

Einbettungen:

$$\mathbf{A}_{2,0} \text{ in } \mathbf{G}_{2,0},$$
$$\mathbf{A}_{2,1} \text{ in } \mathbf{G}_{2,2}.$$

(21) Aus dem Stamm von $\mathbf{B}_3$ mit dem Graphen

$$\varrho_2 - \varrho_3 \Rightarrow \varrho_1$$

erhält man den Stamm von $\mathbf{G}_2$ mittels der Relation

$$\varrho_2 + 2\varrho_3 + 3\varrho_1 = 0 .$$

Der Stamm wird

$$\varrho_3 \Rightarrow \varrho_1 .$$

Einbettungen:

$$\mathbf{G}_{2,0} \text{ in } \mathbf{B}_{3,0} ,$$
$$\mathbf{G}_{2,2} \text{ in } \mathbf{B}_{3,3} .$$

(10) Aus dem Graphen von $\mathbf{F}_4$,

$$\varrho_2 - \varrho_4 \Rightarrow \varrho_3 - \varrho_1$$

erhält man mit

$$\sigma = 2\varrho_1 + 2\varrho_3 + \varrho_4$$

den von $\mathbf{B}_4$,

$$\sigma - \varrho_2 - \varrho_4 \Rightarrow \varrho_3 .$$

Einbettungen:

$$\mathbf{B}_{4,0} \text{ in } \mathbf{F}_{4,0} \text{ oder } \mathbf{F}_{4,1} ,$$
$$\mathbf{B}_{4,1} \text{ in } \mathbf{F}_{4,1} .$$

Der erste Zeile gibt die elliptische und hyperbolische Oktavenebene; die zweite das Äußere der hyperbolischen Oktavenebene.)

18.3. Zusammenfassend:

Satz: Einbettungen eines P genügenden **J** mit J als Tangential-Standuntergruppe in *halbeinfaches* **F** sind:

(2) ${}^r\pi_{1,1}(\mathbf{A}_{l,j} + \mathbf{A}_0)$ in $\mathbf{A}_{l+1,j}$ oder $\mathbf{A}_{l+1,j+1}$, $l \geqq 1$.

(15) ${}^r\pi_{1,1}(\mathbf{C}_{l,j} + \mathbf{A}_{1,0})$ in $\mathbf{C}_{l+1,j}$ oder $\mathbf{C}_{l+1,j+1}$, $j < l > 1$.

(6) ${}^r\pi_2(\mathbf{B}_{l,j})$ in $\mathbf{D}_{l+1,j+1}$ oder $\mathbf{D}_{l+1,j+1,*}$, $l \geqq 1$, $j \neq 0, 1, 2$.
${}^r\pi_2(\mathbf{B}_{l,0})$ in $\mathbf{D}_{l+1,0}$ oder $\mathbf{D}_{l+1,0,*}$, $l \geqq 1$.
${}^r\pi_2(\mathbf{B}_{l,1})$ in $\mathbf{D}_{l+1,0,*}$ oder $\mathbf{D}_{l+1,3}$, $l \geqq 1$.

(16) ${}^r\pi_3(\mathbf{D}_{l,j})$ in $\mathbf{B}_{l,j-1}$ oder $\mathbf{B}_{l,l-j+2}$ für $l \geqq 2$, $j \neq 0, 1, 2$.
${}^r\pi_3(\mathbf{D}_{l,0})$ in $\mathbf{B}_{l,0}$ oder $\mathbf{B}_{l,1}$, $l \geqq 2$.

(17) ${}^r\pi_3(\mathbf{D}_{l,j,*})$ in $\mathbf{B}_{l,j}$ oder $\mathbf{B}_{l,l-j+1}$ für $j \neq 0$,
${}^r\pi_3(\mathbf{D}_{l,0*})$ in $\mathbf{B}_{l,1}$ oder $\mathbf{B}_{l,2}$.

(1) ${}^r\pi_1(\mathbf{A}_{2,0})$ in $\mathbf{G}_{2,0}$,
${}^r\pi_1(\mathbf{A}_{2,1})$ in $\mathbf{G}_{2,2}$.

(21) ${}^r\pi_1(\mathbf{G}_{2,0})$ in $\mathbf{B}_{3,0}$,
${}^r\pi_1(\mathbf{G}_{2,2})$ in $\mathbf{B}_{3,3}$.

(10) ${}^r\pi_1(\mathbf{B}_{4,0})$ in $\mathbf{F}_{4,0}$ oder $\mathbf{F}_{4,1}$,
${}^r\pi_1(\mathbf{B}_{4,1})$ in $\mathbf{F}_{4,1}$.

Alle diese Einbettungen sind wesentlich eindeutig bestimmt.

Bei (6), (16), (17), (2), (15) ist F zu beschreiben als Invarianzgruppe einer nicht-entarteten hermiteschen Form über dem reellen, komplexen bzw. Quaternionenkörper mit J als Standuntergruppe eines nicht-isotropen Vektors. (10) gibt das Analoge für den Oktavenfall. In 21 ist F als niedrigste Spindarstellung von $B_{3,j}$ zu beschreiben, mit J als Standuntergruppe eines nicht-isotropen Vektors. (1) ist die Automorphismengruppe der Oktaven oder Splitoktaven mit J als Standuntergruppe eines nicht-isotropen Vektors.

19. Ausnutzung der Bedingungen zweiter Stufe

19.1. Nach 5 haben wir die Benutzung der Bedingungen zweiter Stufe vermieden. Wenden wir diese nun an, so bleiben für J höchstens die Lie-Algebren zulässig, die sich auf der ersten Stufe für halbeinfache $\mathbf{F}$ ergeben haben (siehe 18.3).

Wir können uns auf zweiter Stufe übrigens mit Φ_2 begnügen. Wir haben dann von jeder der linearen Gruppen aus 17 die Standuntergruppe eines allgemeinen Vektors (nicht Lichtvektor) im Tangentialraum an die Bahn festzustellen und zuzusehen, ob P auf sie zutrifft, d. h. ob sie in 18 vorkommt.

Von den in 18.3 aufgezählten $\mathbf{F}$ sind jedenfalls (2), (15), (10) als $\mathbf{J}$ unmöglich. Das gilt trotz (1) auch für den Fall (2) mit $l = 1$, da ${}^r\pi_1(\mathbf{A}_{2,j})$ im 6-dimensionalen statt im $(4 + 1)$-dimensionalen linearen Raum wirkt.

Die übrigbleibenden J sind

a) die Invarianzuntergruppen reeller nicht-entarteter quadratischer Formen (siehe (6), (16), (17)),

b) ${}^r\pi_1(G_{2,0})$, ${}^r\pi_1(G_{2,2})$,

c) ${}^r\pi_1(B_{3,0})$, ${}^r\pi_1(B_{3,3})$.

Aus a) erhält man bei parabolischer Einbettung eine reelle euklidische oder pseudo-euklidische Geometrie. Ist F dagegen halbeinfach, so erhält man die entsprechende nichteuklidische Geometrie: in einem reellen cartesischen Raum ein durch eine nicht-entartete Quadrik bestimmtes Gebiet, auf das die Invarianzgruppe der Quadrik wirkt.

Das J aus b) läßt sich parabolisch oder gemäß 18.3 (21) einbetten. Das J aus c) läßt sich nur parabolisch einbetten.

So ergibt sich:

19.2. **Hauptsatz:** Die Geometrien $\overline{R}$, ϱ, $\overline{F}$ gemäß 0.2, die den Bedingungen $\Theta_i(R, \varrho, F)$ $(i = 1, 2, 3)$, Φ_i $(i = 1, 2, 3)$ erster Stufe (siehe 0.3–0.4 und Φ_i $(i = 1, 2)$ zweiter Stufe (siehe 0.5) genügen, sind

a) die n-dimensionalen euklidischen, nichteuklidischen $(n \geqq 2)$, pseudo-euklidischen, pseudo-nichteuklidischen $(n \geqq 3)$ Geometrien,

b) die parabolische Geometrie mit der Standuntergruppe ${}^r\pi_1(G_{2,0})$ oder ${}^r\pi_1(G_{2,2})$, und die Geometrie mit der Gruppe $B_{3,0}$ oder $B_{3,3}$ und der Tangential-Standuntergruppe ${}^r\pi_1(G_{2,0})$ bzw. ${}^r\pi_1(G_{2,2})$,

c) die parabolische Geometrie mit der Standuntergruppe ${}^r\pi_1(B_{3,0})$ oder ${}^r\pi_1(B_{3,3})$.

Stellt man noch Bedingungen dritter bzw. vierter Stufe, so fallen b) bzw. c) weg. Fordert man, daß F die 1-Komponente der *vollen* Isometriegruppe von ϱ ist, so fallen b) und c) schon auf zweiter Stufe fort.

Bei dieser Klassifikation wird eine Quasimetrik ϱ', die Funktion von ϱ ist, als gegenüber ϱ nicht wesentlich neu betrachtet.

Weitere Komponenten von F und J, außer der 1-Komponente, und Überlagerungen von F sind bei dieser Klassifikation nicht berücksichtigt worden.

(Eingegangen am 15. Januar 1964)

Lie groups in the foundations of geometry [1964c]

Adv. Math. 1 (1964), 145–190
[Zbl 0125.10003; MR 0170974]

1. Preliminary Remarks 145
2. The Helmholtz-Lie Space Problem 148
3. The Weyl-Cartan Space Problem 157
4. Geometries Connected with the Exceptional Simple Lie Groups 159
5. Tits Geometries 176
References 182
Appendix 189

1. Preliminary Remarks

1.1. The notion of *homogeneous space* will be used in this chapter. Though this notion is much older, the term has been coined by Elie Cartan [1].

A pair consisting of a space R and a transitive group F of topological mappings of R onto itself is called a *homogeneous space*. (Transitivity means: for every pair $x, y \in R$ there is an $f \in F$ such that $fx = y$.)

In a homogeneous space $\lceil R, F \rceil$ the set

$$J_{x_0} = \{f \in F \mid fx_0 = x_0\}$$

is a subgroup of F, the isotropy or *stability group* of x_0. If

$$\varphi x_0 = x_1, \qquad \varphi \in F,\ x_i \in R,$$

then

$$J_{x_1} = \varphi J_{x_0} \varphi^{-1}$$

so the stability groups of the points of R are *conjugate* in F. Often we will speak of *the* stability group of a homogeneous space without mentioning the point from which it was taken. If

$$gx_0 = x_1, \qquad g \in F,\ x_i \in R$$

then

$$gJ_{x_0} = \{f \in F \mid fx_0 = x_1\}$$

puts R in a (canonical) one-to-one relation with the set F/J_{x_0} of left-hand cosets of J_{x_0} in F.

In the sequel we restrict ourselves to "nice" cases without going into details about the nicety conditions which have to be fulfilled (see, e.g., Freudenthal [1]). Then we may state:

As a set of mappings of R onto itself, F is gifted with some topology in which it is a topological group represented in R, such that

$$\lceil x, f \rceil \to fx$$

is a continuous or even open mapping of $\lceil R, F \rceil$ onto R with

$$(fg)x = f(gx)$$

and J_x is a closed subgroup. Then, using the canonical identification of R with F/J, the homogeneous space $\lceil R, F \rceil$ may also be defined as the space of left-hand cosets of J in F with the usual topology and acted on by left-hand multiplications with elements of F.

Starting with a topological group F and a closed subgroup J, one can define a homogeneous space by putting $R = F/J$, providing R with the usual topology, and defining f_a for every $a \in F$, such that

$$f_a x = acJ \qquad \text{for all} \qquad x = cJ \in R.$$

This yields a representation of F in R. Its *kernel* consists of those a that fulfill $acJ = cJ$ identically in c; in other words, the kernel is the greatest normal subgroup N of F in J. The representation is faithful if, and only if, J does not contain a normal subgroup of F with more than one element. Otherwise, it leads to a homogeneous space $\lceil R, F/N \rceil$.

A homogeneous space is called *asystatic* (Lie) if the stability groups of all points are different, in other words, if J is not a normal subgroup of any larger subgroup of F.

1.2. We shall mainly be concerned with Lie groups. We admit "mixed" (not connected) Lie groups. The algebra of a Lie group is denoted by the corresponding boldface letter. Boldface type is also used for elements and subsets of Lie algebras.

The inner automorphisms of a Lie group G yield the adjoint representation $\tilde{G}$ of G. For $a \in G$ the inner automorphism taking $x \in G$ into axa^{-1} is called $\tilde{a}$. The adjoint group of G admits of a natural linear representation in G which is also called $\tilde{G}$. Likewise,

$$\tilde{a}\mathbf{x} = a\mathbf{x}a^{-1} \qquad \text{for} \quad a \in G, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{G}.$$

The same notation is used in the adjoint algebra,

$$\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{x} = [\mathbf{a}, \mathbf{x}].$$

A closed subgroup J of a Lie group is a Lie group too; the homogeneous space $R = F/J$ is an analytic variety acted on analytically by F.

Let $f_t \in F$ with $f_0 = 1$, $(df_t/dt)_{t=0} = \mathbf{f} \in \mathbf{F}$ define a differentiable curve $f_t J$ on R. Its tangential vector in $x_0 = J$ may be identified with $\mathbf{f} + \mathbf{J}$, so the tangential space T of R in x_0 may be identified with the linear space $\mathbf{F}$ mod $\mathbf{J}$. *Then $j \in J$ takes $f_t J$ into $jf_t j^{-1} J$, hence $\mathbf{f} + \mathbf{J}$ into $j\mathbf{f}j^{-1} + \mathbf{J}$. J behaves in T as a linear group; every $j \in J$ acts upon T, such as $\tilde{j}$ does upon* $\mathbf{F}$ mod $\mathbf{J}$.

However, this representation of J need not be faithful, in other words, generally J is not fully described by its linear behavior around x_0. This is a crucial point in solutions of the Helmholtz-Lie space problem. A counter example is the projective line with its projective group. If x_0 is the point at infinity, the translations leave x_0 and all vectors at x_0 invariant.

Generally, let K be the set of all $j \in J$ that leave T pointwise invariant, hence $k \in K$ if, and only if, $\tilde{k}\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}$ mod $\mathbf{J}$ for all $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$. Then K is a normal subgroup of J. The behavior of J on T is described by J/K, the (first-order) *retrenchment* (Lie: Verkürzung) of J. (Higher order tangential spaces lead to higher order retrenchments with analogous properties. They shall not be considered in this chapter.)

The elements $\mathbf{k}$ of $\mathbf{K}$ are characterized by $\tilde{\mathbf{k}}\mathbf{f} \equiv 0$ mod $\mathbf{J}$. So $\mathbf{K}$ is the largest subset of $\mathbf{J}$ fulfilling $[\mathbf{K}, \mathbf{F}] \subset \mathbf{J}$. It is not known whether $\mathbf{K}$ is always solvable.

As a linear space $\mathbf{F}$ may be written as a direct sum $\mathbf{J} + \mathbf{F}_1$. By the local mapping

$$\mathbf{f}_1 \to (\exp \mathbf{f}_1)J \qquad (\mathbf{f}_1 \in \mathbf{F}_1),$$

$R = F/J$ may be locally identified with $\mathbf{F}_1$. Moreover, if $\mathbf{F}_1$ is invariant under all $\tilde{j}$ $(j \in J)$, J behaves locally in R, such as $\tilde{J}$ does in $\mathbf{F}_1$. Then a neighborhood of x_0 is pointwise invariant under K; if R is connected, this is true for all R, and K comes out to be trivial.

Generally, if K is trivial and hence J locally linear, the space is called *first-order homogeneous*. This happens to a connected space as soon as F splits linearly into $\mathbf{J} + \mathbf{F}_1$ with $\mathbf{F}_1$ invariant under $\tilde{j}$ $(j \in J)$, for instance, if J is compact or semisimple and connected.

2. The Helmholtz-Lie Space Problem

2.1. In the 19th century, until Hilbert [1] published his *Grundlagen der Geometrie* (1899), "foundations of geometry" meant a kind of research instigated in 1868 by Helmholtz' *Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen* [2]; once, in 1902 Hilbert himself resumed that older terminology [2]. Its first occurrence, previous even to Helmholtz, is 1854 in the title of Riemann's "Habilitationsvortrag," *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, which was then published in 1867 [1].

2.2. Riemann [1] introduced what is now called Riemannian metrics. At the end of his lecture Riemann asked for those manifolds with Riemannian metric in which the shapes can be moved without deformation. They are characterized by constant curvature. The first proof for this assertion was given by Lipschitz [1]. It is evident that the change-free mobility has to be required for the (two-dimensional) surface elements only. According to Schur [1] from the third dimension onward it suffices to suppose that the surface elements can be freely turned; this capability implies that of being freely displaced.

2.3. Though the title of Helmholtz' paper aims at a philosophical reproof of Riemann's view (facts versus hypotheses), it is mathematically independent of Riemann's. Against Riemann, Helmholtz argued that metric presupposes congruence and, hence, the existence and free mobility of solid bodies. But as soon as this property is granted, one would be able to prove the ds^2 (square of the line element) to be a quadratic form on the tangential space, instead of postulating such a ds^2 as did Riemann.

This objection, repeated again and again in the 19th century (originally, even by Poincaré), is, of course, false. Physically, Riemannian metric does not depend on the existence of solid *bodies*; it only needs solid measuring *staffes* (one-dimensional bodies). The use of such measuring staffes, however, does not anticipate on sophisticated congruence axioms.

2.4. Helmholtz's approach is based on four axioms. The first postulates *that space is an n-dimensional manifold with differentiability properties.* The second axiom would read in a modern formulation: *There is a*

metric, and motions are the isometric transformations belonging to the component of identity. Notice, however, that Helmholtz does not suppose that distance is nonnegative or fulfills some other axioms of our metric spaces; distance is no more than a nice function. Helmholtz third axiom is *that of free mobility of solid bodies*. This means that *by motion every (finite) point set can be carried into any congruent one*. Helmholtz takes for granted that after fixing $n - 1$ general points the mobility is restricted to 1-parameter motions. His fourth axiom requires *that this motion should be periodic (and not spiraling)*. This is the so-called *monodromy* axiom.

It is Helmholtz' claim that his axioms characterize the class of *Euclidean* and *non-Euclidean* geometrics.

Helmholtz's axioms were meant as local assumptions, valid for general point sets, and nice functions. His formulations were surprisingly clear for that time. His axioms and methods anticipated geometric group theory and Lie groups, though possibly at that time Helmholtz had never heard of groups, and Lie groups had not yet come into existence. Helmholtz's exposition suffers from this lack of an explicit formulation of the underlying notions of group theory. Moreover, there is a serious gap in his proof, as pointed out by Lie [1, 2]. This criticism is not to belittle the merit of Helmholtz' work, which was the first serious approach to foundations of geometry after Steiner's failure and the first approach at all by group theory methods.

2.5. From about 1870 Lie studied continuous groups. In 1890 he applied his methods to the Helmholtz problem [1, 2]. When analyzing Helmholtz's axioms and proofs, he noticed a tacit substitution of *infinitesimal free mobility* for free mobility, such as formulated explicitly. By this substitution the problem had been simplified enormously. In this article we will refer to the problem formulated by Helmholtz as the *strong* Helmholtz-Lie space problem or *problem A*. The problem which has actually been dealt with by Helmholtz shall be called the *weak* Helmholtz-Lie space problem or *problem B*.

