BULLETIN DE LA S. M. F.

P. GABRIEL

Des catégories abéliennes

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 323-448.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__323_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
90, 1962, p. 323 à 448.

DES CATÉGORIES ABÉLIENNES (1)

PAR

PIERRE GABRIEL.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

INTRODUCTION 324

CHAPITRE I : **Quelques rappels sur les catégories.**

1. Les univers de Grothendieck 328
2. Définition des catégories 328
3. Foncteurs 330
4. Catégories additives 333
5. Catégories abéliennes 335
6. Catégories avec générateurs et limites inductives exactes 336
7. Foncteurs adjoints 338
8. Équivalences de catégories 341
9. Catégories abéliennes ayant assez d'injectifs 343

CHAPITRE II : **Foncteurs exacts à gauche et enveloppes injectives.**

1. Catégories de foncteurs 345
2. Foncteurs exacts à gauche à valeurs dans une catégorie abélienne 348
3. Foncteurs exacts à gauche à valeurs dans les groupes abéliens 354
4. Catégories nœthériennes 355
5. Enveloppes injectives dans les catégories abéliennes 358
6. Catégories avec générateurs et limites inductives exactes 362

CHAPITRE III : **La localisation dans les catégories abéliennes.**

1. Catégories quotient 365
2. Propriétés du foncteur section 369

(1) Thèse Sc. math., Paris, 1961.

Pages.
3. Catégories avec enveloppes injectives 374
4. Catégories avec générateurs et limites inductives exactes 377
5. Quelques exemples de sous-catégories localisantes 379

CHAPITRE IV : **Catégories localement nœthériennes.**

1. La dimension de Krull d'une catégorie abélienne 382
2. La structure des objets injectifs dans une catégorie localement nœthérienne 387
3. Modules pseudo-compacts 390
4. Dualité entre catégories localement finies et modules pseudo-compacts 395

CHAPITRE V : **Applications à l'étude des modules.**

1. Catégories de modules 402
2. La localisation 411
3. Le théorème de Goldie 416
4. Injectifs indécomposables et idéaux bilatères 421
5. Stabilité par enveloppes injectives 426
6. Extensions finies d'anneaux commutatifs nœthériens 429
7. La dimension de Krull de quelques anneaux 436

CHAPITRE VI : **Applications à l'étude des faisceaux quasi cohérents.**

1. Recollement de catégories abéliennes 439
2. Propriétés d'un recollement de catégories abéliennes 442
3. Préschémas et catégories abéliennes 446

BIBLIOGRAPHIE 447

INTRODUCTION.

Ce travail contient quelques théorèmes généraux sur les catégories abéliennes et quelques applications de ces théorèmes à l'étude des modules. Nous avons consacré beaucoup de papier aux rappels et à l'énoncé de propriétés élémentaires des catégories abéliennes; il y a deux raisons à cela : la première est que le sujet est assez neuf et que nous voulons donner aux énoncés la forme qui nous convient.

La deuxième raison est que nous aimerions convaincre les non-spécialistes et leur offrir un exposé d'ensemble : disons donc à ce groupe de lecteurs que les catégories abéliennes ont été introduites par BUCHSBAUM et GROTHENDIECK pour généraliser les méthodes homologiques de CARTAN et d'EILENBERG [6]. Une comparaison montrera tout de suite l'intérêt de cette notion : soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille de modules sur un anneau A, T_i le treillis des sous-modules de $M_i (i\in I)$ et $\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j)$ le groupe abélien formé des applications A-linéaires de M_i dans $M_j (i, j\in I)$. L'un des objectifs de la théorie des treillis est d'étudier la famille des modules M_i au moyen de la famille

des treillis T_i; de même, l'objectif de l'algèbre homologique est l'étude des M_i au moyen des groupes $\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j)$ et des lois de composition qui relient ces groupes. Pour un choix convenable de la famille $(M_i)_{i\in I}$, la donnée des $\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j)$ et des lois de composition permet de reconstruire les treillis T_i (T_i est le treillis des « sous-objets » de M_i). Les données sont donc plus copieuses en algèbre homologique; il s'ensuit que les résultats sont plus précis.

