Article

Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form.

Frobenius, G.

in: Journal für die reine und angewandte Mathematik - 86 | Periodical
28 page(s) (44 - 71)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie sind nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.
Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:
Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.
Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.
Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:
You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.
By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.
Papendiek 14
37073 Goettingen
Email: info@digizeitschriften.de

Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Zwei bilineare Formen $A=\Sigma a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ und $B=\Sigma b_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ heissen *congruent,* wenn A durch cogrediente lineare Substitutionen von nicht verschwindender Determinante in B transformirt werden kann. Da die nämlichen Substitutionen auch die Form $A'=\Sigma a_{\beta\alpha}x_\alpha y_\beta$, welche die *conjugirte* Form von A genannt wird, in die conjugirte Form B' von B überführen, so verwandeln sie auch die Schaar bilinearer Formen $rA-A'$ in die Schaar $rB-B'$ (*Kronecker,* d. J. Bd. 68, S. 276). Bezeichnet man also die Substitutionsdeterminante mit p und allgemein die Determinante einer bilinearen Form G mit $|G|$, so ist

$$(1.) \qquad |rB-B'| = |rA-A'|\,p^2.$$

Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ identisch (für jeden Werth des Parameters r) Null ist, so ergiebt sich hieraus kein bestimmter Werth von p. Verschwindet sie aber nicht, so folgt daraus die Gleichung

$$(2.) \qquad p^2=|rB-B'|:|rA-A'|.$$

Folglich muss die rechte Seite dieser Formel von r unabhängig sein, und für alle die unzählig vielen Substitutionen, welche A in B transformiren, muss das Quadrat der Determinante den nämlichen Werth haben. Nun sind zwei Fälle möglich: Die Determinante p kann für alle jene Substitutionen entweder einen und denselben Werth haben, oder bald den einen, bald den andern von zwei entgegengesetzten Werthen. Ich stelle mir daher hier die Aufgabe, zu entscheiden, wann der erste und wann der zweite dieser beiden Fälle eintritt, und ferner im ersten Falle das Vorzeichen des Transformationsmoduls p zu ermitteln, ohne eine Substitution aufzusuchen, die A in B verwandelt.

Ebenso wie bei zwei congruenten bilinearen Formen, kann man auch bei zwei äquivalenten Schaaren quadratischer Formen nach dem Werthe der Substitutionsdeterminante fragen. Denn wird eine solche Formenschaar $rA-B=\Sigma(ra_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta})x_\alpha x_\beta$, wo $a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}$ und $b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$ ist, durch eine lineare Substitution in eine andere transformirt, so gilt auch hier der Satz, dass die Determinante der transformirten Schaar gleich derjenigen der ursprünglichen Schaar ist, multiplicirt mit dem Quadrate der Substitutionsdeterminante. Die Beantwortung dieser Frage erfordert ganz andere Hülfsmittel, wie die der oben aufgeworfenen. Während sich die Lösung der ersten Aufgabe im Wesentlichen auf den Satz stützt, dass eine schiefe Determinante von paarem Grade das Quadrat einer ganzen rationalen Function ihrer Elemente ist, beruht die Lösung der zweiten, die weit tiefer liegt, auf der Duplication einer gewissen in lineare Factoren zerlegbaren Form $n$ten Grades von n Variabeln, welche eine Contravariante der Schaar quadratischer Formen ist.

Ich citire im Folgenden die Abhandlung des Herrn *Kronecker* „*Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen*“, Berl. Mon. 1874, April, mit *Kr.*, die vorangehende Abhandlung des Herrn *Stickelberger* „*Ueber Schaaren von bilinearen und quadratischen Formen*“ mit *St.* und meine Abhandlung „*Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*“, d. J. 84, mit *Fr.*

§. 1.

Die Determinante der Transformation einer Form in sich selbst.

Alle Substitutionen, welche eine bilineare Form A mit cogredienten Variabeln in eine andere B überführen, werden erhalten, indem man mit einer derselben alle Substitutionen zusammensetzt, welche A in sich selbst transformiren. Die Moduln aller Transformationen von A in B haben daher einen und denselben oder zwei entgegengesetzte Werthe, je nachdem alle Substitutionen, welche A in sich selbst verwandeln, die Determinante $+1$ haben (*eigentliche* sind) oder zum Theil die Determinante -1 haben (*uneigentliche* sind).

Wird eine bilineare Form durch eine gewisse Substitution in sich selbst transformirt, so wird jede congruente Form durch eine *ähnliche* Substitution in sich selbst verwandelt (*Fr.* §. 9, II.). Da nun ähnliche Substitutionen gleiche Determinanten haben, so kann man bei der Ermittelung der Determinante der Substitutionen, welche eine Form in sich selbst überführen, die gegebene Form durch irgend eine congruente ersetzen.

1) Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ identisch verschwindet, so ist A einer *zerlegbaren* (*Fr.*, §. 5) Form A_1+A_2 congruent, wo

$$A_1 = x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_{m-1}y_m$$

ist und A_2 nur die Variabeln x_ν, y_ν $(\nu = m+1, \ldots n)$ enthält, und wo m eine ungerade Zahl ist (*Kr.*, §. 3, IV, 1). Letztere Form geht nun in sich selbst über, wenn man

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \ \ldots \ x_m; \ x_{m+1}, \ldots x_n$$

der Reihe nach durch

$$px_1, \ \frac{1}{p}x_2, \ px_3, \ \frac{1}{p}x_4, \ \ldots px_m; \ x_{m+1}, \ldots x_n$$

ersetzt (und auf $y_1, y_2, \ldots y_n$ die cogrediente Substitution anwendet). Der Modul dieser Transformation ist, weil m ungerade ist, gleich p.

I. *Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ mit conjugirten Grundformen identisch verschwindet, so kann die Form A durch eine Substitution in sich selbst transformirt werden, deren Determinante einen beliebig vorgeschriebenen von Null verschiedenen Werth hat**).

2) Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ einen Elementartheiler $(r-1)^m$ hat, wo m eine ungerade Zahl ist, so ist A einer zerlegbaren Form A_1+A_2 congruent, wo A_1 nur die Variabeln x_μ, y_μ $(\mu = 1, \ldots m)$ und A_2 nur die Variabeln x_ν, y_ν $(\nu = m+1, \ldots n)$ enthält, und wo die Determinante von rA_1-A_1' nur den Elementartheiler $(r-1)^m$ hat (*Kr.* §. 3,

---

*) Besteht zwischen den Ableitungen von $rA-A'$ nach $y_1, \ldots y_n$ eine lineare Relation mit constanten (von r unabhängigen) Coefficienten, so kann auch $p=0$ sein, in allen andern Fällen aber muss p nothwendig von Null verschieden sein (Vgl. *Kr.* §. 3, III).

IV, 2). Diese Form geht in sich selbst über, wenn man die Variabeln x_μ durch $-x_\mu$ ersetzt und die Variabeln x_ν ungeändert lässt. Der Modul dieser Transformation ist $(-1)^m = -1$.

II. *Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat, so lässt die Form A uneigentliche Transformationen in sich selbst zu.*

3) Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ den Elementartheiler $(r-a)^\alpha$ hat, und a nicht gleich ± 1 ist, so hat sie auch den Elementartheiler $(r-\frac{1}{a})^\alpha$. (Für $a=0$ muss die Determinante von $uA+vA'$, wenn sie den Elementartheiler u^α hat, auch den Elementartheiler v^α besitzen.) Ferner sind die Elementartheiler, welche für $r=-1$ verschwinden und einen ungeraden Exponenten haben, stets paarweise vorhanden. (*Kr.*, §. 3., IV., 3.) Ist daher F eine der elementaren Formen, in welche die Reducirte von A zerlegbar ist, so kann die Anzahl der Variabelnpaare von F nur dann ungerade sein, wenn die Determinante von $rF-F'$ identisch oder für $r=1$ verschwindet.

Ich nehme nun an, dass die Determinante der Schaar $rA-A'$ weder identisch Null ist, noch einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat. Die Anzahl n der Variabelnpaare von A, welche der Summe der Exponenten aller Elementartheiler von $|rA-A'|$ gleich ist, muss dann eine gerade Zahl sein, und wird A irgendwie in eine zerlegbare Form A_1+A_2 transformirt, so muss auch die Anzahl der Variabelnpaare von A_1 gerade sein. Denn die Elementartheiler von $|rA-A'|$ sind die von $|rA_1-A'_1|$ und $|rA_2-A'_2|$ zusammengenommen. (Vgl. *St.* §. 2.)