In our terminology of Section 1.2 we may say that Helmholtz tacitly assumed the group of motions to be locally linear (the space to be first-order homogeneous). He used the free mobility not for ordinary point systems, but for systems of infinitely adjacent points. Eventually, when doing so, one cannot benefit properly from the invariant distance function. On the other hand, one has to impose some upper boundary to the group, and this was done by a *mobility constraint*.

2.6. In modern terms Helmholtz' implicit conditions may be formulated as follows:

Problem B. $\lceil R, F \rceil$ *is a smooth first-order homogeneous space. The stability group* $\tilde{J}$ *of the point* x_0 *induces a linear group* J_T *in the tangential space at* x_0 . J_T *is simply transitive over the sets of all total flags through* x_0 . (A total flag is an ascending sequence of i-dimensional linear subspaces T_i of T; $i = 0, 1, \ldots, n-1$.)

Under these conditions $\lceil R, F \rceil$ is essentially a Euclidean or non-Euclidean geometry.

The condition to which the group J_T is subjected is commonly called free mobility in T. This is misleading. It is true that transitivity means a freedom of mobility. However, the adverb "simply" adds a constraint of mobility.

The kind of mobility that is postulated is exactly that of the group of rotations in n-space. A partial step in characterizing the class of Euclidean and non-Euclidean geometries by B is: B', the characterization of the rotation group by its simple transitivity over the flags.

If B has to be solved, B' is to be completed by B'': the inbedding of the stability groups characterized by B'.

Weyl [3] identified B' with the Helmholtz-Lie problem, and so did most of those who worked along Weyl's lines. However, Baer [1] stressed that B' is only a partial step. On the other hand, Birkhoff [3] called the other part B'', the Riemann-Helmholtz problem.

2.7. Lie's solution [2] of B is reasonably exact and simple. It proceeds by induction from $n = 3$. For Lie simple transitivity over the total flags is a local notion, which for $n = 2$ does not exclude groups with spiral orbits, though by global simple transitivity they are excluded. For $n = 2$, Lie has to rely on Helmholtz' monodromy axiom.

2.8. Weyl's proof [3] of B' is more involved, probably because Weyl did not use Lie group theory effectively. From B' Weyl stepped over into Riemannian geometry to prove B; in fact B' guarantees that the space R can be gifted with a Riemannian metric invariant under the group F.

2.9. A modern proof of B would be as follows:

1. J_T is irreducible.
2. For $n > 2$, J_T is even irreducible over the complex extension of T.

3. For $n > 2$, J_T is semisimple.

4. The only semisimple groups of n-space of the dimensionality $\frac{1}{2}n(n-1)$ required by the mobility condition are the real types of the orthogonal group.

5. An indefinite quadratic is to be rejected.

6. $\dim F = n + \dim J_T = \frac{1}{2}n(n+1)$.

7. If F is semisimple, the dimension argument shows that it is a real type of the orthogonal group of $(n+1)$-space, so $\lceil F, R \rceil$ is a non-Euclidean geometry.

8. Let $\mathbf{N}$ be an abelian ideal of $\mathbf{F}$, then for $j \in J$, $\mathbf{N} + \mathbf{J}$ invariant under J; because of the irreducibility of J_T in T, $\mathbf{N} + \mathbf{J} = \mathbf{F}$; because of the semisimplicity of $\mathbf{J}$, $\mathbf{N} \cap \mathbf{J} = \mathbf{O}$. So $\exp \mathbf{N}$ is a normal subgroup of translations. $\lceil F, R \rceil$ is Euclidean geometry.

2.10. A simple proof for $n = 3$ has been given by Reidemeister [1].

2.11. B' has also been studied from an algebraic point of view. Iyanaga and Abe [1] still made additional assumptions; the same is true of Pickert's paper [1]. Baer [1] managed to remove the additional assumptions. Wilker's proof [1] is still more elementary than Baer's.

A noteworthy refinement has been introduced; transitivity is not postulated for total flags, but for total half-flags (built up from half-spaces). Half-flags up to the dimension n are required to characterize, besides the rotations group, the entire orthogonal group.

2.12. The fact that a bounded group of linear transformations which is transitive over the half-lines through the origin, possesses one, and essentially only one, quadratic invariant was advanced by Laugwitz [1] as a solution of the Helmholtz problem. The misinterpretation was possibly caused by Reidemeister's paper. Laugwitz's proposition is much weaker than B' which aims at a characterization of the rotations group.

2.13. In Section 2.2 Riemann's approach was mentioned. Birkhoff [3] undertook to characterize Euclidean and non-Euclidean geometries among n-dimensional Riemann metrics by group theory features, viz., by postulating the maximal free mobility, i.e., an $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimensional group F of isometries. It is evident that this postulate is much too strong. It better suits the Helmholtz case, where the Riemannian character of the metric still has to be proved, than the Riemann case where this character is presupposed.

According to section 2.2 it follows that for $n \geqslant 3$, the stability group J of any point is supposed to be transitive over the set of bivectors of unit area. Then it is easily shown that J is transitive on the unit sphere, and even on the set of orthogonal pairs of points on the unit sphere. The orthogonal groups which are transitive on the unit sphere have been classified (Tits [6], Freudenthal [5]); one has still to single out those which are transitive on the set of orthogonal pairs. From the existence of such kind of isotropy groups in every point one can derive that of a transitive group F of isometries. Finally, one has to find all F in which J can be imbedded as an isotropy group (Freudenthal [5]).

2.14. In the realm of foundations of geometry Helmholtz's weak problem is unsatisfactory, because it cannot be formulated without differentiability assumptions.

Lie tackled the strong problem A, too, though only for $n = 3, 4$. Lie supposed an essentially positive distance function; but, on the other hand, he used free mobility for *triples* of points only (even for $n = 4$). By this means he succeeded to characterize the class of Euclidean and non-Euclidean geometries, but it is difficult to estimate to which degree his proofs can withstand modern demands of rigor. Of course, Lie adhered to the traditional differentiability assumptions.

2.15. The first purely topologic approach is credited to Hilbert. In Anhang IV (1902) of his *Grundlagen der Geometrie* [2] he formulated and solved the strong space problem for the plane in a topologic way. As an underlying topologic space he took the Euclidean plane, so he excluded spheric and elliptic geometry. He postulated the existence of a group F of orientation preserving homeomorphisms such that:

For every $x_0 \neq x_1$ *the orbit of* x_1 *under the stability subgroup of* x_0 *is infinite.*

For every sequence $f_n \in F$ *with* $\lim f_n(x_0) = x$, $\lim f_n(y_0) = y$, $\lim f_n(z_0) = z$, *there exists an* $f \in F$ *with* $f(x_0) = x$, $f(y_0) = y$, $f(z_0) = z$.

The first property is much weaker than Helmholtz' free mobility; the second property combines a kind of topologic completeness with a rigidity assumption (a substitute for Helmholtz's metric). Under the action of the group two different points cannot arbitrarily approach each other.

Hilbert proved that his postulates characterize Euclidean and hyperbolic plane geometry.

2.16. For many years Hilbert's result was the ultimate landmark in the space problem field, though attempts at partial solutions by Brouwer [1] in 1909-1910, Moore [1] in 1919, Süss [1] in 1925–1927, Cairns [1] in 1923, Lubben [1] in 1928, van Kérékjartó [1] in 1950, and Montgomery and Zippin [1] in 1940 were made.

2.17. In 1930 Kolmogorov [1] attempted to solve the general problem. His formulation is entirely topologic: *R should be a metrizable, locally compact, connected space. F should be a transitive group over R fulfilling a rigidity condition (called uniform continuity) and separation conditions at different levels.* On the first level the separation condition applies to $\lceil R, F \rceil$ itself. It means that, given two orbits of the stability group J of x, one of them separates R between x and the other. On the second level F is replaced by $F' =$ any J, and R by $R' =$ any orbit under this J; and the separation conditions are applied on $\lceil R', F' \rceil$, and so on. This process is supposed to stop on some finite level.

Kolmogorov asserted that his conditions characterize the classic solutions of the Helmholtz-Lie problem, but he did not publish the proof. It is still unknown whether this assertion is true without the additional assumption that F be complete.

2.18. Meanwhile, Birkhoff [1, 2] in 1941 and 1944 and Busemann [1] in 1941 and 1942 returned to the original, metric formulation of the Helmholtz problem. They considered a metric space and imposed conditions on its group of isometries: congruent sets (Birkhoff) of congruent 3-point subsets (Busemann) can be carried into each other by an isometry of the whole space. Their metrics, however, are not arbitrary; they have to fulfill rather strong conditions (a kind of convexity).

2.19. In 1951 and 1952 Wang [1, 2] eliminated such additional conditions. He classified all compact, connected metric spaces in which every pair of points can be carried in every congruent one by a space isometry. He tackled the same problem for locally compact spaces, too, though under additional assumptions, among which that of even dimensionality. The classification was made possible by the solution of Hilbert's fifth problem (on the analyticity of continuous groups).

2.20. The question was finally settled by Tits [1, 2], in 1952 who took the ideas of Kolmogorov. The first-level separation condition appeared to be strong enough for a successful classification. This is the

main step. At the second or third level (this depends on the exact formulation of the problem) the variety of solutions is restricted to the Euclidean and non-Euclidean geometries. F was not supposed to be connected; much attention was paid to the enumeration of all possible components of F. Tits published his proofs in his *Thèse d'Agrégé of* 1955 [6].

2.21. Freudenthal's investigations on this subject in 1954 [5] and 1956 [6], were instigated by Tits's first communication. His conditions are weaker, and his proof is quite different.

The space R is supposed to be locally compact and connected. The transitive group of homeomorphisms over R has to fulfill three conditions:

Rigidity. Given two disjoint closed sets A, B in R, one of which is compact, there is a nonvoid open set U such that for every $f \in F$ one of the sets $fU \cap A$ and $fU \cap B$ is void.

This is essentially the condition called uniform continuity by Kolmogorov. It causes a uniform structure in R invariant under F.

Completeness of F. Possibly this condition can be dismissed.

Separation. There exists an orbit of the stability group J of $x_0 \in R$ which dissects R.

This condition is weaker than Kolmogorov's which was used by Tits also.

Using topologic methods and especially the solution of the generalized fifth Hilbert problem (Yamabe [1]), one can prove that F is a transitive Lie group with a finite number of components and a compact stability group J, which in a suitable local coordinate system becomes a linear orthogonal group and transitive on the distance sphere. Using techniques of the representation theory of semisimple groups, one can draw up the following list* of possible $\mathbf{J}$ (with compact exp $\mathbf{J}$):

$$\begin{array}{llll} \mathbf{O}, & & & \\ \pi_2(\mathbf{B}_l) & (l \geqslant 2), & 2\pi_1(\mathbf{B}_1) & \\ \pi_1(\mathbf{B}_3), & \pi_1(\mathbf{B}_4), & & \\ \pi_3(\mathbf{D}_l) & (l \geqslant 3), & & \\ \pi_1(\mathbf{G}_2), & & & \end{array}$$

* We use Cartan's notation for simple Lie algebras and fundamental representations, adding $\mathbf{O}$ as a symbol for the null-algebra and $\mathbf{A}_0$ for the one-dimensional algebra. Also see the Appendix.

and the real representations (of the double dimension) belonging to

$\pi(\mathbf{A}_0)$,

$\pi_1(\mathbf{A}_l)$ $(l \geqslant 2)$ plus a facultative direct summand representing $\mathbf{A}_0$,

$\pi_1(\mathbf{C}_l)$ $(l \geqslant 1)$ plus a facultative direct summand representing $\mathbf{A}_0$ or $\mathbf{A}_1$.

As a next step, one has to determine the (possibly nonconnected) J belonging to these $\mathbf{J}$. Finally, one has to find the possible F in which the J can be embedded as stability groups. This problem can be dealt with by the method described in Section 2.9(7–8).

The definitive list of possible $\ulcorner F, R \urcorner$ fulfilling the three conditions may be found in Tits [1, 2] or Freudenthal [5]. It consists of Euclidean, elliptic, spheric, and hyperbolic unitary geometries over the real and complex numbers, quaternions, octaves (the spheric geometry over the real numbers only, octave geometries for $n = 2$ only), and six other particular geometries.

When extending the separation condition to the second level, one is left with the real Euclidean, elliptic, spheric, and hyperbolic geometries, and four particular geometries; on the third level three of the particular geometries are eliminated, the last one disappearing on the fourth level.

The result applies immediately to the Birkhoff-Busemann-Wang formulation of the space problem. Indeed, if *F is transitive over the pair of points with the distance γ ($0 < \gamma <$ upper bound of all distances), the J_{x_0}-orbit consisting of the points in a distance γ from x_0 dissects R.*

Let F be the group of *all* isometries of the metric, connected, locally compact R. Let F be transitive over the pair of points with the distance γ, where γ is some positive number below the upper bound of the set of all distances in R. Then $\ulcorner R, F \urcorner$ is a Euclidean, elliptic, spheric, or hyperbolic, unitary geometry over the real numbers, complex numbers, quaternions, or octaves (the spheric geometry over the reals only, octave geometries for $n = 2$ only). Let F be transitive over the triples with distances γ, γ, γ', where γ' is some positive number below the diameter of the distance sphere of radius γ. Then R, F is a Euclidean, elliptic, spheric, or hyperbolic geometry over the reals.

2.22. It should be observed that this solution of the strong Helmholtz-Lie problem, which looks so simple that it might be called final, excludes all kind of indefinite metric; though from the original Helmholtz point of view, with its local interpretation of transitivity, indefinite metrics should be admitted. It would be desirable to forge a frame in which

geometries based on an indefinite metric, like that of special relativity, can be fitted. Efforts to do this have not been as successful as in the definite case. Conditions which characterize Euclidean and non-Euclidean together with pseudo-Euclidean and pseudo-non-Euclidean geometries have been formulated, but they are more involved and less natural than in the former case (Freudenthal [12]).

First of all, though the usual metric spaces have appeared as a reasonable generalization of the metrics induced by positive quadratic forms, no analogue has been developed for indefinite quadratic forms. As a consequence, properties which should be derived from metrical assumptions have been enforced by group theory. Furthermore, the system of characterizing conditions is not free from inventions *ad hoc*.

The solution presented by Freudenthal [12] is as follows:

R is a locally compact, connected, separably metrizable space. ρ is a nontrivial, continuous quasi-metric on R, $\rho(x, x) = 0$. F is a transitive group of homeomorphisms of R with invariant ρ. F is topologized in the sense of continuous convergence, and in this topology F is locally compact and separably metrizable. F fulfills the conditions:

$\Theta_i(R, \rho, F)$: *If* $x_1, \ldots, x_i \in R$, $f_n \in F$, $\lim f_n x_j = x_j$, *then there are* $g_n \in F$, *such that* $\lim g_n = 1$ *and* $g_n x_j = f_n x_j$. (Actually the condition is only used for $i \leqslant 3$. For $i = 1$ it implies that the mapping of F/J_{x_0} onto R by means of $fJ \to fx_0$ is topologic. For $i > 1$ it implies the analogous property on the i-th level.)

For $x \in R$, L_x means the light cone of x, i.e., the set of y with $\rho(x, y) = 0$. $S_{x,\alpha}$ means the set of y with $\rho(x, y) = \alpha$.

$\Phi_1(R, \rho, F)$: *Let* $x_0 \neq x_1$. *Then for no open* W, $L_{x_0} \cap W = L_{x_1} \cap W$, *unless both sets are void.*

(This condition, which means that light cones cannot coincide locally, excludes two-dimensional relativity. This, however, is a minor defect. The condition can still considerably weakened:

Let $y \in L_{x_0}$, $y \neq x_0$. Let $M_{x_0 y}$ be the set of $x_1 \neq y$ with the property: there is a neighborhood W of y with $L_{x_0} \cap W = L_{x_1} \cap W$. Then $M_{x_0 y}$ is disconnected.)

$\Phi_2(R, \rho, F)$: *Every* $x \in R$, $x \neq x_0$, *has a neighborhood* W *such that for any* $y \in W$ *with* $\rho(x_0, x) = \rho(x_0, y)$ *there exists an* $f \in J_{x_0}$ *with* $fx = y$.

(This condition, which means local transitivity of J on the distance spheres, would be entirely satisfactory if it were formulated with the provision $\rho(x_0, x) \neq 0$. However, we need the local transitivity on the light cones, too.)

$\Phi_3(R, F)$: *In some neighborhood of* x_0 *no* $S_{x_0,\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$ *is* 0*-dimensional.*
(This condition excludes all one-dimensional geometries, but this is a minor defect. It is a condition *ad hoc*, which can not be dismissed.)

Under these conditions F appears to be a Lie group, and $\mathbf{J}$ a maximal Lie subalgebra of $\mathbf{F}$.

In the case of a nonsimple $\mathbf{F}$ the further analysis, which looks much like that of section 2.9(7–8), is not too laborious. For simple $\mathbf{F}$, however, the danger that $[R, F]$ might fail to be first-order homogeneous (see Section 1.2) is a source of difficulties. Possibly they are not essential; meanwhile second-level conditions are invoked to conquer them.

Let R_x be the x-component of the orbit $J_{x_0}\, x$, and F_x the group induced by J_{x_0} in R_x. Let the restriction of ρ to R_x still be called ρ.

The second level conditions are: $\Phi_i(R_x, F_x, \rho)$ *for all* x *in some neighborhood of* x_0 *with* $\rho(x_0, x) \neq 0$.

Assuming these conditions, one is able to reduce the classification of the admissible J to an algebraic problem:

J is a Lie group, linearly and irreducibly represented in a real finite-dimensional linear space T. J is semisimple up to a facultative one-dimensional compact direct factor. ρ is a nontrivial continuous real function on T, $\rho(0) = 0$. ρ is invariant under J. In some neighborhood of 0, $x_0 \neq 0$ can be carried into any neighboring x with $\rho(x) = \rho(x_0)$ by a $j \in J$ not far from 1.

One has to find all J fulfilling this condition.

Again, the local transitivity is needed on the light cones also. The list of admissible $\mathbf{J}$ is rather long; the tedious analysis depends on the theory of real simple Lie groups and real representations.

To embed an admissible J as a stability group into a suitable F, one has to work along the same lines as in the definite case.

Adding third-level conditions Φ one can finally reduce the variety of geometries to Euclidean, non-Euclidean, pseudo-Euclidean, and pseudo-non-Euclidean geometries.

3. The Weyl-Cartan Space Problem

3.1. In a smooth manifold R an affine connection is given when to every line element $[x, dx]$ of R corresponds a linear mapping $A(x, dx)$ of the tangential space T_x in x into T_{x+dx} in $x + dx$, such that A depends smoothly on x, linearly on dx, and $A(x, dx)\, \delta x = A(x, \delta x)\, dx$.

Let R be a generalized metric manifold, i.e., gifted with metrics

in the T_x depending smoothly on x. An affine connection is called compatible with the generalized metric, if for any line element $[x, dx]$ of R, $A(x, dx)$ is an (infinitesimal) isometric mapping of T_x into T_{x+dx}.

In the sequel it is supposed that the metric is essentially the same in every T_x, i.e., that the metric in T_x arises from that in x_0 by a linear mapping B_x (or rather by a linear mapping preserving elementary volumes defined smoothly in the various T_x).