Les résultats auxquels nous aboutissons s'appliquent principalement aux cas particuliers que voici :

a. Catégorie des modules à droite sur un anneau nœthérien a droite. — Nos énoncés se traduisent alors dans le langage classique de la théorie des modules; nous faisons partiellement cette traduction pour nous conformer aux traditions établies. Il ne fait cependant aucun doute que l'étude des catégories de modules fait intervenir des catégories abéliennes plus générales (*voir* la notion de catégorie quotient).

b. Catégorie des faisceaux quasi cohérents sur un préschéma nœthérien (cette application est traitée au chapitre VI).

c. Catégorie des groupes algébriques commutatifs (*voir* [19], cette application sera l'objet d'une publication ultérieure).

d. Catégorie des algèbres de Hopf sur un corps, connexes, à multiplication et diagonale associatives et commutatives (cette application ne mérite pas une publication).

Le chapitre I est formé de rappels et de compléments à la littérature publiée jusqu'à ce jour. Nous insistons spécialement sur la notion d'équivalence de deux catégories : deux catégories $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont équivalentes si elles sont isomorphes lorsqu'on définit les morphismes de la façon suivante : un morphisme de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ est la classe des foncteurs de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ qui sont isomorphes à un foncteur donné. Si l'on adopte ce point de vue, on a, par exemple, le résultat qui suit : soit A un anneau avec élément unité tel que tout A-module à droite unitaire, projectif et de type fini soit libre; soit $\boldsymbol{A}$ (resp. $\boldsymbol{B}$) la catégorie des modules à droite unitaires sur A [resp. sur l'anneau $\mathbf{M}_n(A)$ formé des matrices (n, n) à coefficients dans A]; le groupe des automorphismes de $\boldsymbol{A}$ (resp. de $\boldsymbol{B}$) est le quotient du groupe des automorphismes de l'anneau A [resp. de l'anneau $\mathbf{M}_n(A)$] par le sous-groupe des automorphismes intérieurs. Comme les catégories $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont équivalentes (*cf.* chap. V, § 1), on retrouve que les quotients considérés sont isomorphes.

Le chapitre II présente la matière que nous travaillons dans la suite : disons de façon approximative qu'une catégorie abélienne est *nœthérienne* si tous les objets de cette catégorie sont nœthériens, qu'une catégorie abélienne est *localement nœthérienne* s'il y a des limites inductives, si le foncteur limite inductive est exact et si tout objet est limite inductive d'objets

nœthériens. Nous montrons que toute catégorie nœthérienne $\boldsymbol{A}$ est équivalente à la catégorie des objets nœthériens d'une catégorie localement nœthérienne $\boldsymbol{B}$. Réciproquement, la catégorie $\boldsymbol{B}$ est équivalente à la catégorie des foncteurs additifs, contravariants et exacts à gauche de $\boldsymbol{A}$ dans la catégorie des groupes abéliens. La catégorie $\boldsymbol{B}$ est donc équivalente à une catégorie quotient de la catégorie de tous les foncteurs additifs et contravariants de $\boldsymbol{A}$ dans les groupes abéliens; il s'ensuit que $\boldsymbol{B}$ est « presque » une catégorie de modules (*cf.* chap. II, § 1).

Dans le chapitre III, nous nous intéressons au « langage modulo $\mathcal{C}$ » de SERRE : soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux catégories abéliennes, T et S deux foncteurs additifs, $T : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, $S : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$. Nous supposons que T est exact, que S est adjoint à T et que $T \circ S$ est isomorphe au foncteur identique de $\boldsymbol{B}$. Dans ces conditions, la catégorie $\operatorname{Ker} T$, qui est formée des objets A de $\boldsymbol{A}$ tel que TA soit nul, est épaisse [10]; de plus, T définit par passage au quotient une équivalence entre la catégorie quotient de $\boldsymbol{A}$ par $\operatorname{Ker} T$ [10], et la catégorie $\boldsymbol{B}$.

Réciproquement, soient $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie épaisse de $\boldsymbol{A}$, et T le foncteur canonique de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ [10]. Nous disons que $\boldsymbol{C}$ est une *sous-catégorie localisante* de $\boldsymbol{A}$ s'il existe un foncteur adjoint à T.

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est la catégorie des modules sur un anneau commutatif A, nous pouvons donner l'exemple qui suit : soient Σ une partie multiplicative de A, $\boldsymbol{B}$ la catégorie des modules sur l'anneau A_Σ et T le foncteur qui associe à tout A-module M le « localisé » M_Σ. Le foncteur T définit par passage au quotient une équivalence entre $\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} T$ et $\boldsymbol{B}$.