Sei nun P eine Substitution, welche A in sich selbst transformirt (der Buchstabe P repräsentirt das System der n^2 Substitutionscoefficienten $p_{\alpha\beta}$), und sei die *charakteristische Function* von P (*Fr.*, §. 3, 1) gleich $\varphi(r)=\varphi_1(r)\,\varphi_2(r)$, wo $\varphi_1(r)=(r+1)^m$ ist und $\varphi_2(r)$ für $r=-1$ nicht verschwindet (m kann auch Null sein). Dann ist P einer zerlegbaren Substitution $P_0=P_1+P_2$ ähnlich, wo P_1 und P_2 bezüglich die charakteristischen Functionen $\varphi_1(r)$ und $\varphi_2(r)$ haben. Da die Form A durch die Substitution P in sich selbst übergeht, so giebt es eine mit A congruente Form A_0,

welche durch die ähnliche Substitution P_0 in sich selbst transformirt wird (*Fr.*, §. 9, II.). Weil aber die charakteristische Function $\varphi_1(r)$ von P_1 nur für $r=-1$ verschwindet und die von P_2 für den reciproken Werth von -1 nicht Null ist, so muss die Form A_0 in der nämlichen Weise, wie die Substitution P_0 in zwei Theile A_1+A_2 zerfallen, deren erster m Variabelnpaare enthält und durch P_1 in sich selbst transformirt wird, während der andere die übrigen $n-m$ Variabelnpaare enthält und durch P_2 in sich selbst transformirt wird (*Fr.*, §. 9, VI; §. 8, IX.). Nach den obigen Erörterungen muss daher die Anzahl m der Variabelnpaare von A_1 eine gerade sein. Nun ist aber (*Fr.*, §. 9, (3.)), wenn -1 eine m-fache Wurzel der Gleichung $\varphi(r)=0$ ist, die Determinante p von P gleich $(-1)^m$. Folglich muss $p=+1$ sein.

III. *Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ weder identisch Null ist, noch einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat, so lässt die Form A nur eigentliche Transformationen in sich selbst zu.*

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes sei B eine mit A congruente Form. Dann ist die Determinante einer Substitution P, die A in B transformirt,

$$(1.) \qquad p=\sqrt{(|rB-B'| : |rA-A'|)},$$

und zufolge des eben bewiesenen Satzes muss die Quadratwurzel stets denselben Werth haben, welche der unzählig vielen Substitutionen, die A in B verwandeln, auch für P gewählt werden mag. Diesen Werth der Quadratwurzel kann man finden, ohne dass man nöthig hätte, eine der Substitutionen P zu ermitteln. Ich werde nämlich eine von Null verschiedene rationale Function a der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ angeben, welche mit der aus den Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ analog gebildeten Function b durch die Relation

$$(2.) \qquad b=ap$$

verbunden ist. Diesen Ausdruck a nenne ich die *schiefe Invariante* der Form A.

Durch analoge Betrachtungen, wie oben über Schaaren bilinearer Formen mit conjugirten Grundformen angestellt worden sind, ergeben sich über Schaaren quadratischer Formen die Sätze:

IV. *Wenn die Determinante einer Schaar quadratischer Formen identisch verschwindet, so kann die Schaar durch eine Substitution in sich selbst transformirt werden, deren Determinante einen beliebig vorgeschriebenen von Null verschiedenen Werth hat.*

Besteht zwischen den Ableitungen der Formenschaar eine lineare Relation mit constanten Coefficienten, so kann der Transformationsmodul auch Null sein, sonst aber muss er von Null verschieden sein.

V. *Wenn die Determinante einer Schaar quadratischer Formen einen Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat, so lässt die Schaar uneigentliche Transformationen in sich selbst zu.*

VI. *Wenn die Determinante einer Schaar quadratischer Formen nicht identisch Null ist, und wenn alle ihre Elementartheiler gerade Exponenten haben, so lässt die Schaar nur eigentliche Transformationen in sich selbst zu.*

§. 2.

Ermittelung der schiefen Invariante einer bilinearen Form in zwei speciellen Fällen.

Eine bilineare Form A, für welche die Determinante der Schaar $rA-A'$ weder identisch Null ist, noch einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat, möge durch eine willkürliche Substitution P von nicht verschwindender Determinante p in die Form B übergehen. Kann man dann aus den Coefficienten von A einen von Null verschiedenen rationalen Ausdruck a bilden, der mit dem aus den Coefficienten von B analog gebildeten Ausdrucke b durch die Gleichung $b^2=a^2p^2$ verbunden ist, so muss nothwendig $b=+ap$ sein. Denn legt man den Veränderlichen $p_{\alpha\beta}$ die Werthe 0 oder 1 bei, je nachdem α von β verschieden oder gleich β ist, so ist $p=1$ und $b_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}$, also $b=+ap$. Ferner kann die rationale Function $\frac{b}{ap}$ der n^2 Variabeln $p_{\alpha\beta}$, welche nur der Beschränkung unterworfen sind, eine von Null verschiedene Determinante p zu bilden, nach der Voraussetzung nur gleich $+1$ oder -1 sein, und weil sie sich stetig ändert, von dem Anfangswerthe $+1$ niemals zu dem Werthe -1 überspringen. (Vgl. *Stickelberger „Ueber reelle*

orthogonale Substitutionen", §. 4; Programm der eidgenössischen polyt. Schule, 1877.)

In dem einfachsten Falle, wo die Determinante von $rA-A'$ für $r=1$ nicht verschwindet, folgt aus der Gleichung (1.) der Einleitung, indem man $r=1$ setzt,

$$|B-B'| = |A-A'|\,p^2.$$

Nun ist aber die von Null verschiedene schiefe Determinante $|A-A'|$ das Quadrat einer ganzen Function a der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$, der *Pfaff*schen Function*) der Grössen $a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}$, und die Determinante $|B-B'|$ ist das Quadrat der *Pfaff*schen Function b der Grössen $b_{\alpha\beta}-b_{\beta\alpha}$. Der vorausgeschickten Bemerkung zufolge ist daher $b=ap$, also a eine schiefe Invariante der Form A**).

Verschwindet aber die Determinante der Schaar $rA-A'$ für $r=1$, so werde ich zeigen, dass das Anfangsglied der Entwickelung von $|rA-A'|$ nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$ das Quadrat einer rationalen, und zwar gebrochenen, Function a der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ ist, oder genauer ausgedrückt, dass sich eine rationale Function der veränderlichen Grössen $a_{\alpha\beta}$ angeben lässt, deren Quadrat gleich jenem Anfangsgliede wird, falls diese Variabeln solchen Beschränkungen unterworfen werden, dass die Determinante von $rA-A'$ weder identisch Null ist, noch einen für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler mit ungeradem Exponenten hat.

Um die eigenthümliche Form, in welcher sich die schiefe Invariante a unter der gemachten Voraussetzung darstellt, deutlicher zur Anschauung zu bringen, schicke ich der allgemeinen Untersuchung die Betrachtung des speciellen Falls voraus, wo die für $r=1$ verschwindenden Elementartheiler von $|rA-A'|$ alle denselben (geraden) Exponenten e haben. Sei also diese

---

*) Unter der *Pfaff*schen Function von $\frac{n(n-1)}{2}$ Variabeln $t_{\alpha\beta}=-t_{\beta\alpha}$, $(t_{\alpha\alpha}=0)$, wo n gerade ist, wird hier immer ein bestimmter Werth der Quadratwurzel aus der Determinante $|t_{\alpha\beta}|$ verstanden, nämlich der, in welchem das Glied $t_{12}\,t_{34}\ldots t_{n-1,n}$ den Coefficienten $+1$ hat.

**) Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass eine alternirende Form, falls ihre Determinante nicht Null ist, nur eigentliche Transformationen in sich selbst zulässt. Verschwindet aber ihre Determinante, so kann der Modul einer Transformation der Form in sich selbst jeden beliebigen Werth (auch Null) haben. (Vgl. *Fr.* §. 10, IV.)