3.2. In a note to his 1919 edition of Riemann's *Habilitationsvortrag* Weyl [1] raised the problem to characterize Riemannian manifolds among those generalized metric manifolds, and he formulated the conjecture that this could be done by the postulate:

Given the metric in T_{x_0}, there exists for any B an affine connection compatible with the generalized metric defined by B and the metric in T_{x_0}.

The problem solved by Weyl in 1922 [2, 3] is slightly different. (The difference was noticed by Laugwitz [2].) The generalized metric is replaced by a "group metric." This means that a linear Lie group is given in every T_x which again is related to that in T_{x_0}, called L, by a linear mapping B_x. The compatibility of an affine connection with such a group metric means that $A(x, dx)$ belongs to $B_{x+dx}LB_x^{-1}$. On the other hand, Weyl now postulated that the affine connection be uniquely determined by B.

Weyl's proof that this condition characterizes Riemannian metrics is extremely involved, mainly because no effective use was made of the techniques of the representation theory of semisimple Lie groups.

3.3. In 1923 É. Cartan [5] gave a much simpler proof, which applies to Weyl's first problem as well.* The variety of admissible groups L is sharply restricted by the assumption of the mere existence of the affine connection for any given B. Cartan obtained the groups of linear transformations of T leaving invariant

1. the volume
2. the volume and a given direction
3. a nondegenerate quadratic form
4. a nondegenerate skew bilinear form.

(Actually, the fourth group may still be excluded for $n \geqslant 4$; see Freudenthal [9].)

* The author could not find any justification for Scheibe's remark [1] (p. 198) that Cartan's proof should be "völlig unzureichend," and for Scheibe's much more involved own proof. The author did not find any gap in Weyl's proof either.

To come back to Weyl's problems, it suffices to add the postulate that the orbits are nowhere dense, in order to characterize Riemannian metrics. Of course, this postulate is much weaker than Weyl's uniqueness postulate.

3.4. Another proof of Cartan's problem was given by Freudenthal [9], who dropped the volume invariance condition. His list is somewhat longer; the fourth group is now admitted for $n = 4$.

3.5. The analogue of Weyl's problem for almost complex manifolds was dealt with by Klingenberg [1]. Though Klingenberg used Cartan's rather than Weyl's methods, he postulated both existence and uniqueness of the affine connection, as did Weyl. The result is a characterization of hermitean manifolds.

4. Geometries Connected with the Exceptional Simple Lie Groups

4.1. Though forshadowed by von Staudt's [1] and Wiener's [1] work,* Hilbert's discovery of the relation between geometric incidence theorems (lock theorems) and axioms for algebraic structures, is the most striking feature of his *Grundlagen der Geometrie* [1] of 1899. To formulate these relations, we choose projective geometry instead of Euclidean, as did Hilbert.

Adding *Desargues's* theorem as a "lock incidence theorem" to the "trivial" incidence axioms, one gets a class of geometries which can be described algebraically as that of projective geometries over a (non-necessarily commutative) field. Adding *Pappus-Pascal*'s theorem algebraically means postulating commutativity.

A momentous progress—the first one after Hilbert in this realm of ideas—was marked by Moufang's [1, 2] discovery and analysis of *harmonic* geometries. The harmonic lock incidence theorem says that a harmonic quadruple is uniquely determined by its first triple, so it does not depend on its particular construction. Moufang showed that affine coordinatization is still possible by means of the harmonic theorem, though the underlying algebraic structure may fail to be associative with respect to multiplication. Associativity was replaced by a weaker law, called *alternativity*, which means that the associator

$$\{a, b, c\} = (ab)c - a(bc)$$

* For the history of *Grundlagen der Geometrie*, see Freudenthal [7, 8].

is multiplied with -1 if a, b, c undergo an odd permutation. In rings, where $x = -x$ implies $x = 0$, this property is equivalent with

$$a(ab) = a^2b, \qquad (ab)a = a(ba), \qquad ab^2 = (ab)b.$$

An alternative ring with a one-element and inverses with the usual properties is called an alternative field. The class of harmonic geometrics can algebraically be described by the fact that they admit of affine coordinatizations over alternative fields.

An example of a harmonic non-Desarguean plane geometry was provided by the alternative field of the octaves. Higher-dimensional projective geometries are always Desarguean.

4.2. The octaves system* is one of the *Hurwitz algebras*, i.e., a finite-dimensional algebra with a one-element 1, an inner product with the usual properties, and a norm such that $|x|^2 = (x, x)$ and $|xy| = |x| \cdot |y|$. Over the reals (no other ground field will be admitted at the moment) there are four Hurwitz algebras, called $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_4$, $\mathscr{H}_8$ of dimensions 1, 2, 4, 8, the commutative fields of the reals, and of the complex numbers, the associative field of the quaternions, and the alternative field of the octaves.

A Hurwitz algebra possesses an involutory antiautomorphism $x \to \bar{x}$ with $\bar{x} = -x$ for $(x, 1) = 0$.

4.3. Another important tool is the so-called *Jordan algebras*, characterized by commutativity and the identity

$$a^2(ab) = a(a^2b).$$

The important Jordan algebras $J_n(\mathscr{H})$ are defined as follows. *They consist of the n-dimensional hermitean matrices over the Hurwitz algebra* $\mathscr{H}$, *the usual matrix product of a and b being replaced by the symmetrized product* $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. *If* $\mathscr{H}$ *is the algebra of octaves, we must restrict n to be* $\leqslant 3$.

4.4. Besides the large classes of simple and semisimple Lie algebras over the complex numbers, there are five exceptional ones,

$$\mathbf{G}_2, \quad \mathbf{F}_4, \quad \mathbf{E}_6, \quad \mathbf{E}_7, \quad \mathbf{E}_8$$

* A brief history of the octaves may be found in van der Blij's [1], an outline of their fundamental theory in van der Blij and Springer [1].

of dimensions

$$14, \quad 52, \quad 78, \quad 133, \quad 248.$$

For every one of these Lie algebras there exist real types other than the unitary one and the twin type ($\mathbf{L}_0$ and $\mathbf{L}_{**}$ if $\mathbf{L}$ is the complex type), viz.,†

$\mathbf{G}_{2,2}$ with maximal compact $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1$,

$\mathbf{F}_{4,1}$, $\mathbf{F}_{4,2}$ with maximal compact $\mathbf{B}_4$, $\mathbf{C}_3 + \mathbf{A}_1$,

$\mathbf{E}_{6,1}$, $\mathbf{E}_{6,2}$, $\mathbf{E}_{6,0,*}$ $\mathbf{E}_{6,2,*}$ with maximal compact $\mathbf{D}_5 + \mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_5 + \mathbf{A}_1$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{C}_4$,

$\mathbf{E}_{7,1}$, $\mathbf{E}_{7,2}$, $\mathbf{E}_{7,3}$ with maximal compact $\mathbf{D}_6 + \mathbf{A}_1$, $\mathbf{E}_6 + \mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_7$,

$\mathbf{E}_{8,1}$, $\mathbf{E}_{8,2}$ with maximal compact $\mathbf{E}_7 + \mathbf{A}_1$, $\mathbf{D}_8$.

4.5. Whereas the groups of the large classes are given by simple definitions with intuitive geometric interpretations, the exceptional groups had originally been introduced in a purely formal way (É. Cartan [1, 2]).

However, in 1914 É. Cartan [4] mentioned without proof a representation of $G_{2,0}$ as the automorphisms group of the octaves (so is $G_{2,2}$ of the split octaves). A new progress was made by Chevalley and Schafer [1] in 1950. They discovered that $F_{4,0}$ appears as the automorphisms group of $J_3(\mathscr{H}_8)$ or, equivalently, as the invariance group of

$$\mathrm{tr}(x \circ x) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{tr}(x \circ x \circ x)$$

in $J_3(\mathscr{H}_8)$. Actually, all that is needed for this discovery can be found in É. Cartan's paper [2]; however, in the case of the F_4 Cartan overlooked the cubic invariant though he acknowledged such an invariant in the case of E_6. Chevalley and Schafer also gave an interpretation of E_6 by means of $J_3(\mathscr{H}_8)$, but they did not mention the cubic invariant by which Cartan had introduced E_6.

4.6. An automorphism of the real projective plane is determined by the image of a general quadruple of points, so the group of automorphisms $(A_{3,2,*})$ depends on 8 parameters. For the complex projective plane the corresponding number is $2 \cdot 8$ $(A_{3,**})$; for the quaternion plane it is $4 \cdot 8 + 3$ $(A_{5,0,*})$, where the summand 3 accounts for the automorphisms of the quaternion field. For Moufang's octavian plane

† See Appendix. We retain Cartan's notations for simple algebras and Cartan's numberings of primitive root forms. There is no reason why every author should use his own system. For the real types we have proposed a more rational system of numbering.

analogous reasoning would give $8 \cdot 8 + 14 = 78$, which is the dimension of E_6. It seems that in the late 1940's several mathematicians guessed that some real form of the E_6 might be the automorphisms group of the octavian plane.

In 1950 Borel [1] noticed that Cartan's symmetric space $F_{4,0}/B_{4,0}$, which is 16-dimensional, is provided with a structure of a projective plane. This remark led him to calling this symmetric space the plane of octaves. Somewhat earlier, in 1949, Hirsch [1] had constructed the octavian plane by purely topologic means. At the same time Jordan [1] stated without proof a presentation of the octavian plane by the idempotents of $J_3(\mathscr{H}_8)$.

4.7. Starting from the Chevalley and Schafer paper of 1950 though not acquainted with the investigations mentioned in Section 4.6 (except Hirsch's), Freudenthal in 1951 [2] looked for an algebraic presentation of the octavian plane and its automorphisms group.

The usual algebraization of projective n-space takes place in linear $(n+1)$-space by means of the lattice of its linear subspaces. Because of the lack of associativity in $\mathscr{H}_8$ this method would not work in the case of the octavian plane.

Another method of some importance in von Neumann's continuous geometry is to start with unitary $(n+1)$-space and the lattice of its orthogonal (hermitean) projections; the points of projective n-space would be described by the projections with a one-dimensional image. This algebraization of projective space takes place in $J_{n+1}(\mathscr{H})$ by means of the idempotents of this Jordan algebra; the points are described by the irreducible idempotents, and the inclusion relation $p \subset q$ is explained by $p \circ q = p$. The automorphisms are described by $p \to a^* p a$ with $\det a = 1$.

This method of algebraization was adopted by Freudenthal. It still works for the octavian plane which can be described by the lattice of idempotents of $J_3(\mathscr{H}_8)$. But while in the case of associative $\mathscr{H}$ any irreducible idempotent of $J_{n+1}(\mathscr{H})$ can be factorized as the matrix product xx^* of a vector x and its conjugate transposed x^*, this reduction to the first method of algebraization fails in the octavian case.

An important role is played in $J_3(\mathscr{H}_8)$ by a cubic form called det, defined by

$$\det\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ \bar{x}_1 & x_2 & \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1 \mid x_1 \mid^2 + \xi_2 \mid x \mid^2 + \xi_3 \mid x_3 \mid^2) + 2\mathrm{Re}(x_1x_2x_3).$$

det can be expressed by traces,

$$\det x = \tfrac{1}{3}\operatorname{tr} x^3 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} x^2 \operatorname{tr} x + \tfrac{1}{6}(\operatorname{tr} x)^3.$$

A symmetric trilinear form (, ,) is defined by

$$(x, x, x) = \det x.$$

An inner product is provided in $J_3(\mathscr{H}_8)$ by

$$(x, y) = \tfrac{1}{2}\operatorname{tr} xy.$$

By means of

$$(x \times y, z) = 3(x, y, z)$$

one can define a cross product of x and y.

The irreducible idempotents of $J_3(\mathscr{H}_8)$ are characterized by $x \times x = 0$, $\operatorname{tr} x = 1$. Defining P by

$$x \in P \leftrightarrow x \times x = 0$$

and taking the elements of P up to a scalar factor, we may consider P as the set of points of the octavian plane. If in the description of straight lines we replace the idempotents x with $\operatorname{tr} x = 2$ by $1 - x$, we can use the same set P as the set of straight lines. Then the incidence of a point x and a line u is described by

$$x \circ u = 0$$

or, equivalently, by

$$\operatorname{tr} xu = 0.$$

The straight lines are 8-dimensional spheres. The straight line through the different points x, y is given by

$$x \times y,$$

the intersection of two lines u, v by

$$u \times v.$$

The invariance group of det coincides on P with the group of automorphisms of the plane. It is the representation π_1(or π_3) of $E_{6,0,*}$. Its Lie algebra is the sum of two linear subspaces **K** and **L**,

K consisting of the mappings $x \to a^*x + xa$, where a is a 3-matrix over $\mathscr{H}_8$ with tr $a = 0$;

L consisting of the mappings induced by infinitesimal automorphisms of $\mathscr{H}_8$.

Let Φ and Φ' (infinitesimal elements of the invariance group of det) represent the same infinitesimal automorphisms of the plane, once with P interpreted as the point plane and afterwards as the lines plane. Then (up to a scalar factor) Φ and Φ' are related by $a \to -a^*$ in **K** and by the identity in **L**. If the point representation of E_6 is π_1, the line representation is π_3 (Freudenthal [3]).

The invariance group of det and the inner product together coincides with the group of automorphisms of $J_3(\mathscr{H}_8)$ (in the O-sense). Its Lie algebra consists of the $\Phi = \Phi'$. In the 26-dimensional subspace of $J_3(\mathscr{H}_8)$ of elements of trace 0, it is the representation π_1 of $F_{4,0}$. Geometrically, it can be interpreted as the transitive group of automorphisms of an *elliptic* geometry of the plane. By means of this group every element of $J_3(\mathscr{H}_8)$ can be put in a diagonal form, which is unique up to the order of the diagonal elements. (This theorem is the main tool by which the above properties were proved by Freudenthal [2, 3].)

4.8. In 1953 Tits [3] gave another proof (supplemented in [4]) for the identity of the group of automorphisms of the octavian plane with $E_{6,0,*}$, using algebraic techniques of affine geometry. In the same paper he called attention to the polarities, especially the so-called hermitean polarities of the plane which on every straight line behave as inversions of the 8-sphere. The mapping carrying every point x into the line x is an elliptic polarity, defining the above elliptic geometry. Using a hyperbolic polarity, one gets a hyperbolic geometry of the plane with the group $F_{4,1}$ (Tits [4]).

The algebraic expression of the general hermitean polarity Φ is

$$\Phi a = 2(u \times u) \times a - (a, u)u;$$

the points a coinciding with its polar lines are given by $(a, u) = 0$ (Freudenthal [4, V]). Hermitean polarities and perspectivities have been extensively studied by Freudenthal [4, III; 4, V].

4.9. The algebra developed for the investigation of the plane over $\mathscr{H}_8$ works as well, if $\mathscr{H}_8$ is replaced by $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_4$, though some

traces appearing as numerical coefficients have to be changed. In the cases $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_4$, $\mathscr{H}_8$ the automorphisms groups yield:

elliptic:	$B_{1,0}$	$A_{2,0}$	$C_{3,0}$	$F_{4,0}$
hyperbolic:	$B_{1,1}$	$A_{2,1}$	$C_{3,1}$	$F_{4,1}$
projective:	$A_{2,0,*}$	$A_{2,**}$	$A_{5,0,*}$	$E_{6,0,*}$.

Of course, in the case of $\mathscr{H}_2$ one has to disregard noncontinuous automorphisms.

Complexification and quaternionization can, of course, be imposed on the four large classes of simple groups also. One has to start with their usual linear representations (respectively, π_1, π_2, π_1, π_3) and to interpret the invariant symmetric or skew form in the hermitean sense. One gets:

$\mathscr{H}_1$	$\mathscr{H}_2$	$\mathscr{H}_4$
A_l	$A_l + A_l$	A_{2l+1}
B_l	A_{2l}	C_{2l+1}
C_l	A_{2l-1}	D_{2l}
D_l	A_{2l-1}	C_{2l}

It is easy to account for the real types too. Octavization, however, is possible for low l only.

4.10. Octavian planes have been investigated by purely algebraic methods too; the restriction to the real ground field was dropped, only the characteristic was supposed $\neq 2, 3$. Using as a tool the Peirce decomposition instead of transformation on the diagonal form, Springer [1] restated the essential geometric results. The group of automorphisms has been studied by Jacobson [1], Springer [4, 5], and Suh [1]. It becomes slightly more involved though it is still related to an algebraic group E_6. In the total group one has to distinguish the subgroup generated by the perspectivities and that generated by the perspectivities with united center and axis. The algebraic counterpart is the group of σ-semilinear f with

$$\det fx = \nu(\det x)^\sigma \qquad (\nu \neq 0)$$

and the subgroups defined by $\sigma = 1$, respectively, $\sigma = 1$, $\nu = 1$.

This equation also describes isomorphisms between different projective planes (over different octavian algebras). An extensive study of hermitian polarities, elliptic and hyperbolic plane geometries over octavian algebras with the same methods has been made by Springer and Veldkamp [1]. In the same paper a relation to the geometry of reflections has been established.

4.11. Though Freudenthal's investigations into the geometric nature of E_7 and E_8 started as early as 1953 [4, II; 4, III], they have in a latter stage gradually developed under the influence of parallel work by Tits. The influence was due to his paper [4], his manuscript [5], and mainly to personal communication. This makes it hard, if not impossible, to give a faithful account on details of the course of inventions. However, it should be noticed that from the beginning the framework of Tits' investigations was broader; in an early stage he obtained possession of a tool of huge heuristic importance which will be dealt with in Section V of this account.

Freudenthal [4, I] introduced linear spaces $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{L}$ of elements

$$P = \lceil x, u, \xi, \omega \rceil$$

respectively,

$$\Theta = \lceil \Phi, \rho, a, b \rceil$$

where $x, u, a, b \in J_3(\mathscr{H})$, Φ is an infinitesimal automorphism of $J_3(\mathscr{H})$ and ρ, ξ, ω are real numbers; furthermore, a commutative cross product on $\mathfrak{R}$ mapping $\lceil \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \rceil$ on $\mathfrak{L}$, and a product ΘP mapping $\lceil L, K \rceil$ on $\mathfrak{R}$; finally, the varieties $\mathfrak{W}$ of P with $P \times P = 0$ and $\mathfrak{N}$ of Θ with $\Theta^2 = 0$ (i.e., $\Theta^2 \mathfrak{R} = 0$). For $\mathscr{H}_8$:

$$\dim \mathfrak{R} = 56, \quad \dim \mathfrak{L} = 133, \quad \dim \operatorname{proj} \mathfrak{M} = 27, \quad \dim \operatorname{proj} \mathfrak{N} = 33.$$

$\mathfrak{L}$ could be identified with $E_{7,2}$ represented in $\mathfrak{R}$ by left-hand multiplications according to π_1, leaving $\mathfrak{M}$ invariant, and characterized by this fact. $\mathfrak{N}$ appeared to be invariant under the adjoint transformations, both $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ being transitively transformed. Cartan's symplectic and fourth degree invariant of this representation could be identified as

$$\{P_1, P_2\} = (x_1, u_2) - (x_2, u_1) + \xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1,$$

and

$$\frac{1}{6}\{(P \times P)P, P\} = -\frac{1}{18}(P \times P, P \times P).$$

(These numerical coefficients are valid for $\mathscr{H}_8$.)

