Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.

Frobenius, G.

in: Journal für die reine und angewandte Mathematik - 114 | Periodical
44 page(s) (187 - 230)

Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen*).

(Von Herrn *G. Frobenius.*)

Betrachtet man zwei quadratische Formen mit reellen Coefficienten als äquivalent, wenn jede durch eine reelle lineare Substitution in die andere transformirt werden kann, so umfasst jede Klasse Formen, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten, und in allen diesen Formen findet sich die gleiche Anzahl von positiven und von negativen Coefficienten. Die Differenz dieser Anzahlen nenne ich die ***Signatur,*** ihre Summe den ***Rang*** der Klasse und auch jeder individuellen Form der Klasse. Der Rang r einer quadratischen Form ist gleich dem Range ihrer Determinante, also dadurch bestimmt, dass die aus dem Systeme ihrer Coefficienten gebildeten Determinanten $(r+1)$-ten Grades alle verschwinden, die $r$ten Grades aber nicht sämmtlich. Die Signatur s der Form

$$(1.)\qquad \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n\, a_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$$

ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenfolgen und der der Zeichenwechsel in der Reihe der $r+1$ Grössen

$$(2.)\qquad A_0 = 1,\quad A_1 = a_{11},\quad A_2 = a_{11}a_{22}-a_{12}^2,\quad \ldots,\quad A_r = \Sigma\pm a_{11}\ldots a_{rr}.$$

Dabei ist aber vorausgesetzt, dass keine dieser Determinanten verschwindet. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so versucht man in der Regel zunächst, ob ihr nicht vielleicht bei einer anderen Anordnung der Variabeln genügt wird. Es giebt aber Fälle, wo bei jeder Anordnung einzelne jener Ausdrücke Null sind, z. B. wenn die Hauptelemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sämmtlich verschwinden. Dann kann man die Signatur berechnen, indem man durch eine Transformation zu einer äquivalenten Form übergeht, und es ist leicht

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 8. März und 10. Mai 1894.

zu zeigen, dass es in jeder Klasse Formen giebt, die der obigen Bedingung genügen.

Bequemer ist es aber in diesem Falle, die Signatur mittelst einer von Herrn *Gundelfinger* gefundenen Regel zu berechnen. (*Hesse,* Analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl. S. 460; dieses Journal Bd. 91, S. 235).

Man kann die Variabeln stets so anordnen, dass unter den Grössen (2.) nie zwei auf einander folgende verschwinden, und dass A_r von Null verschieden ist. Ist dann $A_\varrho = 0$, so haben $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen, und die Signatur s ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenfolgen und der der Zeichenwechsel in der Reihe (2.), wobei es gleichgültig ist, ob man die verschwindenden Determinanten als positiv oder negativ betrachtet. (Für ternäre Formen findet sich diese Regel schon bei *Gauss,* Disqu. arithm. § 271). Versteht man unter sign(a) nach *Kronecker* den Werth $+1$ oder -1 oder 0, je nachdem a positiv oder negativ oder Null ist, so ist demnach

$$(3.) \qquad s = \sum_{\varrho}{}_1^r \operatorname{sign}(A_{\varrho-1} A_\varrho).$$

Zu diesem Resultate führt in besonders einfacher Weise der Weg, auf dem ich in meiner Arbeit *Ueber das Pfaffsche Problem* (dieses Journal Bd. 82; § 5) analoge Eigenschaften der alternirenden Systeme erhalten habe.

Aus den Vorzeichen der Grössen (2.) kann man, aber nicht nach der Formel (3.), die Signatur auch dann noch berechnen, wenn an einer oder mehreren Stellen *zwei* auf einander folgende derselben verschwinden, doch im allgemeinen nicht mehr, wenn *drei* auf einander folgende Null sind. Es giebt aber specielle Arten quadratischer Formen, bei denen, auch wenn beliebig viele der Grössen (2.) Null sind, die Signatur auf diesem Wege gefunden werden kann. Dies tritt namentlich bei solchen Formen ein, deren Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ nur von der Summe der Indices $\alpha+\beta$ abhängen, und bei solchen, deren Coefficienten bei der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen nach der Methode von *Bézout* auftreten. Durch die Betrachtung derselben kann man die Sätze, die *Kronecker* über die *Sturm*schen Functionen gefunden hat, indem er das ursprüngliche *Sturm*sche Verfahren mit den Ergebnissen der Theorie der quadratischen Formen verglich, ohne Benutzung desselben allein aus identischen Determinantenrelationen ableiten.

§ 1.

In dem Philosophical Magazine vom Jahre 1851 (S. 297) theilt *Sylvester* ohne Beweis ein bemerkenswerthes Theorem über Determinanten mit, das er bezeichnet als „one of the most prolific in results of any with which I am acquainted". Da es die Grundlage der ganzen folgenden Untersuchung bildet, so will ich den Beweis, den ich dafür im 86. Bande dieses Journals (S. 54) gegeben habe, auf eine Form bringen, die mit der hier entwickelten Theorie im engsten Zusammenhange steht. Ist

$$\varphi = \sum_{\alpha,\beta}^{n} a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \tag{1.}$$

eine bilineare Form von zwei Reihen von je n Variabeln $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, und setzt man

$$\xi_\beta = \frac{\partial\varphi}{\partial y_\beta} = \sum_\alpha a_{\alpha\beta} x_\alpha, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} y_\beta \tag{2.}$$

und

$$\psi = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & \eta_r \\ \xi_1 & \ldots & \xi_r & \varphi \end{vmatrix} = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \tag{3.}$$

so ist

$$B_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r\beta} \\ a_{\alpha 1} & \ldots & a_{\alpha r} & a_{\alpha\beta} \end{vmatrix}. \tag{4.}$$

Ist also einer der beiden Indices α oder $\beta \leqq r$, so ist $B_{\alpha\beta} = 0$. Demnach hängt ψ nur von den Variabeln $x_{r+1}, \ldots, x_n$ und $y_{r+1}, \ldots, y_n$ ab und verschwindet identisch, wenn alle aus den Coefficienten von φ gebildeten Determinanten $(r+1)$-ten Grades Null sind. Ist

$$A_r = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr} \tag{5.}$$

von Null verschieden, so sind $\xi_1, \ldots, \xi_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ n von einander unabhängige lineare Functionen von $x_1, \ldots, x_n$. Setzt man

$$\chi = -\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & \eta_r \\ \xi_1 & \ldots & \xi_r & 0 \end{vmatrix}, \tag{6.}$$

so ist

$$(7.)\qquad A_r\varphi = \chi+\psi,$$

und demnach ist φ, als Function von $\xi_1, \dots, \xi_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ und $\eta_1, \dots, \eta_r, y_{r+1}, \dots, y_n$ betrachtet, in eine Summe von zwei bilinearen Formen *zerlegbar*, von denen die eine χ nur von $\xi_1, \dots, \xi_r$ und $\eta_1, \dots, \eta_r$ abhängt, die andere ψ nur von $x_{r+1}, \dots, x_n$ und $y_{r+1}, \dots, y_n$. Folglich ist die Determinante dieser Form gleich dem Producte der Determinanten von χ und von ψ.

Da aber χ die adjungirte Form von $\sum_{\alpha,\beta}{}_1^r a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ ist, so ist ihre Determinante gleich A_r^{r-1}. Die Determinante von ψ ist

$$\Sigma\pm B_{r+1,r+1}\dots B_{nn}.$$

Betrachtet man aber $\chi+\psi$ als Function von $x_1, \dots, x_n$, so tritt zu der eben berechneten Determinante noch das Product der Substitutionsdeterminanten A_rA_r als Factor hinzu. So ergiebt sich *Sylvesters* Determinantensatz

$$(8.)\qquad \Sigma\pm B_{r+1,r+1}\dots B_{nn} = A_r^{n-r-1}\Sigma\pm a_{11}\dots a_{nn}.$$

Diese Formel ist ganz allgemein gültig, weil sie für alle Werthe der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ dargethan ist, für die A_r von Null verschieden ist.

Wenn die Determinanten $(r+1)$-ten Grades $B_{\alpha\beta}$ sämmtlich verschwinden, aber A_r von Null verschieden ist, so ist $\varphi = A_r^{-1}\psi$ eine bilineare Form von $r+r$ unabhängigen Variabeln $\xi_1, \dots, \xi_r$ und $\eta_1, \dots, \eta_r$, und folglich verschwinden alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades aus den Coefficienten $a_{\alpha\beta}$. Dieser Satz von *Kronecker* (dieses Journal Bd. 72, S. 152) ist daher in *Sylvesters* Determinantensatz enthalten und kann auch auf folgendem Wege daraus hergeleitet werden. Ersetzt man in der Determinante (4.) das letzte Element durch 0, so geht sie in $B_{\alpha\beta}-A_ra_{\alpha\beta}$ über. Sind demnach $\alpha, \beta, \dots, \vartheta$ irgend s der Indices $1, 2, \dots, n$ und ebenso $\varkappa, \lambda, \dots, \tau$, so ist

$$\Sigma\pm(B_{\alpha\varkappa}-A_ra_{\alpha\varkappa})\dots(B_{\vartheta\tau}-A_ra_{\vartheta\tau}) = A_r^{s-1}\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} & a_{1\varkappa} \dots a_{1\tau} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{r1} \dots a_{rr} & a_{r\varkappa} \dots a_{r\tau} \\ a_{\alpha 1} \dots a_{\alpha r} & 0 \;\dots\; 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{\vartheta 1} \dots a_{\vartheta r} & 0 \;\dots\; 0 \end{vmatrix},$$

verschwindet mithin identisch, falls $s > r$ ist. Ist also A_r von Null verschieden und sind alle Determinanten $B_{\alpha\beta} = 0$, so verschwinden alle Determinanten $s$ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$. Ist $s = r$, so ist identisch

$$(9.)\qquad \Sigma\pm(A_ra_{\alpha\varkappa}-B_{\alpha\varkappa})\dots(A_ra_{\vartheta\tau}-B_{\vartheta\tau}) = A_r^{r-1}(\Sigma\pm a_{\alpha 1}\dots a_{\vartheta r})(\Sigma\pm a_{1\varkappa}\dots a_{r\tau}),$$

und folglich unter derselben Voraussetzung

$$(10.)\qquad (\Sigma\pm a_{11}\dots a_{rr})(\Sigma\pm a_{\alpha\varkappa}\dots a_{\vartheta\tau}) = (\Sigma\pm a_{\alpha 1}\dots a_{\vartheta r})(\Sigma\pm a_{1\varkappa}\dots a_{r\tau}),$$

wie ich auf einem anderen Wege im 82. Bande dieses Journals (S. 240, I) bewiesen habe.

Für den Fall, wo $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ und

$$\varphi = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

eine quadratische Form von $x_1, \dots, x_n$ ist, ergiebt sich aus der Formel (7.) eine wichtige Folgerung. Ist A_r von Null verschieden, so sind

$$\xi_1, \ \dots, \ \xi_r, \ x_{r+1}, \ \dots, \ x_n$$

unabhängige Variabeln, und da χ nur von $\xi_1, \dots, \xi_r$ und ψ nur von $x_{r+1}, \dots, x_n$ abhängt, so kann man φ in eine Summe von Quadraten transformiren, indem man jede der beiden Functionen χ und ψ für sich transformirt. Daher ist Signatur und Rang von φ gleich der Summe der Signaturen bez. Rangzahlen von χ und von ψ. Ist aber die Determinante einer quadratischen Form von r Variabeln $A_r^{-1}\chi$ von Null verschieden, so hat sie dieselbe Signatur wie ihre reciproke Form. Denn wird sie durch eine Substitution von nicht verschwindender Determinante in eine Summe von r Quadraten $\Sigma c_\varrho y_\varrho^2$ transformirt, so geht $\Sigma \frac{1}{c_\varrho} y_\varrho^2$ durch die transponirte Substitution in die reciproke Form über. Demnach ergiebt sich der Satz:

Die Signatur (der Rang) der quadratischen Form

$$\varphi = \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

ist, wenn man

$$A_r = \Sigma\pm a_{11}\dots a_{rr}, \quad B_{\alpha\beta} = \Sigma\pm a_{11}\dots a_{rr} a_{\alpha\beta}$$

setzt, falls A_r von Null verschieden ist, gleich der Summe der Signaturen (Rangzahlen) der beiden quadratischen Formen

$$\sum_{\alpha,\beta}{}_1^r a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \quad \text{und} \quad \frac{1}{A_r} \sum_{\alpha,\beta}{}_{r+1}^n B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

von denen die erste aus der Form φ hervorgeht, indem man darin $x_{r+1}, \dots, x_n$ Null setzt, die andere, indem man darin $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_r}$ Null setzt.

§ 2.

Zu dem in der Einleitung erwähnten Satze des Herrn *Gundelfinger* kann man durch folgende Ueberlegungen gelangen.

1. Wenn in einem symmetrischen Systeme die Hauptunterdeterminante $r$ten Grades
$$A_r = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr}$$
von Null verschieden ist, aber alle Hauptunterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades
$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr} a_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha = r+1, \ldots, n)$$
und $(r+2)$-ten Grades
$$\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr} a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} \qquad (\alpha, \beta = r+1, \ldots, n)$$
verschwinden, so verschwinden alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades.

Hauptunterdeterminante nenne ich eine Unterdeterminante, deren Diagonalelemente (Hauptelemente) alle der Diagonale des gegebenen Systems angehören. Ist $B_{\alpha\beta}$ die Determinante (4.) § 1, so ist $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$ und nach einem bekannten Satze über die adjungirten Systeme oder auch nach dem Satze von *Sylvester*

$$(1.) \qquad B_{\alpha\alpha} B_{\beta\beta} - B_{\alpha\beta}^2 = A_r \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{rr} a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta},$$

also gleich Null, und weil $B_{\alpha\alpha} = 0$ ist, so ist auch $B_{\alpha\beta} = 0$. Nach dem Satze von *Kronecker* verschwinden daher in dem System $a_{\alpha\beta}$ alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades.

2. Wenn in einem symmetrischen Systeme alle Hauptunterdeterminanten $r$ten und $(r+1)$-ten Grades verschwinden, so verschwinden alle Unterdeterminanten $r$ten und höheren Grades.

Ist $r = 1$, so ist nach der Voraussetzung $a_{\alpha\alpha} = 0$ und $a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} - a_{\alpha\beta}^2 = 0$, also auch $a_{\alpha\beta} = 0$. Ich nehme daher an, der Satz sei für einen bestimmten Werth von r bereits bewiesen und zeige, dass er dann auch für den Werth $r+1$ richtig ist. In dem betrachteten symmetrischen Systeme verschwinden demnach alle Hauptunterdeterminanten $(r+1)$-ten und $(r+2)$-ten Grades. Wenn dann erstens ausserdem noch alle Hauptunterdeterminanten $r$ten Grades verschwinden, so sind nach den Voraussetzungen des Inductionsschlusses alle Unterdeterminanten $r$ten und höheren Grades Null. Ist aber zweitens eine Hauptunterdeterminante $r$ten Grades, z. B. A_r von Null verschieden, so verschwinden nach Satz 1. alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades und folglich auch alle von höherem Grade.

3. Ist r der Rang eines symmetrischen Systems, so giebt es in demselben eine nicht verschwindende *Haupt*unterdeterminante vom Grade r.

Nach der Voraussetzung verschwinden alle Hauptunterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades. Sollten also auch alle Hauptunterdeterminanten $r$ten Grades verschwinden, so würden nach 2. alle Unterdeterminanten $r$ten Grades Null sein. Dann wäre aber der Rang des Systems kleiner als r.

Im 82. Bande dieses Journals (S. 242) habe ich diesen Satz auf einem anderen Wege hergeleitet [vgl. oben Formel (10.) § 1]. Einen dritten Beweis giebt Herr *Gundelfinger*, dieses Journal Bd. 91, S. 229.

4. Man kann die Variabeln einer beliebigen quadratischen Form $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ vom Range r stets in einer solchen Reihenfolge mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnen, dass unter den Grössen

$$(2.)\quad A_0 = 1,\ A_1 = a_{11},\ A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\ \dots,\ A_r = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{rr}$$

nie zwei auf einander folgende verschwinden und dass A_r von Null verschieden ist.