Determinante genau durch die emte Potenz von $r-1$ theilbar, der grösste gemeinsame Divisor ihrer ersten Unterdeterminanten durch die $e(m-1)$te, der ihrer zweiten Unterdeterminanten durch die $e(m-2)$te, u. s. w., der ihrer $(m-1)$ten Unterdeterminanten durch die $e$te Potenz, während ihre $m$ten Unterdeterminanten nicht mehr alle für $r=1$ verschwinden. Der Rang $n-m$ einer schiefen Determinante $|A-A'|$ ist stets eine gerade Zahl, und unter den von Null verschiedenen Unterdeterminanten $(n-m)$ten Grades befinden sich auch Hauptunterdeterminanten (d. J. Bd. 82, S. 242, IV.). Daraus folgt erstens, dass m gerade ist, weil nach §. 1, 3 n gerade sein muss. Zweitens aber ergiebt sich daraus, dass sich die nm Grössen

$$(1.) \qquad x_1^{(\mu)},\ x_2^{(\mu)},\ \ldots\ x_n^{(\mu)} \qquad (\mu=1,2,\ldots m)$$

so wählen lassen, dass die (schiefe) Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{11} & \cdots & a_{1n}-a_{n1} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(m)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}-a_{1n} & \cdots & a_{nn}-a_{nn} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(m)} \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -x_1^{(m)} & \cdots & -x_n^{(m)} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = h_m = a_m^2$$

von Null verschieden ist. Denn wenn z. B. die Hauptunterdeterminante $(n-m)$ten Grades $|a_{m+\varkappa,\,m+\lambda}-a_{m+\lambda,\,m+\varkappa}|$ $(\varkappa,\lambda=1,2,\ldots n-m)$ von Null verschieden ist, so braucht man nur $x_1^{(1)}=x_2^{(2)}=\cdots=x_m^{(m)}=1$ und sonst $x_\alpha^{(\mu)}=0$ zu setzen.

Sei nun $ra_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}=c_{\alpha\beta}$ und

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & y_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & y_n \\ -x_1 & \cdots & -x_n & 0 \end{vmatrix} = W, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(m)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(m)} \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -x_1^{(m)} & \cdots & -x_n^{(m)} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = w_m,$$

also $|c_{\alpha\beta}| = w$. Bezeichnet man den Werth, den eine bilineare Form G annimmt, wenn man den Variabeln

$$x_1, \ldots x_n; \quad y_1, \ldots y_n$$

die Werthe

$$x_1^{(\varkappa)}, \ldots x_n^{(\varkappa)}; \quad x_1^{(\lambda)}, \ldots x_n^{(\lambda)}$$

beilegt, mit $G_{\varkappa\lambda}$, so ist zufolge einer Identität, die ich §. 3 ableiten werde, die Determinante $m$ten Grades

$$(2.) \qquad |W_{\varkappa\lambda}| = w_m w^{m-1}.$$

Beginnen die Entwickelungen von W und w nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$ mit

$$W = H(r-1)^{e(m-1)} + \cdots, \quad w = h(r-1)^{em} + \cdots,$$

so fängt die Entwickelung der rechten Seite dieser Gleichung mit

$$h_m h^{m-1} (r-1)^{em(m-1)}$$

an, und durch die Vergleichung der $em(m-1)$ten Potenzen auf beiden Seiten erhält man die Relation

$$(3.) \qquad |H_{\varkappa\lambda}| = h_m h^{m-1},$$

aus welcher folgt, dass $|H_{\varkappa\lambda}|$ von Null verschieden ist. Vertauscht man aber in der Determinante W die Variabeln $x_1, \ldots x_n$ mit $y_1, \ldots y_n$ und r mit $\frac{1}{r}$, so geht sie, wie man durch Umstellung der Zeilen und Colonnen erkennt, in $\frac{W}{(-r)^{n-1}}$ über, und daher ist

$$\frac{W}{(-r)^{n-1}} = H'\left(\frac{1}{r}-1\right)^{e(m-1)} + \cdots,$$

wo H' die conjugirte Form von H ist, oder weil n und e gerade sind,

$$W = -H'(r-1)^{e(m-1)} r^{n-1-e(m-1)} + \cdots,$$

und wenn man die rechte Seite nach Potenzen von $r-1$ entwickelt,

$$W = -H'(r-1)^{e(m-1)} + \cdots.$$

Demnach ist $H' = -H$, oder H eine alternirende Form, also $H_{\varkappa\lambda} = -H_{\lambda\varkappa}$ und $H_{\varkappa\varkappa} = 0$, und folglich ist $|H_{\varkappa\lambda}|$ das Quadrat der *Pfaff*schen Function A_m der Grössen $H_{\varkappa\lambda}$. Aus der Formel (3.) ergiebt sich daher

$$(4.) \qquad a = \sqrt{h} = h^{\frac{1}{2}m} \frac{a_m}{A_m}.$$

Da h der Coefficient des Anfangsgliedes von w ist, so ist dieser Gleichung zufolge $\frac{a_m}{A_m} = \sqrt{\frac{h_m}{|H_{\varkappa\lambda}|}}$ von den Variabeln (1.) unabhängig.

Wenn die Form A durch die Substitution P in B übergeht, und wenn die Grössen (1.) durch die contragrediente Substitution transformirt werden, so ist w eine Invariante und $W_{\varkappa\lambda}$ eine zugehörige Form von A, und folglich ist w_m nach Formel (2.) eine zugehörige Form mit mehreren Reihen unabhängiger Variabeln. Da diese Ausdrücke den Parameter r enthalten, so sind auch die Coefficienten ihrer Entwickelungen nach Potenzen von $r-1$ Invarianten und zugehörige Formen. Auf der rechten Seite der Gleichung (4.) ist daher $h^{\frac{1}{2}m}$ eine (ganze) Potenz einer Invariante, und a_m und A_m sind rationale zugehörige Formen, deren Quotient eine Invariante ist. Wenn man daher für die mit A congruente Form B, für welche die Determinante von $rB-B'$ in die nämlichen Elementartheiler zerfällt, wie die von $rA-A'$, die dem Ausdrucke a analoge Function b bildet, so kann man in derselben den Grössen (1.) ganz beliebige Werthe beilegen, für welche die dem Ausdrucke h_m analoge Function von Null verschieden ist, und braucht nicht die Werthe zu nehmen, welche durch die (unbekannte) contragrediente Substitution von P aus den Grössen (1.) hervorgehen. Da w, also auch h bei der Transformation von A in B mit dem Quadrate der Substitutionsdeterminante multiplicirt wird, so ist $b^2 = a^2 p^2$ und folglich

$$(5.) \qquad p = \frac{b}{a}.$$

§. 3.

Sylvester's Determinantensatz.

Wird in der Determinante w der n^2 Grössen $c_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $c_{\beta\alpha}$ mit $w_{\alpha\beta}$ bezeichnet, so ergeben sich, indem man die n linearen Gleichungen

$$w_{\alpha 1} y_1 + w_{\alpha 2} y_2 + \cdots + w_{\alpha n} y_n = Y_\alpha$$

auflöst, die Gleichungen

$$c_{\alpha 1}\, Y_1 + c_{\alpha 2}\, Y_2 + \cdots + c_{\alpha n}\, Y_n = w y_\alpha .$$

Sind also $z_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots m)$ willkürliche Grössen und setzt man

$$X_\alpha^{(\varkappa)} = w_{1\alpha}\, x_1^{(\varkappa)} + w_{2\alpha}\, x_2^{(\varkappa)} + \cdots + w_{n\alpha}\, x_n^{(\varkappa)},$$

$$Y_\alpha^{(\varkappa)} = w_{\alpha 1}\, y_1^{(\varkappa)} + w_{\alpha 2}\, y_2^{(\varkappa)} + \cdots + w_{\alpha n}\, y_n^{(\varkappa)},$$

$$W_{\varkappa\lambda} = z_{\varkappa\lambda}\, w - \sum_{\alpha,\beta} w_{\alpha\beta}\, x_\alpha^{(\varkappa)}\, y_\beta^{(\lambda)} = z_{\varkappa\lambda}\, w - \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha^{(\varkappa)}\, Y_\beta^{(\lambda)},$$

so erhält man durch Zusammensetzung der beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(m)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & y_n^{(1)} & \cdots & y_n^{(m)} \\ x_1^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{(m)} & \cdots & x_n^{(m)} & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = w_m, \qquad \begin{vmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} & Y_1^{(1)} & \cdots & Y_1^{(m)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} & Y_n^{(1)} & \cdots & Y_n^{(m)} \\ 0 & \cdots & 0 & -w & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -w \end{vmatrix} = (-1)^m w^{n-1+m}$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} w & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & w & 0 & \cdots & 0 \\ X_1^{(1)} & \cdots & X_n^{(1)} & -W_{11} & \cdots & -W_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ X_1^{(m)} & \cdots & X_n^{(m)} & -W_{m1} & \cdots & -W_{mm} \end{vmatrix} = (-1)^m w^n \left| W_{\varkappa\lambda} \right|,$$

und daher ist

$$\left| W_{\varkappa\lambda} \right| = w^{m-1} w_m .$$

Diese Formel, welche in vielen Untersuchungen über die Beziehungen zwischen Unterdeterminanten die wichtigsten Dienste leistet, ist von Herrn *Sylvester,* Phil. Mag. 1851, April, gefunden worden. (Vgl. auch *Kronecker,* d. J. Bd. 72, S. 152.)