Le chapitre IV contient quelques résultats sur les catégories localement nœthériennes : nous prouvons qu'un objet injectif d'une telle catégorie $\boldsymbol{A}$ est la somme directe d'une famille d'objets injectifs indécomposables. Nous nous occupons aussi de la dimension de Krull de $\boldsymbol{A}$; pour cela, nous « filtrons » $\boldsymbol{A}$ à l'aide de sous-catégories localisantes $\boldsymbol{A}_0 \subset \boldsymbol{A}_1 \subset \boldsymbol{A}_2 \subset \ldots$ telles que les quotients $\boldsymbol{A}_{i+1}/\boldsymbol{A}_i$ soient des catégories localement finies (c'est-à-dire que $\boldsymbol{A}_{i+1}/\boldsymbol{A}_i$ est localement nœthérienne et que tout objet est limite inductive d'objets de longueur finie); nous associons à ces catégories localement finies des anneaux topologiques complets qui jouent le même rôle que les anneaux locaux complets en algèbre commutative.

Le chapitre V traite des applications à la théorie des modules. Lorsque A contient dans son centre un anneau commutatif nœthérien R, et est un R-module de type fini, nous explicitons les constructions proposées au chapitre IV. Nous montrons, en particulier, que l'étude des catégories $\boldsymbol{A}_{i+1}/\boldsymbol{A}_i$ est équivalente à l'étude des complétés de A pour certaines topologies. Ce chapitre propose un plan pour attaquer les anneaux nœthériens non commutatifs. Il reste à savoir si les méthodes envisagées sont praticables dans l'étude des anneaux usuels. Signalons à cet égard un anneau que DIEUDONNÉ a introduit dans l'étude des groupes formels :

Soient k un corps algébriquement clos de caractérisque $p > 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et σ l'automorphisme de Frobenius

de W. Nous désignons par A l'anneau dont les éléments sont les séries formelles de la forme

$$a = w + \sum_{r=1}^{\infty} a_r . F^r + \sum_{s=1}^{\infty} b_s . V^s,$$

où w, a_r et b_s parcourent l'anneau W; la multiplication est définie par les règles suivantes :

$$V.F = F.V = p, \quad F.w = \sigma(w).F \quad \text{et} \quad w.V = V.\sigma(w) \quad \text{si} \quad w \in W.$$

L'anneau A est nœthérien (à droite et à gauche). Si nous notons $\boldsymbol{A}$ la catégorie des A-modules à droite, on a :

— Tout objet simple de $\boldsymbol{A}$ est isomorphe à $A/(F.A + V.A)$.

— Si $\boldsymbol{A}_0$ est la plus petite sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$ qui contienne $A/(F.A + V.A)$, tout objet simple de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_0$ est de l'un des types suivants : $A/F.A$, $A/V.A$ ou $A/(V^r - F^q).A$ avec $(r, q) = 1$.

— Si $\boldsymbol{A}_1$ est la plus petite sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$ qui contienne les modules ci-dessus, tout objet simple de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_1$ est isomorphe à A.

Ce travail a déjà été présenté dans trois exposés :

— Objets injectifs dans les catégories abéliennes, *Séminaire Dubreil-Pisot*, t. 12, 1958-1959, n° 17, 32 pages.

— La localisation dans les anneaux non commutatifs, *Séminaire Dubreil-Pisot*, t. 13, 1959-1960, n° 2, 35 pages.

— Sur les catégories localement nœthériennes et leurs applications aux algèbres étudiées par Dieudonné (Groupes formels), *Séminaire J.-P. Serre*, 1959-1960.

Chapitre I.

Quelques rappels sur les catégories.

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques définitions et notations sur les catégories. Nous supposons que le lecteur a pris connaissance des chapitres I et II de [10]. Cependant, comme le temps a fait son œuvre depuis 1957, nous ajoutons quelques compléments à l'article de Grothendieck; ces compléments sont dus pour une grande part à Grothendieck lui-même et ils seront exposés dans un prochain Ouvrage [7]. C'est pourquoi nous nous permettons d'omettre la plupart des démonstrations.

1. Les univers de Grothendieck. — Un ensemble $\mathfrak{U}$ est un *univers* si les axiomes suivants sont vérifiés :

U_1 : Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$, et si I est un élément de $\mathfrak{U}$, alors la réunion $\bigcup_i X_i$ est un élément de $\mathfrak{U}$.

U_2 : Si x appartient à $\mathfrak{U}$, alors l'ensemble $\{x\}$ à un élément appartient à $\mathfrak{U}$.