Wenn die n Elemente $a_{\alpha\alpha}$ nicht sämmtlich verschwinden, so wähle man die erste Variable so, dass a_{11} von Null verschieden ist. Wenn die Unterdeterminanten $a_{11}a_{\alpha\alpha} - a_{12}^2$ nicht sämmtlich verschwinden, so wähle man die zweite Variable so, dass A_2 von Null verschieden ist, u. s. w. Gelangt man so bis zu der von Null verschiedenen Determinante $A_\varrho = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{\varrho\varrho}$, sind aber alle Unterdeterminanten

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{\varrho\varrho} a_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha = \varrho+1, \dots, n)$$

Null, so können, falls $\varrho < r$ ist, nach 1. nicht alle Unterdeterminanten

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{\varrho\varrho} a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} \qquad (\alpha, \beta = \varrho+1, \dots, n)$$

verschwinden. Daher kann man $x_{\varrho+1}$ und $x_{\varrho+2}$ so wählen, dass zwar $A_{\varrho+1} = 0$, aber $A_{\varrho+2}$ von Null verschieden ist. Ergiebt sich also bei Anwendung dieser Regel $A_{r-1} = 0$, so wird A_r von Null verschieden. Aber auch wenn A_{r-1} von Null verschieden ist, können nicht alle Unterdeterminanten $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{r-1,r-1} a_{\alpha\alpha} = 0$ sein. Denn weil r der Rang der Form ist, sind alle Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{r-1,r-1} a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta} = 0,$$

und folglich müssten nach 1. alle Unterdeterminanten $r$ten Grades verschwinden, also der Rang des Systems kleiner als r sein. Man kann aber auch von irgend einer nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante A_r ausgehen, die nach 3. stets existirt, zu dieser eine nicht verschwindende Hauptunterdeterminante A_{r-1} suchen u. s. w. Kommt man dann zu einer Hauptunterdeterminante $A_{\varrho+1}$, deren Hauptunterdeterminanten ϱten Grades alle Null sind, so können doch, da $A_{\varrho+1}$ von Null verschieden ist, nicht alle Unterdeterminanten ϱten Grades von $A_{\varrho+1}$ verschwinden. Ist z. B. der Coefficient B_ϱ von $a_{\varrho,\varrho+1}$ von Null verschieden, und bezeichnet man den Coefficienten von $a_{\varrho\varrho}$ mit C_ϱ, so ist nach der Formel $A_{\varrho+1}A_{\varrho-1} = A_\varrho C_\varrho - B_\varrho^2 = -B_\varrho^2$ die Determinante $A_{\varrho-1}$ von Null verschieden.

Endlich kann man auch mit irgend einer nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante A_s $(0 < s < r)$ anfangen und zu dieser

$$A_{s+1},\quad A_{s+2},\quad \dots,\quad A_r \quad \text{und} \quad A_{s-1},\quad A_{s-2},\quad \dots,\quad A_1$$

den geforderten Bedingungen gemäss bestimmen.

§ 3.

Die n Variabeln einer quadratischen Form vom Range r

$$\xi = \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

seien in einer solchen Reihenfolge mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet, dass von den $r+1$ Grössen (2.) § 2 nie zwei auf einander folgende verschwinden und dass A_r von Null verschieden ist. Die Reihenfolge braucht nicht nothwendig auf dem im vorigen Paragraphen angegebenen Wege ermittelt zu sein. (Dabei ist nämlich nur dann $A_{\varrho+1} = 0$, wenn alle Determinanten

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{\varrho\varrho} a_{\alpha\alpha} \qquad (\alpha = \varrho+1, \dots, n)$$

verschwinden. Diese Bedingung braucht aber hier nicht erfüllt zu sein.) Setzt man

$$B_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,\varrho-1} & a_{1,\varrho+1} \\ \cdot & \dots \quad \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,1} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\varrho+1} \\ a_{\varrho 1} & \dots a_{\varrho,\varrho-1} & a_{\varrho,\varrho+1} \end{vmatrix}, \quad C_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,\varrho-1} & a_{1,\varrho+1} \\ \cdot & \dots \quad \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,1} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\varrho+1} \\ a_{\varrho+1,1} & \dots a_{\varrho+1,\varrho-1} & a_{\varrho+1,\varrho+1} \end{vmatrix},$$

$(B_1 = a_{12}, C_1 = a_{22})$, so ist nach Formel (1.) § 2

$$(1.) \qquad A_{\varrho-1}A_{\varrho+1} = A_\varrho C_\varrho - B_\varrho^2.$$

Ist nun $A_\varrho = 0$, so sind nach Voraussetzung $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$, also auch B_ϱ von Null verschieden, und folglich haben $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen. Setzt man

$$\xi_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta$$

und

$$\eta^{(\varrho)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\varrho} \; \xi_1 \\ \cdot \;\; \cdots \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\varrho 1} \dots a_{\varrho\varrho} \; \xi_\varrho \\ \xi_1 \;\; \dots \xi_\varrho \;\; \xi \end{vmatrix}, \quad \zeta^{(\varrho)} = -\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\varrho} \; \xi_1 \\ \cdot \;\; \cdots \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\varrho 1} \dots a_{\varrho\varrho} \; \xi_\varrho \\ \xi_1 \;\; \dots \xi_\varrho \;\; 0 \end{vmatrix},$$

so ist, wie in § 1 gezeigt, $\eta^{(\varrho)} = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ eine quadratische Form, die nur von den Variabeln $x_{\varrho+1}, \dots, x_n$ abhängt, und wenn r der Rang von ξ ist, so verschwindet die Form $\eta^{(r)}$ identisch, weil ihre Coefficienten Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$ sind. Ferner ist

(2.) $$A_\varrho \xi = \zeta^{(\varrho)} + \eta^{(\varrho)}$$

und folglich

(3.) $$\xi = \eta^{(0)} = \frac{\zeta^{(r)}}{A_r}.$$

Setzt man endlich $y_1 = \xi_1$, $y_{r+1} = 0$,

$$y_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,\varrho-1} \; \xi_1 \\ \cdot \;\; \cdots \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{\varrho 1} \dots a_{\varrho,\varrho-1} \; \xi_\varrho \end{vmatrix},$$

so ist nach dem Determinantensatze (1.) § 2

$$A_{\varrho-1} \eta^{(\varrho)} = A_\varrho \eta^{(\varrho-1)} - y_\varrho^2$$

oder

(4.) $$\frac{\eta^{(\varrho-1)}}{A_{\varrho-1}} - \frac{\eta^{(\varrho)}}{A_\varrho} = \frac{\zeta^{(\varrho)}}{A_\varrho} - \frac{\zeta^{(\varrho-1)}}{A_{\varrho-1}} = \frac{y_\varrho^2}{A_{\varrho-1} A_\varrho}.$$

Sind also $A_0, A_1, \dots, A_r$ von Null verschieden, so ist nach (3.)

(5.) $$\xi = \sum_\varrho {}_1^r \frac{y_\varrho^2}{A_{\varrho-1} A_\varrho}.$$

Aus dieser bekannten Transformation von *Gauss* und *Jacobi* ergiebt sich die Formel

(6.) $$s = \sum_\varrho {}_1^r \operatorname{sign}(A_{\varrho-1} A_\varrho)$$

für die Signatur der Form ξ.

Damit die entwickelten Formeln auch brauchbar bleiben, wenn $A_\varrho = 0$ ist, forme ich sie in folgender Weise um. Setzt man

$$z_\varrho = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,\varrho-1} & \xi_1 \\ \cdot & \cdots \;\; \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,1} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & \xi_{\varrho-1} \\ a_{\varrho+1,1} & \dots a_{\varrho+1,\varrho-1} & \xi_{\varrho+1} \end{vmatrix}$$

$(z_1 = \xi_2)$, so ist

$$A_{\varrho-1} y_{\varrho+1} = A_\varrho z_\varrho - B_\varrho y_\varrho$$

und folglich

$$A_{\varrho-1}^2 y_{\varrho+1}^2 = A_\varrho^2 z_\varrho^2 - 2A_\varrho B_\varrho z_\varrho y_\varrho + (A_\varrho C_\varrho - A_{\varrho-1} A_{\varrho+1}) y_\varrho^2$$

oder

$$(7.)\qquad \frac{\eta^{(\varrho-1)}}{A_{\varrho-1}} - \frac{\eta^{(\varrho+1)}}{A_{\varrho+1}} = \frac{y_\varrho^2}{A_{\varrho-1}A_\varrho} + \frac{y_{\varrho+1}^2}{A_\varrho A_{\varrho+1}} = \frac{A_\varrho z_\varrho^2 - 2B_\varrho z_\varrho y_\varrho + C_\varrho y_\varrho^2}{A_{\varrho-1}^2 A_{\varrho+1}}.$$

Mittelst dieser Relation kann man in der Formel (5.) für $y_{\varrho+1}$ die Variable z_ϱ einführen. Ist dann $A_\varrho = 0$, so sind nach der Voraussetzung $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$ von Null verschieden. Jene quadratische Form von y_ϱ und z_ϱ

$$\frac{y_\varrho}{A_{\varrho-1}^2 A_{\varrho+1}}(-2B_\varrho z_\varrho + C_\varrho y_\varrho)$$

wird also ein Product von zwei reellen linearen Formen und hat folglich die Signatur 0. Ebenso ist aber in der Formel (6.) die Summe der beiden Glieder

$$\operatorname{sign}(A_{\varrho-1}A_\varrho) + \operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+1}) = 0,$$

gleichgültig ob man A_ϱ als positiv, negativ oder als verschwindend betrachtet.

Die obige Umformung kann man auch mit Hülfe des *Sylvester*schen Determinantensatzes ausführen. Nach diesem erhält man direct

$$A_{\varrho-1}^2 \eta^{(\varrho+1)} = \begin{vmatrix} A_\varrho & B_\varrho & y_\varrho \\ B_\varrho & C_\varrho & z_\varrho \\ y_\varrho & z_\varrho & \eta^{(\varrho-1)} \end{vmatrix},$$

also nach Gleichung (1.) die Formel (7.).

Der Vollständigkeit wegen füge ich noch folgende Bemerkung hinzu. Weil A_r von Null verschieden ist, sind $\xi_1, \dots, \xi_r$ r von einander unabhängige lineare Functionen von $x_1, \dots, x_n$. Nun hängt y_ϱ nur von $\xi_1, \dots, \xi_\varrho$ ab, und der Coefficient von ξ_ϱ ist $A_{\varrho-1}$, und z_ϱ hängt nur von $\xi_1, \dots, \xi_{\varrho+1}$ ab, und der Coefficient von $\xi_{\varrho+1}$ ist $A_{\varrho-1}$. Daher sind die an Stelle von $\xi_1, \dots, \xi_r$ eingeführten r neuen Variabeln unabhängige lineare Verbindungen dieser r Veränderlichen.

Das oben erhaltene Ergebniss ist übrigens ganz der Regel analog, zu der man durch Anwendung einer reellen orthogonalen Substitution geführt wird. Durch eine solche kann man die quadratische Form ξ stets in $c_1 y_1^2 + \dots + c_r y_r^2$ transformiren. Die r (verschiedenen oder gleichen) Coefficienten

$c_1, \ldots, c_r$ sind die r nicht verschwindenden Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$|x e_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}| = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

wo $e_{\alpha\beta} = 0$ oder 1 ist, je nachdem α und β verschieden oder gleich sind. Da die Wurzeln dieser Gleichung

$$a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots + (-1)^r a_r x^{n-r} = 0$$

alle reell sind, so können nach der *Harriot*schen Regel nie zwei auf einander folgende der Coefficienten

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_r$$

verschwinden, und wenn $a_\varrho = 0$ ist, so haben $a_{\varrho-1}$ und $a_{\varrho+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen. Daher ist

$$(8.) \qquad s = \sum_\varrho {}_1^r \operatorname{sign}(a_{\varrho-1} a_\varrho)$$

die Differenz zwischen der Anzahl der positiven und der negativen Wurzeln der charakteristischen Gleichung, also gleich der Signatur der Form ξ.

Als Anwendung der oben entwickelten Regel berechne ich die Signatur einer quadratischen Form, bei welcher $a_{\alpha\beta} = 0$ ist, falls $\alpha + \beta \leqq n$ ist. Dagegen sei ihre Determinante

$$A = A_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1,n} a_{2,n-1} \ldots a_{n,1}$$

von Null verschieden.

Ist $n = 2m$ gerade, so ist

$$A = (-1)^m a_{1,n}^2 a_{2,n-1}^2 \ldots a_{m,m+1}^2.$$

Dann betrachte ich die Reihe der Determinanten

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_{m,m} = 0, \quad A_2 = \Sigma \pm a_{m,m} a_{m+1,m+1} = -a_{m,m+1}^2,$$
$$A_3 = \Sigma \pm a_{m-1,m-1} a_{m,m} a_{m+1,m+1} = 0, \quad A_4 = \Sigma \pm a_{m-1,m-1} \ldots a_{m+2,m+2}$$
$$= a_{m,m+1}^2 a_{m-1,m+2}^2, \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Grössen haben die Vorzeichen

$$+1, \quad 0, \quad -1, \quad 0, \quad +1, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad (-1)^m,$$

und mithin ist die Signatur der Form $s = 0$.

Ist aber $n = 2m-1$ ungerade, so ist

$$A = (-1)^{m-1} a_{m,m} a_{m-1,m+1}^2 \dots a_{1,n}^2.$$

Dann betrachte ich die Reihe der Determinanten

$$A_0 = 1,\quad A_1 = a_{m,m},\quad A_2 = \Sigma \pm a_{m-1,m-1} a_{m,m} = 0,$$
$$A_3 = \Sigma \pm a_{m-1,m-1} a_{m,m} a_{m+1,m+1} = -a_{m,m} a_{m-1,m+1}^2,$$
$$A_4 = \Sigma \pm a_{m-2,m-2} \dots a_{m+1,m+1} = 0,$$
$$A_5 = \Sigma \pm a_{m-2,m-2} \dots a_{m+2,m+2} = +a_{m,m} a_{m-1,m+1}^2 a_{m-2,m+2}^2, \quad \text{u. s. w.}$$

Bezeichnet man das Vorzeichen von $a_{m,m}$ mit ε, so haben diese Grössen die Vorzeichen

$$1,\ \varepsilon,\ 0,\ -\varepsilon,\ \dots,\ 0,\ (-1)^{m-1}\varepsilon,$$

und mithin ist die Signatur der Form $s = \varepsilon$ oder

$$(9.)\qquad s = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sign}(A).$$

§ 4.

Die entwickelte Methode bleibt auch noch anwendbar, wenn in der Reihe der Grössen (2.) § 2 nie mehr als *zwei* auf einander folgende verschwinden. Sei $A_{\varrho+1} = A_{\varrho+2} = 0$, aber A_ϱ und $A_{\varrho+3}$ von Null verschieden. Setzt man dann, indem man ϱ als einen festen Index betrachtet,

$$B_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1\varrho} & a_{1,\varrho+\beta} \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho 1} & \dots a_{\varrho\varrho} & a_{\varrho,\varrho+\beta} \\ a_{\varrho+\alpha,1} & \dots a_{\varrho+\alpha,\varrho} & a_{\varrho+\alpha,\varrho+\beta} \end{vmatrix},\quad z_\alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1\varrho} & \xi_1 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho 1} & \dots a_{\varrho\varrho} & \xi_\varrho \\ a_{\varrho+\alpha,1} & \dots a_{\varrho+\alpha,\varrho} & \xi_{\varrho+\alpha} \end{vmatrix},$$

so ist nach dem Satze von *Sylvester*

$$A_\varrho^3 \eta^{(\varrho+3)} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & z_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & z_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \eta^{(\varrho)} \end{vmatrix}$$

und

$$A_\varrho^2 A_{\varrho+3} = \Sigma \pm B_{11} B_{22} B_{33},$$

also

$$(1.)\qquad \frac{\eta^{(\varrho)}}{A_\varrho}-\frac{\eta^{(\varrho+3)}}{A_{\varrho+3}} = -\frac{1}{A_\varrho}\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & z_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & z_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}.$$

Diese quadratische Form tritt also in der Formel (5.) § 3 an die Stelle der drei Quadrate

$$\frac{y_{\varrho+1}^2}{A_\varrho A_{\varrho+1}}+\frac{y_{\varrho+2}^2}{A_{\varrho+1}A_{\varrho+2}}+\frac{y_{\varrho+3}^2}{A_{\varrho+2}A_{\varrho+3}},$$

und die Signatur dieser Form ist in der Formel (6.) § 3 für die Summe der Vorzeichen der Nenner dieser drei Quadrate zu setzen. Jene Form ist aber die reciproke der Form $A_\varrho \Sigma_{\alpha,\beta}{}_1^3 B_{\alpha\beta} Z_\alpha Z_\beta$, und demnach haben wir die Signatur der ternären Form $\Sigma B_{\alpha\beta} Z_\alpha Z_\beta$ zu berechnen. Nun ist $B_{11} = A_{\varrho+1} = 0$ und $B_{11}B_{22}-B_{12}^2 = A_\varrho A_{\varrho+2} = 0$, also $B_{12} = 0$, und $\Sigma \pm B_{11}B_{22}B_{33} = A_\varrho^2 A_{\varrho+3}$, also

$$A_\varrho^2 A_{\varrho+3} = -B_{13}^2 B_{22},$$

also sind B_{13} und B_{22} von Null verschieden. Nach der am Ende des § 3 gegebenen Regel ist daher die Signatur der Form gleich $\operatorname{sign}(B_{22}) = -\operatorname{sign}(A_{\varrho+3})$ und die der Form $A_\varrho \Sigma B_{\alpha\beta} Z_\alpha Z_\beta$ oder ihrer reciproken Form (1.) gleich $-\operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+3})$. Bei der Berechnung der Signatur der Form ξ ist also in der Formel (6.) § 3, wenn $A_{\varrho+1} = A_{\varrho+2} = 0$, aber A_ϱ und $A_{\varrho+3}$ von Null verschieden sind, die Summe der drei Glieder

$$(2.)\qquad \operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+1})+\operatorname{sign}(A_{\varrho+1}A_{\varrho+2})+\operatorname{sign}(A_{\varrho+2}A_{\varrho+3}),$$

die verschwinden, durch

$$(2.^*)\qquad -\operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+3})$$

zu ersetzen. Die Signatur hängt demnach auch dann noch von den Grössen (2.) § 2 allein ab, wenn in der Reihe derselben nie mehr als zwei auf einander folgende Null sind und A_r von Null verschieden ist.