§. 4.

Allgemeine Darstellung der schiefen Invariante einer bilinearen Form.

Wenn die Determinante der Schaar $rA-A'$ nicht identisch verschwindet, und wenn der Factor $r-1$ in derselben genau in der $l$ten Potenz enthalten ist, in dem grössten gemeinsamen Divisor ihrer ersten, zweiten, ... $(m-1)$ten Unterdeterminanten bezüglich genau in der $l_1$ten, $l_2$ten, ... l_{m-1}ten Potenz, während ihre $m$ten Unterdeterminanten nicht alle für $r=1$ verschwinden, so setze ich voraus, dass die Zahlen

$$l-l_1=e_1,\quad l_1-l_2=e_2,\ \ldots\quad l_{m-1}=e_m$$

gerade sind, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass die Zahlen l_μ sämmtlich gerade sind. Da die Elementartheiler von $|rA-A'|$, welche für $r=1$ verschwinden und einen geraden Exponenten haben, paarweise vorhanden sind (*Kr.*, §. 3, IV, 2), so ist

$$e_1=e_2\geqq e_3=e_4\geqq e_5\ldots\geqq e_{m-1}=e_m,$$

also m eine gerade Zahl.

Sei nun $ra_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}=c_{\alpha\beta}$, und sei

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(\mu)} & y_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(\mu)} & y_n \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -x_1^{(\mu)} & \cdots & -x_n^{(\mu)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x_1 & \cdots & -x_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = W^{(\mu)},\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(\mu)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(\mu)} \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -x_1^{(\mu)} & \cdots & -x_n^{(\mu)} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = w_\mu,$$

und seien $H^{(\mu)}$ und h_μ die Coefficienten der Anfangsglieder in den Entwickelungen von $W^{(\mu)}$ und w_μ nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$. Endlich möge der Werth, den eine bilineare Form G annimmt, wenn man den Variabeln

$$x_1,\ \ldots\ x_n;\quad y_1,\ \ldots\ y_n$$

die Werthe

$$x_1^{(\varkappa)},\ \ldots\ x_n^{(\varkappa)};\quad x_1^{(\lambda)},\ \ldots\ x_n^{(\lambda)}$$

beilegt, mit $G_{\varkappa\lambda}$ bezeichnet werden.

Nun ergiebt sich, wie in §. 2, dass der Coefficient H des Anfangsgliedes der Entwickelung von W nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$ eine alternirende Form ist, dass also $H_{12}=-H_{21}$ und $H_{11}=H_{22}=0$ ist. Wählt man ferner, was immer möglich ist, die Grössen

$$x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}; \quad x_1^{(2)}, \ldots x_n^{(2)}$$

so, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & x_1^{(2)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & x_n^{(2)} \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 \end{vmatrix} = W_{12}$$

nicht durch eine höhere Potenz von $r-1$ als die $l_1$te theilbar ist, so ist H_{12} von Null verschieden. Wenn man daher in der bekannten Relation

$$(1.) \qquad W_{11} W_{22} - W_{12} W_{21} = w w_2$$

die linke Seite nach aufsteigenden Potenzen von $r-1$ entwickelt, so ist

$$(H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21})(r-1)^{2l_1} = (H_{12})^2 (r-1)^{2l_1}$$

das wirkliche (von Null verschiedene) Anfangsglied. Da w genau durch die $l$te Potenz von $r-1$ theilbar ist, so ist der Exponent der Potenz von $r-1$, durch welche w_2 theilbar ist, der Gleichung (1.) zufolge genau gleich $2l_1-l$, oder weil $l-l_1=l_1-l_2$ ist, gleich l_2, und aus der Formel

$$(H_{12})^2 = h h_2,$$

die sich durch Coefficientenvergleichung aus (1.) ergiebt, folgt, dass h ein Quadrat ist, falls h_2 ein solches ist.

Auf h_2 lassen sich nun die nämlichen Schlüsse anwenden, wie auf h. Die Grössen

$$x_1^{(3)}, \ldots x_n^{(3)}; \quad x_1^{(4)}, \ldots x_n^{(4)}$$

können so gewählt werden, dass die Determinante

$$-\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & x_1^{(2)} & x_1^{(1)} & x_1^{(4)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & x_n^{(2)} & x_n^{(1)} & x_n^{(4)} \\ -x_1^{(1)} & \cdots & -x_n^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ -x_1^{(2)} & \cdots & -x_n^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ -x_1^{(3)} & \cdots & -x_n^{(3)} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = W_{34}^{(2)}$$

nicht durch eine höhere Potenz von $r-1$ als die l_3 te theilbar ist. Denn unterdrückt man die beiden letzten Zeilen und Colonnen, so erhält man eine Determinante W_{12}, die den Factor $r-1$ genau in der $l_1$ten Potenz enthält; lässt man aber nur die letzte Zeile und Colonne weg, so ist die erhaltene Unterdeterminante, w_2, wie oben gezeigt, genau durch die $l_2$te Potenz von $r-1$ theilbar. Folglich ergiebt sich die Behauptung aus dem Satze *St.*, §. 2, III. Alle weiteren Schlüsse bleiben dieselben und mithin ist

$$\left(H_{34}^{(2)}\right)^2 = h_2 h_4,$$

also h_4 ein Quadrat, falls h_2 es ist. Ebenso ist

$$\left(H_{56}^{(4)}\right)^2 = h_4 h_6, \ldots \left(H_{m-1,m}^{(m-2)}\right)^2 = h_{m-2} h_m.$$

Da w_m für $r=1$ nicht verschwindet, so wird h_m durch die nämliche Determinante, wie in §. 2 dargestellt, ist also das Quadrat einer *Pfaff*schen Function. Daher ist h das Quadrat eines aus rationalen Contravarianten rational zusammengesetzten Ausdrucks a, welcher von den Variabeln $x_\alpha^{(\mu)}$ unabhängig, also eine Invariante ist, weil h der Coefficient des Anfangsgliedes in der Entwicklung von w nach Potenzen von $r-1$ ist.

Aehnlich wie in §. 2 lässt sich auch hier die Berechnung der schiefen Invariante a dadurch vereinfachen, dass man nicht von h zu h_2, von da zu h_4 u. s. w. übergeht, sondern, falls

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_\alpha > e_{\alpha+1} = e_{\alpha+2} = \cdots = e_\beta > e_{\beta+1} = \cdots$$

ist, gleich von h zu h_α, von da zu h_β u. s. w. Indem wir somit die Existenz einer schiefen Invariante unter den gemachten Voraussetzungen allgemein dargethan haben, sind wir zugleich zu einem neuen Beweise für den Satz III. §. 1 gelangt. Das erhaltene Resultat kann als eine Verallgemeinerung des *Cayley*schen Satzes, dass jede schiefe Determinante von paarem Grade das Quadrat einer rationalen Function ihrer Elemente ist, aufgefasst und in einer etwas veränderten Form folgendermassen ausgesprochen werden:

Ist $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$, $t_{\alpha\beta} = -t_{\beta\alpha}$, $t_{\alpha\alpha} = 0$, *ist die Determinante* $|r\, s_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}|$ *nicht identisch Null, und haben ihre für* $r=0$ *verschwindenden Elementartheiler alle einen geraden Exponenten, so ist in der Entwicklung dieser Determinante nach aufsteigenden Potenzen von* r *der Coefficient des Anfangsgliedes das Quadrat einer rationalen Function der Grössen* $s_{\alpha\beta}$ *und* $t_{\alpha\beta}$.