The main algebraic tool was an identity

$$(x \times x) \times (x \times x) = (\det x)x$$

for $x \in J_3(\mathscr{H})$, which has been proved by Springer [3] to be characteristic for det, and an identity for $\mathfrak{R}$,

$$(P \times P_1)P_2 - (P \times P_2)P_1 = \tfrac{1}{4}\{P_1, P_2\}P + \tfrac{1}{8}\{P, P_2\}P_1 + \tfrac{1}{8}\{P_1, P\}P_2.$$

This algebra led to a geometric interpretation: The elements of $\mathfrak{R}$ (up to scalar factors) are called points. $[\Theta, \Theta_1] = 0$ reads: the points are joined. Maximal sets of joined points are planes; intersections of different planes, if consisting of at least two points, are called straight lines.

The planes are described by the $P \in \mathfrak{M}$ in the sense that

$$\Theta P = 0$$

means incidence of the point Θ and the plane P. The planes then have the structure of projective planes over $\mathscr{H}$. For two different joined points there is one and only one line containing both of them. The intersection of different planes is void, a point, or a line. Given a plane P and a point Θ outside, there is one and only one plane passing through Θ and intersecting P in a line; algebraically, it is given by ΘP. Two planes P_1, P_2 intersect in a line, iff $P_1 \times P_2 = 0$, in a point iff $\{P_1, P_2\} = 0$, and $P_1 \times P_2 \neq 0$. Then $P_1 \times P_2$ is the intersection. Given a line and a point outside, there is either one plane containing both of them or one line meeting both of them, etc.

These properties are reminders of symplectic geometry of 5-dimensional projective space with its points, lines, planes, and conjugateness with respect to the fundamental skew bilinear form interpreted as jointness of points. When drawing this conclusion, Freudenthal was influenced by Tits [4] who discovered it in another context, to be displayed in Section V.

Indeed, if $\mathscr{H}_1$ is taken for $\mathscr{H}$, it *is* symplectic geometry of 5-dimensional space, though not presented in linear 6-space but in 14-space, where the symplectic group $C_{3,3}$ is represented by π_3 instead of π_1. For $\mathscr{H} = \mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_4$ one gets symplectic geometry in complex and quaternion projective 5-space (with a hermitian skew form), and the groups $A_{5,1}$ represented by π_3, and $D_{6,1}$ represented by π_1.

4.12. Hence, after the quadruple elliptic (hyperbolic) and projective plane geometries over the four Hurwitz algebras we found a quadruple

of symplectic geometries of 5-space with the groups (complex classification)

elliptic:	B_1	A_2	C_3	F_4
projective:	A_2	$A_2 + A_2$	A_5	E_6
symplectic:	C_3	A_5	D_6	E_7

which have the dimensions

$$\begin{matrix} 3 & 8 & 21 & 52 \\ 8 & 16 & 35 & 78 \\ 21 & 35 & 66 & 133\,, \end{matrix}$$

hence,

$$\begin{matrix} 5p - 2 + 0, & 0, & 3, & 14, \\ 8p + 0, & 0, & 3, & 14, \\ 14p + 7 + 0, & 0, & 3, & 14, \end{matrix}$$

where $p = 1, 2, 4, 8$ and $0, 0, 3, 14$ are the dimensions of the continuous automorphisms groups of $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_4$, $\mathscr{H}_8$. (There are a few more arithmetic properties like this, for instance, the varieties of points, lines, and planes in symplectic geometry having the dimensions $1 + 4p$, $2 + 5p$, $3 + 3p$.)

The 3×4–rectangle of groups shows a symmetry, which suggests the completion by a fourth line

$$F_4 \quad E_6 \quad E_7 \quad *$$

with the dimensions

$$52 \quad 78 \quad 133 \quad *.$$

Extrapolating by

$$26p + 26 + 0, \quad 0, \quad 3, \quad 14,$$

one may guess that the dimension of the missing group must be 248, which is the dimension of E_8, and by such number mystical tricks one finds that the real types in the fourth line should be

$$F_{4,2} \quad E_{6,2} \quad E_{7,1} \quad E_{8,1}.$$

The first indication of the magic square arising from this addition is to be found in Tits's *Thèse d'agrégé* [6], though its arithmetical properties are not mentioned. It was probably independently found and used

as a heuristic tool by Freudenthal and Rozenfeld. The problem arose to fill the fourth line with a quadruple of geometries over the four Hurwitz algebras. In 1956 Rozenfeld [3] proposed a unified solution for the whole magic square, which will be considered in Section 4.16. In 1958 (or perhaps 1957) Tits and Freudenthal found independent explanations. The fourth geometry was called metasymplectic by Freudenthal [4, VIII], so the magic square now reads:

	$\mathscr{H}_1$	$\mathscr{H}_2$	$\mathscr{H}_4$	$\mathscr{H}_8$
2-dim elliptic geometry:	B_1	A_2	C_3	F_4
2-dim projective geometry:	A_2	$A_2 + A_2$	A_5	E_6
5-dim symplectic geometry:	C_3	A_5	D_6	E_7
metasymplectic geometry:	F_4	E_6	E_7	E_8

Elliptic plane geometry has one kind of space element, points, (because straight lines connected to points by a fixed polarity are redundant). Projective plane geometry has two kinds, points and lines, 5-dim symplectic geometry has three, points, lines, and planes. Metasymplectic geometry may be expected to have a fourth kind, namely the symplectic geometries of the third line, called for short "symplecta" (plural of symplecton). The algebraic apparatus to deal with this geometry has been developed by Freudenthal in 1958, though partially it goes back as far as 1954 [4, II]. The knowledge of Tits' broader framework of geometries proved to be a useful clue in many details. The method applying to the real metasymplectic geometry was published in 1959 [4, VIII–IX], the unified method in 1963 [4, X–XI].

4.13. The exposition of the algebraic apparatus is postponed in order to start with a selection from the numerous geometric results.

In metasymplectic geometry there are three relations between points, in decreasing strength:

joined, i.e., contained in a line, which is unique if the points are different;

interwoven, i.e., contained in a symplecton, which is unique if the points are not joined;

hinged, i.e., joined to a third point, which is unique if the points are not interwoven.

There are dual relations between symplecta:

joined, i.e., intersecting along a plane, which is unique if the symplecta are different;

interwoven, i.e., intersecting, in a point if they are not joined;
hinged, i.e., joined to a third symplecton, which is unique if they are not interwoven.

If a point A and a symplecton Φ are given there is a point in Φ interwoven with A (and a symplecton through A interwoven with Φ). In the general case they are unique, otherwise A and Φ are called

half-incident, and then there is even a line in Φ joined to A, unique if A and Φ are not incident (and a pencil of symplecta through A joined to Φ, unique if A and Φ are not incident), and every point in Φ is hinged with A (every symplecton through A hinged with Φ).

If the points A, B are interwoven, and B, C joined, then A, C are hinged (and the analogue for symplecta).

In two given symplecta two joined points, one in each of both, may be found, iff they are hinged (and the dual).

A symplecton is a maximal set of pairwise interwoven points, and the set of symplecta through a given point is a maximal set of interwoven symplecta. (Notice, however, that the converses are not true.)

So far there was a duality—points $\leftrightarrow$ symplecta, lines $\leftrightarrow$ planes. This duality breaks down as soon as the algebraic structure of the symplecton (as a variety of points) is compared with that of the point (as a variety of the symplecta containing the point). The first one is just a symplecton, the other is a quadric of projective dimension 5, 6, 8, 12 and signature 1, 2, 4, 8.

The variety of the symplecta around a line has the structure of a real projective plane, whereas the variety of the points in a plane is just a plane over $\mathscr{H}$. The variety of the symplecta around a plane has the structure of a real projective line, whereas the variety of the points in a line is just a line over $\mathscr{H}$.

The automorphisms groups of the metasymplectic geometries are the groups of the fourth line of the magic square. They are transitive on the varieties of points, lines, planes, and symplecta.

4.14. The special algebraic apparatus for the real metasymplectic geometry (group $F_{4,2}$) is, actually, according to a remark of T. A. Springer, a Jordan algebra over split octaves. However, it was formulated in a nonoctavian way, using the well-known cubic form in the presentation

$$\det A + \det B + \det C - \operatorname{tr} ABC,$$

where A, B, C are 3-3-real matrices. This form is closely related to the 27 straight lines on a cubic surface.

The unified algebraic apparatus uses quite different tools. Let $\mathfrak{R}_4$ be a Lie algebra of the fourth line of the magic square. For $\Phi \in \mathfrak{R}_4$ a linear mapping $\langle \Phi, \Phi \rangle$ of $\mathfrak{R}_4$ into itself is defined by

$$\langle \Phi, \Phi \rangle \Phi^* = \tilde{\Phi}^2 \Phi^* + \epsilon_2^{-1}(\mathrm{tr}\, \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^*)\Phi - \epsilon_3^{-1}(\mathrm{tr}\tilde{\Phi}^2)\Phi^*$$

$$\epsilon_2 = 9, 12, 18, 30,$$

$$\epsilon_3 = \frac{9.52}{10}, \ 72, \ 126, \ 240.$$

$\tilde{\Phi}$ means the adjoint of Φ.

$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ is the symmetric bilinear expression belonging to $\langle \Phi, \Phi \rangle$. $\mathfrak{R}_1$ is the linear space spanned by the $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$. The adjoint of $\mathfrak{R}_4$ is represented in $\mathfrak{R}_1$ in a natural way.

$\Phi \in \mathfrak{W}_4$ iff $\Phi \in \mathfrak{R}_4$ and $\langle \Phi, \Phi \rangle = 0$. The elements $\neq 0$ of $\mathfrak{W}_4$ up to scalar factors are the symplecta.

$A \in \mathfrak{W}_1$ iff A has the form $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ with $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$. The elements $\neq 0$ of $\mathfrak{W}_1$ up to a scalar factor are the points.

The symplecta Φ_1, Φ_2 are

joined iff $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$;
interwoven iff $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$;
hinged iff $tr\ \Phi_1\Phi_2 = 0$.

The points A, B are

joined iff $AB = 0$;
interwoven iff $[A, B] = 0$;
hinged iff $\mathrm{tr}\ AB = 0$.

The point A and the symplecton Φ are

incident iff there is a symplecton Φ^* with $\Phi = A\Phi^*$;
half incident iff $A\Phi = 0$.

4.15. Freudenthal's [4, V–VII] was dedicated to an *axiomatic* approach to octavian symplectic geometry. The axiomatic system is extremely simple. Its elements is a set $\mathfrak{N}$ of "points" and a binary reflexive symmetric relation, called jointness. The maximal sets of pairwise joined points are called planes; they form a set $\mathfrak{M}$. Intersections of two planes containing more than one point are called lines.

Axiom A_p: *Every plane with its points and lines is a plane over* $\mathscr{H}_p$.

Axiom B: *If Θ is a point and P a plane, $\Theta \in P$, then the set of points in P joined to Θ is a line.*

Two disjoint planes P_1, P_2 are connected by a natural antiautomorphism $P_1 \to P_2$ carrying a point Θ of P into the line in P_2 which is pointwise joined to Θ.

Axiom C: $(P_3 \to P_1)(P_2 \to P_3)(P_1 \to P_2)$ *(for pairwise disjoint* P_i*) is a polarity of* P_1.

This axiom can also be formulated as a pure incidence theorem.

The axiomatic system characterizes the 5-dimensional symplectic geometries over the reals ($p = 1$) and over the octaves ($p = 8$). For $p = 2, 4$ it is possibly not sufficient.

A general axiomatic system for polar geometries comprising geometries on a quadric, unitary, and symplectic geometries over arbitrary fields has been developed by Veldkamp [1]. However, it does not cover the (non-Desarguean) symplectic geometry over $\mathscr{H}_8$.

Metasymplectic geometry has not yet been axiomatized.

4.16. The groups of the magic square possess symmetric spaces the dimension of which is a power of 2, viz., $2pq$ for the group in the p-th column and q-th row, where both columns and rows are numbered by $p = 1, 2, 4, 8$, $q = 1, 2, 4, 8$. These symmetric spaces belong to the real types

$$\begin{array}{cccc} B_{1,1} & A_{2,1} & C_{3,1} & F_{4,1} \\ & A_{2,**} & A_{5,2} & E_{6,1} \\ & & D_{6,4} & E_{7,1} \\ & & & E_{8,2}. \end{array}$$

Their stability groups are spin representations of certain orthogonal groups (see Cartan [6]).

This remark led Rozenfeld [3] to explain the compact types of the magic square groups as elliptic groups of planes over $H_p \otimes H_q$. The plane structure should be a weak one; there might be exceptional pairs of points with no unique joining line.

The origin of Rozenfeld's idea to admit tensor products of Hurwitz and related algebras is found in his book [2]. A projective geometry can be interpreted as an elliptic geometry by the following trick:

Consider pairs of points x, y *and pairs of hyperplanes* u, v *in a projective* n*-space.* Such quadruples possess a projective invariant

$$(x, v)(y, u)/(x, u)(y, v).$$

Combine x and u into one

$$A = xe_+ + ue_-$$

analogously,

$$B = ye_+ + ve_-$$

where

$$e_+ = \tfrac{1}{2}(1 + e), \qquad e_- = \tfrac{1}{2}(1 - e)$$

are "dual numbers,"

$$e^2 = 1.$$

A and B may be considered as points of a projective n-space over the algebra of dual numbers; indeed, multiplication of A with the dual number $\alpha e_+ + \beta e_-$ yields $\alpha x e_+ + \beta u e_-$. Hence, it means multiplication of x and u separately. Using the automorphism $\alpha \to \bar{\alpha}$ of the algebra of dual numbers which is induced by $e \to -e$, one gets

$$A\bar{A} = (x, u), \qquad B\bar{B} = (y, v), \qquad A\bar{B} \cdot B\bar{A} = (x, v)(y, u).$$

So the above projective invariant of four elements may be written as an invariant of two points

$$A\bar{B} \cdot B\bar{A} / A\bar{A} \cdot B\bar{B}$$

which provides the projective space over the algebra of dual numbers with an elliptic structure.

Had we started with a projective geometry over the complex numbers or over the quaternions, the result would have been an elliptic geometry over an algebra of dual numbers with complex or quaternion coefficients, in other words, over the tensor product of the algebra of dual numbers with that of complex numbers or quaternions. (Here one has to be careful with the order of the factors in the invariant.)

Likewise, symplectic geometry can be interpreted as an elliptic geometry over split quaternions (basis 1, i, e, ei, multiplication rules as for quaternions except $e^2 = (ei)^2 = 1$). Lines are to be interpreted as points; the cross ratio of two lines with their polars in symplectic geometry becomes the elliptic invariant. Again one can start with symplectic geometry over complex numbers and quaternions to arrive at elliptic geometry over the tensor product of the algebra of split quaternions with that of complex numbers or quaternions.

This device has been used by Rozenfeld in a systematic way.

4.17. In a tensor product $\mathfrak{R}$ of Hurwitz algebras $\mathscr{H}_p$ or split Hurwitz algebras $\mathscr{H}_p'$ the conjugate of an element is defined by taking the conjugates in both factors. So if one factor is $\mathscr{H}_p$ or $\mathscr{H}_p'$ and the other $\mathscr{H}_q$ or $\mathscr{H}_q'$, the dimension of the subspace of real elements is

$$pq - p - q + 2$$

of pure imaginary elements is

$$p + q - 2.$$

Unitary groups of affine n-space over $\mathscr{K}$ are defined by imposing invariance of a hermitean form over $\mathscr{K}$. The dimension of such a group can be computed by counting the number of real parameters in the infinitesimal unitary skew hermitean matrices and adding the dimension of the automorphisms group of $\mathscr{K}$ which is the sum of those of the factor (0, 0, 3, 14). The matrix has n purely imaginary diagonal coefficients and $\binom{n}{2}$ general coefficients. So the dimension of the unitary group of affine n-space over $\mathscr{K}$ becomes

$$(p + q - 2)n + pq\binom{n}{2} + (0, 0, 3, 14) + (0, 0, 3, 14)$$

according to $p = 1, 2, 4, 8$, $q = 1, 2, 4, 8$.

Elliptic geometry of projective n-space over $\mathscr{K}$ should admit this group as its stability group. The group of motions should have pqn additional dimensions. Comparing its dimension with those of semi-simple groups, we find as elliptic groups of projective n-space over $\mathscr{K}$:

p, q	1	2	4	8
1	$D_{\frac{1}{2}(n+1)}$ or $B_{\frac{1}{2}n}$	A_n	C_{n+1}	F_4
2		$A_n \times A_n$	A_{2n+1}	E_6
4			D_{2n+2}	E_7
8				E_8

In the last column it is assumed that $n = 2$. The real types of these groups will depend on the signature of the underlying form and the division or split character of the factor algebras of $\mathscr{K}$.

Of course, this is only heuristic arguments. They are even incorrect in the cases of the last column, because then the lack of associativity in $\mathscr{K}$ forbids to define projective points as classes of scalar multiples of a vector. Outside the last column the argument can be validated by classic

methods. For $p = 8$, $q = 1$, Freudenthal's method of Jordan algebras can be used. Rozenfeld [3] claimed that it works in all cases $p = 8$, but this claim can be refuted for $q = 4, 8$. For $p = 8$, $q = 2$, Springer has proved [unpublished observations] that the method still works. Elliptic geometry over octaves with complex coefficients yields the compact, symmetric space belonging to $E_{6,1}$.

To justify Rozenfeld's assertions, which are undoubtedly true, one should prove that in any symmetric space of the magic square there exists:

1. an invariant set of pq-dimensional manifolds (straight lines) such that two general points are contained in one and only one;
2. an invariant polarity notion which imposes a structure of elliptic plane;
3. a way to describe the structure of the space by means of the algebras $\mathscr{H}$ (see Freudenthal [13]).

Rozenfeld found a few more arithmetical relations in the magic square, which still are waiting for an explanation.

4.18. Tits [8] discovered a unified presentation of all algebras of the magic square with all their real types:

K : a field of characteristic $\neq 2,3$;

$A = K$ or an alternative algebra of degree 2;

$C = K$ or a Jordan algebra of degree 3;

A_0, C_0 the kernels of the generic trace of A, C;

B, D the algebras of derivations of A, C.

For $a_1, a_2 \in A$

$$\langle a_1, a_2\rangle b = \tfrac{1}{4}[[a, a']b] - \tfrac{3}{4}\{a, a', b\}$$

defines an element $\langle a_1, a_2\rangle$ of B; for $c_1, c_2 \in C$

$$\langle c_1, c_2\rangle d = c_1(c_2 d) - c_2(c_1 d)$$

defines an element of D.

In

$$L = B + A_0 \otimes C_0 + D$$

a Lie algebra structure is defined.

In B and D the commutator is the usual one,

$$
\begin{aligned}
[B, D] &= (0), \\
[b, a \otimes c] &= ba \otimes c \qquad \text{for} \quad b \in B, \quad a \in A_0, \quad c \in C_0, \\
[d, a \otimes c] &= a \otimes dc \qquad \text{for} \quad d \in D, \quad a \in A_0, \quad c \in C_0, \\
[a_1 \otimes c_1, a_2 \otimes c_2] &= (c_1, c_2) \langle a_1, a_2 \rangle + (a_1 a_2 - (a_1, a_2)) \otimes (c_1 c_2 - (c_1, c_2)) \\
&\quad + (a_1, a_2) \langle c_1, c_2 \rangle \text{ for } a_i \in A_0, \; c_i \in C_0.
\end{aligned}
$$

Taking for A and C the usual algebras, one gets all Lie algebras of the magic square.