Wenn aber drei auf einander folgende dieser Grössen verschwinden, so ist, wie ich jetzt an einem Beispiel zeigen will, durch jene Grössen allein die Signatur noch nicht bestimmt. Sei $n = 4$ und

$$\xi = a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{14}x_1x_4,$$

also $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$, dagegen sei a_{14} von Null verschieden und $a_{22}a_{33}-a_{23}^2 > 0$. Daher ist a_{22} von Null verschieden, kann aber positiv oder negativ sein. Betrachtet man die Variabeln in der Reihenfolge x_2, x_3, x_1, x_4, so hat man die vier Grössen

$$1, \quad a_{22}, \quad a_{22}a_{33}-a_{23}^2, \quad 0, \quad -a_{14}^2(a_{22}a_{33}-a_{23}^2)$$

zu berechnen, und mithin ist nach § 3 die Signatur $s = 2\,\mathrm{sign}(a_{22})$. Durch die Grössen $A_0 = 1$, $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ und die negative Grösse A_4 allein ist also s nicht bestimmt.

§ 5.

Es giebt specielle symmetrische Systeme, für die sich die Signatur von ξ aus den Grössen (2.) § 2 allein auch dann berechnen lässt, wenn beliebig viele derselben verschwinden. Dazu gehören besonders die Systeme, bei denen

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

nur von der Summe der Indices abhängt, und die ich *recurrirende* Systeme nennen will. Die Untersuchungen, die *Kronecker* darüber angestellt hat, lassen sich wesentlich vereinfachen durch Benutzung einer der von ihm selbst (Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, S. 821) entdeckten linearen Relationen zwischen den Subdeterminanten eines symmetrischen Systems, für die ich in § 11 (12.) einen einfachen Beweis angeben werde. Ist

$$a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ein beliebiges System, sind $\alpha\beta\ldots\vartheta$ irgend r der Indices $0, 1, \ldots, n-1$ und ebenso $\varkappa\lambda\ldots\tau$, so setze ich die Determinante $r$ten Grades

$$\Sigma \pm a_{\alpha\varkappa}a_{\beta\lambda}\ldots a_{\vartheta\tau} = \begin{pmatrix}\alpha\beta\ldots\vartheta\\ \varkappa\lambda\ldots\tau\end{pmatrix}.$$

Ist nun $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, so bestehen zwischen den Subdeterminanten $(\varrho+2)$-ten Grades gewisse lineare Relationen, von denen ich die folgende dreigliedrige gebrauche:

$$\begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1 & 0 & \varrho\\ 1\ldots\varrho-1 & \varrho+1 & \varrho+2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1 & \varrho & \varrho+1\\ 1\ldots\varrho-1 & 0 & \varrho+2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\ldots\varrho-1 & \varrho+1 & 0\\ 1\ldots\varrho-1 & \varrho & \varrho+2\end{pmatrix} = 0,$$

die man auch schreiben kann

$$\begin{pmatrix}0 & 1\ldots\varrho-2 & \varrho-1 & \varrho+1\\ 1 & 2\ldots\varrho-1 & \varrho & \varrho+2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\ldots\varrho-1 & \varrho & \varrho+1\\ 0 & 1\ldots\varrho-2 & \varrho-1 & \varrho-2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & 1\ldots\varrho-2 & \varrho-1 & \varrho\\ 1 & 2\ldots\varrho-1 & \varrho+1 & \varrho+2\end{pmatrix}.$$

Wendet man sie auf das System

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & x_0 & y_0 \\
a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{\varrho-1} & a_\varrho & x_1 & y_1 \\
a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_\varrho & a_{\varrho+1} & x_2 & y_2 \\
. & . & . & \dots & . & . & . & . \\
a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & a_\varrho & \dots & a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-2} & x_{\varrho-1} & y_{\varrho-1} \\
a_{\varrho-1} & a_\varrho & a_{\varrho+1} & \dots & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & x_\varrho & y_\varrho \\
x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{\varrho-1} & x_\varrho & 0 & z \\
y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{\varrho-1} & y_\varrho & z & 0
\end{array}$$

an, so erhält man die identische Gleichung

$$(1.)\quad \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-1} & y_0 \\ . & \dots & . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-2} & y_{\varrho-1} \\ x_1 & \dots & x_\varrho & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-1} & y_1 \\ . & \dots & . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-2} & y_\varrho \\ x_0 & \dots & x_{\varrho-1} & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-2} & x_0 & y_0 \\ . & \dots & . & & \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-3} & x_{\varrho-1} & y_{\varrho-1} \\ a_\varrho & \dots & a_{2\varrho-2} & x_\varrho & y_\varrho \end{vmatrix}.$$

Wegen der wichtigen Rolle, die sie in der folgenden Untersuchung spielt, will ich sie noch in folgender einfachen Weise verificiren: Die Differenz zwischen der linken und der rechten Seite ist eine homogene lineare Function der $\varrho+2$ Variabeln $x_0, x_1, \dots, x_{\varrho-1}, x_\varrho, z$, in der aber, wie leicht zu sehen, die Coefficienten von x_0, x_ϱ und z verschwinden. Sie hängt also höchstens von den $\varrho-1$ Variabeln

$$x_1,\quad x_2,\quad \dots,\quad x_{\varrho-1}$$

ab. Giebt man aber diesen die Werthe

$$a_{\alpha+1},\quad a_{\alpha+2},\quad \dots,\quad a_{\alpha+\varrho-1} \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, \varrho-2)$$

und zugleich den Grössen x_0, x_ϱ, z die Werthe a_α, $a_{\alpha+\varrho}$, $y_{\alpha+1}$, so verschwindet jede der drei Determinanten. Folglich ist jene lineare Function Null, falls die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_{\varrho-1} \\ . & \dots & . \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-3} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Daher muss die Gleichung (1.) identisch bestehen, auch wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

§ 6.

Aus den Coefficienten des recurrirenden Systems

$$(1.)\qquad a_{\alpha+\beta} \qquad\qquad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

bilde ich die Determinanten

$$(2.)\qquad A_\varrho = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\varrho-1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots & a_{2\varrho-2} \end{vmatrix}$$

und, indem ich zunächst ϱ als einen festen Index betrachte,

$$(3.)\qquad B_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\beta} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1+\beta} \\ a_{\varrho+\alpha} & \ldots & a_{2\varrho-1+\alpha} & a_{2\varrho+\alpha+\beta} \end{vmatrix}.$$

Ist A_ϱ von Null verschieden und verschwinden

$$(4.)\qquad B_{00},\ B_{01},\ \ldots,\ B_{0,\sigma-1},$$

so bilden die Grössen

$$(5.)\qquad B_{\alpha\beta} \qquad\qquad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ \sigma-1)$$

ein recurrirendes System; es ist also $B_{\alpha\beta} = 0$, wenn

$$\alpha+\beta < \sigma-1$$

ist, und es kann $B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta}$ gesetzt werden.

Nach dem Satze von *Kronecker* § 1 folgt aus der gemachten Voraussetzung, dass in dem System

$$\begin{matrix} a_0 & \ldots a_{\varrho-1} & a_\varrho & \ldots a_{\varrho+\sigma-2} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \ldots \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho+\sigma-3} \\ a_\varrho & \ldots a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho} & \ldots a_{2\varrho+\sigma-2} \end{matrix}$$

alle Determinanten $(\varrho+1)$-ten Grades verschwinden. Nun ist aber nach (1.) § 5

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} a_0 & \ldots a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\beta} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\beta-1} \\ a_{\varrho+\alpha+1} & \ldots a_{2\varrho+\alpha} & a_{2\varrho+\alpha+\beta+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \ldots a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\beta+1} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\beta} \\ a_{\varrho+\alpha} & \ldots a_{2\varrho+\alpha-1} & a_{2\varrho+\alpha+\beta+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \ldots a_{\varrho-2} & a_{\varrho+\alpha} & a_{\varrho+\beta} \\ \cdot & \ldots \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \ldots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho+\alpha-1} & a_{2\varrho+\beta-1} \\ a_\varrho & \ldots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\alpha} & a_{2\varrho+\beta} \end{vmatrix}.$$

Sind also α und β irgend zwei der Werthe 0, 1, ..., $\sigma-2$, so verschwindet die Determinante rechts, und folglich ist $B_{\alpha+1,\beta} = B_{\alpha,\beta+1}$. Mithin ist das System (5.) ein recurrirendes, also $B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta}$. Speciell verschwinden die Grössen $B_0 = B_{00}$, $B_1 = B_{01}$, ..., $B_{\sigma-2} = B_{0,\sigma-2}$. Für den Fall $\varrho = 0$, auf den die Formel (6.) nicht anwendbar ist, bedarf der Satz keines Beweises.

Die im Folgenden besonders wichtige Grösse $B_{\sigma-1}$ bezeichne ich auch mit

$$(7.)\qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\beta} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1+\beta} \\ a_{\varrho+\alpha} & \dots a_{2\varrho-1+\alpha} & a_{2\varrho+\alpha+\beta} \end{vmatrix}. \qquad (\alpha+\beta = \sigma-1)$$

§ 7.

Aus dem erhaltenen Resultate ergiebt sich sofort der Satz von *Kronecker* (Monatsber. der Berliner Akademie 1881, S. 584):

Ist A_ϱ von Null verschieden und verschwinden

$$(1.)\qquad B_{00},\quad B_{01},\quad \dots,\quad B_{0,\sigma-2},$$

so verschwinden auch

$$(2.)\qquad A_{\varrho+1},\quad A_{\varrho+2},\quad \dots,\quad A_{\varrho+\sigma-1}.$$

Verschwinden umgekehrt die Grössen (2.), *während A_ϱ von Null verschieden ist, so verschwinden auch die Grössen* (1.). *Ferner ist*

$$(3.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1} A_{\varrho+\sigma} = (-1)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} A^\sigma_{\varrho,\varrho+\sigma}.$$

Nach dem Satze von *Sylvester* ist

$$(4.)\qquad A_\varrho^{\lambda-1} A_{\varrho+\lambda} = \Sigma \pm B_{00} B_{11} \dots B_{\lambda-1,\lambda-1}.$$

Ist also $B_{00} = B_{01} = \dots = B_{0,\lambda-1} = 0$, so ist auch $A_{\varrho+\lambda} = 0$. Wenn die Grössen (1.) verschwinden, so bilden die Grössen

$$(5.)\qquad B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, \sigma-1)$$

ein recurrirendes System, und da $B_{\alpha\beta} = 0$ ist, wenn $\alpha+\beta < \sigma-1$ ist, so ist

$$\Sigma \pm B_{00} \dots B_{\sigma-1,\sigma-1} = (-1)^{\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}} B^\sigma_{\sigma-1}.$$

Umgekehrt ist $A_{\varrho+1} = B_{00}$, also wenn $A_{\varrho+1} = 0$ ist, auch $B_{00} = 0$. Nach (4.) ist daher $A_\varrho A_{\varrho+2} = -B_{01}^2$, also wenn $A_{\varrho+2} = 0$ ist, auch $B_{01} = 0$.

Folglich ist nach § 6 $B_{02} = B_{11} = B_{20} = B_2$, demnach $A_\varrho^2 A_{\varrho+3} = -B_2^3$, also wenn $A_{\varrho+3} = 0$ ist, auch $B_{02} = 0$. Folglich ist $B_{03} = B_{12} = B_3$, demnach $A_\varrho^3 A_{\varrho+4} = B_3^4$, also wenn $A_{\varrho+3} = 0$ ist, auch $B_{03} = 0$ u. s. w.

Wenn daher A_ϱ von Null verschieden ist, aber die Determinanten (2.) verschwinden, so bilden die Grössen (5.) ein recurrirendes System, in welchem $B_0 = B_1 = \cdots = B_{\sigma-2} = 0$ ist.

§ 8.

Eine besonders merkwürdige Folgerung lässt sich aus diesem Satze ziehen für den Fall, dass das System

$$(1.)\qquad a_{\alpha+\beta} \qquad\qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots)$$

unbegrenzt, aber nur von endlichem Range r ist. Ist $r > 0$, so können die Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ nicht alle verschwinden. Ist

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{\lambda-2} = 0,$$

aber $a_{\lambda-1}$ von Null verschieden, so ist $A_\lambda = \pm a_{\lambda-1}^\lambda$. Daher sind die Determinanten $A_1, A_2, \ldots$, nicht sämmtlich Null. Da aber stets $A_\sigma = 0$ ist, wenn $\sigma > r$ ist, so giebt es einen grössten Werth $\varrho (\leqq r)$, für den A_ϱ von Null verschieden ist. Dann sind $A_{\varrho+1}, A_{\varrho+2}, \ldots$ alle Null, und mithin nach dem obigen Satze auch alle Determinanten $B_{\alpha\beta}$. Nach dem Satze von *Kronecker* verschwinden daher in dem System (1.) alle Determinanten $(\varrho+1)$-ten Grades, und da A_ϱ von Null verschieden ist, so ist ϱ gleich dem Range r des Systems.

Ist r der Rang eines unbegrenzten recurrirenden Systems, so ist A_r von Null verschieden.

Dieser interessante Satz von *Kronecker* (Monatsberichte der Berliner Akademie 1881, S. 560) gilt aber nur für unbegrenzte Systeme. Ist das System

$$(2.)\qquad a_{\alpha+\beta} \qquad\qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$$

begrenzt (vom Grade n), so kann, wie das einfachste Beispiel

$$n = 2, \quad a_0 = a_1 = 0, \quad r = 1$$

zeigt, $A_r = 0$ sein, oder wenn wieder ϱ der grösste Werth ist, für den A_ϱ von Null verschieden ist, so kann $r - \varrho = \sigma > 0$ sein. In diesem Falle ist nun, wie ich jetzt zeigen will, stets die Determinante $r$ten Grades

$$(3.)\qquad A'_r = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & a_{n-\sigma} & \dots a_{n-1} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & a_{n-\sigma+\varrho-1} & \dots a_{n+\varrho-2} \\ a_{n-\sigma} & \dots a_{n-\sigma+\varrho-1} & a_{2n-2\sigma} & \dots a_{2n-\sigma-1} \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ a_{n-1} & \dots a_{n+\varrho-2} & a_{2n-\sigma-1} & \dots a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

welche aus den ersten ϱ und den letzten σ Zeilen und Spalten des recurrirenden Systems gebildet ist, von Null verschieden.