U_3 : Si x appartient à X et si X appartient à $\mathfrak{U}$, alors x appartient à $\mathfrak{U}$.

U_4 : Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ des parties de X est un élément de $\mathfrak{U}$.

U_5 : Le couple (x, y) est élément de $\mathfrak{U}$ si et seulement si x et y sont des éléments de $\mathfrak{U}$.

Il convient d'ajouter aux axiomes habituels de la théorie des ensembles un axiome assurant que tout ensemble appartient à un univers. Dans ce cas il existe un plus petit univers contenant un ensemble donné. *Nous choisissons une fois pour toutes un univers $\mathfrak{U}$ qui ne « variera » pas dans tout ce qui suit.* Bien entendu, nous supposons $\mathfrak{U}$ assez grand pour que l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers et éventuellement d'autres ensembles soient des éléments de $\mathfrak{U}$. Le lecteur pourra s'exercer à prouver les corollaires suivants des axiomes :

— Si Y est contenu dans X, et si X appartient à $\mathfrak{U}$, alors Y appartient à $\mathfrak{U}$.

— Si X et Y sont deux ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$, la réunion $X \cup Y$ et le produit cartésien $X \times Y$ sont des éléments de $\mathfrak{U}$.

— Si x et y appartiennent à $\mathfrak{U}$, l'ensemble $\{x, y\}$ appartient à $\mathfrak{U}$.

— Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$, et si I appartient à $\mathfrak{U}$, alors le produit $\prod_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathfrak{U}$.

— Si X est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, le cardinal de X est strictement inférieur au cardinal de $\mathfrak{U}$.

2. Définition des catégories. — Une catégorie $\mathbf{C}$ est constituée par les données suivantes :

— Un ensemble $\mathbf{OC}$ dont les éléments s'appellent *les objets* de $\mathbf{C}$.

— Pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathbf{C}$, on se donne un ensemble noté $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* de M dans N [on écrira souvent $f : M \to N$ ou $M \xrightarrow{f} N$ au lieu de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$].

— Pour tout triplet (M, N, P) d'objets de $\mathbf{C}$, on se donne une application μ du produit $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(N, P)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, P)$ [on notera $g \circ f$ ou $g \circ_{\mathbf{C}} f$ au lieu de $\mu(f, g)$; on dira que μ est l'*application de composition*].

Ces données sont soumises aux axiomes C_1 et C_2 :

C_1 : Soient f, g et h trois morphismes : $f : M \to N$, $g : N \to P$ et $h : P \to Q$. Dans ces conditions, on a l'égalité $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

C_2 : Pour tout objet M de $\mathbf{C}$, il existe un morphisme $1_M : M \to M$ tel qu'on ait $1_M \circ f = f$ et $g \circ 1_M = g$ chaque fois que ces égalités ont un sens.

Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, il existe pour tout objet M un seul morphisme 1_M satisfaisant à C_2. Il porte le nom de *morphisme identique* de M. Si $f : M \to N$ est un morphisme de $\mathbf{C}$, l'objet M s'appelle *la source de* f, l'objet N *le but de* f. Nous noterons dorénavant $\mathbf{MC}$ la somme des ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ et nous l'appellerons l'*ensemble des morphismes de* $\mathbf{C}$.

Dans la suite, $\mathfrak{U}\,\mathbf{Ens}$ ou $\mathbf{Ens}$ (resp. $\mathfrak{U}\,\mathbf{Ab}$ ou $\mathbf{Ab}$) désignera la *catégorie des ensembles* (resp. *des groupes abéliens*) :

— Les objets de $\mathbf{Ens}$ (resp. de $\mathbf{Ab}$) sont les ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$ (resp. les groupes abéliens dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$).

— Si M et N sont deux objets de $\mathbf{Ens}$ (resp. de $\mathbf{Ab}$), un morphisme de M dans N est une application de M dans N (resp. une application linéaire de M dans N).

— La loi $(f, g) \to g \circ f$ est la loi usuelle de composition des applications.

Les définitions données coïncident avec celles de [10], à ceci près que les objets d'une catégorie sont ici les éléments d'un ensemble. Le lecteur voudra bien se reporter à [10] pour la définition de notions telles que les suivantes : diagramme commutatif, monomorphisme, sous-objet (appelé sous-truc dans [10]), générateur, etc. Nous nous contentons de préciser quelques notations et abus de langage :

Un *sous-objet* de M (resp. *un quotient* de M) est un monomorphisme $i_N^M : N \to M$ (resp. un épimorphisme $p_Q^M : M \to Q$). Nous dirons souvent que N est un sous-objet de M et que i_N^M est le monomorphisme canonique de N dans M (resp. que Q est un quotient de M et que p_Q^M est l'épimorphisme canonique de M sur Q).

Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, la *catégorie duale* de $\mathbf{C}$ sera notée $\mathbf{C}^0$. Si $(\mathbf{C}_i)_{i \in I}$ est une famille de catégories, nous désignons par $\prod_{i \in I} \mathbf{C}_i$ *la catégorie produit* :

— Les objets du produit $\prod_{i \in I} \mathbf{C}_i$ sont les éléments du produit des ensembles $\mathbf{OC}_i$.

— Si $(M_i)_{i \in I}$ et $(N_i)_{i \in I}$ sont deux objets de la catégorie produit, un morphisme du premier dans le second est un élément du produit $\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_i}(M_i, N_i)$.

— La composition est définie par la formule

$$(f_i) \circ (g_i) = (f_i \circ_{\mathbf{C}_i} g_i).$$

Signalons enfin qu'une *sous-catégorie pleine* de $\mathbf{C}$ est une catégorie $\mathbf{D}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

— Les objets de $\mathbf{D}$ sont des objets de $\mathbf{C}$.

— Si M est un objet de $\mathbf{D}$, tout objet de $\mathbf{C}$ isomorphe à M est un objet de $\mathbf{D}$.

— Si M et N sont deux objets de $\mathbf{D}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(M, N)$ est égal à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$.

— La loi de composition de $\mathbf{D}$ est induite par celle de $\mathbf{C}$.

Nous dirons dorénavant qu'une catégorie $\mathbf{C}$ est une $\mathfrak{U}$-*catégorie* si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ appartient à l'univers $\mathfrak{U}$ pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathbf{C}$. Sauf mention expresse du contraire, *toutes les catégories considérées dans cet article sont des* $\mathfrak{U}$-*catégories*. Chaque fois que nous parlerons de *système inductif* (resp. de système projectif) d'objets d'une $\mathfrak{U}$-catégorie, nous supposerons implicitement que ce système inductif (resp. ce système projectif) est indexé par un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$. Chaque fois que nous parlerons de la somme directe ou du produit direct d'une famille d'objets d'une $\mathfrak{U}$-catégorie, cette famille sera supposée indexée par un élément de $\mathfrak{U}$. Nous dirons que $\mathbf{C}$ est une *catégorie avec limites inductives* si tout système inductif (indexé par un élément de $\mathfrak{U}$) d'objets de $\mathbf{C}$ possède une limite inductive. De même, nous dirons que $\mathbf{C}$ est une *catégorie avec générateurs* s'il existe une famille de générateurs qui est indexée par un élément de $\mathfrak{U}$.

3. **Foncteurs.** — Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories. Un *foncteur* F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ (on note $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$) est constitué par les données suivantes :

— Une application $M \rightsquigarrow FM$ de $\mathbf{OC}$ dans $\mathbf{OD}$.

— Pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathbf{C}$, on se donne une application $F(M, N)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FM, FN)$. [Nous noterons aussi F au lieu de $F(M, N)$.]

On suppose aussi que $(Ff) \circ (Fg)$ est égal à $F(f \circ g)$ chaque fois que la source de f coïncide avec le but de g.

Par exemple, si $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}$, nous appelons foncteur canonique de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ le foncteur F qui est défini par les égalités suivantes : $FM = M$ si $M \in \mathbf{OC}$; $Ff = f$ si $f \in \mathbf{MC}$. Dans le cas où $\mathbf{C}$ coïncide avec $\mathbf{D}$, nous dirons aussi que F est le foncteur identique de $\mathbf{C}$. Nous noterons alors $I_{\mathbf{C}}$ au lieu de F.

Le lecteur notera, qu'avec la terminologie de [10], nous ne considérons ici que des foncteurs covariants. Lorsque aucune confusion ne sera possible,

il nous arrivera de ne pas expliciter les applications $F(M, N)$, mais seulement l'application de $\mathbf{OC}$ dans $\mathbf{OD}$ qui est associée à F. Le symbole $M \rightsquigarrow FM$ désignera alors le foncteur F.