This unified presentation is likely to play a major role in the future.

5. Tits Geometries

5.1. If (complex) A_l is presented as the group of linear mappings of $(l+1)$-space R with determinant 1, the fundamental representation π_i of A_1 is just the representation induced in the space $R^{(i)}$ of the i-vectors (skew i-tensors) of R. The highest weight-vectors of π_i with respect to any (ordered) trunk (Cartan subgroup) are the pure i-vectors (exterior products of i vectors), which in the projective view represent the projective $(i-1)$-subspaces of R in the Plücker coordinatization of the i-Grassmann variety Γ_i.

If the weights of π_1 are $\omega_1, \ldots, \omega_{l+1}$ $(\Sigma\omega_j = 0)$, the root forms are $\omega_i - \omega_j$, among which we can take $\rho_i = \omega_i - \omega_{i+1}$ in this order as primitive ones. Every positive root form is a sum $\rho_i + \rho_{i+1} + \ldots + \rho_j$ of primitive ones. The highest weight of π_i is $\omega_1 + \ldots + \omega_i$; it is called π_i too.

Γ_i acted on by $\pi_i(A_l)$ is a homogeneous space. To find its stability group, we look for the elements of $\pi_i(\mathbf{A}_l)$ which conserve the highest weight-vector up to a scalar factor. They are spanned by the whole trunk, by all branches $\mathbf{e}_\alpha$ belonging to positive root forms α, and by all branches $\mathbf{e}_{-\alpha}$, where α as a sum of primitive root forms is free from summands ρ_i.

Reversing this argument one can define the Grassmann varieties by group theory as homogeneous spaces of A_l, the stability groups of which are determined in a simple manner by the graph of $\mathbf{A}_l$.

5.2. This method can be generalized to arbitrary (complex) semi-simple groups.

Let $\mathbf{G}$ be a complex semisimple Lie algebra, $\mathbf{H}$ an ordered trunk, $\mathbf{B}$ the Borel subalgebra (hence, maximal solvable) spanned by $\mathbf{H}$ and the branches $\mathbf{e}_\alpha$ of positive root forms α. Let $\rho_1, \ldots, \rho_l$ be the primitive root forms, and $\mathbf{G}^{(i)}$ the subalgebra spanned by $\mathbf{B}$ and the branches $\mathbf{e}_{-\alpha}$, where α as a sum of primitive root form is free from ρ_i.

(According to Morozov [1] and Karpelevič [1] the $G^{(i)}$ are essentially all nonsemisimple maximal subalgebras of $\mathbf{G}$.)

In the case $\mathbf{A}_l$, $G^{(i)}$ is the stability group of Γ_i, B the stability group of the homogeneous space of total flags. Γ_i can be also considered as the variety of conjugates of $G^{(i)}$, the variety of total flags as the variety of conjugates of B. Elements of different Γ_i are considered as incident (i.e., one of them contains the other) iff the intersection of their stability groups contains a conjugate of B.

Again these properties may be used as definitions in the general case.

In the case A_l the elements of all Γ_j incident with an element c of Γ_i and different from c fall into two subsets, the projective geometry within c with the group A_{i-1} and the projective geometry around c with the group A_{l-i}. Every element of the one is incident with every element of the other.

5.3. Such considerations led Tits [5–7] to the notion of a category of incidence geometries $J(W)$ belonging to graphs W of semisimple groups.

Every $J(W)$ consists of a graph W, a family of sets E_i corresponding to the nodes of W, and a binary symmetric reflexive incidence relation I on $\bigcup E_i$ which on every single E_i coincides with the identity relation.

The residual geometry of a $J(W)$ with respect to an $a \in E_i$ consists of the graph W' arising from W by removal of the node i and its bonds with other nodes, the family of sets E_j' of $c \in E_j$ incident with a $(j \neq i)$, and the restriction of I to $\bigcup E_j'$.

Axiom I: *Let W be the disjoint union of W' and W''. Then the sets of $J(W)$ are those of $J(W')$ and $J(W'')$, and the incidence relation of $J(W)$ coincides with those of $J(W')$ and $J(W'')$ in their definition domain and with the all-relation outside.*

Hence, if i and k are separated in W by j, then elements $a \in E_i$ and $c \in E_k$ are incident with each other as soon as both of them are incident with some element b of E_j.

Axiom II: *If $J(W)$ is given, let for any $x \in \bigcup E_i$, and some j, $\Phi(x)$ be the set of all elements of E_j incident with x. Then, if a and b are non-*

incident and if $\Phi(a) \cap \Phi(b)$ *is nonvoid, there exists some* c, *such that* $\Phi(c) \supset \Phi(a) \cap \Phi(b)$.

For instance, in the case A_l, the intersection of two nonvoid projective subspaces, if containing a point, is again a nonvoid projective subspace.

Axiom III: *For any* $J(W)$, $\bigcup E_i$ *does not split into two totally non-incident subsets except if* W *consists of one single node.*

Hence, two elements of $\bigcup E_i$ can always be joined by a finite chain of elements each of which is incident with the next one. One may even choose the links of the chain alternatively from two given sets E_i.

These axioms are fulfilled in the example with which we started, i.e., the geometries belonging to the complex semisimple Lie groups G, where $\bigcup E_i$ is the set of maximal subgroups of G containing a Borel subgroup (or equivalently, the set of conjugates of $G^{(i)}$), and $a \in E_i$, $b \in E_j$ are called incident if $a \cap b$ contains a Borel subgroup (conjugate of B). The main tool to prove this and to deal with these geometrics is the lemma of Bruhat which for the present use can be stated in the form:

Two Borel subgroups have a trunk in common.

By this fact the study of the relations between elements of E is enormously simplified. One can replace E_i by the set E_i^0 of maximal subgroups of G containing a given trunk H (or equivalently by the subgroups equivalent to $G^{(i)}$ under the kaleidoscope group), and E by $E^0 = \bigcup E_i^0$.

As $G^{(i)}$ is generated by H and the $\mathbf{e}_\alpha$ with $(\pi_i, \alpha) \geqslant 0$ ($\pi_i = i$-th fundamental weight), E_i^0 may be identified with the set Π_i of weights equivalent to π_i under the kaleidoscope group. Incidence of two elements of E^0 is then translated by the relation $(\lambda, \alpha)(\mu, \alpha) \geqslant 0$ for all root forms α between the corresponding $\lambda, \mu \in \Pi = \bigcup \Pi_i$.

This yields a simple algebraic tool to deal with the Tits geometries belonging to complex semisimple groups.

5.4. In a category subjected to these axioms the geometries $J(W)$ can be recursively studied on the basis of the knowledge of the geometries of rank 2, the W of which is the graph of $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, or $\mathbf{G}_2$.

The Axioms I–III are a marvelous tool to derive incidence relations. Let us write a chain such as mentioned after Axiom III by a string of numbers i, each representing an element of E_i, but not necessarily the same one if the number appears several times. Then one can formulate incidence theorems of the kind:

For any pair of elements of E_i, E_j *there exists a joining chain* $iabcj$.

If for two given elements of E_i, E_j *there exists a joining chain* $iabcj$, *then for the same pair there exists a chain* $iuvj$ *too.*

If for two given elements of E_i, E_j there exists a joining chain iabcj, it is either unique, or there exists a joining chain iuvj too.

In the case of $\mathbf{A}_l$ incidence theorems of this kind may read as follows:

Given a point and a line, there is a chain 1212 *joining them.*

If, given a i-space and a j-space, there is a k-space such that ikj, then there is for $k' = i + j - k - 1$ and $0 \leqslant k' < n$, a k'-space such that ik'j.

If, given a i-space and a j-space, there is a k-space ($k < i$) such that ikj, then this k-space is either unique, or there is a $(k + 1)$-space such that $i(k + 1)j$.

n is called the length of the chain $a_0a_1 \ldots a_n$. A chain is called irreducible if all its elements are different. A geometry of rank $l = 2$ is called a n-gonic structure if for any two elements of $E_1 \cup E_2$ there exists a joining chain of length $\leqslant n$ and, at most, one joining chain of minimal length $< n$.

The characteristic incidence properties of this kind are for the geometries of rank 2: $\mathbf{A}_2$: a 3-gonic structure, $\mathbf{B}_2$: a 4-gonic structure, $\mathbf{G}_2$: a 6-gonic structure.

5.5. To show how the recursive method works, we derive in the geometry of $\mathbf{A}_l$ the existence of a line joining two given points:

In any case there is a joining chain 121212 ... 1. Deleting the node 1 we get a geometry $\mathbf{A}_{l-1}$ in which 2 plays the role of point. By induction we may suppose the existence of a 3 incident with the two first 2 of the above chain, hence 123212 ... 1. Here, by the consequence of Axiom I we may omit a 2 between 1 and 3, as to get a chain 1312 ... 1. Now, deleting the node 3 we get in the left-hand part of the graph a two-dimensional projective geometry which contains the first two 1's of the chain. These are points which can be joined by a line so we get a new chain 1212 ... 1 which is by two links shorter than the one we started with. This process can be repeated with the final result of the existence of 121.

To show the use of Axiom II, we prove the uniqueness of this line: If a pair of points and a pair of lines are such that every point is incident with every line, then according to Axiom II there is an element i incident with all of them. If the points and the lines are different, then $i > 2$. By induction with respect to l as in the former proof we can go back to $l = 2$ where the uniqueness is assumed as a base of the induction.

The graph of $\mathbf{D}_l$ yields the geometry on a nondegenerate quadric in projective $(2l - 1)$-space. E_3 is the set of points on the quadric, the geometry around a point has the graph of D_{n-1}, which means that it is the geometry on a quadric in $(2l - 3)$-space. For $3 < i < l$, we get the $(i - 3)$-projective geometry within an element of E_i, and the geometric on a quadric in $(2l - 2i + 3)$-space around that element; E_i is the set

of projective $(i-3)$-spaces on the quadric in $(2l-1)$-space. By such reasons an element of E_l is a projective $(l-3)$-space on the quadric, and the axis of two pencils of $(l-1)$-spaces, which are elements of E_1 and E_2. Incidence is defined by means of the inclusion relation as in the case of $\mathbf{A}_l$, except for $a_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$, where it means intersecting in a $(l-2)$-space.

In the same way the graphs of the other simple groups may be used to study the nature of the geometric elements. A large number of incidence theorems such as mentioned above, are found in Tits' paper [7].

5.6. The case F_4 is particularly interesting. Its graph is

$$\dot{a} - \dot{b} \Rightarrow \dot{c} - \dot{d}$$

It shows that the geometry within an element of E_d is the symplectic one of projective 5-space; hence, an element of E_d is a 5-symplecton, the points, lines, planes of which are elements of E_a, E_b, E_c. The geometry around a point (element of E_a), however, is that of a quadric, the points, lines, planes of which are the symplecta, planes, lines in the earlier sense. The symplecta around a plane form a pencil (projective line), whereas the geometry within a plane is just plane geometry etc.

These are well-known properties of metasymplectic geometry. In Tits' paper [12] a few incidence properties of the F_4-geometry are found. Between two points one gets the chains *aa* (identical), *aba* (joined), *ada* (interwoven), *ababa* (hinged), and *abababa* (generic). Two lines can be in 17 different relative positions, which in the general case cannot be described by single chains (e.g., the condition on two lines of lying in one symplecton and intersecting in a point).

5.7. The axioms of Section 5.3 do not define uniquely a geometry belonging to a given graph. The incidence properties mentioned thus far are "trivial" ones which have to be supplemented by nontrivial, lock incidence theorems of the kind of Desargues and Pappus-Pascal in usual projective geometry.

In this respect $\mathbf{G}_2$-geometry is particularly novel. The algebraic tools to deal with it are split octaves. The set of points a is defined by $a^2 = 0$ (equivalently $(a, a) = 0$ and $\operatorname{Re} a = 0$); for two points a, b the relation of being joined is $ab = 0$; lines are maximal sets of joined points. Points and lines form a 6-gonic structure. Schellekens [1] has studied lock incidence theorems in ths actual $\mathbf{G}_2$-geometry, by which this geometry is characterized axiomatically among 6-gonic structures. This work was done in a broader context, which will be sketched in Section 5.9.

The axiomatic approach to polar geometries by Veldkamp has been mentioned in Section 4.15.

5.8. Thus far we dealt with the notion of geometries $J(W)$ subjected to the Axioms I–III with a view to geometries of complex semisimple Lie groups. The notion has proved still more useful in the investigations on geometries of real types of semisimple Lie groups.

On a quadric in real projective $(2l-1)$-space characterized by a number of p positive and $q = 2l - p$ negative squares in its quadratic form ($p \leqslant q$), there are projective subspaces only up to the dimension $p - 1$. So there are no more than p kinds E_i of geometrical objects, where p is the real rank of the group G of the quadric (a real form of D_l). The incidence structure in $\bigcup E_i$ looks much like that of B_p or C_p.

In a group theory interpretation the loss of geometrical objects means that maximal subgroups might be lost as soon as the complex group is restricted to a real type. Maximal subgroups of G might cease to be maximal in the complex extension, they might be the intersection of complex conjugate maximal subgroups of complex G.

Tits [12] fitted geometries of real semisimple groups into the frame of geometries $J(W)$:

$\bigcup E_i$ *consists of the maximal proper subgroups of* G *containing a Borel subgroup over the complex field, the* E_i *being classes of conjugacy*; *two elements of* $\bigcup E_i$ *are incident, if their intersection still contains a Borel subgroup over the complex field.* The graph belonging to this system of E_i is defined *a posteriori*: To every E_i belongs a node of W. To know the numbers of bonds by which two nodes i, j are to be joined, we form the residual geometry with respect to a flag which has one element common with each E_k ($k \neq i, j$). If this residual geometry is a m-gone, i and j are joined by a $(m-2)$-fold bond. (So we have to use a 4-fold, instead of the traditional 3-fold, bond for $\mathbf{G}_2$.)

It is not difficult to establish the list of graphs of real types of semisimple groups (see Tits [12]). No new kind of graphs appear.

It is a new striking feature of the magic square that the real groups of every line show the same graph, viz., the 1-point-graph for the hyperbolic plane geometries, the $\mathbf{A}_2$-graph for projective plane geometries, the $\mathbf{C}_3$-graph for 5-dimensional symplectic geometries, and the $\mathbf{F}_4$-graph for metasymplectic geometries. This means that the trivial incidence properties are the same for geometries of the same line of the magic square.

5.9. Tits' formulations are still more general. They apply to algebraic groups also. A special case [13] dealt with is that of B_2 over a perfect

field of characteristic 2. There the permutation of the two nodes of B_2 can be extended to an outer automorphism. Geometrically, this means a duality between E_1 and E_2 (points and lines). Polarities and their sets of selfconjugated points (ovoids) have been studied and their groups have been related to the Suzuki groups.

Another special case is related to the trialities on quadrics in projective 7-space classified by Tits [11]. These are automorphisms of the D_4-geometry mapping $E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_1$ with the period 3. According to T. A. Springer [unpublished observations] one defines a $*$-product for split octaves over K by

$$a * b = \tau^2 \bar{a} \cdot \tau \bar{b},$$

where τ is an automorphism of K of period 3. Generalizing the method in Section 5.7 one defines points by $a * a = 0$, the relation of being joined by $a * b = 0$, and lines as maximal sets of joined points (see Schellekens [1]). The group of this geometry is a G_2, if $\tau = 1$. If, however, $\tau \neq 1$, the group may be an exceptional D_4 over the subfield of τ-invariants. In Schellekens' earlier mentioned axiomatic approach to $\mathbf{G}_2$-geometry the existence of this kind of hexagonic structure is used to proving the independence of certain lock incidence axioms.

References

R. Baer

1. Free mobility and orthogonality, *Trans. Am. Math. Soc.* **68** (1950), 439-460.

G. Birkhoff

1. Metric foundations of geometry, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.* **27** (1941), 402-406.
2. Metric foundations of geometry I, *Trans. Am. Math. Soc.* **55** (1944), 465-492.
3. Extensions of Lie groups, *Math. Z.* **53** (1950), 226-235.

F. van der Blij

1. History of the octaves, *Simon Stevin* **34** (1961), 106-125.

F. van der Blij and T. A. Springer

1. Octaves and triality, *Nieuw Archief v. Wiskunde* **8** (1960), 158-169.

A. Borel

1. Le plan projectif des octaves et les sphères commes espaces homogènes, *Compt. Rend. Acad. Sci.* **230** (1950), 1378-1380.

L. E. J. Brouwer

1. Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie, *Math. Ann.* **67** (1909), 246-267; **69** (1910), 181-203.

H. Busemann

1. Metric methods in Finsler spaces, *Ann. Math. Studies* No. 8 (1942).

St. S. Cairns

1. An axiomatic basis for plane geometry, *Trans. Am. Math. Soc.* **35** (1923), 235-244.

É. Cartan

1. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Ph. D. Thesis, Paris, 1894; Œuvres.
2. Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu, *Am. J. Math.* **18** (1896), 1-61; Œuvres, I," pp. 137-292.
3. Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Bull. Soc. Math. France* **41** (1913), 53-96; "Œuvres, I," pp. 493-530.
4. Les groupes réels simples finis et continus, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1914), 263-355; "Œuvres, I," pp. 399-491.
5. Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl, *J. Math. Pures Appl.* **2** (1923), 167-192.
6. Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **44** (1927), 345-467; "Œuvres, I," pp. 867-989.
7. Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **53** (1929), 217-252.

C. Chevalley and R. D. Schafer

1. The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.* **36** (1950), 137-141.

H. Freudenthal

1. Einige Sätze über topologische Gruppen, *Ann. Math.* **37** (1936), 46-56.
2. "Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie." Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, 1951 (mimeographed); new revised edition, 1960.
3. Zur ebenen Oktavengeometrie, *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.* **A56** (1953), 195-200.
4. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, I-XI,
   I-II: *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.* **A57** (1954), 218-230, 363, 368.
   III-IV: *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.* **A58** (1955), 151-157, 277-285.
   V-VII: *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.* **A62** (1959), 165-201.
   VIII-IX: *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.* **A62** (1959), 447-474.
   X-XI: *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.* **A66** (1963), 457-487.
5. La topologie dans les fondements de la géométrie, *Internat. Congr. Math.* (Amsterdam, 1954) **III**, 178-184.
6. Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems, *Math. Z.* **63** (1956), 374-405.
7. Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, *Nieuw Archief v. Wiskunde* **5** (1957), 105-142.
8. Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts, *Math. Phys. Semesterber.* **7** (1960), 1-25.

9. Zu den Weyl-Cartanschen Raumproblemen, *Arch. Math.* **11** (1960), 107-115.
10. Im Umkreis der sogenannten Raumprobleme. *In* "Essays on the Foundations of Mathematics," dedicated to A. H. Fraenkel, Jerusalem, 1961, pp. 322-327.
11. Das Helmholtz-Liesche Raumproblem bei indefiniter Metrik, *Math. Ann.* (1964), in press.
12. Symplektische und metasymplektische Geometrien. Algebraical and topological foundations of geometry, *Proc. Colloq. Utrecht, 1959*, pp. 31-33 (1962).
13. Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen. Algebraical and topological foundations of geometry, *Proc. Colloq. Utrecht, 1959*, pp. 35-37 (1962).