Ich betrachte zuerst den speciellen Fall $\varrho = 0$. Dann ist $A_1 = a_0 = 0$, also $A_2 = -a_1^2 = 0$, also $A_3 = -a_2^3 = 0$ u. s. w., demnach

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0.$$

Folglich ist die aus den letzten $n-1$ Zeilen und Spalten gebildete Determinante gleich $\pm a_n^{n-1}$. Da $A_n = 0$ ist, so ist der Rang $r < n$. Ist also a_n von Null verschieden, so ist $r = n-1$, und umgekehrt; ist aber $r < n-1$, so ist $a_n = 0$. Folglich ist die aus den letzten $n-2$ Zeilen und Spalten gebildete Determinante gleich $\pm a_{n+1}^{n-2}$. Ist also a_{n+1} von Null verschieden, so ist $r = n-2$, und umgekehrt; ist aber $r < n-2$, so ist $a_{n+1} = 0$, u. s. w. Daher ist die aus den letzten r Zeilen und Spalten gebildete Determinante von Null verschieden und gleich $\pm a_{2n-r-1}^r$, während $a_0, a_1, \dots, a_{2n-r-2}$ verschwinden.

Im allgemeinen Falle betrachte ich die quadratische Form

$$(4.)\qquad \xi = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-1} a_{\alpha+\beta} x_\alpha x_\beta$$

der Variabeln $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ und setze

$$(5.)\qquad \xi_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha+\beta} x_\beta.$$

Dann ist nach (2.) § 3

$$(6.)\qquad A_\varrho \xi = \eta^{(\varrho)} + \zeta^{(\varrho)} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & \xi_0 \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & \xi_{\varrho-1} \\ \xi_0 & \dots \xi_{\varrho-1} & \xi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & \xi_0 \\ \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & \xi_{\varrho-1} \\ \xi_0 & \dots \xi_{\varrho-1} & 0 \end{vmatrix},$$

und nach dem in § 1 entwickelten Satze ist der Rang der Form

$$(7.)\qquad \eta^{(\varrho)} = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-\varrho-1} B_{\alpha\beta} x_{\varrho+\alpha} x_{\varrho+\beta}$$

gleich $r-\varrho = \sigma$. Da ferner A_ϱ von Null verschieden ist und $A_{\varrho+1}, \dots, A_n$

verschwinden, so ist $B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta}$ und $B_0 = B_1 = \cdots = B_{n-\varrho-1} = 0$. Aus dem oben behandelten Falle ergiebt sich daher, dass auch $B_{n-\varrho} = \cdots = B_{2n-r-\varrho-2} = 0$, aber $B_{2n-r-\varrho-1} = A'_{\varrho r}$ von Null verschieden ist. Nun ist aber nach dem Satze von *Sylvester*

$$(8.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1} A'_r = \begin{vmatrix} B_{2n-2r} & \dots B_{2n-r-\varrho-1} \\ \cdot & \cdots\cdot \\ B_{2n-r-\varrho-1} \dots & B_{2n-2\varrho-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A'^{\sigma}_{\varrho r},$$

und mithin ist A'_r von Null verschieden.

Ebenso ist auch die Signatur der Form $A_\varrho \xi$ gleich der Summe der Signaturen der beiden quadratischen Formen von $\xi_0 \dots \xi_{\varrho-1}$ und von $x_\varrho, \dots, x_{n-1}$, in welche sie nach (6.) zerlegt werden kann. Da $B_{\alpha\beta} = 0$ ist, wenn $\alpha+\beta < 2n-r-\varrho-1$ ist, so hängt die Form (7.) nur von den Variabeln $x_{n-\sigma}, \dots, x_{n-1}$ ab und ist als solche von der speciellen Art, die ich am Ende des § 3 betrachtet habe. Ihre Signatur ist also, wenn σ gerade ist, Null, wenn σ ungerade ist, $(-1)^{\frac{1}{2}(\sigma-1)}\operatorname{sign}(A'_r)$. Die Signatur von ξ wird demnach erhalten, indem man die Signatur der Form $\frac{\xi^{(\varrho)}}{A_\varrho}$ um 0 oder

$$(9.)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}(r-\varrho-1)}\operatorname{sign}(A_\varrho A'_r)$$

vermehrt, je nachdem $r-\varrho$ gerade oder ungerade ist. Jene Form der Variabeln $\xi_0, \dots, \xi_{\varrho-1}$ ist aber die reciproke der Form $\sum_{\alpha,\beta}{}_0^{\varrho-1} a_{\alpha+\beta} x_\alpha x_\beta$, und ich werde nun zeigen, wie man die Signatur einer solchen Form, deren Determinante nicht verschwindet, berechnen kann.

Um die ursprünglichen Bezeichnungen anwenden zu können, betrachte ich allgemeiner eine Form (4.) vom Range r, für welche A_r von Null verschieden ist. Sei wieder ϱ ein fester Index und

$$z_\alpha = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & \xi_0 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & \xi_{\varrho-1} \\ a_{\varrho+\alpha} & \dots a_{2\varrho+\alpha-1} & \xi_{\varrho+\alpha} \end{vmatrix}.$$

Dann ist nach dem Satze von *Sylvester*

$$(10.)\qquad A_\varrho^\sigma \eta^{(\varrho+\sigma)} = \begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\sigma-1} & z_0 \\ \cdot & \cdots\cdot & \\ B_{\sigma-1,0} & \dots B_{\sigma-1,\sigma-1} & z_{\sigma-1} \\ z_0 & \dots z_{\sigma-1} & \eta^{(\varrho)} \end{vmatrix}$$

und

(11.) $$A_\varrho^{\sigma-1} A_{\varrho+\sigma} = \Sigma \pm B_{00} \dots B_{\sigma-1,\sigma-1}$$

und folglich

(12.) $$\frac{\eta^{(\varrho)}}{A_\varrho} - \frac{\eta^{(\varrho+\sigma)}}{A_{\varrho+\sigma}} = -\frac{1}{A_\varrho} \begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\sigma-1} & z_0 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ B_{\sigma-1,0} & \dots B_{\sigma-1,\sigma-1} & z_{\sigma-1} \\ z_0 & \dots z_{\sigma-1} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\sigma-1} \\ \cdot & \dots\cdot \\ B_{\sigma-1,0} & \dots B_{\sigma-1,\sigma-1} \end{vmatrix}.$$

Die Signatur dieser Form der Variabeln $z_0, \dots, z_{\sigma-1}$ ist gleich der Signatur der reciproken Form $A_\varrho \sum_{\alpha,\beta}^{\sigma-1} {}_0 B_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta$. Nun setze ich voraus, dass $A_{\varrho+1}, \dots, A_{\varrho+\sigma-1}$ verschwinden, während A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden sind. Dann ist $B_{\alpha\beta} = 0$, wenn $\alpha+\beta < \sigma-1$ ist. Daher ist nach (9.) § 3 die Signatur der Form, wenn σ gerade ist, Null, wenn aber σ ungerade ist,

(13.) $$(-1)^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} \operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho+\sigma}) = \operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho,\varrho+\sigma}).$$

Denn die Determinante der Form ist nach (11.) gleich $A_\varrho^{2\sigma-1} A_{\varrho+\sigma}$, und es ist

(14.) $$A_\varrho^{\sigma-1} A_{\varrho+\sigma} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A_{\varrho,\varrho+\sigma}^\sigma,$$

wo

(15.) $$A_{\varrho,\varrho+\sigma} = B_{\sigma-1} = B_{0,\sigma-1} = B_{1,\sigma-2} = \dots = B_{\sigma-1,0}$$

auf verschiedene Arten in Determinantenform dargestellt werden kann, unter andern auch, wenn σ ungerade ist, als Hauptunterdeterminante $B_{\frac{\sigma-1}{2},\frac{\sigma-1}{2}}$.

Zur Berechnung der Signatur einer beliebigen recurrirenden Form (4.) ergiebt sich aus diesen Entwickelungen in Verbindung mit denen des § 3 die folgende Regel: Unter den Determinanten (2.) § 2 seien

(16.) $$A_0 \quad A_\alpha \quad A_\beta \quad A_\gamma \quad \dots \quad A_\varkappa \quad A_\lambda \quad \dots \quad A_\nu \quad A_\varrho \qquad (0 < \alpha < \beta \dots < \varrho)$$

von Null verschieden. Ist $\varrho < r$, so füge man dazu noch die Determinante A'_r. Unter den Differenzen der Indices $\alpha, \beta-\alpha, \gamma-\beta, \dots, r-\varrho$ behalte man nur die bei, welche ungerade sind. Ist $\lambda-\varkappa$ ungerade, so berechne man das Vorzeichen $(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa-1)} \operatorname{sign}(A_\varkappa A_\lambda)$, ist $r-\varrho$ ungerade, das Vorzeichen $(-1)^{\frac{1}{2}(r-\varrho-1)} \operatorname{sign}(A_\varrho A'_r)$. Dann ist die Signatur der Form ξ gleich der Summe dieser Vorzeichen

(17.) $$s = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa-1)} \operatorname{sign}(A_\varkappa A_\lambda) = \Sigma \operatorname{sign}(A_\varkappa A_{\varkappa\lambda}). \qquad (\lambda-\varkappa \text{ ungerade})$$

Nach der Formel

$$(18.)\qquad A_{\varkappa}^{\lambda-\varkappa-1}A_{\lambda} = (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa)(\lambda-\varkappa-1)}A_{\varkappa\lambda}^{\lambda-\varkappa},$$

an deren Stelle für $\lambda = r$ die Formel (8.) tritt, ist aber

$$(19.)\quad \mathrm{sign}(A_{\lambda}) = (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa-1)}\mathrm{sign}(A_{\varkappa\lambda}) \quad \text{oder} \quad \mathrm{sign}(A_{\lambda}) = (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-\varkappa)}\mathrm{sign}(A_{\varkappa}),$$

je nachdem $\lambda-\varkappa$ ungerade oder gerade ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln ergiebt sich

$$(20.)\qquad s = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(\xi-\varkappa-1)}\mathrm{sign}(A_{\varkappa\lambda}A_{\xi\eta}) = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(\eta-\lambda-1)}\mathrm{sign}(A_{\lambda}A_{\eta}),$$

wenn in der Reihe der Indices

$$(21.)\qquad 0\,\alpha\,\beta\dots\varkappa\,\lambda\dots\xi\,\eta\dots\varrho\,r$$

die Differenzen $\lambda-\varkappa$ und $\eta-\xi$ ungerade, die Differenzen der zwischen λ und ξ liegenden Indices aber gerade sind. Da in den Formeln (17.) und (20.) $\lambda-\varkappa$ ungerade ist, so kann für $A_{\varkappa\lambda}$ die Hauptunterdeterminante

$$(22.)\qquad A_{\varkappa\lambda} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varkappa-1} & a_{\frac{1}{2}(\varkappa+\lambda-1)} \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\varkappa-1} & \dots a_{2\varkappa-2} & a_{\frac{1}{2}(3\varkappa+\lambda-3)} \\ a_{\frac{1}{2}(\varkappa+\lambda-1)} & \dots a_{\frac{1}{2}(3\varkappa+\lambda-3)} & a_{\varkappa+\lambda-1} \end{vmatrix}$$

gesetzt werden.

§ 9.

Um zu dem *Sturm*schen Satze zu gelangen, ist eine recurrirende Form

$$(1.)\qquad \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-1} f_{\alpha+\beta}x_{\alpha}x_{\beta}$$

zu betrachten, deren Coefficienten

$$(2.)\qquad f_{\lambda} = a_{\lambda}x - a_{\lambda+1} \qquad (\lambda = 0, 1, \dots, 2n-2)$$

lineare Functionen einer Variabeln x mit constanten Coefficienten sind. Ist die Signatur der Form für einen bestimmten Werth von x gleich s und für einen andern Werth x' gleich s', so handelt es sich um die Berechnung der Differenz

$$(3.)\qquad s'-s = \Delta s.$$

Da in den Anwendungen das System

$$(4.)\qquad \begin{cases} a_0 \dots a_{n-1} \\ \cdot \quad \cdots \\ a_n \dots a_{2n-1} \end{cases}$$

ein Theil eines unbegrenzten recurrirenden Systems ist, dessen Rang $r \leqq n$ ist, so nehme ich an, dass A_r von Null verschieden ist, wenn r der Rang des Systems (4.) ist. Die der Determinante (2.) § 6 analoge Determinante

$$(5.)\qquad F_\varrho = \begin{vmatrix} f_0 & \dots f_{\varrho-1} \\ \cdot & \cdots \\ f_{\varrho-1} & \dots f_{2\varrho-2} \end{vmatrix}$$

kann auf die Form

$$(6.)\qquad F_\varrho(x) = \begin{vmatrix} a_0 \dots a_{\varrho-1} & 1 \\ \cdot \quad \cdots & \cdot \\ a_\varrho \dots a_{2\varrho-1} & x^\varrho \end{vmatrix}$$

gebracht werden, ist also eine ganze Function ϱten Grades von x, worin der Coefficient von x^ϱ gleich A_ϱ ist. Ist F_ϱ identisch Null, so verschwindet daher A_ϱ, aber auch $A_{\varrho+1}$, weil die Coefficienten von F_ϱ die zu den Elementen der letzten Spalte von $A_{\varrho+1}$ gehörigen Unterdeterminanten sind. Ist also A_ϱ von Null verschieden, so verschwindet weder F_ϱ noch $F_{\varrho-1}$ identisch. Wendet man den Satz von *Sylvester* auf die Determinante

$$F_{\varrho+\lambda} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & a_\varrho & \dots a_{\varrho+\lambda-1} & 1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & \dots a_{2\varrho+\lambda-2} & x^{\varrho-1} \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho} & \dots a_{2\varrho+\lambda-1} & x^\varrho \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho+\lambda} & \dots a_{2\varrho+\lambda-1} & a_{2\varrho+\lambda} & \dots a_{2\varrho+2\lambda-1} & x^{\varrho+\lambda} \end{vmatrix}$$

an, so erhält man

$$(7.)\qquad A_\varrho^\lambda F_{\varrho+\lambda} = \begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\lambda-1} & G_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ B_{\lambda-1,0} & \dots B_{\lambda-1,\lambda-1} & G_{\lambda-1} \\ B_{\lambda,0} & \dots B_{\lambda,\lambda-1} & G_\lambda \end{vmatrix},$$

wo

$$(8.)\qquad G_\lambda = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & 1 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & x^{\varrho-1} \\ a_{\varrho+\lambda} & \dots a_{2\varrho+\lambda-1} & x^{\varrho+\lambda} \end{vmatrix}$$

ist. Nun sei $A_{\varrho+1} = \cdots = A_{\varrho+\sigma-1} = 0$, A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden. Dann ist

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, \sigma-1)$$

und $B_{\alpha\beta} = 0$, wenn $\alpha+\beta < \sigma-1$ ist. Daher ist identisch

$$(9.) \qquad F_{\varrho+1} = \cdots = F_{\varrho+\sigma-2} = 0,$$

aber, weil $B_{\sigma-1} = A_{\varrho,\varrho+\sigma}$ und $G_0 = F_\varrho$ ist,

$$A_\varrho^{\sigma-1} F_{\varrho+\sigma-1} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A_{\varrho,\varrho+\sigma}^{\sigma-1} F_\varrho$$

oder nach (14.) § 7 [vgl. *Kronecker,* Monatsberichte der Berliner Akademie 1878, S. 99 (D.)]

$$(10.) \qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_{\varrho+\sigma-1} = A_{\varrho+\sigma} F_\varrho.$$

Ich schliesse zunächst solche Werthe der Variabeln x aus, für welche eine der Functionen F_ϱ, $F_{\varrho+\sigma}$, die nicht identisch verschwinden, den Werth Null hat. Ist dann $\sigma-1$ gerade (oder Null), so liefert der Uebergang von F_ϱ zu $F_{\varrho+\sigma-1}$ keinen Beitrag zur Signatur, ist aber $\sigma-1$ ungerade, nach (13.) § 7 den Beitrag

$$(11.) \quad -(-1)^{\frac{1}{2}\sigma}\operatorname{sign}(F_\varrho F_{\varrho+\sigma-1}) = -(-1)^{\frac{1}{2}\sigma}\operatorname{sign}(A_{\varrho+\sigma} A_{\varrho,\varrho+\sigma}) = -\operatorname{sign}(A_\varrho A_{\varrho,\varrho+\sigma}).$$

Da aber dies Vorzeichen von x unabhängig ist, so hebt sich dies Glied in der Differenz (3.).