Ist speciell $s_{\alpha\beta}=0$, falls α von β verschieden ist, und $s_{\alpha\alpha}$ für einige Werthe von α gleich 1, für andere 0, so ist jenes Anfangsglied eine Summe von Hauptunterdeterminanten paaren Grades des Systems $t_{\alpha\beta}$, also eine Summe von Quadraten ganzer Functionen, und diese Summe von Quadraten lässt sich unter den obigen Voraussetzungen als das Quadrat einer einzigen gebrochenen rationalen Function der Grössen $t_{\alpha\beta}$ darstellen.

§. 5.

Ueber die zerlegbare Contravariante $n$ten Grades einer Schaar bilinearer Formen von $2n$ Variabeln.

Die schiefe Invariante einer Schaar quadratischer Formen, deren Determinante nicht identisch verschwindet und lauter Elementartheiler mit geraden Exponenten hat, ergiebt sich aus einer Formel der Lehre von der Composition der in lineare Factoren zerlegbaren Formen $n$ten Grades von n Variabeln. Diese Formel will ich ganz allgemein für eine Schaar von bilinearen Formen

$$C = rA - B = \Sigma c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta = \Sigma (ra_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, x_\alpha\, y_\beta$$

entwickeln, über welche ich nur die Voraussetzung mache, dass die Determinante a der Form A von Null verschieden ist. Ich setze

$$W_\nu = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & y_1^{(1)} & \dots & y_1^{(\nu)} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & y_n^{(1)} & \dots & y_n^{(\nu)} & y_n \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(\nu)} & \dots & x_n^{(\nu)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad w_\nu = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & y_1^{(1)} & \dots & y_1^{(\nu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & y_n^{(1)} & \dots & y_n^{(\nu)} \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(\nu)} & \dots & x_n^{(\nu)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

wo die Grössen $x_\alpha^{(\varrho)}$, $y_\alpha^{(\varrho)}$ $(\alpha = 1, \dots n;\ \varrho = 1, \dots \nu)$ so gewählt seien, dass w_ν genau durch die $l_\nu$te Potenz von $r-c$ theilbar ist, falls $r-c$ ein $l_\nu$facher Linearfactor aller νten Unterdeterminanten von w ist. (*St.* §. 2.)

Ist $l_{\nu-1}-l_\nu=e_\nu$ und folglich $l=e_1+e_2+\cdots$, so sei, nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ entwickelt,

$$\frac{W}{w}=\frac{Z_1}{(r-c)^{e_1}}+\frac{Z_2}{(r-c)^{e_1-1}}+\cdots+\frac{Z_{e_1}}{r-c}+T_0+T_1(r-c)+\cdots,$$

$$\frac{W_1}{w_1}=\frac{Z_{e_1+1}}{(r-c)^{e_2}}+\frac{Z_{e_1+2}}{(r-c)^{e_2-1}}+\cdots+\frac{Z_{e_1+e_2}}{r-c}+\cdots,$$

. . . . . .

seien also $Z_1, Z_2, \ldots Z_l$ (und zwar in irgend einer Reihenfolge) die Coefficienten aller negativen Potenzen in den Entwicklungen der Quotienten $\frac{W_\nu}{w_\nu}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$. Ferner sei H_ν der Coefficient des Anfangsgliedes, also der $-e_\nu$ten Potenz von $r-c$, in der Entwicklung der Differenz $\frac{W_\nu}{w_\nu}-\frac{W_{\nu-1}}{w_{\nu-1}}$.

Ist ferner c' eine von c verschiedene l'fache Wurzel der Gleichung $w=0$, so mögen die (den Grössen $x_\alpha^{(\nu)}$, $y_\alpha^{(\nu)}$ analogen) Grössen $x_\alpha^{(\nu)'}$, $y_\alpha^{(\nu)'}$ so gewählt werden, dass die (der Determinante w_ν entsprechende) Determinante w'_ν nicht durch eine höhere Potenz von $r-c'$ theilbar ist, als alle νten Unterdeterminanten von w, und es mögen die Coefficienten der negativen Potenzen von $r-c'$ in den Entwicklungen der Ausdrücke $\frac{W'_\nu}{w'_\nu}$ mit $Z_{l+1}, Z_{l+2}, \ldots Z_{l+l'}$ bezeichnet werden, und die Coefficienten der Anfangsglieder der Differenzen $\frac{W'_\nu}{w'_\nu}-\frac{W'_{\nu-1}}{w'_{\nu-1}}$ mit H'_ν, u. s. w. Auf diese Weise erhält man $l+l'+l''+\cdots=n$ bilineare Formen $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ der Variabeln x_α, y_α, die Coefficienten der negativen Potenzen von $r-c$, $r-c'$, $r-c''$, ... in den Entwicklungen der Formen

$$\frac{W_\nu}{w_\nu}, \frac{W'_\nu}{w'_\nu}, \frac{W''_\nu}{w''_\nu}, \ldots \quad (\nu=1, 2, \ldots)$$

nach aufsteigenden Potenzen, und ferner ein System von Formen $H_1, H_2, \ldots$, $H'_1, H'_2, \ldots$, deren jede einem der Elementartheiler $(r-c)^{e_1}$, $(r-c)^{e_2}, \ldots$ $(r-c')^{e'_1}$, $(r-c')^{e'_2}, \ldots$ der Determinante w zugeordnet ist.

Zwischen diesen Formen werde ich die Beziehung herleiten

$$(1.) \qquad a\left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\beta}\right|\left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right| = (-1)^{\Sigma \frac{1}{2}e(e-1)} \Pi(H^e),$$

wo in dem Producte jede Form H den nämlichen Exponenten e hat, wie der entsprechende Elementartheiler von w. (Vgl. *Hermite*, d. J. Bd. 47, S. 314 und *Hesse*, d. J. Bd. 57, S. 178.) Ich bemerke, dass die linke Seite dieser Formel ungeändert bleibt, wenn die Formen $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ unter einander vertauscht werden, oder wenn einer derselben das entgegengesetzte Zeichen ertheilt wird, oder allgemeiner, wenn Z_α durch $k_{\alpha 1} Z_1 + \cdots + k_{\alpha n} Z_n$ ersetzt wird und die Determinante der constanten Grössen $k_{\alpha\beta}$ gleich ± 1 ist.

§. 6.

Ueber einen speciellen Fall des aufgestellten Satzes.

Dem allgemeinen Beweise der Formel (1.), §. 5 schicke ich die Betrachtung des speciellen Falles voraus, wo die ersten Unterdeterminanten von w keinen Divisor gemeinsam haben, also w_1 für $r = c, c', \ldots$ nicht verschwindet. Dabei werde ich zur Abkürzung der Darstellung die symbolische Bezeichnung anwenden, welche ich in der oben citirten Abhandlung (*Fr.*) auseinandergesetzt habe.

Aus der Identität

$$(rA-B)\left((rA-B)^{-1} - (sA-B)^{-1}\right)(sA-B) = (sA-B) - (rA-B) = (s-r)A$$

(in welcher die Producte und Potenzen die *Fr.* §. 1 und 2 definirte Bedeutung haben) ergiebt sich

$$(1.) \qquad -\frac{(rA-B)^{-1} - (sA-B)^{-1}}{r-s} = (rA-B)^{-1} A (sA-B)^{-1}.$$

Sind $c, c', \ldots$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $w = 0$, ist $w = a(r-c)^e (r-c')^{e'} \ldots$, und ist, in Partialbrüche zerlegt,

$$-\frac{W}{w} = (rA-B)^{-1} = \frac{Z_1}{(r-c)^e} + \frac{Z_2}{(r-c)^{e-1}} + \cdots + \frac{Z_e}{r-c}$$
$$+ \frac{Z_{e+1}}{(r-c')^{e'}} + \frac{Z_{e+2}}{(r-c')^{e'-1}} + \cdots + \frac{Z_{e+e'}}{r-c'} + \cdots,$$

so erhält man, indem man den Zähler der linken Seite der Formel (1.) nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ und $s-c'$ entwickelt,

$$-\frac{1}{(r-c)-(s-c')+(c-c')}\left(\frac{Z_1}{(r-c)^e}+\cdots+\frac{Z_e}{r-c}+\cdots-\frac{Z_{e+1}}{(s-c')^{e'}}-\cdots\frac{Z_{e+e'}}{s-c'}-\cdots\right).$$

Da in der Entwicklung des ersten Factors nur positive Potenzen von $r-c$ und $s-c'$ vorkommen, so findet sich in der Entwicklung der linken Seite der Formel (1.) keine negative Potenz von $r-c$ mit einer negativen Potenz von $s-c'$ multiplicirt. Da aber in der Entwicklung der rechten Seite dieser Formel

$$\left(\frac{Z_1}{(r-c)^e}+\cdots+\frac{Z_e}{r-c}+\cdots\right)A\left(\frac{Z_{e+1}}{(s-c')^{e'}}+\cdots+\frac{Z_{e+e'}}{s-c'}+\cdots\right)$$

derartige Glieder auftreten, so müssen ihre Coefficienten verschwinden, es muss also

$$(2.)\qquad (Z_\alpha A Z_{e+\beta})=0$$

sein (wo durch die Klammer der symbolische Charakter des Productes angedeutet werden soll).