H. Helmholtz

1. Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie (Vortrag vom 22. Mai 1866?), *Verhandl. Naturhist. med. Verein Heidelberg* **4** (1868), 197-202; *Wiss. Abhandl.* **II** (1883), 610-617.
2. Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1868), pp. 193-221; *Wiss. Abhandl.* **II** (1883), 618-639.

D. Hilbert

1. Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig, 1899.
2. "Grundlagen der Geometrie," 2nd ed., 1902, Suppl. IV; 9th ed. 1962, Suppl. IV.

G. Hirsch

1. La géométrie projective et la topologie des espaces fibrés, *Colloq. Intern. Centre Nat. Rech. Sci.* No. 12 (1949), 35-42.

S. Iyanaga and M. Abe

1. Über das Helmholtzsche Raumproblem. *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **19** (1943), 174-180, 540-543.

N. Jacobson

1. Some groups of transformations defined by Jordan algebras III, *J. Reine Angew. Math.* **207** (1961), 61-85.

P. Jordan

1. Über eine nicht-desarguessche ebene projektive Geometrie, *Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg* **16** (1949), 74-76.

F. Karpelevič

1. On the (non-semi-simple) maximal subalgebras of semi-simple Lie algebras (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **76** (1951), 775-778.

B. de Kérékjarto

1. Sur le groupe des homographies et des antihomographies d'une variable complexe, *Comm. Math. Helv.* **13** (1950), 68-82.

W. Klingenberg

1. Eine Kennzeichnung der Riemannschen sowie der Hermiteschen Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.* **70** (1959), 300-309.

A. Kolmogoroff

1. Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1930) pp. 208-210.

N. H. Kuiper

1. A real analytic non-desarguian plane. *Nieuw Archief v. Wiskunde* **5** (1957), 19-24.

D. Laugwitz

1. Über die Invarianz quadratischer Formen bei linearen Transformationen und das Raumproblem. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. IIa* **2** (1956), 21-25.
2. Über eine Vermutung von Hermann Weyl zum Raumproblem, *Arch. Math.* **9** (1958), 128-133.

S. Lie

1. Über die Grundlagen der Geometrie. *Ber. Ges. Wiss. Leipzig* **42** (1890), 284-321, 355-418; *Ges. Abhandl.* **II**, 380-468.
2. Theorie der Transformationsgruppen III, Abt. V." Leipzig, 1893.

R. Lipschitz

1. Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, *J. Reine Angew. Math.* **72** (1870), 1-56.

R. G. Lubben

1. The double elliptic case of the Lie-Riemann-Helmholtz problem of the foundation of geometry, *Fund. Math.* **11** (1928), 34-95.

N. S. Mendelson

1. Non-desarguesian projective plane geometries which satisfy the harmonic point axiom, *Canad. J. Math.* **8** (1956), 522-562.

D. Montgomery and L. Zippin

1. Topological group foundations of rigid space geometry, *Trans. Am. Math. Soc.* **48** (1940), 21-49.

R. L. Moore

1. On the Lie-Riemann-Helmholtz-Hilbert problem of the foundations of geometry, *Am. J. Math.* **41** (1919), 299-319.

V. V. Morozov

1. The non-semi-simple maximal subgroups of simple groups (Russian). Ph.D. Thesis, Kazan, 1943.

R. Moufang

1. Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit (D_9), *Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg* **9** (1932), 207-222.
2. Zur Struktur von Alternativkörpern, *Math. Ann.* **110** (1934), 207-222.

G. Pickert

1. Elementare Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems, *Math. Ann.* **120** (1947, 1949), 492-501.
2. Bemerkungen über die projektive Gruppe einer Moufang-Ebene, *Illinois J. Math.* **3** (1959), 169-173.

K. Reidemeister

1. Das Lie-Helmholtzsche Raumproblem und ein Satz von Maschke, *Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg* **4** (1926), 172-173.

B. Riemann

1. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, 1854 gehaltener Habilitationsvortrag (1867), *Abhandl. Ges. Wiss. Göttingen* **15** (1876), 254-269.

B. A. Rozenfeld

1. The compact simple group E_6 as the group of motions of the compact non-euclidean plane of octaves (Russian), *Dokl. Akad. Nauk Azerb. SSR* **10** (1954), 829-833.
2. "Non-euclidean Geometries" (Russian). Moscow, 1955.
3. Geometrical interpretation of the compact simple Lie groups of the class E (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **106** (1956), 600-603.
4. Simple Lie groups and non-euclidean geometry (Russian), *Uch. Zap. Kolomensk. Ped. Inst.* **1** (1956), 11-26.
5. Geometrical interpretation of the symmetric spaces with simple fundamental groups (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **110** (1956), 23-26.
6. Interpretation of symmetric spaces with simple fundamental groups as manifolds with symmetry features (Russian.), *Uch. Zap. Kolomensk. Ped. Inst.* **2** (1958), 19-37.
7. Einfache Lie-Gruppen und nichteuklidische Geometrien. Algebraical and topological foundations of geometry, *Proc. Colloq. Utrecht, 1959* pp. 135-155 (1962).

H. Salzmann

1. Kompakte zweidimensionale projektive Ebenen, *Math. Ann.* **145** (1962), 401-428.
2. Topologische projektive Ebenen. Algebraical and topological foundations of geometry, *Proc. Colloq. Utrecht, 1959* pp. 157-163 (1962).

E. Scheibe

1. Über das Weylsche Raumproblem, *J. Reine Angew. Math.* **197** (1957), 162-207.

G. J. Schellekens

1. On a hexagonic structure, I-II, *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap.* **A65** (1962), 201-234.

F. Schur

1. Über den Zusammenhang der Räume constanten Riemannschen Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen, *Math. Ann.* **27** (1886), 537-567.

T. A. Springer

1. The projective octave plane I-II, *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap.* **A63** (1960), 74-101.
2. The classification of reduced exceptional simple Jordan algebras, *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap.* **A63** (1960), 414-422.
3. Characterization of a class of cubic forms, *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap.* **A65** (1962), 259-265.
4. The projective octave plane. Algebraical and topological foundations of geometry, *Proc. Colloq. Utrecht, 1959* pp. 173-174 (1962).
5. On the geometric algebra of the octave planes, *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap.* **A65**, 451-468 (1962).

T. A. Springer and F. D. Veldkamp

1. Elliptic and hyperbolic octave planes, I-III, *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap.* **A66** (1963), 413-451.

G. K. Ch. von Staudt

1. "Geometrie der Lage." Nürnberg, 1847.

Tae-il Suh

1. On isomorphisms of little projective groups of Cayley planes, I-II, *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap.* **A65** (1962), 320-339.

W. Süss

1. Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie, *Tohoku Math. J.* **26** (1926), 365-385; **27** (1926), 214-242; **28** (1927), 228-241; *Japan. J. Math.* **4** (1927), 97-119.

J. Tits

1. Étude de certains espaces métriques, *Bull. Soc. Math. Belg.* **1952** (1953), 44-52.
2. Sur un article précédent: Études de certains espaces métriques, *Bull. Soc. Math. Belg.* **1953** (1953), 124-125.
3. Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels, *Bull. Acad. Roy. Belg. Sci.* **39** (1953), 309-329.
4. Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels E_6 et E_7, *Bull. Acad. Roy. Belg. Sci.* **40** (1954), 29-40.
5. Étude géométrique d'une classe d'espaces homogènes, *Compt. Rend. Acad. Sci.* **239** (1954), 466-468.

6. Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Mém. Acad. Roy. Belg. Sci.* **29** (1955), fasc. 3.
7. Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique. *Bull. Soc. Math. Belg.* **8** (1956), 48-81.
8. "Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles." Manuscript.
9. Sur la géométrie des R-espaces, *J. Math. Pures Appl.* **36** (1957), 17-38.
10. Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes. *Colloque d'Algèbre supérieure, 1956* pp. 261-289.
11. Sur la trialité et certains groupes qui s'en déduisent, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **2** (1959), 13-60.
12. Groupes algébriques semi-simples et géométries associées. Algebraical and topological foundations of geometry, *Proc. Colloq. Utrecht, 1959* pp. 175-192 (1962).
13. Ovoïdes et groupes de Suzuki, *Arch. Math.* **13** (1962), 187-198.

F. D. Veldkamp

1. Polar geometry I-V, *Proc. Koninkl. Akad. Wetenschap.* **A62** (1959), 512-551; **A63** (1960), 207-212.

H. C. Wang

1. Two-point homogeneous spaces, *Ann. Math.* **55** (1952), 177-191.
2. Two theorems on metric spaces, *Pacific J. Math.* **1** (1951), 473-480.

H. Weyl

1. Note to lecture by B. Riemann, "Über die Hypothesen..." p. 27, Berlin, 1919.
2. Die Einzigartigkeit der pythagoraeischen Massbestimmung, *Math. Z.* **12** (1922), 114-116.
3. "Mathematische Analyse der Raumproblems." Springer, Berlin, 1923.

H. Wiener

1. Weiteres über die Grundlagen und Aufbau der Geometrie, *Jahresber. Deut. Mat.-Ver.* **3** (1894), 70-80.

P. Wilker

1. Algebraische Lösung des Helmholtzschen Raumproblems für reelle Vektorräume, *Math. Ann.* **139** (1960), 433-445 .

H. Yamabe

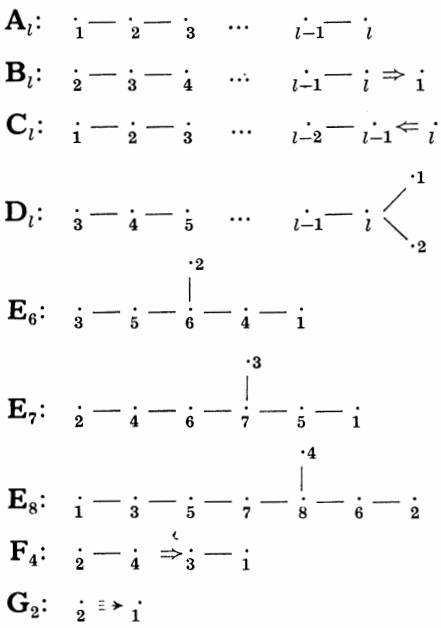
1. A generalization of a theorem of Gleason. *Ann. Math.* **58** (1953), 351-365.

I. Yokota

1. Embeddings of projective spaces into elliptic projective Lie groups. *Proc. Japan Acad.* **35** (1959), 281-283.

Appendix

1. Numbering of primitive root forms and fundamental weights according to É. Cartan:



dimension 78

133

248

52

14

If $\rho_1, \ldots, \rho_l$ are the primitive root forms, the fundamental weight π_i is defined by

$$2\frac{(\pi_i, \rho_j)}{(\rho_j, \rho_j)} = \begin{matrix} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j). \end{matrix}$$

A_0 means the one-dimensional Lie algebra.

2. Let $\mathbf{M}$ be a real Lie algebra and $\mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$ its complex extension. Let C the involutory semimorphism of $\mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$ which leaves invariant just the elements of $\mathbf{M}$. Let C_0 be an involutory automorphism which defines a unitary restriction of $\mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$. If $\mathbf{M}$ is simple, three things may happen:

1. $\mathbf{L} = \mathbf{M} \times \mathrm{co}$ is simple; CC_0 is an inner automorphism; $\mathbf{M}$ is an *inner* real type of $\mathbf{L}$.

2. $\mathbf{L} = \mathbf{M} \otimes \mathrm{co}$ is simple; CC_0 is an outer automorphism; $\mathbf{M}$ is an *outer* real type of $\mathbf{L}$.

3. $\mathbf{M} \times \mathrm{co}$ splits as $\mathbf{L} + CC_0\mathbf{L}$; $\mathbf{M}$ is a *twin* real type of $\mathbf{L}$.

CC_0 may be supposed to conserve a given trunk (Cartan subalgebra), in case

1. elementwise,

2. by a fixed nontrivial automorphism A of the graph, $A\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_{A\rho}$ for primitive root forms ρ.

In (1) and (2) $T = CC_0$ respectively, CC_0A may be characterized by an integer $j > 0$ indicating that

$$T\mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_\alpha \text{ or } \mathbf{e}_\alpha$$

iff the primitive rootform ρ_j occurs with an odd or even coefficient in α; or by $j = 0$ iff $T\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha$ for all rootforms α.

The corresponding real types are indicated by

(1) $\mathbf{L}_j$, (2) $\mathbf{L}_{j,*}$ (3) $\mathbf{L}_{**}$.

Using this notation one can easily read the maximal compact subalgebra from the graph.

Notice that j need not be unique.

3. With respect to an irreducible representation f of complex semi-simple $\mathbf{L}$ with highest weight λ, and a real type $\mathbf{L}_{re}$ of $\mathbf{L}$ with the semi-morphism C, three cases can occur:

(1) λ and its conjugate $C\lambda$ are not equivalent,

(2) λ and $C\lambda$ are equivalent, $\epsilon = -1$,

(3) λ and $C\lambda$ are equivalent, $\epsilon = 1$,

where ϵ is defined by

$$\begin{aligned} C\lambda - \lambda &= \sum q_\nu \rho_\nu, \\ \epsilon_\nu &= -1 \quad \text{for} \quad \nu \neq j, \\ \epsilon_\nu &= 1 \quad \text{for} \quad \nu = j, \\ \epsilon &= \prod \epsilon^{q_\nu}. \end{aligned}$$

In (1) and (2) the representation f of L_{re} is essentially complex; to get a real representation one has to double the number of dimensions. In (3) it is essentially real. In (2) f can be considered as a representation in quaternion space of half-dimensionality.

Reference

H. Freudenthal
"Lie Groups." Mimeographed lectures, Yale University, 1961.

Comments*

Über die Enden topologischer Räume und Gruppen [1931b]

This is Freudenthal's doctoral dissertation. The doctorate was awarded at the University of Berlin on 6 October 1931, the examiners ('Gutachter') being H. Hopf and L. Bieberbach. Hopf had a strong influence on Freudenthal's work of the 1930s, as is visible in the letters they exchanged in that period. This paper is the first one to introduce 'ends' in topology. An *end* of a (sufficiently nice) locally compact topological space X is an equivalence class of increasing sequences $U_1 \subset U_2 \subset \cdots$ of connected open subsets U_i of X with $\bigcap_i U_i = \emptyset$, for a suitable equivalence relation on such sequences.

Adding the ends to X one obtains a 'compactification' of X.

A main result of the paper is that a topological group or a homogeneous space ('Schiebraum') can only have 1, 2 or infinitely many ends.

The paper has been much quoted. For recent appearances of ends in topology see e.g. [HR].

Freudenthal returned to the theory of ends in [1942a] and [1952f]. See the comments on [1945] for his work on ends of groups.

Einige Sätze über topologische Gruppen [1936a]

The paper discusses basic facts from the theory of topological groups, which were in the air at the time. It is one of the first publications to present these facts coherently. An important point made in the paper is that the isomorphism theorems from abstract group theory hold for topological groups only under additional assumptions.

In Freudenthal's review [1940e] (not reproduced here) of L. Pontryagin's book on topological groups one finds polemical comments on priorities for the basics of the theory of topological groups.

Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen [1936b]

Let G be a locally compact topological group. A complex-valued continuous function on G is *almost-periodic* if the set of its left translates f_g $(g \in G)$ (where $f_g(x) = f(gx)$) is relatively compact in the space of all continuous functions, for the topology defined by the supremum norm (this is von Neumann's definition of almost-periodicity). G has *sufficiently many* almost-periodic functions if the almost-periodic functions on

*Letters in square brackets refer to the list following the comments.

G separate points, i.e. if for any pair (g, h) of distinct points of G there is an almost-periodic function f with $f(g) \neq f(h)$. Von Neumann proved that this is the case if and only if the finite-dimensional continuous unitary representations of G separate points.

Freudenthal proved in [1936b] that if G is connected it has sufficiently many almost-periodic functions if and only if it is a product $V \times K$, where V is isomorphic to some $\mathbb{R}^n$ and K is compact (with the proviso, later seen to be superfluous, that G has a countable basis for its open sets).

In the important case that G is a non-compact connected Lie group, the result implies that one cannot have an analogue of the Peter–Weyl theorem for compact groups, based on the use of finite-dimensional unitary representations. At first sight this seems a negative conclusion. Its positive aspect is that it shows the need for a theory of infinite-dimensional representation of Lie groups. Such a theory has been established since the 1950s, notably in the work of Harish-Chandra.

The main result of [1936b] was also obtained around the same time by A. Weil (without the proviso). It is discussed in [W], Chapter VII.

Teilweise geordnete Moduln [1936d]

Here Freudenthal initiated the study of what is now known as vector lattices. It introduces fundamental notions and results. His aim was to give an abstract spectral theorem, generalizing the spectral theorem for selfadjoint operators in Hilbert space (see also [1936e], [1936f], [1936g]).

Independently, at about the same time, Kantorovich in Leningrad started work on the same topic.

Freudenthal did not return to it in later years. His ideas stimulated subsequent later work: in the school of Kantorovich and by Nakano and Ogasawara (Japan), S. W. P. Steen (Great-Britain), G. Birkhoff (U.S.A.). Later references are the books [LZ], [Za] by W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen.

Vector lattices nowadays play a role in economics (see [A]).

Zum intuitionistischen Raumbegriff [1936i]

This paper had a double provenance, topology and intuitionism. The direct impulse was Brouwer's paper on intuitionistic dimension theory (1928), which introduced the notion of dimension in an intuitionistic setting and proved its correctness, following his 1913 paper. Brouwer's approach was via metric spaces. At the time it was doubted that a metric-free approach was feasible. Freudenthal tackled this issue by using Alexandrov's 'projection spectra' (inverse systems). Combining the notions of 'projection spectrum' and 'choice sequence', Freudenthal constructed an intuitionistic version of a separable metric space called *DFTK-space* after the basic conditions. The paper contains a wealth of tools and insights, e.g. a topological definition of 'located set' ('katalogisierte Menge') and an intuitionistic Urysohn metrization theorem. The equivalence with

Brouwer's definition is shown. Moreover Freudenthal indicates how to extend his approach to Hilbert spaces. The paper is elegant and basic. It did, however, by and large escape the attention it deserved.

Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln [1936j]

The interpretation of intuitionistic logic goes back to Brouwer's dissertation, where a 'construction'-interpretation is outlined. A. Heyting started to present a 'proof'-interpretation in 1930. A clean formulation can be found in Heyting's monograph. By and large the 'proof'-interpretation coincides with Kolmogorov's 'problem'-interpretation (1932). In the present paper Freudenthal presents a radical interpretation that has unsuspected consequences for the possibility of a coherent logic. E.g. the problem of hypothetical argument is handled in an unorthodox manner (it had already worried Brouwer in 1907, cf. [D]). Freudenthal clearly formulates and motivates the identification of a theorem and its proof.

Entwicklungen von Räumen und Gruppen [1936k]

The paper gives a résumé of the results of the long paper [1937b], not reproduced here. The papers deal with general facts about and applications of what are now called projective and inductive limits of sequences of topological spaces or of groups (Freudenthal speaks of 'R_n-adische' and 'R_n-ale Limites' in the case of spaces, respectively, 'G_n-adische' and 'G_n-ale Limes' in the case of groups). In the meantime the 'general facts' have become quite familiar. But in 1936 this was by no means the case. Freudenthal was one of the first to deal systematically with such facts.

Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie. Zum Hopfschen Umkehrhomomorphismus [1937f], [1937g]

The two papers show Freudenthal's interest in the foundations of homology theory, a topic coming up in the 1930s (and developed considerably in the later decades). Cohomology also makes its appearance and Hopf's 'Umkehrhomomorphismus' in homology led to the ring structure in cohomology. Freudenthal's papers are contributions to these developments.

Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I [1937h]

This is a fundamental paper which had a great impact. It introduces the suspension of a space, nowadays a standard notion in topology. Freudenthal's work was probably stimulated by the work on homotopy groups of his colleague at the University of Amsterdam, Witold Hurewicz (who emigrated to the United States in 1936).

The homotopy group $\pi_n(X)$ of a space X is built out of the continuous maps of the n-sphere S^n to X. Freudenthal was the first to prove substantial results about the homotopy groups of spheres. Suspensions are crucial in his work.

The suspension $S(X)$ of a (reasonable) topological space X is obtained from the product $X \times [0, 1]$ by collapsing to a point each of the subspaces $X \times \{0\}$ and $X \times \{1\}$. In fact, S defines a functor on the category of topological spaces one is dealing with. It is easy to see that the suspension of the n-sphere S^n is homeomorphic to S^{n+1}. (Freudenthal only considers suspensions of spheres, with a somewhat different definition.)

Using functoriality of suspension one shows that there is a homomorphism of homotopy groups $\pi_n(X) \to \pi_{n+1}(S(X))$. In particular we have a homomorphism

$$h_{n,m} \colon \pi_n(S^m) \to \pi_{n+1}(S^{m+1}).$$

Assume that $n > m$ (the interesting situation). The main result of [1937h] is that $h_{n,m}$ is an isomorphism if $2m > n + 1$. The geometric proof given in [loc. cit.] is quite difficult.

Freudenthal's result implies that for fixed p the groups $\pi_{m+p}(S^m)$ are isomorphic for large m. This is an example (perhaps the first one) of a stability phenomenon in algebraic topology. These groups are the *stable homotopy groups*. They have been intensively studied over the years, but have not yet yielded their mysteries. A recent reference is the book [Ra].

Freudenthal did not return to these matters in later years.

Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen [1941]

The main result of the paper is the following. Let G be a connected, simple real Lie group (of dimension ≥ 3) which is absolutely simple, i.e. whose complexified Lie algebra remains simple as a complex Lie algebra. Then any automorphism of G is continuous. For compact G this was proved in the beginning of the 1930s by É. Cartan and B. L. van der Waerden. Freudenthal extends van der Waerden's approach, in which a fundamental set of neighborhoods of the identity in G is constructed by group-theoretical means. To achieve this, Freudenthal has to make full use of the technicalities of semisimple Lie algebras.

The results of this paper can be viewed in a wider context, which is discussed in [Bo], p. 134–142.

Über die Enden diskreter Räume und Gruppen [1945]

In 1943, Hopf introduced 'ends' of a (finitely generated) discrete group G (see [Ho]). He did this via an application of the results of Freudenthal's thesis (see [1931b]), using an action of G on a suitable topological space.

Freudenthal constructs here Hopf's ends in a more direct way, viewing G itself as a geometric object. The paper is perhaps the first one in 'geometric group theory', a topic which has been much developed in the meantime (for a sample of some more recent results see e.g. [Br]).

Hopf and Freudenthal show that the number of ends of G is either $0, 1, 2$ or ∞ and they discuss the cases where the number of ends is finite. Groups with infinitely many ends were studied by Stallings in the 1960s, see [St]. Here free products with amalgamated subgroups enter the picture.

Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie [1951b]

This is Freudenthal's first publication on octonions and their relation with exceptional groups. A main contribution of the paper is the construction of a projective plane $\mathcal{P}$ over the non-associative octonion division algebra $\mathcal{O}$ (also called the algebra of Cayley numbers). The subject seems to have been in the air at the time, $\mathcal{P}$ had been mentioned earlier by P. Jordan and A. Borel. Freudenthal was not aware of this. It seems that he first encountered the octonion plane in a talk by G. Hirsch at a colloquium on algebraic topology in Paris in 1947.

Freudenthal's construction of $\mathcal{P}$ is algebraic. It uses the 27-dimensional real vector space $\mathcal{I}$ of Hermitian 3×3-matrices over $\mathcal{O}$, an exceptional simple real Jordan algebra. In the short paper [1953e] he gives a concise description of the construction.

Another main result of the present paper is the determination of the automorphism group of $\mathcal{P}$. Freudenthal shows that it is a real Lie group of type E_6. He also shows that the compact Lie group of type F_4 can be viewed as the elliptic group of $\mathcal{P}$.

The paper also discusses the classification of real composition algebras.

Nowadays the octonion planes are probably best viewed in the context of the theory of algebraic groups, pertaining to forms of a group of type E_6 over a ground field F, of F-rank 2. In a wider context such matters are treated in the book [TW].

Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, I–XI [1954b], [1954c], [1955a], [1955b], [1959b–f], [1963b], [1963c]

The aim of this long series of papers is, roughly speaking, to construct geometries whose automorphism groups are Lie groups of the exceptional types F_4, E_6, E_7, E_8. (The sections of the papers are numbered consecutively, we quote that numbering.) In this work a heuristic tool (discussed in VII, [1958c]) was the 'magic square'

$$\begin{array}{cccc} B_1 & A_2 & C_3 & F_4 \\ A_2 & A_2 \times A_2 & A_5 & E_6 \\ C_3 & A_5 & D_6 & E_7 \\ F_4 & E_6 & E_7 & E_8. \end{array}$$

The columns are indexed by the four division algebras over the reals: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (the quaternions), $\mathbb{O}$ (the octonions). The rows correspond to some kind of geometry. In the intersection of a row and a column one would find the type of the automorphism group (a Lie group) of the geometry corresponding to the division algebra of the column.

The first row corresponds to 2-dimensional elliptic geometry and the second row to 2-dimensional projective geometry. The third row corresponds to a geometry of symplectic type.

The papers I–VII are devoted to the last entry, E_7, of the third line. In I, 1 an algebraic machinery is set up. Let $\mathcal{I}$ be the 27-dimensional real vector space of Hermitian 3×3-matrices over $\mathcal{O}$ and put $\mathcal{K} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}$, a 56-dimensional real vector space. Freudenthal introduces in I, 4 a Lie algebra $\mathcal{L}$ of type E_7, acting in $\mathcal{K}$. He shows that $\mathcal{L}$ annihilates a quartic form on $\mathcal{K}$ and also a symplectic bilinear form.

In III, 9 a cone $\mathcal{N}$ in $\mathcal{L}$ is introduced whose elements Θ satisfy $\Theta^2 = 0$. The lines in $\mathcal{N}$ are called *points*. Two points $\mathbb{R}\Theta$ and $\mathbb{R}\Theta_1$ are *collinear* if Θ and Θ_1 commute. Maximal sets of mutually collinear points are *planes*. A *line* is an intersection of two planes containing more than one point. Then Freudenthal proves:

(A) *A plane, together with the lines contained in it, is a projective plane isomorphic to* $\mathcal{P}$ (IV, 12.2);

(B) *Given a plane* P *and a point* $p \notin P$ *there is a unique plane through* p *intersecting* P *in a line* (IV, 12.9).

He calls this geometric system S the 5-*dimensional symplectic octonion geometry*. The name is explained by the fact that if one performs similar constructions with $\mathbb{R}$ instead of $\mathbb{O}$ one obtains a geometric system whose points are lines in $\mathbb{R}^6$, two points being collinear if the corresponding lines span a subspace which is isotropic for a given symplectic form on $\mathbb{R}^6$.

In V, VI, VII Freudenthal gives an axiomatic characterization of S, taking (A) and (B) as axioms (see VII, 24.8). He also requires a third axiom (C), which we will not go into. (Tits showed later that it can be omitted, see the next paragraph).

In the years of his work on octonion geometry Freudenthal was in contact with J. Tits (at the time in Brussels), one of the few mathematicians interested in geometric aspects of exceptional groups at that time. Tits' work, later systematized in his theory of buildings (see e.g. [AB], [T], [Ro]), had a wider scope. To a simple linear algebraic group G over a field K he attached a geometry in the following way. Its objects (points, lines,…) are the maximal parabolic subgroups of G which are defined over K. Two of them are incident if their intersection contains a Borel group of G (not necessarily defined over K). The objects have different types, indexed by the nodes of the Dynkin diagram of G relative to K.

From Tits' point of view, Freudenthal's geometry S comes from the case $K = \mathbb{R}$, G being of type E_7 with $\mathbb{R}$-rank 3. The relative Dynkin diagram is of type C_3. Tits discusses S in Section 9 of [T].

The papers VIII–XI are devoted to the last line of the square.

In VIII and IX the geometry of the entry F_4 is discussed. It has four kinds of objects: points, lines, planes and symplecta (i.e. 5-dimensional symplectic geometries). Freudenthal speaks of a 'metasymplectic' geometry. The algebraic treatment (prepared

in VIII, 26) does not use Jordan algebras, but instead uses the vector space

$$\mathcal{I}' = \mathbb{M}_3 \oplus \mathbb{M}_3 \oplus \mathbb{M}_3$$

of triples of 3×3-matrices, provided with the cubic form f given by

$$f(a, b, c) = \det(a) + \det(b) + \det(c) - \mathrm{tr}(abc).$$

The subgroup G of $\mathrm{GL}(\mathcal{I}')$ fixing f is of type E_6 and the subgroup fixing moreover $(1, 0, 0)$ is of type F_4. The F_4-geometry is described in terms of these algebraic data, similar to the description of the geometry S. The points are now the lines in $\mathcal{I}'$ corresponding to singular points of the hypersurface $f = 0$ (VIII, 27) The symplecta are certain lines in the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G (VIII, 28).

In X and XI it is shown that there is a metasymplectic geometry for all four entries of the last line of the diagram. The geometries are described in a uniform way.

$\mathfrak{g}$ now denotes the real Lie algebra of the appropriate Lie group, of type indexed by the column. The symplecta of the geometry are parametrized by lines in $\mathfrak{g}$ and points by lines in $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ (X, 37). Relative positions of pairs of objects (points, symplecta) are analyzed and various delicate incidence properties are established (e.g. in XI, 71).

The objects of the geometries can be identified with lines in the space of certain irreducible representations of $\mathfrak{g}$, occurring in the tensor square of the adjoint representation of $\mathfrak{g}$. The explicit decomposition of the tensor square is given in X, 33.

An axiomatic description of the metasymplectic geometries was given later by Tits in [T], Section 10. In his set-up, Freudenthal's metasymplectic geometries come from the buildings of type F_4 associated to exceptional groups over $\mathbb{R}$ of types F_4, E_6, E_7, E_8 and respective $\mathbb{R}$-ranks $0, 2, 3, 4$.

The 'magic square' and related 'magic triangles' still remain intriguing and appear in the recent literature in mathematics and theoretical physics. See e.g. [DG], [LJP], [LM].

Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen I, II, III, [1954d], [1954e], [1956e]

The characters of an irreducible representation of a compact semisimple Lie group G are given by Weyl's character formula. Weyl's original proof was analytic.

In I Freudenthal gives a more algebraic proof. The starting point is the fact that the character of an irreducible representation is an eigenfunction of the Casimir operator, a second order linear differential operator on G. Writing down the formulas – involving Lie algebra ingredients – which make the fact explicit, Freudenthal shows that Weyl's character formula is equivalent to a set of formulas for the weight multiplicities of the representation, of an inductive nature. A somewhat streamlined version of Freudenthal's proof can be found in his book with H. de Vries [1969b] (Section 48).

In II and III it is shown that the inductive formulas can be used efficiently in making explicit computations (by hand). Thus it comes as no surprise that in recent years the

formulas have been implemented in software packages for computational algebra (e.g. LiE, Magma, Maple).

A proof of Weyl's formula for algebraic groups in characteristic 0 along the lines of [1954d] is given in [Sp].

Neuere Fassungen des Riemann–Helmholtz–Lieschen Raumproblems [1956a]

The 'Raumproblem' (space-problem) is, in vague terms, the problem of characterizing the spaces underlying 'known' geometries. To analyze it, Riemann introduced the quadratic differential form of a Riemannian metric on a space. In Helmholtz's analysis some sort of homogeneity of the space plays a role. After Lie introduced group theory in the study of the problem, the homogeneity could be handled by the requirement of a transitive Lie group action on the space.

This paper starts off with a historical review of the problem and of its later avatars (see also Section 2 of [1964b]). The main contribution of the paper is the formulation and solution of a space-problem which seems to encompass the space-problems previously considered (by many authors).

Freudenthal considers a connected, locally compact Hausdorff space R, together with a group F of homeomorphisms of R. He imposes three axioms. The first axiom (S) ('topological rigidity') requires a kind of uniformity of the action. It implies the existence of an F-invariant uniform structure on R. Moreover, F can be made into a topological group. The second axiom (V) required F to be complete. Then F is locally compact.

The third axiom (Z) is the crucial one. It requires that there is an orbit of F in R that decomposes R, i.e. such that its complement is disconnected.

It is first shown that an isotropy group $J \subset F$ of a point of R is compact. The main part of the paper is an analysis of the following situation: G is a Lie group with finitely many components, containing a compact subgroup K such that there is a K-orbit in G/K which decomposes G/K. These situations can be classified, using the techniques of representation theory. This lead to the main theorem ('Hauptsatz I') of the paper, which lists the possibilities. To recover the 'classical' spaces with constant curvature one should impose 'higher order' conditions. The first order condition expresses that the isotropy group J also occurs as a group like F; higher order conditions come by iteration.

The analysis of the paper also implies that F is a Lie group. (The proof uses the solution of Hilbert's fifth problem.)

Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache [1957d]

In 1957 Freudenthal finished the manuscript of his book [1960d] on cosmic communication. Here a brief synopsis of the book is given.

The main concern of the project is to provide a linguistic toolkit for transferring information about human scientific and social notions and practices to extraterrestrials.

In fact, the project is an experiment in communication. Four important aspects are discussed: mathematics, time, behavior and physics. The basic idea is that the receiver of the signals transmitted by the human operator is induced to grasp the meaning of signal packages (messages) through long lists of examples.

Although Freudenthal adopts some of the benefits from formalized mathematics and logic, the treatment is by no means a logic text. Whereas we would nowadays prefer the more natural systems of present-day formal logic, we may well admire Freudenthal's exposition for his insightful handling of e.g. the linguistic phenomena, physics and other themes. The treatment is imaginative and original. In spite of the fact that Freudenthal's approach is still of value today, the work on Lincos ('lingua cosmica') remains an isolated enterprise.

Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie [1957e]

No selecta of Hans Freudenthal would be complete without a specimen of his historical work. Historical expertise was certainly not the least of his many gifts. We have selected from his long list of historical papers the one that deals with Hilbert's famous monograph on the foundations of geometry. It is not easy to think of a book that had such a profound influence on the development of mathematics in the past century. The 'Grundlagen' became the new 'Euclid' for generations of mathematicians, and it was the starting point for 'axiomatics'. Freudenthal comments and analyzes the contents in a primarily historical setting. Even today Freudenthal's review has not lost its freshness and thrust. The review lends itself perfectly as a companion to Hilbert's legendary treatise.

Das Helmholtz–Liesche Raumproblem bei indefiniter Metrik [1964b]

The paper describes an attempt to extend the treatment of the space problem in [1956a], so as to incorporate spaces with an indefinite metric, as in special relativity.

The setting is similar to that of [1956a]. Given are a connected, locally compact Hausdorff space R together with a group F of homeomorphisms of R, which now is assumed to be locally compact. Now also a 'quasimetric' ρ is given, a continuous real function on $R \times R$ vanishing on the diagonal and F-invariant. Then for $x \in R$ and $r \geq 0$ one has the 'sphere' $S_{x,r} = \{y \in R \mid \rho(x, y) = r\}$. For $r = 0$ this is the 'light cone' of x.

The axioms which are imposed require, roughly, that light cones of distinct points do not coincide locally and that the isotropy group J of a point x acts locally transitively on the spheres $S_{x,r}$. Moreover, these spheres should not be too small.

The axioms imply (via the solution of Hilbert's fifth problem) that F is a Lie group. The classification of the possibilities is then reduced to a problem in the representation theory of Lie groups (problem P, stated in Section 6.2). The solution of the problem is technically complicated, involving classification and representation theory of

real Lie groups. After imposing higher order conditions Freudenthal obtains indeed characterizations of spaces with indefinite metrics.

He considers the results of the paper to be provisional ('vorläufig') and not completely satisfactory. We do not know of more recent work along the lines of this paper.

Lie groups in the foundation of geometry [1964c]

This is a survey paper, reviewing topics in geometry related to Freudenthal's own work: space-problems (Helmholtz–Lie, Weyl-Cartan), the geometries connected with exceptional groups, Tits geometries.

The well-written paper is still quite informative today, in particular on historical aspects.

References

[AB] P. Abramenko and K. S. Brown, *Buildings*, Grad. Texts in Math. 248, Springer-Verlag, Berlin 2008.

[A] C. Aliprantis, *Locally solid Riesz spaces with applications to economics*, Math. Surveys Monogr. 105, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2003.

[Bo] A. Borel, *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*, Hist. Math. 21, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2001.

[Br] M. R. Bridson, Non-positive curvature and complexity for finitely presented groups, *Proc. Internat. Congr. Math.* (Madrid, 2006), Vol. II, EMS Publishing House, Zürich 2006, 961–987.

[D] D. van Dalen, Kolmogorov and Brouwer on constructive implication and the Ex Falso rule, *Russian Math. Surveys* 59 (2004), 247–257.

[DG] P. Deligne and B. Gross, On the exceptional series, and its descendants, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 335 (2002), 877–881.

[He] A. Heyting, *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3, Springer-Verlag, Berlin 1934; reprint, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[Ho] H. Hopf, Ende affiner Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen, *Comment. Math. Helv.* 16 (1943), 81–100.

[HR] B. Hughes and A. Ranicki, *Ends of complexes* Cambridge Tracts in Math. 123, Cambridge University Press, Cambridge 1996.

[LZ] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz spaces*, Vol. I, North-Holland Mathematical Library, North-Holland, Amsterdam 1971.

[LJP] P. Henry-Labordère, B. Julia and L. Paulot, Real Borcherds superalgebras and M-theory, *J. High Energy Phys.* (2003), no. 4, 060.

[LM] J. M. Landsberg and L. Manivel, The projective geometry of Freudenthal's magic square, *J. Algebra* 239 (2001), 477–512.

[Ra] D. C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, AMS Chelsea Publishing, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2004.

[Ro] M. A. Ronan, *Lectures on buildings*, Perspect. Math. 7, Academic Press, Boston, Ma., 1989.

[Sp] T. A. Springer, Weyl's character formula for algebraic groups, *Invent. Math*. 5 (1968), 85–105.

[St] J. R. Stallings, On torsion-free groups with infinitely many ends, *Ann. of Math*. 88 (1968), 312–334.

[T] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math. 386, Springer-Verlag, Berlin 1974.