Dagegen liefert der Uebergang von $F_{\varrho+\sigma-1}$ zu $F_{\varrho+\sigma}$ den Beitrag

$$(12.) \qquad \operatorname{sign}(F_{\varrho+\sigma-1} F_{\varrho+\sigma}) = \operatorname{sign}(A_{\varrho+\sigma} A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_\varrho F_{\varrho+\sigma}).$$

Daher ist $\varDelta s$ gleich der Aenderung, die der Ausdruck

$$(13.) \qquad \Sigma \operatorname{sign}(F_{\lambda-1} F_\lambda) = \Sigma \operatorname{sign}(A_\lambda A_{\varkappa\lambda} F_\varkappa F_\lambda)$$

beim Uebergange von x zu x' erfährt. Dem Summationsbuchstaben λ sind links nur die Werthe zu ertheilen, für die A_λ $(\lambda > 0)$ von Null verschieden ist. Da aber für die anderen Werthe $F_{\lambda-1}F_\lambda$ verschwindet oder, falls $A_\lambda = 0$, $A_{\lambda-1}$ und $A_{\lambda+1}$ von Null verschieden ist, ein Quadrat ist [*Kronecker,* a. a. O. S. 100 (F')], so kann λ auch alle Werthe von 1 bis $n-1$ durchlaufen. Für die Signatur s selbst ergiebt sich aus der obigen Entwickelung die Formel

$$(14.) \qquad s+h = \Sigma \operatorname{sign}(F_{\lambda-1} F_\lambda),$$

wo die Summe nur über die oben definirten Werthe von λ zu erstrecken ist, und die Constante h den Werth

$$(15.)\qquad h = \Sigma \operatorname{sign}(A_\varkappa A_{\varkappa\lambda}) \qquad (\lambda-\varkappa \text{ gerade})$$

hat.

Ist speciell $x' = +\infty$ und $x = -\infty$, so hat $\operatorname{sign}(F_{\lambda-1}F_\lambda)$ für diese beiden Grenzwerthe gleiche Werthe, wenn der Grad von $F_{\lambda-1}F_\lambda$ gerade ist, aber entgegengesetzte, wenn er ungerade ist. Sind nun $A_\varkappa$ und A_λ $(\lambda > \varkappa)$ von Null verschieden, während $A_{\varkappa+1} \dots A_{\lambda-1}$ verschwinden, so ist

$$(10^*.)\qquad A_{\varkappa\lambda} F_{\lambda-1} = A_\lambda F_\varkappa .$$

Daher ist der Grad von $F_{\lambda-1}F_\lambda$ gleich $\varkappa+\lambda$, und wenn $\varkappa+\lambda$ ungerade ist, so hat der Coefficient von $x^{\varkappa+\lambda}$ dasselbe Vorzeichen wie $A_\varkappa A_{\varkappa\lambda}$.

Folglich ist für diesen Fall

$$(16.)\qquad \frac{1}{2}\Delta s = \Sigma \operatorname{sign}(A_\varkappa A_{\varkappa\lambda}) \qquad (\lambda-\varkappa \text{ ungerade})$$

ausgedehnt über die Glieder der Reihe

$$A_0 \quad A_\alpha \quad A_\beta \dots A_\varkappa \quad A_\lambda \dots A_r,$$

für welche $\lambda-\varkappa$ ungerade ist. Dieselbe Regel ergiebt sich direct aus dem in § 7 erhaltenen Resultate, nach welchem die rechte Seite der Gleichung (16.) gleich $s' = -s$ ist.

§ 10.

Die Formel (13.) § 9 bleibt auch gültig, wenn x oder x' Werthe annehmen, für die eine der Functionen F_λ den Werth Null hat. Um dies zu beweisen, brauche ich die zwischen den Functionen F_λ bestehenden linearen Relationen. Nach Formel (1.) § 5 ist

$$\begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-1} & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-2} & x^{\varrho-1} \\ a_{\varrho+1} & \dots & a_{2\varrho} & x^{\varrho+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-1} & x \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots & a_{2\varrho-2} & x^\varrho \\ a_\varrho & \dots & a_{2\varrho-1} & x^{\varrho+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{\varrho-2} & a_\varrho & 1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\varrho & \dots & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho} & x^\varrho \end{vmatrix},$$

also wenn man die erste dieser Determinanten mit F'_ϱ bezeichnet $(F'_0 = x)$ und die letzte mit H_ϱ $(H_0 = 0,\ H_1 = a_1 x - a_2)$:

$$(1.)\qquad F'_\varrho - xF_\varrho = H_\varrho .$$

In dem System

$$\begin{matrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & a_\varrho & 1 & 0 \\ . & \dots . & . & . & . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & x^{\varrho-1} & 0 \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho} & x^\varrho & 1 \end{matrix}$$

von $\varrho+1$ Zeilen und von $\varrho+3$ Spalten bezeichne ich die aus den $\varrho+1$ Spalten $0, \dots, \varrho-2, \alpha, \beta$ gebildete Determinante $(\varrho+1)$-ten Grades mit (α, β). Dann ist nach einem bekannten Satze

$$(2.)\quad (\varrho-1, \varrho)(\varrho+1, \varrho+2)+(\varrho-1, \varrho+1)(\varrho+2, \varrho)+(\varrho-1, \varrho+2)(\varrho, \varrho+1) = 0,$$

also

$$(3.)\qquad A_{\varrho+1}F_{\varrho-1}-A'_\varrho F_\varrho+A_\varrho H_\varrho = 0,$$

falls man

$$A'_\varrho = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_\varrho \\ . & \dots . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-1} \end{vmatrix}$$

$(A'_1 = a_1)$ setzt.

Endlich ist nach dem Determinantensatze (1.) § 2

$$(4.)\qquad A_\varrho F_{\varrho+1} = A_{\varrho+1}F'_\varrho - A'_{\varrho+1}F_\varrho.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen F'_ϱ und H_ϱ, so erhält man die Recursionsformel

$$(5.)\qquad A^2_\varrho F_{\varrho+1}+(A_\varrho A'_{\varrho+1}-A_{\varrho+1}A'_\varrho-xA_\varrho A_{\varrho+1})F_\varrho+A^2_{\varrho+1}F_{\varrho-1} = 0.$$

Dieselbe ist von *Jacobi* (De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis, Ges. Werke Bd. 3, S. 319) gefunden und von *Joachimsthal* (dieses Journal Bd. 48 S. 397) und *Hattendorf* (Die *Sturm*schen Functionen § 11) auf anderem Wege bewiesen, hier aber zum ersten Male nur aus Identitäten zwischen Determinanten hergeleitet worden.

Die Formel lässt sich auf folgende Art verallgemeinern: Sei wieder $A_{\varrho+1} = \dots = A_{\varrho+\sigma-1} = 0$, A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden. Nach Formel (1.) § 5 ist

$$G_\lambda - xG_{\lambda-1} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & 1 \\ . & \dots . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & x^{\varrho-1} \\ a_{\varrho+\lambda} & \dots a_{2\varrho+\lambda-1} & x^{\varrho+\lambda} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & x \\ . & \dots . & . \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & x^\varrho \\ a_{\varrho+\lambda-1} & \dots a_{2\varrho+\lambda-2} & x^{\varrho+\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho+\lambda-1} & 1 \\ . \dots . & . & . \\ . \dots . & . & . \\ a_\varrho \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\lambda-1} & x^\varrho \end{vmatrix}.$$

Wendet man ferner die Relation (2.) auf das System

$$\begin{matrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & a_{\varrho+\lambda-1} & 1 & 0 \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho+\lambda-2} & x^{\varrho-1} & 0 \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho+\lambda-1} & x^\varrho & 1 \end{matrix}$$

an, so ergiebt sich

$$(6.)\qquad B_{0,\lambda-1}F_{\varrho-1}-C_\lambda F_\varrho+A_\varrho(G_\lambda-xG_{\lambda-1}) = 0,$$

wo

$$(7.)\qquad C_\lambda = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho+\lambda-1} \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho+\lambda-2} \end{vmatrix},$$

also $C_0 = A_\varrho$ ist.

Endlich ist nach (7.) § 9

$$A_\varrho^\sigma F_{\varrho+\sigma} = \begin{vmatrix} B_0 & \dots B_{\sigma-1} & G_0 \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ B_{\sigma-1} & \dots B_{2\sigma-2} & G_{\sigma-1} \\ B_{\sigma,0} & \dots B_{\sigma,\sigma-1} & G_\sigma \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die letzte Spalte mit $A_\varrho = C_0$ und zieht dann von jeder Zeile, von der letzten angefangen, die vorhergehende, mit x multiplicirt, ab, so erhält man

$$A_\varrho^{\sigma+1}F_{\varrho+\sigma} = \begin{vmatrix} B_0 & \dots B_{\sigma-1} & C_0F_\varrho \\ B_1-xB_0 & \dots B_\sigma-xB_{\sigma-1} & C_1F_\varrho-B_0F_{\varrho-1} \\ \cdot & \cdots & \vdots \\ B_{\sigma-1}-xB_{\sigma-2} & \dots B_{2\sigma-2}-xB_{2\sigma-3} & C_{\sigma-1}F_\varrho-B_{\sigma-2}F_{\varrho-1} \\ B_{\sigma,0}-xB_{\sigma-1} & \dots B_{\sigma,\sigma-1}-xB_{2\sigma-2} & C_\sigma F_\varrho-B_{\sigma-1}F_{\varrho-1} \end{vmatrix}$$

$$= F_\varrho \begin{vmatrix} B_0 & \dots B_{\sigma-1} & C_0 \\ B_1-xB_0 & \dots B_\sigma-xB_{\sigma-1} & C_1 \\ \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ B_{\sigma-1}-xB_{\sigma-2} & \dots B_{2\sigma-2}-xB_{2\sigma-3} & C_{\sigma-1} \\ B_{\sigma,0}-xB_{\sigma-1} & \dots B_{\sigma,\sigma-1}-xB_{2\sigma-2} & C_\sigma \end{vmatrix} - F_{\varrho-1}(-1)^\sigma \begin{vmatrix} 0 & B_0 & \dots B_{\sigma-1} \\ B_0 & B_1-xB_0 & \dots B_\sigma-xB_{\sigma-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ B_{\sigma-2} & B_{\sigma-1}-xB_{\sigma-2} & \dots B_{2\sigma-2}-xB_{2\sigma-3} \\ B_{\sigma-1} & B_{\sigma,0}-xB_{\sigma-1} & \dots B_{\sigma,\sigma-1}-xB_{2\sigma-2} \end{vmatrix}$$

Da aber $B_0 = B_1 = \cdots = B_{\sigma-2} = 0$ ist, so ist der Coefficient von $-F_{\varrho-1}$ gleich

$$(-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)}B_{\sigma-1}^{\sigma+1} = A_\varrho^{\sigma-1}A_{\varrho+\sigma}B_{\sigma-1},$$

also von der Variabeln x unabhängig. Bezeichnet man den Factor von

F_ϱ mit $A_\varrho^{\sigma-1} Q_{\varrho+\sigma,\varrho}$, so ist demnach

$$(8.)\qquad A_\varrho^2 F_{\varrho+\sigma} = Q_{\varrho+\sigma,\varrho} F_\varrho - A_{\varrho+\sigma} A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_{\varrho-1}.$$

Abgesehen von einem constanten Factor ist also $F_{\varrho-1}$ der Rest der Division von $F_{\varrho+\sigma}$ durch F_ϱ. Für den mit Q bezeichneten Quotienten erhält man durch einfache Umformungen den Ausdruck

$$(9.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1} Q_{\varrho+\sigma,\varrho} = \begin{vmatrix} B_0 & \dots B_{\sigma-1} & C_0 \\ B_1 & \dots B_\sigma & C_1 + C_0 x \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ B_{\sigma-1} & \dots B_{2\sigma-2} & C_{\sigma-1} + C_{\sigma-2} x + \dots + C_0 x^{\sigma-1} \\ B_{\sigma,0} & \dots B_{\sigma,\sigma-1} & C_\sigma \;\; + C_{\sigma-1} x + \dots + C_1 x^{\sigma-1} + C_0 x^\sigma \end{vmatrix}.$$

Nach dem Satze von *Sylvester* ist daher, weil $C_0 = A_\varrho$ ist,

$$(10.)\qquad Q_{\varrho+\sigma,\varrho} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & a_\varrho & \dots a_{\varrho+\sigma-1} & 0 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & \dots a_{2\varrho+\sigma-2} & 0 \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-1} & a_{2\varrho} & \dots a_{2\varrho+\sigma-1} & C_0 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho+\sigma} & \dots a_{2\varrho+\sigma-1} & a_{2\varrho+\sigma} & \dots a_{2\varrho+2\sigma-1} & C_\sigma + C_{\sigma-1} x + \cdots C_0 x^\sigma \end{vmatrix}.$$

Ersetzt man in der Formel (8.) ϱ und $\varrho+\sigma$ durch λ und μ, so lautet sie

$$(8^*.)\qquad A_\lambda^2 F_\mu - Q_{\mu,\lambda} F_\lambda + A_\mu A_{\lambda\mu} F_{\lambda-1} = 0,$$

wo $Q_{\mu,\lambda}$ eine ganze Function vom Grade $\mu-\lambda$ ist. In der Reihe der Grössen (2.) § 6 seien $A_\varkappa$, A_λ, $A_\mu (\varkappa < \lambda < \mu)$ von Null verschieden, während die zwischen ihnen liegenden Determinanten A_ϱ verschwinden. Dann geht diese Recursionsformel nach (10*.) § 9 über in

$$(11.)\qquad A_\lambda^2 F_\mu - Q_{\mu,\lambda} F_\lambda + \frac{A_\lambda A_\mu A_{\lambda\mu}}{A_{\varkappa\lambda}} F_\varkappa = 0,$$

und es ist nach (18.) § 7

$$(12.)\qquad A_\lambda^{\mu-\lambda-1} A_\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)(\mu-\lambda-1)} A_{\lambda\mu}^{\mu-\lambda}.$$

Sind in der Reihe der Grössen $A_0\ A_1\ A_2 \dots$ nur die Determinanten

$$(13.)\qquad A_0\quad A_\alpha\quad A_\beta\ \dots\ A_\varkappa\quad A_\lambda\quad A_\mu\ \dots\ A_r$$

von Null verschieden, so können von den Functionen

$$(14.)\qquad F_0\quad F_\alpha\quad F_\beta\ \dots\ F_\varkappa\quad F_\lambda\quad F_\mu\ \dots\ F_r$$

nicht zwei auf einander folgende für denselben Werth von x verschwinden, weil sonst nach (11.) auch F_0 $(=1)$ für diesen Werth verschwände. (Derselbe Satz wird in § 11 durch directe Berechnung der Resultante von F_λ und F_μ bewiesen.)

Bezeichnet man jetzt wieder mit A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ zwei auf einander folgende Glieder der Reihe (13.), so liefern die Determinanten $F_{\varrho-1}$, F_ϱ, $F_{\varrho+\sigma-1}$, $F_{\varrho+\sigma}$ für die Signatur s den Beitrag

$$(15.)\qquad \operatorname{sign}(F_{\varrho-1}F_\varrho)+\operatorname{sign}(F_{\varrho+\sigma-1}F_{\varrho+\sigma}),$$

und dazu kommt noch, falls $\sigma-1$ ungerade ist, das Glied

$$(16.)\qquad -(-1)^{\frac{1}{2}\sigma}\operatorname{sign}(A_{\varrho+\sigma}A_{\varrho,\varrho+\sigma}),$$

das sich in der Differenz $s'-s$ aufhebt. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass für den betrachteten Werth von x keine jener Functionen den Werth Null hat. Ist aber $F_\varrho=0$, also auch $F_{\varrho+\sigma-1}=0$, so sind $F_{\varrho-1}$ und $F_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden, und diese beiden auf einander folgenden Determinanten liefern dann nach (13.) § 7 zur Signatur den Beitrag Null oder

$$(-1)^{\frac{1}{2}\sigma}\operatorname{sign}(F_{\varrho-1}F_{\varrho+\sigma}),$$

je nachdem σ ungerade oder gerade ist. Nach Formel (8.) ist aber, weil $F_\varrho=0$ ist, $A_\varrho^2F_{\varrho+\sigma}=-A_{\varrho+\sigma}A_{\varrho,\varrho+\sigma}F_{\varrho-1}$, und mithin ist jenes Vorzeichen gleich (16.). Demnach bleibt die Formel (13.) § 9 auch für solche Werthe von x unverändert gültig, für die eine der Functionen F_ϱ verschwindet, deren Index $\varrho<r$ ist. In dem hier betrachteten Falle bleibt dies Ergebniss auch für $\varrho=r$ gültig. Denn weil das System $f_{\alpha+\beta}$ nach der Voraussetzung einen Theil eines unbegrenzten Systems bildet, wird sein Rang für einen Werth von x, für den $F_r=0$ ist, gleich der in der Reihe (16.) § 7 mit ϱ bezeichneten Zahl.