Entwickelt man ferner die linke Seite der Formel (1.) nach aufsteigenden Potenzen von $r-c$ und $s-c$, so erhält man

$$\frac{1}{(r-c)(s-c)}\,\frac{1}{(r-c)^{-1}-(s-c)^{-1}}\Big[Z_1\left((r-c)^{-e}-(s-c)^{-e}\right)+\cdots$$
$$+Z_e\left((r-c)^{-1}-(s-c)^{-1}\right)\Big]-\frac{1}{(r-c)-(s-c)}\Big[T_0-T_0+T_1\left((r-c)-(s-c)\right)$$
$$+T_2\left((r-c)^2-(s-c)^2\right)+\cdots\Big]=$$
$$\frac{1}{(r-c)(s-c)}\Big[Z_1\left((r-c)^{-e+1}+(r-c)^{-e+2}(s-c)^{-1}+\cdots+(s-c)^{-e+1}\right)$$
$$+\cdots+Z_e\Big]-T_1-T_2\left((r-c)+(s-c)\right)-\cdots.$$

Hier kommen keine Glieder vor, welche $r-c$ und $s-c$ in einer niedrigeren als der $-(e+1)$ten Dimension enthalten, und die Glieder gleicher Dimension haben alle denselben Coefficienten. Vergleicht man damit die Entwicklung der rechten Seite der Formel (1.), so erkennt man, dass

$$(3.)\qquad (Z_\alpha A Z_\beta)=0$$

ist, falls $\alpha+\beta<e+1$ ist, dass aber

$$(4.) \qquad (Z_1 A Z_e) = (Z_2 A Z_{e-1}) = \cdots = (Z_e A Z_1) = Z_1 = H$$

ist. Zufolge der Formeln (2.) zerfällt die Determinante $n$ten Grades

$$|(Z_\alpha A Z_\beta)| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$$

in das Product mehrerer Determinanten von den Graden $e, e', \cdots$. In der ersten derselben vom Grade e sind wegen der Formel (4.) alle Elemente der Nebendiagonale gleich H, und wegen (3.) alle Elemente links von dieser Diagonale gleich Null. Daher ist sie gleich $(-1)^{\frac{i}{2}e(e-1)} H^e$ (wo die Potenz nicht symbolisch gemeint ist), und folglich ist die betrachtete Determinante $n$ten Grades gleich

$$(-1)^{\Sigma \frac{i}{2} e(e-1)} \Pi H^e .$$

Weil aber

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = \sum_\varkappa \frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\varkappa} \frac{\partial (A Z_\beta)}{\partial x_\varkappa}$$

ist, so ist

$$|(Z_\alpha A Z_\beta)| = \left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\beta}\right| \left|\frac{\partial (A Z_\alpha)}{\partial x_\beta}\right|,$$

und weil

$$(A Z_\alpha) = \sum_\varkappa \frac{\partial A}{\partial y_\varkappa} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\varkappa}, \quad \frac{\partial (A Z_\alpha)}{\partial x_\beta} = \sum_\varkappa a_{\beta\varkappa} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\varkappa}$$

ist, so ist

$$\left|\frac{\partial (A Z_\alpha)}{\partial x_\beta}\right| = a \left|\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|.$$

Damit ist die Formel (1.) §. 5 für den betrachteten speciellen Fall bewiesen.

§. 7.

Beweis des Satzes §. 5.

Bei dem allgemeinen Beweise der Formel (1.) §. 5 will ich die Formen $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ etwas anders wie dort definiren, nämlich durch die Entwicklungen

$$\frac{W_1}{w_1}-\frac{W}{w}=\frac{Z_1}{(r-c)^{e_1}}+\cdots+\frac{Z_{e_1}}{r-c}+\cdots,$$

$$\frac{W_2}{w_2}-\frac{W_1}{w_1}=\frac{Z_{e_1+1}}{(r-c)^{e_2}}+\cdots+\frac{Z_{e_1+e_2}}{r-c}+\cdots, \text{ u. s. w.}$$

Die Abänderung kommt, wie leicht zu sehen, auf eine der am Ende des §. 5 erwähnten Umformungen der linken Seite jener Formel hinaus.

Ist U_ν die lineare Form der Variabeln $x_1, \ldots x_n$, welche man aus $W_{\nu-1}$ erhält, indem man $y_\alpha = y_\alpha^{(\nu)}$ setzt, und V_ν die lineare Form von $y_1, \ldots y_n$, welche man aus $W_{\nu-1}$ erhält, indem man $x_\alpha = x_\alpha^{(\nu)}$ setzt, so ist (*St.* §. 1. (1.))

$$W_\nu w_{\nu-1} = W_{\nu-1} w_\nu - U_\nu V_\nu,$$

also

$$\frac{W_1}{w_1}-\frac{W}{w}=-\frac{U_1 V_1}{w w_1}.$$

Sei

$$-w w_1 = (r-c)^{l+l_1} p_1 q_1,$$

wo p_1 und q_1 ganze Functionen von r oder nach ganzen positiven Potenzen von $r-c$ fortschreitende Reihen sind, und sei

$$\frac{U_1}{p_1} = (r-c)^{l_1}(X_1 + X_2(r-c) + \cdots + X_{l_1}(r-c)^{l_1} + \cdots)$$

$$\frac{V_1}{q_1} = (r-c)^{l_1}(Y_1 + Y_2(r-c) + \cdots + Y_{l_1}(r-c)^{l_1} + \cdots),$$

wo X_α eine lineare Function von $x_1, \ldots x_n$ und Y_α eine lineare Function von $y_1, \ldots y_n$ ist. Dann ist

$$-\frac{U_1 V_1}{w w_1}=\frac{1}{(r-c)^{e_1}}(X_1+X_2(r-c)+\cdots)(Y_1+Y_2(r-c)+\cdots)=\frac{Z_1}{(r-c)^{e_1}}+\frac{Z_2}{(r-c)^{e_1-1}}+\cdots,$$

also

$$Z_1 = X_1 Y_1 = H_1, \qquad Z_\alpha = X_1 Y_\alpha + X_2 Y_{\alpha-1} + \cdots + X_\alpha Y_1.$$

Die Coefficienten $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ aller negativen Potenzen von $r-c$, $r-c', \ldots$ in den Entwicklungen der Ausdrücke

$$(1.) \qquad \frac{W_\nu}{w_\nu}-\frac{W_{\nu-1}}{w_{\nu-1}}, \quad \frac{W'_\nu}{w'_\nu}-\frac{W'_{\nu-1}}{w'_{\nu-1}}, \ldots$$

lassen sich also durch n lineare Verbindungen X_α der Variabeln x_α und

durch n Verbindungen $\boldsymbol{Y}_\alpha$ der Variabeln y_α darstellen, und es ist (*St.* §. 1) gezeigt worden, dass sowohl $\boldsymbol{X}_1, \ldots \boldsymbol{X}_n$ als auch $\boldsymbol{Y}_1, \ldots \boldsymbol{Y}_n$ unter einander unabhängige Linearformen sind*).