[TW] J. Tits and R. Weiss, *Moufang polygons*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin 2002.

[W] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques*, Actualités scientifiques et industrielles 869, Hermann, Paris 1940.

[Za] A. C. Zaanen, *Riesz spaces*, Vol. II, North-Holland Mathematical Library 30, North-Holland, Amsterdam 1983.

Acknowledgements

The editors and the publisher wish to thank the following for granting permission to reprint in this volume the papers as listed below. Abbreviations in brackets refer to the Bibliography of Hans Freudenthal.

Annals of Mathematics (1936a, 1936b, 1937f, 1937g, 1941, 1942b)

Cambridge University Press (1936i, 1936j, 1937h)

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschapen (1936d, 1936h, 1953b, 1953c, 1953d, 1953e, 1954b, 1954c, 1954d, 1954e, 1955a, 1955b, 1956e, 1957d, 1958c, 1959b, 1959c, 1959d, 1959e, 1959f, 1963b, 1963c)

Nieuw Archief voor Wiskunde (1957e)

Springer Verlag (1931b, 1956a, 1964b, 1951b)

Swiss Mathematical Society (1945)

Bibliography

Mathematical articles

[1931a] Über Eigenschaften im Grossen nicht kompakter topologischer Räume und Gruppen. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 40 (1931), 43–44.

[1931b] Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. *Math. Z.* 33 (1931), 692–713.

[1931c] Zur "Galoisschen" Theorie der linearen Differentialgleichungen, Erste Mitteilung. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 34 (1931), 1124–1125.

[1932a] Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* 5 (1932), 34–38.

[1932b] Aufgabe 142-143. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 42 (1932), 70–71.

[1933] Ein Aufbau der Lieschen Gruppentheorie. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 43 (1933), 26–39.

[1935a] Die Hopfsche Gruppe, eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe. *Compositio Math.*. 2 (1935), 134–162.

[1935b] Über die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Aussenraumes abgeschlossener Mengen. *Compositio Math.* 2 (1935), 163–176.

[1935c] Die R_n-adische Entwicklung von Räumen und Gruppen. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 38 (1935), 414–418.

[1935d] Een niet-Desargues'se meetkunde en de invoeging van een vlakke Desargues'se meetkunde in de ruimtelijke projectieve meetkunde. *Christiaan Huygens* 13 (1935), 347–356.

[1936a] Einige Sätze über topologische Gruppen. *Ann. of Math.* 37 (1936), 46–56.

[1936b] Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen. *Ann. of Math.* 37 (1936), 57–77.

[1936c] (with W. Hurewicz) Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien. *Fund. Math.* 26 (1936), 120–122.

[1936d] Teilweise geordnete Moduln. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 39 (1936), 641–651.

[1936e] Eine Klasse von Ringen im Hilbertschen Raum. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 39 (1936), 738–741.

[1936f] Zur Abstraktion des Integralbegriffs. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 39 (1936), 741–745.

[1936g] Ortsoperatoren in konkreten Hilbertschen Räumen. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 39 (1936), 828–831.

[1936h] Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 39 (1936), 832–833.

[1936i] Zum intuitionistischen Raumbegriff. *Compositio Math.* 4 (1936), 82–111.

[1936j] Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln. *Compositio Math.* 4 (1936), 112–116.

[1936k] Entwicklungen von Räumen und Gruppen. *Rec. Math. Moscou* 1 (1936), 677–681, 682.

[1936l] Teilweise geordnete lineare Räume. In *Proc. Internat. Congr. Math.* (Oslo 1936), 138.

[1937a] Über Mannigfaltigkeiten und ihre Abbildungen. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 40 (1937), 54–60.

[1937b] Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen. *Compositio Math.* 4 (1937), 145–234.

[1937c] Bettische Gruppe mod. 1 und Hopfsche Gruppe. *Compositio Math.* 4 (1937), 235–238.

[1937d] Eine Simplizialzerlegung des Cartesischen Produktes zweier Simplexe. *Fund. Math.* 29 (1937), 138–144.

[1937e] Die Bettische Gruppe der Verbindung zweier Polytope. *Fund. Math.* 29 (1937), 145–150.

[1937f] Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie. *Ann. of Math.* 38 (1937), 647–655.

[1937g] Zum Hopfschen Umkehrhomomorphismus. *Ann. of Math.* 38 (1937), 847–853.

[1937h] Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Grosse Dimensionen. *Compositio Math.* 5 (1937), 299–314.

[1937i] Zwei Bemerkungen zur Homologietheorie. *Compositio Math.* 5 (1937), 315–318.

[1938a] Die Haarschen Orthogonalsysteme von Gruppencharakteren im Lichte der Pontrjaginschen Dualitätstheorie. *Compositio Math.* 5 (1938), 354–356.

[1938b] Über ein Beugungsproblem aus der elektromagnetischen Lichttheorie. *Compositio Math.* 6 (1938), 221–227.

[1939a] Neue Erweiterungs- und Überführungssätze. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 42 (1939), 139–140.

[1939b] Die Triangulation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 42 (1939), 880–901.

[1940a] Die Triangulation der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Nachtrag. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 43 (1940), 619.

[1940b] Eine Restabschätzung bei der Taylorschen Formel, und ihre Anwendung auf die logarithmische und die binomische Reihe. *Nieuw Arch. Wisk.* 20 (1940), 269–272.

[1940c] Zur Konstruktion von Tangentenpolygonen. *Nieuw Arch. Wisk.* 20 (1940), 273–278.

[1940d] Überdeckungen des Einheitskreises mit untereinander kongruenten Mengen. *Nieuw Arch. Wisk.* 20 (1940), 279–281.

[1940e] Review of L. Pontryagin, Topological Groups. *Nieuw Arch. Wisk.* 20 (1940), 311–316.

[1941] Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. I. *Ann. of Math.* 42 (1941), 1051–1074.

[1942a] Neuaufbau der Endentheorie. *Ann. of Math.* 43 (1942), 261–279

[1942b] Simplizialzerlegungen von beschränkter Flachheit. *Ann. of Math.* 43 (1942), 580–582.

[1945] Über die Enden diskreter Räume und Gruppen. *Comment. Math. Helv.* 17 (1945), 1–38.

[1946a] Der Einfluss der Fundamentalgruppe auf die Bettischen Gruppen. *Ann. of Math.* 47 (1946), 274–316.

[1946b] Verbesserungen und Berichtigungen. *Ann. of Math.* 47 (1946), 829–830.

[1947a] (with B. L. van der Waerden) Over een bewering van Euclides. *Simon Stevin* 25 (1947), 115–121.

[1947b] Sur un théorème topologique de M. van Dantzig. *Bull. Soc. Math. France* 75 (1947), 56–62.

[1949a] Note on the homotopy groups of spheres. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 20 (1949), 62–64.

[1949b] La géometrie énumérative. In *Topologie algébrique*, Colloq. Internat. CNRS XII, Centre de la Recherche Scientifique, Paris 1949, 17–33.

[1949c] Mathematische problemen van terugkoppeling. *Nederl. Tijdschr. Natuurkunde* 15 (1949), 275–281.

[1950] Das Petersburger Problem in Hinblick auf die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Nachr.* 4 (1950), 184–192.

[1951a] Kompaktisierungen und Bikompaktisierungen. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54 (1951), 184–192.

[1951b] Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, Utrecht, 1951 (reprinted with corrections in *Geom. Dedicata* 19 (1985), 7–63).

[1951c] La structure des groupes à deux bouts et des groupes triplement transitifs. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54 (1951), 288–294.

[1951d] Ein Kompaktheitskriterium. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54 (1951), 295–296.

[1951e] (with W. T. van Est) Trennung durch stetige Funktionen in topologischen Räumen. *Proc. Kon. Akad. v. Wetensch.* 54 (1951), 359–368.

[1951f] (with W. T. van Est) A note on a compactness criterion of H. Freudenthal. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54 (1951), 369–370.

[1952a] Produkte symmetrischer und antisymmetrischer Matrizen. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 55 (1952), 193–198.

[1952b] Elementarteilertheorie der komplexen orthogonalen und symplektischen Gruppe. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 55 (1952), 199–201.

[1952c] A limit free formulation of the weak law of large numbers. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 55 (1952), 427–432.

[1952d] Gambling with a poor chance of gain. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 55 (1952), 433–438.

[1952e] Een servo-statistische beschouwing. *Verslagen Kon. Akad. v. Wetensch.* 61 (1952), 130–132.

[1952f] Enden und Primenden. *Fund. Math.* 39 (1952), 189–210.

[1953a] Zur Geschichte der vollständigen Induktion, *Arch. Internat. Hist. Sci.* 22 (1953), 17–37.

[1953b] Sur le groupe exceptionnel E_7. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 56 (1953), 81–89.

[1953c] Sur des invariants caractéristiques des groupes semi-simples. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 56 (1953), 90–94.

[1953d] Sur le groupe exceptionnel E_8. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 56 (1953), 95–98.

[1953e] Zur ebenen Oktavengeometrie. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 56 (1953), 195–200.

[1953f] (with W. T. van Est) Vollständige Regularität und Normalität in ihrer Bedeutung für ein Kompaktheitskriterium. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 56 (1953), 409–411.

[1954a] Über zwei Probleme von K. A. Sitnikov. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 57 (1954), 114–116.

[1954b] Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 57 (1954), 218–230.

[1954c] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 57 (1954), 363–368.

[1954d] Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, I. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 57 (1954), 369–376.

[1954e] Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 57 (1954), 487–491.

[1955a] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene III. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 58 (1955), 151–157.

[1955b] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene IV. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 58 (1955), 277–285.

[1955c] Die Bedeutung der Buckel-van Heemertschen Charakterisierung des Systems der Kreise, *J. Reine Angew. Math.* 194 (1955), 190–192.

[1955d] Poincaré et les fonctions automorphes. In *Œuvres de Henri Poincaré, t. XI,* Gauthier-Villars, Paris 1956, 212–219.

[1956a] Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. *Math. Z.* 63 (1956), 374–405.

[1956b] The existence of a vector of weight 0 in irreducible Lie groups without center. *Proc. Amer. Math. Soc.* 7 (1956), 175–176.

[1956c] Levensbericht van Hermann Weyl. *Jaarb. Kon. Akad. v. Wetensch.* 1955–1956.

[1956d] La topologie dans les fondements de la géometrie. In *Proc. Internat. Congr. Math.* (Amsterdam, 1954), Vol. III, Erven P. Noordhoff N.V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1957, 178–184.

[1956e] Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, III. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 59 (1956), 511–514.

[1956f] Explizite Spindarstellung der Drehgruppe. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 59 (1956), 515–522.

[1957a] Zur vollständigen Reduzibilität der linearen Darstellungen halbeinfacher Gruppen und zum E. E. Levischen Satz. *J. Madras Univ. Sect. B* 27 (1957), 225–236.

[1957b] Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. *Schriftenreihe Forschungsinst. Math. Deutsche Akad. Wiss. Berlin* (1957), 92–97.

[1957c] Kompakte projektive Ebenen. *Illinois J. Math.* 1 (1957), 9–13.

[1957d] Grundzüge eines Entwurfes einer kosmischen Verkehrssprache. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 69(1957), 353–363.

[1957e] Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilbert's "Grundlagen der Geometrie". *Nieuw Arch. Wisk.* 5 (1957), 105–142.

[1958a] Herdenking van John von Neumann. *Jaarb. Kon. Akad. v. Wetensch.* 1957–1958.

[1958b] Ein kombinatorisches Problem von biochemischer Herkunft. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 61 (1958), 253–258.

[1958c] Zur Klassifikation der einfachen Lie-Gruppen. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 60 (1958), 379–383.

[1959a] Einige Züge aus der Entwicklung des mathematischen Formalismus. *Nieuw Arch. Wisk.* 7 (1959), 1–19.

[1959b] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene V. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 62 (1959), 165–179.

[1959c] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene VI. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 62 (1959), 180–291.

[1959d] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene VII. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 62 (1959), 192–201.

[1959e] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene VIII. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 62 (1959), 447–465.

[1959f] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene IX. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 62 (1959), 466–474.

[1960a] Zu den Weyl-Cartanschen Raumproblemen. *Arch. Math.* 11 (1960), 107–115.

[1960b] In Memoriam David van Dantzig. *Nieuw Arch. Wisk.* 8 (1960), 57–73.

[1960c] Levensbericht van David van Dantzig. *Jaarb. Kon. Akad. v. Wetensch.* 1959–1960.

[1960e] Bündige Räume. *Fund. Math.* 48 (1960), 307–312.

[1961a] Review of: K. Borsuk and W. Sz'meliew, Foundations of Geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* 67 (1961), 342–344.

[1961b] Review of: B. Segre, Lectures on modern Geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* 67 (1961), 442–443.

[1961c] Im Umkreis der sogenannten Raumprobleme. In *Essays on the foundations of Mathematics*, Magnes Press, Hebrew University, Jerusalem 1961, 322–327.

[1962a] Review of: H. S. M.Coxeter, Introduction to Geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* 58 (1962), 55–59.

[1962b] Die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit der Tangentialrichtungen einer geschlossenen Fläche. *Fund. Math.* 50 (1962), 537–538.

[1962c] Symplektische und metasymplektische Geometrien. In *Algebraical and Topological Foundations of Geometry* (Proc. Colloq., Utrecht, 1959), Pergamon, Oxford 1962, 29–33.

[1962d] Bericht über die Theorie der Rosenfeldschen elliptischen Ebenen. In *Algebraical and Topological Foundations of Geometry* (Proc. Colloq., Utrecht, 1959), Pergamon, Oxford 1962, 35–37.

[1962e] Review of: B. L. van der Waerden, Science Awakening. *Bull. Amer. Math. Soc.* 68 (1962), 543–545.

[1963a] Clifford–Wolf-Isometrien symmetrischer Räume. *Math. Ann.* 150 (1963), 136–149.

[1963b] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene X. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 66 (1963), 457–471.

[1963c] Beziehungen der $\mathfrak{E}_7$ und $\mathfrak{E}_8$ zur Oktavenebene XI. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 66 (1963), 472–487.

[1964a] Ein Zerlegungssatz für im Kleinen kompakte Gruppen. *Arch. Math.* (1964), 161–165.

[1964b] Das Helmholtz-Liesche Raumproblem bei indefiniter Metrik, *Math. Ann.* 156 (1964), 263–312.

[1964c] Lie groups in the foundation of geometry. *Adv. Math.* 1 (1964), 145–190.

[1968b] Le volume naturel des groupes de Lie compacts semi-simples. In *Atti dell' VIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, Trieste 1967, 217.

[1970a] Levensbericht van Waclaw Sierpiński. *Jaarb. Kon. Akad. v. Wetensch.* 1969–1970.

[1971a] Aperçu de l'oeuvre de M. R. Thom. *Nieuw Arch. Wisk.* 19 (1971), 17–23.

[1971b] Hermann Weyl's Lebenswerk. *Nieuw Arch. Wisk.* 19 (1971), 24–29.

[1971c] Did Cauchy plagiarize Bolzano? *Arch. History Exact Sci.* 7 (1971), 375–392.

[1972] Une interprétation géométrique des automorphismes extérieurs du groupe symétrique S_6. *Rend. Sem Mat. Fis, Milano* 42 (1972), 47–56.

[1973a] Nekrologe Heinz Hopf. *Vierteljahresschr. Naturf. Ges. Zürich*, 116 (1973), 505.

[1973b] Levensbericht van Johannes de Groot. *Jaarb. Kon. Akad. v. Wetensch.* 1972–1973.

[1973c] Levensbericht van Maurice Fréchet. *Jaarb. Kon. Akad. v. Wetensch.* 1972–1973.

[1974] The impact of von Staudt's foundations of geometry. In *For Dirk Struik*, ed. by R. S. Cohen et al., Boston Stud. Philos. Sci. XV, Reidel, Dordrecht 1974, 189–200.

[1975a] Une étude de quelques quadrangles généralisés. *Ann. Mat. Pura Appl.* 102 (1975), 109–133.

[1975b] (with K. Strambach) Schließungssätze und Projektivitäten in der Möbius- und Laguerregeometrie. *Math. Z.* 143 (1975), 213–234.

[1976] Die Beziehungen zwischen der E_7-Geometrie und die Konfiguration der 28 Doppeltangenten der Kurven vierter Ordnung. *Uspekhi Mat. Nauk* 11 (1976), 148–152; English transl. *Russian Math. Surveys* 31 (1976), 62–66).

[1977] On the cardinality of finite Tits geometries. In *Beiträge zur Geometrischen Algebra*, ed. by H. Arnold et al., Birkhäuser, Basel 1977, 101–109.

Selected books

1. (with J. Sittig) *De juiste maat: lichaamsafmetingen van Nederlandse vrouwen als basis van een nieuw maatsysteem voor dames-confectiekleding* [The right size: body measurements of Dutch women as a basis for a new system of sizing ladies' ready-to-wear clothing]. L. Stafleu, Leiden 1951.
2. *Inleiding tot het denken van Einstein* [Introduction to Einstein's thought]. Born, Assen 1952; 2nd ed, 1952, 3rd ed. 1953, 4th ed. 1962, 5th extended ed. 1966.
3. *Van sterren tot inlegzolen* [From stars to insoles]. Collection of Dutch newspaper articles, Van Loghum Slaterus, Arnhem 1954.
4. *Waarschijnlijkheid en statistiek*. De Erven F. Bohn N.V., Haarlem 1957; German edition (*Wahrscheinlichkeit und Statistik*), Oldenbourg, München, 1963; 2nd ed. 1968; 3rd ed. 1975; 4th ed. 1981; English edition (*Probability and statistics*), Elsevier, Amsterdam 1965.
5. *Logique mathématique appliquée*. Gauthier-Villars, Paris 1958.
6. *Lincos: design of a language for cosmic intercourse, Part I*. North-Holland, Amsterdam 1960.
7. *Exacte logica*. De Erven F. Bohn N.V., Haarlem, 1961; 2nd ed. 1966; German edition (*Einführung in die Sprache der Logik*) Oldenbourg, München, 1965; 2nd ed. 1969; English edition (*The language of logic*), Elsevier, Amsterdam 1966; Russian edition (Язык логики), Nauka, Moscow 1969; Romanian edition (*Limbajul logicii matematici*), Bucuresti, Bucarest 1973.
8. *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven*, Meulenhoff, Amsterdam 1967; English edition (*Mathematics observed*), McGraw-Hill, New York/London, 1967; French edition (*Mathématiques et réalités*), Hachette, Paris 1967; Swedish edition (*I matematikens värld*), Bokforlaget Aldus/Bonniers, Stockholm 1967; Italian edition (*La matematica nella scienza e nelle vita*), Il saggiatore, Milano 1967; Spanish edition (*Las matemáticas en la vida cotidiana*), Ediciones Guadarrama, Madrid 1967; German edition (*Mathematik in Wissenschaft und Alltag*), Kindler, München 1968; Japanese edition (*Suugaku o kanshou suru*), Heibonsha Publishers, Tokyo 1970; Portuguese edition (*Perspectivas da matemática*, Zahar Editores, Rio de Janeiro 1975; Russian edition (Математика в науке и вокруг вос), Mir, Moscow 1977.

9. (with H. de Vries) *Linear Lie groups,* Academic Press, New York 1969.
10. (ed.) *Raumtheorie.* Wege der Forschung 270, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1978.