Das in der Formel (13.) § 9 ausgesprochene Resultat lässt sich nun mit Hülfe der Recursionsformel (11.) und der Stetigkeitsbetrachtungen, die der *Sturm*schen Deduction zu Grunde liegen, auf eine andere Form bringen. Um die Aenderung zu ermitteln, welche der Ausdruck (13.) § 9 in einem gegebenen Intervalle erfährt, lasse ich die Variable x dasselbe stetig wachsend durchlaufen. Dann kann sich jener Ausdruck nur an einer solchen Stelle ändern, wo eine der Functionen F_λ verschwindet. Ist $\lambda<r$, so sind an dieser Stelle $F_\varkappa$ und F_μ von Null verschieden. Aus (10*.) § 9 und (8*.) folgt aber

$$(17.)\qquad A_\lambda^2F_{\mu-1}F_\mu-A_{\mu,\lambda}F_\lambda F_{\mu-1}+A_\mu^2F_{\lambda-1}F_\lambda = 0,$$

wo $F_{\mu-1}$ dem F_λ und $F_{\lambda-1}$ dem $F_\varkappa$ proportional ist. Wenn nun F_λ, also auch $F_{\mu-1}$ für einen bestimmten Werth von x von der $m$ten Ordnung verschwindet, so verschwindet in jener Formel das erste und dritte Glied genau von der Ordnung m, das mittlere aber mindestens von der Ordnung $2m$. In der nächsten Umgebung einer Stelle, wo F_λ verschwindet, haben daher $F_{\lambda-1}F_\lambda$ und $F_{\mu-1}F_\mu$ entgegengesetzte Vorzeichen, und folglich ist

$$\operatorname{sign}(F_{\lambda-1}F_\lambda)+\operatorname{sign}(F_{\mu-1}F_\mu) = 0,$$

gleichgültig, auf welcher Seite der betrachteten Stelle x liegt. Durchläuft also x stetig wachsend ein gegebenes Intervall, so kann sich der Ausdruck (13.) § 9 nur dann, und zwar um 2, -2 oder 0 ändern, wenn x durch eine Wurzel der Gleichung $F_r = 0$ hindurchgeht. Legt man einer solchen die Charakteristik $+1$, -1 oder 0 bei, je nachdem, wenn x wachsend durch sie hindurchgeht, $F_{r-1}F_r$ vom negativen zum positiven, vom positiven zum negativen übergeht oder das Vorzeichen nicht wechselt, so ist demnach, falls $x' > x$ ist, $\frac{1}{2}\Delta s$ gleich der Summe der Charakteristiken der zwischen x und x' liegenden Wurzeln der Gleichung $F_r = 0$, ist also durch die beiden Functionen F_r und F_{r-1} *allein* bestimmt.

§ 11.

Um mittelst des gefundenen Satzes die reellen Wurzeln einer *beliebigen* algebraischen Gleichung in einem gegebenen Intervall charakterisiren zu können, ist zu untersuchen, ob man die Constanten a_λ so bestimmen kann, dass F_r und F_{r-1} zwei vorgeschriebene Functionen werden (vgl. *Kronecker*, Göttinger Nachr. 1881, S. 274). Zu diesem Ziele führt die folgende von *Kronecker* (Monatsber. der Berliner Akademie 1881, S. 600) gefundene Identität: Setzt man

$$(1.)\qquad G_\varrho(x, y) = -\begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{\varrho-1} & 1 \\ \cdot & \cdots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-2} & y^{\varrho-1} \\ 1 & \dots x^{\varrho-1} & 0 \end{vmatrix},$$

so ist

$$(2.)\qquad F_\varrho(x)F_{\varrho-1}(y)-F_\varrho(y)F_{\varrho-1}(x) = A_\varrho(x-y)G_\varrho(x, y).$$

Setzt man nämlich in der Formel (1.) § 5 $x_\lambda = x^\lambda$, $y_\lambda = y^\lambda$, $z = 0$, so erhält man

$$-(x-y)G_\varrho(x,\ y) = \begin{vmatrix} a_0 \dots a_{\varrho-2}\ 1\ 1 \\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \ \cdot\ \cdot \\ a_\varrho \dots a_{2\varrho-2}\ x^\varrho\ y^\varrho \end{vmatrix}.$$

Wendet man dann auf das System

$$\begin{matrix} a_0 & \dots a_{\varrho-2} & a_{\varrho-1} & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdots\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1} & \dots a_{2\varrho-3} & a_{2\varrho-2} & x^{\varrho-1} & y^{\varrho-1} & 0 \\ a_\varrho & \dots a_{2\varrho-2} & a_{2\varrho-1} & x^\varrho & y^\varrho & 1 \end{matrix}$$

von $\varrho+1$ Zeilen und $\varrho+3$ Spalten die Relation (2.) § 10 an, so erhält man die Formel (2.).

Seien $F(x)$ und $G(x)$ zwei ganze Functionen von den Graden r und r', A der Coefficient von x^r in F, und sei

(3.) $$R = A^{r'} \Pi G(x_\lambda)$$

ihre Resultante, wo das Product über die r Wurzeln x_λ der Gleichung $F(x) = 0$ zu erstrecken ist. Setzt man dann

$$\frac{F(x)G(y)-F(y)G(x)}{x-y} = \Sigma_{\alpha,\beta}{}_0^{r-1} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta,$$

so ist, falls $r' \leqq r$ ist,

(4.) $$\Sigma \pm b_{00} \dots b_{r-1,r-1} = (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} A^{r-r'} R.$$

Ist nun A_ϱ von Null verschieden, und betrachtet man $\frac{1}{A_\varrho} G_\varrho(x,\ y)$ als bilineare Form von $1,\ x,\ \dots,\ x^{\varrho-1}$ und $1,\ y,\ \dots,\ y^{\varrho-1}$, so ist sie die reciproke Form von $\Sigma_{\alpha,\beta}{}_0^{\varrho-1} a_{\alpha+\beta} x_\alpha y_\beta$, und folglich ist ihre Determinante gleich A_ϱ^{-1}. Ist also der Grad von $F_{\varrho-1}$ gleich ϱ', so ist die Resultante von F_ϱ und $F_{\varrho-1}$ gleich

(5.) $$(-1)^{\frac{1}{2}\varrho(\varrho-1)} A_\varrho^{\varrho+\varrho'-1}.$$

Damit ist von neuem bewiesen, dass F_ϱ und $F_{\varrho-1}$ theilerfremd sind, wenn A_ϱ von Null verschieden ist.

Die Grössen $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{2n-1}$ genügen nur der einen Bedingung, dass A_r von Null verschieden ist, wenn r der Rang des Systems $a_{\alpha+\beta}$ ist. Die Coefficienten der Functionen F_r und F_{r-1} sind ganze Functionen von $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_{2r-2}$ von den Graden r und $r' < r$. Sind umgekehrt diese beiden Functionen bekannt, so ist A_r der Coefficient von x^r in F_r. Aus der Formel (2.) ergeben sich dann die Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ der bilinearen Form

$$(6.)\qquad \frac{1}{A_r} G_r(x,\, y) \;=\; \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{r-1} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Ist $\Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ ihre reciproke Form, so ist, wie *Jacobi* (a. a. O. § 5) gezeigt hat, und ich in § 12 auf einem directeren Wege beweisen werde, $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha+\beta}$ nur von der Summe der Indices abhängig. Hat man so a_0, $a_1, \ldots, a_{2r-2}$ bestimmt, so wird der Ausdruck (6.) § 9 für F_r eine lineare Function von a_{2r-1}

$$(7.)\qquad F_r \;=\; -a_{2r-1} F_{r-1}(x) + H,$$

wo H die Determinante (6.) § 9 ist, falls man darin $\varrho = r$ macht und a_{2r-1} durch 0 ersetzt. So findet man a_{2r-1} und daraus, dass in dem System (1.) § 8 alle Determinanten $(r+1)$-ten Grades verschwinden, ergeben sich der Reihe nach a_{2r}, $a_{2r+1}, \ldots, a_{2n-1}$ durch Auflösung je einer linearen Gleichung mit einer Unbekannten, die mit A_r multiplicirt ist.

Seien jetzt umgekehrt F und G zwei beliebig gegebene ganze Functionen der Variabeln x, die folgenden Bedingungen genügen:

Der Grad r' von G ist kleiner als der Grad r von F. Ist A der Coefficient von x^r in F, so ist die Resultante von F und G gleich $(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} A^{r+r'-1}$, also von Null verschieden.

Ist die letztere Bedingung nicht erfüllt, und ist R die Resultante der theilerfremden Functionen F und G, so kann man eine reelle Constante k so bestimmen, dass ihr kF und kG genügen. Denn dazu muss

$$k^{r+r'} R = (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} (kA)^{r+r'-1} \quad \text{oder} \quad k = (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} A^{r+r'-1} R^{-1}$$

sein. Man setze nun in der eben geschilderten Rechnung F, G und A an die Stelle von F_r, F_{r-1} und A_r und berechne dann aus den eindeutig bestimmten Werthen a_0, $a_1, \ldots, a_{2n-1}$ umgekehrt nach Formel (6.) § 9 und (2.) § 6 die Grössen F_r, F_{r-1} und A_r. Nach jener Rechnung ist $\sum_{\alpha,\beta}{}_0^{r-1} a_{\alpha+\beta} x_\alpha y_\beta$ die reciproke Form von

$$(8.)\qquad \frac{F(x)G(y)-F(y)G(x)}{A^2(x-y)} \;=\; \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{r-1} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Nach Formel (4.) ist daher die Resultante von F und G gleich

$$(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} A^{r+r'} \Sigma \pm b_{00} \ldots b_{r-1,r-1}$$

und nach der Voraussetzung gleich $(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)}A^{r+r'-1}$. Folglich ist

$$\Sigma\pm b_{00}\dots b_{r-1,r-1} = A^{-1},$$

und mithin ist die Determinante A_r der reciproken Form $\Sigma a_{\alpha+\beta}x_\alpha y_\beta$ gleich A, also ist $A_r = A$ von Null verschieden. Da die reciproke Form von der reciproken Form wieder die ursprüngliche ist, so ist

$$(9.)\qquad F(x)G(y)-F(y)G(x) = F_r(x)F_{r-1}(y)-F_r(y)F_{r-1}(x).$$

Vergleicht man auf beiden Seiten die Coefficienten von y^r, so erhält man, weil $A = A_r$ ist, $G(x) = F_{r-1}(x)$. Mithin ist

$$\frac{F(x)-F_r(x)}{F_{r-1}(x)} = \frac{F(y)-F_r(y)}{F_{r-1}(y)} = k$$

von x unabhängig, also

$$F(x) = F_r+kF_{r-1} = -(a_{2r-1}-k)F_{r-1}+H.$$

Da aber a_{2r-1} so zu bestimmen ist, dass $F = -a_{2r-1}G+H$ ist, so ist $k = 0$ und $F = F_r$.

Für die praktische Anwendung der Formel (13.) § 9 ist es vortheilhaft, die in ihr auftretenden Grössen alle durch die in Formel (6.) definirten Constanten $b_{\alpha\beta}$ auszudrücken.

Nach den Eigenschaften reciproker Systeme ist

$$(10.)\qquad A_r^{-1}A_\varrho = \Sigma\pm b_{\varrho\varrho}\dots b_{r-1,r-1},$$

und $A_r^{-1}B_{\alpha\beta}$ ist gleich der Unterdeterminante, mit der in dieser Determinante das Element $b_{\varrho+\alpha,\varrho+\beta}$ multiplicirt ist. Ferner ist

$$(11.)\qquad A_r^{-1}F_\varrho = \begin{vmatrix} (\Sigma b_{\varrho\lambda}x^\lambda) & b_{\varrho,\varrho+1} & \dots b_{\varrho,r-1} \\ \cdot & \cdot & \dots\ \cdot \\ (\Sigma b_{r-1,\lambda}x^\lambda) & b_{r-1,\varrho+1} & \dots b_{r-1,r-1} \end{vmatrix},$$

wo sich λ von 0 bis ϱ bewegt. Denn diese Determinante bleibt ungeändert, wenn man λ die Werthe von 0 bis $r-1$ durchlaufen lässt. Ersetzt man dann

$$x^0,\quad x^1,\quad \dots,\quad x^{r-1}$$

durch

$$a_\varkappa,\quad a_{\varkappa+1},\quad \dots,\quad a_{\varkappa+r-1}, \qquad {\scriptstyle (\varkappa = 0,\,1,\,\dots,\,\varrho-1)}$$

so verschwinden die Elemente der ersten Colonne. Daher kann sie sich von der Determinante (6.) § 9 nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Dass aber dieser richtig bestimmt ist, folgt aus der Formel (10.).

Kronecker hat in seinen Untersuchungen ausser den Functionen $F_\varrho(x)$ auch die Functionen

$$(12.)\qquad G_\varrho(x) = \begin{vmatrix} a_0 \dots a_{\varrho-1} & 0 \\ a_1 \dots a_\varrho & a_0 \\ a_2 \dots a_{\varrho+1} & a_0x+a_1 \\ \dots\dots & \cdot \\ a_\varrho \dots a_{2\varrho-1} & a_0x^{\varrho-1}+a_1x^{\varrho-2}+\dots+a_{\varrho-1} \end{vmatrix}$$

($G_0 = 0$, $G_1 = a_0$) benutzt. Sie genügen denselben linearen Recursionsformeln (5.) und (11.) § 10 wie die Functionen F_ϱ und stehen zu diesen (vergl. *Kronecker,* Monatsber. der Berliner Akademie 1881, S. 564) in der Beziehung

$$(13.)\qquad F_{\varrho-1}G_\varrho - G_{\varrho-1}F_\varrho = A_\varrho^2,$$

so dass

$$(14.)\qquad \frac{G_\varrho}{F_\varrho} = a_0x^{-1}+a_1x^{-2}+\dots+a_{2\varrho-1}x^{-2\varrho}+k_{2\varrho}x^{-2\varrho-1}+\cdots$$

ein Näherungswerth des Kettenbruchs ist, in den sich

$$(15.)\qquad \frac{G_r}{F_r} = a_0x^{-1}+a_1x^{-2}+\dots+a_{2n-1}x^{-2n}+\cdots$$

entwickeln lässt. Da aber seine Darstellung gerade dadurch, dass er so viele Reihen von Functionen gleichzeitig betrachtet hat, etwas an Uebersichtlichkeit eingebüsst hat, so habe ich Werth darauf gelegt, die ganze Untersuchung mit Hülfe der Functionen F_ϱ allein durchzuführen.

§ 12.

Die Bestimmung der Signatur lässt sich in ähnlicher Weise wie bei den recurrirenden Formen, bei quadratischen Formen

$$(1.)\qquad \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-1} a_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta$$

durchführen, die ich *Bézout*sche Formen nennen will, deren Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ in folgender Art aus $2n+2$ unabhängigen Grössen

$$p_0,\ \dots,\ p_n,\ q_0,\ \dots,\ q_n$$

zusammengesetzt sind. Sind

$$(2.)\qquad F(u) = \sum_\lambda{}_0^n p_\lambda u^{n-\lambda},\quad G(u) = \sum_\lambda{}_0^n q_\lambda u^{n-\lambda}$$

zwei ganze Functionen $n$ten Grades der Variabeln u, so ist

$$(3.)\qquad \frac{F(u)G(v)-F(v)G(u)}{u-v} = \sum_{\alpha,\beta}{}_0^{n-1} a_{\alpha\beta}u^{n-1-\alpha}v^{n-1-\beta}.$$

Ist die Determinante der Form (1.) von Null verschieden, so sind $F(u)$ und $G(u)$ nach (4.) § 11 theilerfremd und umgekehrt. Für diesen Fall ist die Theorie solcher Formen schon in § 11 behandelt. Für den *Sturm*schen Satz aber ist es von Wichtigkeit, die erhaltenen Formeln auch auf den Fall auszudehnen, wo $F(u)$ und $G(u)$ einen Divisor gemeinsam haben.