Addirt man alle negativen Potenzen in den sämmtlichen Entwicklungen der Ausdrücke (1.), so erhält man die Partialbruchzerlegung von

$$\left(\frac{\boldsymbol{W}_1}{w_1} - \frac{\boldsymbol{W}}{w}\right) + \left(\frac{\boldsymbol{W}_2}{w_2} - \frac{\boldsymbol{W}_1}{w_1}\right) + \cdots = -\frac{\boldsymbol{W}}{w} = (r\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^{-1}.$$

Entwickelt man daher diese Partialbrüche einzeln nach absteigenden Potenzen von r, so setzt sich der Coefficient $\boldsymbol{G}$ von r^{-1} aus den Coefficienten von $(r-c)^{-1}$, $(r-c')^{-1}$, . . . in jenen verschiedenen Entwicklungen zusammen, ist also gleich

$$\boldsymbol{G} = \Sigma(\boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{Y}_e + \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{Y}_{e-1} + \cdots + \boldsymbol{X}_e \boldsymbol{Y}_1).$$

In der oben benutzten symbolischen Bezeichnung kann man die soeben ausgeführte Umformung folgendermassen ausdrücken: Sei $\boldsymbol{P}$ die Substitution, welche die Variabeln $\boldsymbol{X}_\alpha$ in x_α überführt, und $\boldsymbol{Q}$ die Substitution, welche $\boldsymbol{Y}_\alpha$ in y_α überführt. Dann ist**)

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Q}) = x_1 y_1, \quad (\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}_\alpha\boldsymbol{Q}) = x_1 y_\alpha + x_2 y_{\alpha-1} + \cdots + x_\alpha y_1,$$
$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}_{e_1+1}\boldsymbol{Q}) = x_{e_1+1} y_{e_1+1}, \cdots,$$

endlich ist der Coefficient von r^{-1} in der Entwicklung von $\boldsymbol{P}(r\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{Q}$ nach absteigenden Potenzen von r gleich

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}) = \Sigma(x_1 y_e + x_2 y_{e-1} + \cdots + x_e y_1).$$

---

*) An der Schwierigkeit, die Unabhängigkeit dieser Linearformen direct zu beweisen, liegt es, dass der allgemeine Beweis der Formel (1.) §. 5 so viel umständlicher ist, als der des §. 6 entwickelten speciellen Falles derselben.

**) Wenn eine bilineare Form $\boldsymbol{A} = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ durch lineare Substitutionen $x_\alpha = p_{1\alpha} x'_1 + \cdots + p_{n\alpha} x'_n$, $y_\beta = q_{\beta 1} y'_1 + \cdots + q_{\beta n} y'_n$ in $\boldsymbol{B} = \Sigma b_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta$ übergeht, so ist $b_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda} p_{\alpha\varkappa} a_{\varkappa\lambda} q_{\lambda\beta}$, also entsteht das System der Grössen $b_{\alpha\beta}$ durch Zusammensetzung der drei Systeme $p_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$. [*Weierstrass*, Berl. Mon. 1868, §. 1, (9.)—(12.)] Bezeichnet man also die Systeme der Grössen $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ mit den Buchstaben $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, so ist $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})$. Dieselbe Gleichung gilt, wenn diese Buchstaben die bilinearen Formen $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$, $\Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$, $\Sigma p_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$, $\Sigma q_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ bedeuten. Denn der Algorithmus der Zusammensetzung von bilinearen Formen, der oben benutzt ist, ist mit dem der Zusammensetzung von linearen Substitutionen identisch.

Setzt man beide Seiten der Gleichung

$$(rA-B)^{-1} = \frac{G}{r} + \frac{G_1}{r^2} + \cdots$$

mit $rA-B$ zusammen, so erhält man (*Fr.* §. 3)

$$E = (rA-B)\left(\frac{G}{r} + \frac{G_1}{r^2} + \cdots\right)$$

und daraus durch Vergleichung der constanten Glieder

$$E = (AG), \quad G = A^{-1},$$

also

$$(PA^{-1}Q) = \Sigma(x_1 y_e + x_2 y_{e-1} + \cdots + x_e y_1).$$

Folglich sind auch die reciproken Formen*)

$$(Q^{-1}AP^{-1}) = \Sigma(x_1 y_e + x_2 y_{e-1} + \cdots + x_e y_1)$$

einander gleich. Da das (symbolische) Product zweier Formen, welche kein Variabelnpaar gemeinsam haben, gleich Null ist, so ist, falls $\varrho \leqq e$ ist, $(x_1 y_\varrho + \cdots + x_\varrho y_1)\,\Sigma(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1) = (x_1 y_\varrho + \cdots + x_\varrho y_1)(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1)$ $= x_\varrho y_e + x_{\varrho-1} y_{e-1} + \cdots + x_1 y_{e-\varrho+1}$.

Wenn nun Z_α und Z_β nicht in derselben Reihenentwicklung als Coefficienten vorkommen, so haben die Formen

$$(PZ_\alpha Q) = x_1 y_\varrho + \cdots + x_\varrho y_1, \quad (PZ_\beta Q) = x_{\varkappa+1} y_{\varkappa+\sigma} + \cdots + x_{\varkappa+\sigma} y_{\varkappa+1}$$

kein Variabelnpaar gemeinsam und folglich ist

$$(PZ_\alpha AZ_\beta Q) = (PZ_\alpha Q)(Q^{-1}AP^{-1})(PZ_\beta Q) =$$
$$(x_1 y_\varrho + \cdots + x_\varrho y_1)(\Sigma(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1))(x_{\varkappa+1} y_{\varkappa+\sigma} + \cdots + x_{\varkappa+\sigma} y_{\varkappa+1}) =$$
$$(x_\varrho y_e + x_{\varrho-1} y_{e-1} + \cdots + x_1 y_{e-\varrho+1})(x_{\varkappa+1} y_{\varkappa+\sigma} + \cdots + x_{\varkappa+\sigma} y_{\varkappa+1}) = 0,$$

---

*) Die reciproke Form der zerlegbaren Form $\Sigma(x_1 y_e + \cdots + x_e y_1)$ ist gleich der Summe der reciproken Formen der einzelnen Theile (*Fr.* §. 5). Ist ferner

$$F = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1,$$

so ist

$$F^2 = \Sigma \frac{\partial F}{\partial y_\varkappa} \frac{\partial F}{\partial x_\varkappa} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = E$$

und folglich $F = F^{-1}$.

also da die Determinanten von P und Q nicht verschwinden (*Fr.* §. 2, I.):

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = 0.$$

Wenn aber Z_α und Z_β in derselben Entwicklung als Coefficienten vorkommen, so ist

$$(PZ_\alpha Q) = x_1 y_\alpha + \cdots + x_\alpha y_1, \quad (PZ_\beta Q) = x_1 y_\beta + \cdots + x_\beta y_1$$

und folglich

$$(PZ_\alpha A Z_\beta Q) = (PZ_\alpha Q)\,(Q^{-1} A P^{-1})\,(PZ_\beta Q) =$$

$$(x_1 y_\alpha + \cdots + x_\alpha y_1)\,(\Sigma (x_1 y_e + \cdots + x_e y_1))\,(x_1 y_\beta + \cdots + x_\beta y_1) =$$

$$(x_\alpha y_e + x_{\alpha-1} y_{e-1} + \cdots + x_1 y_{e-\alpha+1})\,(x_1 y_\beta + \cdots + x_\beta y_1).$$

Ist $e-\alpha+1 > \beta$, oder $\alpha+\beta < e+1$, so ist dies Product gleich Null und daher ist auch

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = 0.$$

Ist aber $\alpha+\beta = e+1$, so ist jenes Product gleich

$$x_1 y_1 = (PZ_1 Q) = (PHQ),$$

und daher ist

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = H \qquad (\alpha+\beta = e+1).$$

Aus den entwickelten Relationen ergiebt sich die Formel (1.) §. 5 ganz in derselben Weise, wie im vorigen Paragraphen.

§. 8.

Die schiefe Invariante einer Schaar quadratischer Formen.