Multiplicirt man die Gleichung (3.) mit $u-v$, so erhält man durch Coefficientenvergleichung

$$(4.)\qquad a_{\alpha,\beta-1}-a_{\alpha-1,\beta} = p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha = d_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ \dots,\ n)$$

und diese Formel ist auch für die Grenzwerthe 0 und n richtig, wenn man festsetzt, dass $a_{\alpha\beta}=0$ ist, falls einer der Indices negativ oder grösser als $n-1$ ist. Speciell ist

$$(5.)\qquad a_{0,\beta-1} = a_{\beta-1,0} = d_{0\beta},\quad a_{\alpha,n-1} = a_{n-1,\alpha} = d_{\alpha n}$$

und allgemein

$$(6.)\qquad a_{\alpha,\beta-1} = d_{\alpha,\beta}+d_{\alpha-1,\beta+1}+d_{\alpha-2,\beta+2}+\cdots,$$

wo die Summation so lange fortzusetzen ist, bis der erste Index 0 oder der zweite n wird. Aus der Identität

$$(7.)\qquad d_{0n}d_{\alpha\beta}+d_{0\alpha}d_{\beta n}+d_{0\beta}d_{n\alpha} = 0$$

folgt

$$(8.)\qquad a_{0,n-1}a_{\alpha,\beta-1}-a_{0,\beta-1}a_{\alpha,n-1} = a_{n-1,0}a_{\alpha-1,\beta}-a_{n-1,\beta}a_{\alpha-1,0}.$$

Sind allgemeiner $\alpha\beta\dots\vartheta$ irgend r der Indices $1, 2, \dots, n-1$ und ebenso $\varkappa\lambda\dots\tau$, so ist

$$(9.)\qquad \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \dots & \vartheta \\ n-1 & \varkappa-1 & \lambda-1 & \dots & \tau-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & \alpha-1 & \beta-1 & \dots & \vartheta-1 \\ 0 & \varkappa & \lambda & \dots & \tau \end{pmatrix}.$$

Die Gleichheit dieser beiden Unterdeterminanten $(r+1)$-ten Grades ist von *Jacobi* [a. a. O. § 12, (40.)] gefunden, seine Angabe über das Vorzeichen $\pm$ ist aber unrichtig. Nach dem Satze von *Sylvester* ist nämlich

$$\begin{aligned} & a_{0,n-1}^{r-1}\Sigma\pm a_{0,n-1}a_{\alpha,\varkappa-1}\dots a_{\vartheta,\tau-1} \\ & = \Sigma\pm(a_{0,n-1}a_{\alpha,\varkappa-1}-a_{0,\varkappa-1}a_{\alpha,n-1})\dots(a_{0,n-1}a_{\vartheta,\tau-1}-a_{0,\tau-1}a_{\vartheta,n-1}) \\ & = \Sigma\pm(a_{n-1,0}a_{\alpha-1,\varkappa}-a_{n-1,\varkappa}a_{\alpha-1,0})\dots(a_{n-1,0}a_{\vartheta-1,\tau}-a_{n-1,\tau}a_{\vartheta-1,0}) \\ = {} & a_{n-1,0}^{r-1}\Sigma\pm a_{n-1,0}a_{\alpha-1,\varkappa}\dots a_{\vartheta-1,\tau}. \end{aligned}$$

Daher gilt die Formel (9.), wenn $a_{0,n-1}$ von Null verschieden ist, und folglich gilt sie auch für alle Werthe der Variabeln p_λ, q_λ. Z. B. ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ n-1 & 1 & 2 & \dots & n-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{pmatrix},$$

oder falls $A_{\alpha\beta}$ in der Determinante $A_n = \Sigma \pm a_{00} \dots a_{n-1,n-1}$ der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ ist, $A_{n-1,0} = A_{n-2,1}$ und ebenso allgemein $A_{\alpha,\beta-1} = A_{\alpha-1,\beta}$. Mithin bilden die Grössen $A_{\alpha\beta}$ ein recurrirendes System.

Aus der identischen Gleichung

$$d_{\alpha\lambda} d_{\varkappa\mu} + d_{\alpha\varkappa} d_{\mu\lambda} + d_{\alpha\mu} d_{\lambda\varkappa} = 0$$

folgt nach (4.)

$$(10.)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & \varkappa \\ \lambda-1 & \mu-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha-1 & \varkappa-1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \mu \\ \varkappa-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha-1 & \mu-1 \\ \varkappa & \lambda \end{pmatrix} \\ \qquad + \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \mu-1 & \varkappa-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha-1 & \lambda-1 \\ \mu & \varkappa \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

Denn jene Gleichung kann man schreiben

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu] d_{\alpha\lambda} d_{\varkappa\mu} = 0;$$

die Summe erstreckt sich über alle Permutationen der Indices $\varkappa$, λ, μ, das Zeichen $[\varkappa\lambda\mu]$ ist für eine bestimmte Permutation gleich 1 und für jede andere gleich $+1$ oder -1, je nachdem sie aus jener durch eine gerade oder ungerade Substitution hervorgeht. Daher ist

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu](a_{\alpha,\lambda-1} - a_{\alpha-1,\lambda})(a_{\varkappa,\mu-1} - a_{\varkappa-1,\mu}) = 0.$$

Nun ist aber $\Sigma[\varkappa\lambda\mu] a_{\alpha,\lambda-1} a_{\varkappa,\mu-1} = \Sigma - [\varkappa\lambda\mu] a_{\alpha,\lambda-1} a_{\varkappa-1,\mu}$, weil die erste Summe ihrer Bedeutung nach bei Vertauschung von $\varkappa$ und μ ungeändert bleibt. Mithin ergiebt sich die Gleichung

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu](a_{\alpha,\lambda-1} a_{\varkappa,\mu-1} + a_{\alpha-1,\lambda} a_{\varkappa-1,\mu}) = 0,$$

die mit der Formel (11.) übereinstimmt. Seien allgemeiner $\alpha\beta\dots\vartheta\varkappa$ irgend r (> 1) der Indices $0, 1, \dots, n-1$ und ebenso $\lambda\mu\dots\sigma\tau$. Setzt man dann zur Abkürzung

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha\,\beta \dots \vartheta\,\varkappa \\ \lambda\,\mu \dots \sigma\,\tau \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \vartheta & \varkappa \\ \lambda-1 & \mu-1 & \dots & \sigma-1 & \tau-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha-1 & \beta-1 & \dots & \vartheta-1 & \varkappa-1 \\ \lambda & \mu & \dots & \sigma & \tau \end{pmatrix},$$

so besteht die Relation

$$(11.)\quad \left(\begin{pmatrix} \alpha\,\beta \dots \vartheta\,\varkappa \\ \lambda\,\mu \dots \sigma\,\tau \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \alpha\,\beta \dots \vartheta\,\lambda \\ \varkappa\,\mu \dots \sigma\,\tau \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} \alpha\,\beta \dots \vartheta\,\mu \\ \lambda\,\varkappa \dots \sigma\,\tau \end{pmatrix}\right) + \dots + \left(\begin{pmatrix} \alpha\,\beta \dots \vartheta\,\tau \\ \lambda\,\mu \dots \sigma\,\varkappa \end{pmatrix}\right).$$

Man kann dieselbe so schreiben

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\alpha,\lambda-1}a_{\beta,\mu-1}\ldots a_{\vartheta,\sigma-1}a_{\varkappa,\tau-1}+a_{\alpha-1,\lambda}a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa-1,\tau}) = 0.$$

Da diese Formel für $r=2$ schon bewiesen ist, will ich voraussetzen, sie sei für Determinanten $(r-1)$-ten Grades richtig. Dann ist

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\beta,\mu-1}\ldots a_{\vartheta,\sigma-1}a_{\varkappa,\tau-1}+a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa-1,\tau}) = 0,$$

falls man nur $\varkappa$, μ, $\ldots$, σ, τ permutirt (nicht λ). Multiplicirt man mit $a_{\alpha,\lambda-1}$, vertauscht dann auch λ mit den übrigen Indices und addirt die so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich, falls man in der zweiten Summe $\varkappa$ und τ vertauscht,

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\alpha,\lambda-1}a_{\beta,\mu-1}\ldots a_{\vartheta,\sigma-1}a_{\varkappa,\tau-1}-a_{\alpha,\lambda-1}a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa,\tau-1}) = 0.$$

Nun ist aber nach (11.)

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\alpha,\lambda-1}a_{\varkappa,\tau-1}+a_{\alpha-1,\lambda}a_{\varkappa-1,\tau}) = 0,$$

falls man nur $\varkappa$, λ, τ vertauscht. Multiplicirt man mit $a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}$ und vertauscht dann die Indices μ, $\ldots$, σ mit einander und mit $\varkappa$, λ, τ und summirt, so ergiebt sich

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau](a_{\alpha,\lambda-1}a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa,\tau-1}+a_{\alpha-1,\lambda}a_{\beta-1,\mu}\ldots a_{\vartheta-1,\sigma}a_{\varkappa-1,\tau}) = 0,$$

und durch Addition der beiden entwickelten Gleichungen die zu beweisende Relation.

Dieselbe ist ganz ähnlich gebaut, wie die von *Kronecker* entdeckte lineare Relation

$$(12.)\qquad \binom{\alpha\,\beta\ldots\vartheta\,\varkappa}{\lambda\,\mu\ldots\sigma\,\tau} = \binom{\alpha\,\beta\ldots\vartheta\,\lambda}{\varkappa\,\mu\ldots\sigma\,\tau}+\binom{\alpha\,\beta\ldots\vartheta\,\mu}{\lambda\,\varkappa\ldots\sigma\,\tau}+\cdots+\binom{\alpha\,\beta\ldots\vartheta\,\tau}{\lambda\,\mu\ldots\sigma\,\varkappa}$$

zwischen den Subdeterminanten eines beliebigen symmetrischen Systems $a_{\alpha\beta}$. Schreibt man diese in der Form

$$\Sigma[\varkappa\lambda\mu\ldots\sigma\tau]a_{\alpha\lambda}a_{\beta\mu}\ldots a_{\vartheta\sigma}a_{\varkappa\tau} = 0,$$

so erkennt man unmittelbar, dass sich je zwei Glieder aufheben, die durch Vertauschung von $\varkappa$ und τ aus einander hervorgehen.

Speciell ist

$$\left(\binom{1\ldots\varrho-1\;0\;\alpha+1}{1\quad\varrho-1\;\varrho\;\beta+1}\right)-\left(\binom{1\ldots\varrho-1\;0\;\beta+1}{1\quad\varrho-1\;\varrho\;\alpha+1}\right)-\left(\binom{1\ldots\varrho-1\quad 0\quad\varrho}{1\ldots\varrho-1\;\alpha+1\;\beta+1}\right) = 0$$

oder

$$\binom{0\ldots\varrho-1\;\alpha+1}{0\quad\varrho-1\quad\beta}-\binom{0\ldots\varrho-1\;\beta+1}{0\ldots\varrho-1\quad\alpha} = \binom{0\ldots\varrho-2\;\varrho-1\;\varrho}{0\ldots\varrho-2\quad\alpha\quad\beta},$$

also

$$(13.)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-1} & a_{0\beta} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\beta} \\ a_{\alpha+1,0} & \dots a_{\alpha+1,\varrho-1} & a_{\alpha+1,\beta} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-1} & a_{0,\beta+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\beta+1} \\ a_{\alpha 0} & \dots a_{\alpha,\varrho-1} & a_{\alpha,\beta+1} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-2} & a_{0\alpha} & a_{0\beta} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-2} & a_{\varrho-1,\alpha} & a_{\varrho-1,\beta} \\ a_{\varrho 0} & \dots a_{\varrho,\varrho-2} & a_{\varrho\alpha} & a_{\varrho\beta} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Setzt man

$$(14.)\qquad A_\varrho = \Sigma \pm a_{00} \dots a_{\varrho-1,\varrho-1}$$

und

$$(15.)\qquad B_{\alpha\beta} = \Sigma \pm a_{00} \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} a_{\varrho+\alpha,\varrho+\beta},$$

so ergiebt sich aus dieser Gleichung, wie in § 6 und § 7 der Satz:

Ist A_ϱ von Null verschieden und verschwinden

$$B_{00},\ B_{01},\ \dots,\ B_{0,\sigma-2},$$

so verschwinden auch $A_{\varrho+1}, A_{\varrho+2}, \dots, A_{\varrho+\sigma-1}$, und umgekehrt; die Grössen

$$(16.)\qquad B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, \sigma-1)$$

bilden dann ein recurrirendes System, und wenn man

$$(17.)\qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} = B_{\sigma-1} = B_{0,\sigma-1} = B_{1,\sigma-2} = \dots = B_{\sigma-1,0}$$

setzt, so ist

$$(18.)\qquad A_\varrho^{\sigma-1} A_{\varrho+\sigma} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A^\sigma_{\varrho,\varrho+\sigma}.$$

Der Beweis passt aber nicht auf den Fall $\varrho = 0$, wo $A_0 = 1$ und $B_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ ist. Wenn die Grössen $a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0,\sigma-2}$ verschwinden, so kann man nur dann mit Sicherheit behaupten, dass auch $A_1, A_2, \dots, A_{\sigma-1}$ verschwinden und dass die Grössen

$$a_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, \sigma-1)$$

ein recurrirendes System bilden, wenn p_0 und q_0 nicht beide Null sind. Denn unter dieser Voraussetzung folgt aus

$$a_{0,\alpha-1} = p_0 q_\alpha - q_0 p_\alpha = 0, \quad a_{0,\beta-1} = p_0 q_\beta - q_0 p_\beta = 0, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, \sigma-1)$$

dass auch $p_\alpha q_\beta - p_\beta q_\alpha = 0$ ist, also $a_{\alpha,\beta-1} = a_{\alpha-1,\beta}$.

Angenommen A_n, $A_{n-1}, \dots, A_{\varrho+1}$ verschwinden und ϱ ist der grösste Werth, für den A_ϱ von Null verschieden ist. Dann bilden die Grössen

$$B_{\alpha\beta} = B_{\alpha+\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-\varrho-1)$$

ein recurrirendes System, in dem $B_0, B_1, \dots, B_{n-\varrho-1}$ verschwinden. Dies folgt daraus, dass alle Determinanten $(\varrho+1)$-ten Grades auf der rechten Seite der Gleichung (13.) Null sind. Nun gilt aber diese Gleichung auch für $\beta = n-1$ [und ist dann identisch mit der Gleichung (9.)]. Da für diesen Fall die zweite Determinante links identisch verschwindet, weil $a_{\varkappa n} = 0$ ist, so zeigt sie, dass auch $B_{\alpha,n-\varrho-1} = B_{n-\varrho-1,\alpha} = 0$ ist, also die Determinanten $B_{\alpha\beta}$ sämmtlich verschwinden. Da A_ϱ von Null verschieden ist, so verschwinden folglich nach dem Satze von *Kronecker* alle Determinanten $(\varrho+1)$-ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$, und mithin ist sein Rang $r = \varrho$.

Der Rang r der Form (1.) ist der grösste Werth ϱ, für den A_ϱ von Null verschieden ist, ausgenommen wenn $p_0 = q_0 = 0$ ist.

In diesem Falle ist nämlich $a_{00} = a_{01} = \cdots a_{0,n-1} = 0$, und mithin $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$, während der Rang $r = 0, 1, \dots$ oder $n-1$ sein kann.

Aus den entwickelten Sätzen ergeben sich nun für die Signatur s der Form (1.) genau dieselben Formeln, die wir in § 7 für die Signatur einer recurrirenden Form gefunden haben.

§ 13.