Ich nehme jetzt an, dass $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ ist, und verstehe im Folgenden unter W_ν, Z_α, H, A, B die quadratischen Formen, in welche die bisher mit diesen Buchstaben bezeichneten bilinearen Formen übergehen, wenn man $y_\alpha = x_\alpha$ und ausserdem $y_\alpha^{(\nu)} = x_\alpha^{(\nu)}$ setzt (vgl. *St.* §. 5. S. 39, 40). Dann geht die Formel (1.) §. 5 in

$$(-1)^{\Sigma\frac{e(e-1)}{2}}\, a \left|\frac{1}{2}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|^2 = \Pi H^e$$

über. Setzt man ferner voraus, dass die Zahlen e sämmtlich gerade sind (§. 1, VI.), so ist

$$\frac{e(e-1)}{2} \equiv \frac{e}{2} \pmod 2, \quad \Sigma e = n$$

und daher

$$(1.) \qquad \sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}} a} = \prod\left(H^{\frac{e}{2}}\right) : \left|\frac{1}{2}\,\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|.$$

Wird die Schaar quadratischer Formen

$$rA - B = \Sigma (r a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, x_\alpha x_\beta$$

durch eine Substitution von der Determinante p in $rL-M$ transformirt, so ist die Determinante von L gleich ap^2. Bildet man daher für die transformirte Schaar, deren Determinante in die nämlichen Elementartheiler wie w zerfällt, den der rechten Seite von Formel (1.) analogen Ausdruck, so ist derselbe gleich dem ursprünglichen Ausdruck, mit $+p$ multiplicirt (§. 2). Dieser Ausdruck, welcher der Gleichung (1.) zufolge von den sämmtlichen Variabeln x_α und $x_\alpha^{(\nu)}$, $x_\alpha^{(\nu)'}$, ... unabhängig sein muss, ist also eine schiefe Invariante der Formenschaar $rA-B$.

Sei, um die Formel (1.) an einem Beispiel zu erläutern, $n = 2$ und

$$A = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad B = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

Wenn die Determinante von $rA-B$ für $r=0$ verschwinden und nur den Elementartheiler r^2 haben soll, so muss

$$(2.) \qquad a\gamma - \beta^2 = 0, \quad a\gamma + c\alpha - 2b\beta = 0$$

sein, während α, β, γ nicht sämmtlich verschwinden. Mittelst dieser Gleichungen bestätigt man leicht die Relationen

$$(3.) \quad \sqrt{b^2-ac} = \frac{a\beta-b\alpha}{\alpha} = \frac{a\gamma-c\alpha}{2\beta} = \frac{b\gamma-c\beta}{\gamma} = \frac{(ax+by)(\beta x+\gamma y)-(bx+cy)(\alpha x+\beta y)}{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2},$$

wo von den ersten drei Quotienten wenigstens einer nicht die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ hat*).

---

*) Nach *Gauss*, Disqu. arithm. S. 244 und 249 (unten) ist, wenn man

$$X = pxx' + p'xy' + p''yx' + p'''yy'$$
$$Y = qxx' + q'xy' + q''yx' + q'''yy'$$

setzt,

Mit Hülfe der Lehre von den mehrfachen Wurzeln und den symmetrischen Functionen lässt sich zeigen, dass sich die schiefe Invariante (1.) durch die Coefficienten der Formen A und B rational ausdrücken lässt, dass also der Satz gilt:

Wenn die Elementartheiler der Determinante einer Schaar quadratischer Formen alle gerade Exponenten haben, so lässt sich die Quadratwurzel aus der Determinante jeder einzelnen Form der Schaar durch die Coefficienten der Grundformen rational ausdrücken.

Anstatt aber auf den allgemeinen Beweis dieses Satzes einzugehen, will ich im nächsten Paragraphen für den speciellen Fall, dass die ersten Unterdeterminanten von w keinen Theiler gemeinsam haben, direct eine von den Wurzeln der Gleichung $w=0$ unabhängige Darstellung der schiefen Invariante entwickeln.

§. 9.

Rationale Darstellung der schiefen Invariante.

Die Resultante der beiden ganzen Functionen $f(x)$ und

$$\varphi(x) = a(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n),$$

wo $r_1, r_2, \ldots r_n$ nicht alle verschieden zu sein brauchen, oder die Norm

---

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x'} & \frac{\partial X}{\partial y'} \\ \frac{\partial Y}{\partial x'} & \frac{\partial Y}{\partial y'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} pY - qX & p'Y - q'X \\ p''Y - q''X & p'''Y - q'''X \end{vmatrix}$$

die Identität, welche der Lehre von der Composition der binären quadratischen Formen zu Grunde liegt. Die Formel für die Duplication ergiebt sich daraus, wenn X und Y symmetrische bilineare (oder quadratische) Formen sind (l. c. S. 337). Setzt man für diesen Fall $p=a$, $p'=p''=b$, $p'''=c$; $q=\alpha$, $q'=q''=\beta$, $q'''=\gamma$; $x'=x$, $y'=y$, $X=A$, $Y=B$, so erhält man die Identität

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 = (b^2-ac)B^2 + (a\gamma + c\alpha - 2b\beta)BA + (\beta^2 - \alpha\gamma)A^2,$$

aus der sich unter den Bedingungen (2.) die Gleichung (3.) ergiebt.

von $f(r)$, lässt sich in folgender Form darstellen: Ist c_ν der Coefficient von $x^{-\nu-1}$ in der Entwicklung von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach absteigenden Potenzen von x und

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} \end{vmatrix} = C,$$

so ist (vgl. *Joachimsthal*, d. J. Bd. 48, S. 393)

$$(1.) \qquad \Pi f(r) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n C,$$

wo das Product über alle Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ auszudehnen ist. Die Grössen c_ν sind ganze Functionen der Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$, dividirt durch eine Potenz von a.

Ist $\varphi(x) = a(\psi(x))^2$ das Quadrat einer ganzen Function, so lassen sich die Coefficienten von $\psi(x)$ durch die von $\varphi(x)$ rational ausdrücken. Ist $n = 2m$, d_ν der Coefficient von $x^{-\nu-1}$ in der Entwicklung von $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ nach absteigenden Potenzen von x und

$$\begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_{m-1} \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_m \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ d_{m-1} & d_m & \cdots & d_{2m-2} \end{vmatrix} = D,$$

so ist

$$\Pi' f(r) = \pm D,$$

wo das Product nur über die Wurzeln der Gleichung $\psi(x) = 0$ zu erstrecken ist, und folglich

$$\Pi f(r) = D^2.$$

Aus Formel (1.) ergiebt sich daher der Satz:

Ist $f(x)$ eine ganze Function und $\varphi(x)$ das Quadrat einer ganzen

Function $m$ten Grades, und ist c_ν der Coefficient von $x^{-\nu-1}$ in der Entwicklung von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nach absteigenden Potenzen von x, so lässt sich die Determinante $2m$ten Grades $|c_{\alpha+\beta-2}|$ als das Quadrat einer rationalen Function der Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ darstellen, deren Nenner eine Potenz des Coefficienten von x^{2m} in $\varphi(x)$ ist.

Wenn in der Determinante $w = \varphi(r)$ der bilinearen Form

$$C = rA - B = \Sigma (ra_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, x_\alpha\, y_\beta$$

die ersten Unterdeterminanten keinen Divisor gemeinsam haben, so ist der Bruch

$$-\frac{W}{w} = (rA - B)^{-1}$$

als Function von r irreductibel. Ist Z_ν der Coefficient von $r^{-\nu-1}$ in der Entwicklung derselben nach absteigenden Potenzen von r, so ergiebt sich aus der Formel (1.) §. 6

$$\Sigma (Z_\alpha A Z_\beta) r^{-\alpha-1} s^{-\beta-1} = \frac{1}{rs} \Sigma Z_\nu \frac{r^{-\nu-1} - s^{-\nu-1}}{r^{-1} - s^{-1}} =$$

$$\frac{1}{rs} \Sigma Z_\nu (r^{-\nu} + r^{-\nu+1} s^{-1} + \cdots + s^{-\nu})$$

und daher

$$(Z_\alpha A Z_\beta) = Z_{\alpha+\beta}.$$

Mithin ist die Determinante

$$Z = \begin{vmatrix} Z_0 & Z_1 & \cdots & Z_{n-1} \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Z_{n-1} & Z_n & \cdots & Z_{2n-2} \end{vmatrix}$$

gleich der Determinante

$$|(Z_\alpha A Z_\beta)| = a \left| \frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\beta} \right| \left| \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta} \right|.$$

Ist nun w ein Quadrat, so ist nach dem obigen Lemma

$$Z = (-1)^{\frac{n}{2}} H^2,$$

wo H eine rationale Function der Coefficienten von W und w, also der Grössen $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, x_α, y_β ist. Wenn nun $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$ ist, und man $y_\alpha=x_\alpha$ setzt, so ergiebt sich aus den entwickelten Formeln

$$(2.) \qquad \sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}}a}=H:\left|\frac{1}{2}\frac{\partial Z_\alpha}{\partial x_\beta}\right|$$

als rationale schiefe Invariante der Schaar quadratischer Formen $rA-B$.

Zürich, im Februar 1878.