Die erhaltenen Resultate wende ich auf eine quadratische Form

$$(1.) \qquad \Sigma f_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$$

an, deren Coefficienten $f_{\alpha\beta}$ Functionen einer Variablen x sind, aber denselben Bedingungen genügen, wie die Coefficienten der Form (1.) § 12. Indem ich die Bezeichnungen jenes Paragraphen beibehalte, setze ich

$$(2.) \qquad \sum_{\beta}{}_0^{n-1} a_{\alpha\beta} x^{n-1-\beta} = x_\alpha,$$

also $x_n = 0$ und

$$(3.) \qquad \frac{F(x)G(u)-F(u)G(x)}{x-u} = G(x, u) = \sum_{\alpha}{}_0^{n-1} x_\alpha u^{n-1-\alpha},$$

und, indem ich in der Gleichung (3.) § 12 die Functionen $F(u)$ und $G(u)$ durch $\frac{F(u)}{F(x)}$ und $G(x, u)$ ersetze,

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{F(u)\,G(x,\,v)-F(v)\,G(x,\,u)}{F(x)(u-v)} = \sum_{\alpha,\beta}^{n-1} f_{\alpha\beta}\, u^{n-1-\alpha}\, v^{n-1-\beta} \\ = \dfrac{F(u)\,F(v)}{(u-v)(x-u)(x-v)}\left((u-v)\dfrac{G(x)}{F(x)}+(v-x)\dfrac{G(u)}{F(u)}+(x-u)\dfrac{G(v)}{F(v)}\right). \end{cases}$$

Aus der identischen Gleichung

$$F(x)(F(u)\,G(v)-F(v)\,G(u))+F(u)(F(v)\,G(x)-F(x)\,G(v))+F(v)(F(x)\,G(u)-F(u)G(x)) = 0$$

ergiebt sich

$$F(x)(u-v)\,G(u,\,v)+F(u)(v-x)\,G(v,\,x)+F(v)(x-u)\,G(x,\,u) = 0$$

oder

$$(F(u)\,G(x,\,v)-F(v)\,G(x,\,u))(v-x) = (-F(x)\,G(u,\,v)+F(v)\,G(x,\,u))(u-v),$$

also

$$(v-x)\frac{F(u)G(x,\,v)-F(v)G(x,\,u)}{F(x)(u-v)} = -G(u,\,v)+G(x,\,u)\frac{F(v)}{F(x)}$$

und folglich

$$(v-x)\Sigma f_{\alpha\beta}u^{n-1-\alpha}v^{n-1-\beta} = -\Sigma a_{\alpha\beta}u^{n-1-\alpha}v^{n-1-\beta}+F^{-1}(\Sigma x_\alpha u^{n-1-\alpha})(\Sigma p_\beta v^{n-\beta}).$$

Durch Coefficientenvergleichung erhält man daraus

$$(5.)\qquad f_{\alpha\beta}-xf_{\alpha,\beta-1} = -a_{\alpha,\beta-1}+p_\beta x_\alpha F^{-1},\quad f_{\alpha 0} = p_0 x_\alpha F^{-1}.$$

Ich nehme nun an, dass p_0 von Null verschieden ist, und setze

$$(6.)\qquad p_0 F_\varrho = F\Sigma\pm f_{00}\ldots f_{\varrho\varrho},\quad p_0 F_{-1} = F,\quad F_0 = p_0 G-q_0 F.$$

Die Determinante ist gleich

$$F\begin{vmatrix} f_{00} & f_{01}-xf_{00} & \ldots & f_{0\varrho}-xf_{0,\varrho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{\varrho 0} & f_{\varrho 1}-xf_{\varrho 0} & \ldots & f_{\varrho\varrho}-xf_{\varrho,\varrho-1} \end{vmatrix} = p_0\begin{vmatrix} x_0 & -a_{00}+p_1x_0F^{-1} & \cdots & -a_{0,\varrho-1}+p_\varrho x_0F^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_\varrho & -a_{\varrho 0}+p_1x_\varrho F^{-1} & \cdots & -a_{\varrho,\varrho-1}+p_\varrho x_\varrho F^{-1} \end{vmatrix}$$

und mithin ist

$$(7.)\qquad F_\varrho = \begin{vmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0,\varrho-1} & x_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho 0} & \ldots & a_{\varrho,\varrho-1} & x_\varrho \end{vmatrix}.$$

Setzt man hier für x_α seinen Ausdruck (2.) ein, so verschwinden die Coefficienten von $x^{n-1}, \ldots, x^{n-\varrho}$, und demnach ist $F_{\varrho-1}$ eine ganze Function $(n-\varrho)$-ten Grades, in welcher der Coefficient von $x^{n-\varrho}$ gleich A_ϱ ist.

Ist ferner

$$(8.)\qquad G_\lambda = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-1} & x_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-1} & x_{\varrho-1} \\ a_{\varrho+\lambda,0} & \dots a_{\varrho+\lambda,\varrho-1} & x_{\varrho+\lambda} \end{vmatrix},$$

also $G_0 = F_\varrho$, so ergiebt sich aus dem Satze von *Sylvester*

$$(9.)\qquad A_\varrho^\lambda F_{\varrho+\lambda} = \begin{vmatrix} B_{00} & \dots B_{0,\lambda-1} & G_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ B_{\lambda 0} & \dots B_{\lambda,\lambda-1} & G_\lambda \end{vmatrix}.$$

Ist nun $A_{\varrho+1} = \dots = A_{\varrho+\sigma-1} = 0$, also $B_{00} = \dots = B_{0,\sigma-2} = 0$, so ist auch $F_{\varrho+1} = \dots = F_{\varrho+\sigma-2} = 0$, aber

$$A_\varrho^{\sigma-1} F_{\varrho+\sigma-1} = (-1)^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_\varrho$$

oder nach (14.) § 8

$$(10.)\qquad A_{\varrho,\varrho+\sigma} F_{\varrho+\sigma-1} = A_{\varrho+\sigma} F_\varrho.$$

Sind A_ϱ und $A_{\varrho+\sigma}$ von Null verschieden, so ist demnach F_ϱ eine ganze Function vom Grade $n-\varrho-\sigma$, in welcher der Coefficient von $x^{n-\varrho-\sigma}$ gleich $A_{\varrho,\varrho+\sigma}$ ist. Ist A_ϱ von Null verschieden, so verschwindet weder $F_{\varrho-1}$ noch F_ϱ identisch, ausser wenn ϱ gleich dem Range r der Form (1.) § 12 ist. Die Function F_r verschwindet identisch, weil ihre Coefficienten Determinanten $(r+1)$-ten Grades des Systems $a_{\alpha\beta}$ sind.

Ersetzt man in der Gleichung (13.) § 12 α durch $\varrho+\lambda-1$, multiplicirt sie mit $x^{n-\beta-1}$ und summirt dann nach β von -1 bis $n-1$, so erhält man

$$(11.)\qquad G_\lambda - xG_{\lambda-1} = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-2} & a_{0,\varrho+\lambda-1} & x_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho 0} & \dots a_{\varrho,\varrho-2} & a_{\varrho,\varrho+\lambda-1} & x_\varrho \end{vmatrix}.$$

Wendet man ferner auf das System

$$\begin{matrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-2} & a_{0,\varrho-1} & a_{0,\varrho+\lambda-1} & x_0 & 0 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & a_{\varrho-1,\varrho-2} & a_{\varrho-1,\varrho-1} & a_{\varrho-1,\varrho+\lambda-1} & x_{\varrho-1} & 0 \\ a_{\varrho 0} & a_{\varrho,\varrho-2} & a_{\varrho,\varrho-1} & a_{\varrho,\varrho+\lambda-1} & x_\varrho & 1 \end{matrix}$$

von $\varrho+1$ Zeilen und $\varrho+3$ Spalten die Relation (2.) § 10 an, so ergiebt sich

$$(12.)\qquad A_\varrho(G_\lambda - xG_{\lambda-1}) = C_\lambda F_\varrho - B_{0,\lambda-1} F_{\varrho-1},$$

wo

$$(13.)\qquad C_\lambda = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\varrho-2} & a_{0,\varrho+\lambda-1} \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\varrho-1,0} & \dots a_{\varrho-1,\varrho-2} & a_{\varrho-1,\varrho+\lambda-1} \end{vmatrix}$$

ist. Aus diesen Relationen folgt, wie in § 10:

$$(14.)\qquad A_\varrho^2 F_{\varrho+\sigma} = Q_{\varrho+\sigma,\varrho} F_\varrho - A_{\varrho,\varrho+\sigma} A_{\varrho+\sigma} F_{\varrho-1}.$$

Wenn man also die Function $F_{\varrho-1}$ vom Grade $n-\varrho$ durch die Function F_ϱ vom Grade $n-\varrho-\sigma$ dividirt, so ist der Rest gleich $F_{\varrho+\sigma}$ und der Quotient die Function $Q_{\varrho+\sigma,\varrho}$ vom Grade σ, die sich, wie in § 10 (9.) und (10.) als Determinante darstellen lässt.

Die obige Deduction lässt sich mit geringer Modification auch auf den Fall $\varrho = 0$ anwenden. Ist α der kleinste Werth > 0, für den A_α von Null verschieden ist, so verschwinden $a_{00}, \dots, a_{0,\alpha-2}$, während

$$a_{0,\alpha-1} = a_{1,\alpha-2} = \dots = a_{\alpha-1,0} = A_{0\alpha}$$

von Null verschieden ist, und die Grössen

$$a_{\varkappa\lambda} \qquad\qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \dots, \alpha-1)$$

bilden ein recurrirendes System, dessen Determinante

$$(15.)\qquad A_\alpha = (-1)^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)} A_{0\alpha}^\alpha$$

ist. Daher verschwinden $F_1, \dots, F_{\alpha-2}$, während

$$(16.)\qquad A_{0\alpha} F_{\alpha-1} = A_\alpha F_0$$

ist. Endlich ist

$$F_\alpha = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots a_{0,\alpha-1} & x_0 \\ a_{10}-xa_{00} & \dots a_{1,\alpha-1}-xa_{0,\alpha-1} & x_1-xx_0 \\ \cdot & \dots\cdot & \cdot \\ a_{\alpha 0}-xa_{\alpha-1,0} & \dots a_{\alpha,\alpha-1}-xa_{\alpha-1,\alpha-1} & x_\alpha-xx_{\alpha-1} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die Gleichung (3.) mit $x-u$, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten von $u^{n-\alpha}$

$$(17.)\qquad x_\alpha - xx_{\alpha-1} = p_\alpha G - q_\alpha F$$

und folglich nach (5.) § 12 und (6.)

$$p_0(x_\alpha - xx_{\alpha-1}) = p_\alpha F_0 - a_{\alpha-1,0} F.$$

Demnach ergiebt sich

$$(18.)\qquad F_\alpha = Q_{\alpha 0} F_0 - A_\alpha A_{0\alpha} F_{-1},$$

wo

$$(19.)\qquad p_0 Q_{\alpha 0} = \begin{vmatrix} a_{00} \dots a_{0,\alpha-1} & p_0 \\ a_{10} \dots a_{1,\alpha-1} & p_1 + p_0 x \\ \cdot \quad \cdot\cdot\cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{\alpha 0} \dots a_{\alpha,\alpha-1} & p_\alpha + p_{\alpha-1} x + \dots + p_0 x^\alpha \end{vmatrix}$$

ist.

Sind in der Reihe der Determinanten A_ϱ

$$(20.)\qquad A_0 \quad A_\alpha \quad A_\beta \quad \dots \quad A_\varkappa \quad A_\lambda \quad A_\mu \quad \dots \quad A_\sigma \quad A_\tau \quad A_r \qquad (0 < \alpha < \beta \dots < \tau < r)$$

von Null verschieden, so ist

$$(21.)\qquad A_\lambda^2 F_\mu - Q_{\mu\lambda} F_\lambda + \frac{A_\lambda A_\mu A_{\lambda\mu}}{A_{\varkappa\lambda}} F_\varkappa = 0,$$

und wenn man $\varkappa$, λ, μ durch σ, τ, r ersetzt,

$$(22.)\qquad Q_{r,\tau} F_\tau = \frac{A_\tau A_r A_{\tau r}}{A_{\sigma\tau}} F_\sigma.$$

Aus den Gleichungen (18.), (21.) und (22.) folgt, dass die Function F_τ oder F_{r-1} vom Grade $n-r$ der grösste gemeinsame Divisor von F_{-1} und F_0 oder nach (6.) von F und G ist. Dividirt man jede der Functionen

$$(23.)\qquad F_{-1} \quad F_0 \quad F_\alpha \quad F_\beta \quad \dots \quad F_\varkappa \quad F_\lambda \quad F_\mu \quad \dots \quad F_\sigma \quad F_\tau$$

durch F_τ, so werden je zwei auf einander folgende theilerfremd und die letzte eine Constante.

Nun seien x und x' zwei bestimmte Werthe, für die F, also auch F_τ, von Null verschieden ist. Ist dann s die Signatur der Form (1.) für den Werth x und s' für x', so ergiebt sich, wie in § 9 und § 10, die Relation

$$(24.)\qquad \varDelta s = \varDelta \Sigma_0^{n-1} \operatorname{sign}(F_{\lambda-1} F_\lambda) = \varDelta \Sigma \operatorname{sign}(A_\lambda A_{\varkappa\lambda} F_\varkappa F_\lambda).$$

Die erste Summe kann über alle Werthe von λ von 0 bis $n-1$ erstreckt werden oder auch nur über die Werthe 0, α, ..., σ, τ.

Mit Hülfe der Gleichung

$$(25.)\qquad A_\lambda^2 F_{\mu-1} F_\mu - Q_{\mu\lambda} F_\lambda F_{\mu-1} + A_\mu^2 F_{\lambda-1} F_\lambda = 0$$

kann man nun, wie in § 10, den Werth des Ausdruckes

$$\varDelta s = \varDelta \Sigma \operatorname{sign}\left(\frac{F_{\lambda-1}}{F_\tau} \frac{F_\lambda}{F_\tau}\right)$$

berechnen. Man lege einer reellen Wurzel der Gleichung $\frac{F_{-1}}{F_\tau} = 0$ die Charakteristik $\chi = +1$, -1 oder 0 bei, je nachdem, wenn die Variable x

wachsend durch sie hindurchgeht, $\frac{F_{-1}}{F_\tau} : \frac{F_0}{F_\tau}$ vom negativen zum positiven übergeht, oder vom positiven zum negativen, oder das Vorzeichen nicht wechselt, und bezeichne die Summe der Charakteristiken der zwischen x und x' ($> x$) liegenden Wurzeln mit

$$\Sigma_x^{x'} \chi\left(\frac{F_{-1}}{F_\tau}, \frac{F_{-1}}{F_0}\right) = \tfrac{1}{2}\Delta s.$$

Jene drei Fälle treten für die Wurzel a ein, je nachdem die Entwickelung von

$$\frac{F_{-1}}{F_0} = \frac{F}{p_0(p_0 G - q_0 F)}$$

nach Potenzen von $x-a$ mit einer ungeraden Potenz von $x-a$ anfängt, die einen positiven Coefficienten hat, oder mit einer solchen, die einen negativen Coefficienten hat, oder mit einer geraden Potenz. Da $\frac{F_{-1}}{F_\tau}$ und $\frac{F_0}{F_\tau}$ theilerfremd sind, so sind die Wurzeln der Gleichung $\frac{F_{-1}}{F_\tau} = 0$ identisch mit denen von $\frac{F_{-1}}{F_0} = 0$ oder von $\frac{F}{G} = 0$. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich die Gleichung

$$\text{(26.)} \qquad \tfrac{1}{2}\Delta s = \Sigma_x^{x'} \chi\left(\frac{F}{G}, \frac{F}{G}\right).$$

Die Berechnung der Summe

$$\Sigma \operatorname{sign}(A_\lambda A_{\varkappa\lambda} F_\varkappa F_\lambda)$$

lässt sich noch mittelst der Formeln (19.) § 8 etwas vereinfachen.

Sind unter den Differenzen der Indices $\varkappa\lambda\mu\ldots\xi\eta$ der Reihe (20.) $\eta-\xi, \ldots, \mu-\lambda$ gerade und $\lambda-\varkappa$ ungerade, so folgt aus jenen Formeln

$$\text{(27.)} \qquad \operatorname{sign}(A_\eta) = (-1)^{\frac{1}{2}(\eta-\varkappa-1)} \operatorname{sign}(A_{\varkappa\lambda}).$$

Um also Δs zu berechnen, hat man nur die Vorzeichen der Werthe zu bestimmen, welche die Functionen (23.) für die beiden Werthe x und x' annehmen, und ausserdem noch, wenn $\lambda-\varkappa$ gerade oder wenn gleichzeitig $\lambda-\varkappa$ ungerade und $\mu-\lambda$ gerade ist, das Vorzeichen des Coefficienten $A_{\varkappa\lambda}$ der höchsten Potenz $x^{n-\lambda}$ in der Function $F_\varkappa$.