Les foncteurs de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ sont les objets d'une catégorie que nous noterons $\mathbf{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ et dont les morphismes sont définis de la façon suivante : soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$; un morphisme (ou morphisme « fonctoriel ») φ de F dans G consiste en la donnée, pour tout objet M de $\mathbf{C}$, d'un morphisme $\varphi(M) : FM \to GM$. On suppose en outre que, pour tout morphisme $f : M \to N$ de $\mathbf{C}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FM & \xrightarrow{\varphi(M)} & GM \\ \downarrow{\scriptstyle Ff} & & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ FN & \xrightarrow{\varphi(N)} & GN \end{array}$$

Si $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ sont deux morphismes fonctoriels, le composé $\psi \circ \varphi$ est défini par la formule

$$(\psi \circ \varphi)(M) = \psi(M) \circ_{\mathbf{D}} \varphi(M).$$

Il en résulte en particulier que φ est un isomorphisme de $\mathbf{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ si et seulement si $\varphi(M)$ est un isomorphisme pour tout objet M de $\mathbf{C}$; on dit alors que φ est *un isomorphisme fonctoriel.*

Considérons maintenant deux objets X et Y de $\mathbf{C}$; comme nous supposons que $\mathbf{C}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ est un élément de $\mathfrak{U}$. Nous désignons par $\dot{X}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, .)$ ou $\mathrm{Hom}(X, .)$ le foncteur $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X, Y)$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$. Si $f : X \to X'$ est un morphisme de $\mathbf{C}$, nous désignons par $\dot{f}$ ou par $\mathrm{Hom}(f, .)$ le morphisme fonctoriel qui applique l'élément g de $\dot{X}'Y = \mathrm{Hom}(X', Y)$ sur l'élément $g \circ f$ de $\dot{X}Y = \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Les applications $X \rightsquigarrow \dot{X}$ et $f \rightsquigarrow \dot{f}$ définissent évidemment un foncteur de $\mathbf{C}^0$ dans $\mathbf{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$. Nous allons examiner ce foncteur d'un peu plus près : pour cela, soit F un foncteur quelconque de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ab}$; tout élément ξ de FX définit alors un morphisme fonctoriel $\dot{\xi}$ de $\dot{X}$ dans F : pour tout objet Y de $\mathbf{C}$, $\dot{\xi}(Y)$ est l'application $f \rightsquigarrow (Ff)(\xi)$ de $\dot{X}Y = \mathrm{Hom}(X, Y)$ dans FY.

Proposition 1. — *Pour tout objet X de $\mathbf{C}$ l'application $\xi \rightsquigarrow \dot{\xi}$ de FX dans $\mathrm{Hom}(\dot{X}, F)$ est bijective.*

En effet, soit φ un morphisme fonctoriel de $\dot{X}$ dans F; soit $\dot{\varphi}$ l'image de 1_X par l'application $\varphi(X)$ de $\mathrm{Hom}(X, X)$ dans FX. Dans le cas où φ est égal à $\dot{\xi}$, $\dot{\varphi}$ n'est autre que ξ. Il reste donc à prouver que $\varphi = \dot{\xi}$ si $\xi = \dot{\varphi}$. Autrement dit, nous devons montrer que pour tout objet Y de $\mathbf{C}$ et pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a l'égalité

$$\varphi(Y)(f) = (Ff)(\xi).$$

Ceci résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X,\ Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & FY \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(X,f)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle Ff} \\ \mathrm{Hom}(X,\ X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & FX \end{array}$$

et du fait que $\xi = \varphi(X)\,(1_X)$.

COROLLAIRE 1 [11]. — *Si X et X' sont deux objets de $\mathbf{C}$, l'application $f \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(f, .)$ de $\mathrm{Hom}(X', X)$ dans l'ensemble des morphismes fonctoriels de $\mathrm{Hom}(X, .)$ dans $\mathrm{Hom}(X' .)$ est bijective.*

On prouve le corollaire en remplaçant F par $\dot{X}'$ dans la proposition 1.

COROLLAIRE 2. — *Tout isomorphisme du foncteur $\mathrm{Hom}(X, .)$ sur le foncteur $\mathrm{Hom}(X', .)$ est induit par un isomorphisme de X' sur X.*

Nous dirons dans la suite qu'un foncteur F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$ est *représentable* [11] si F est isomorphe à un foncteur $\mathrm{Hom}(X, .)$. On dit aussi que X est un *représentant de F*. Un tel représentant est évidemment défini à un isomorphisme près.

En particulier, si le foncteur F qui associe à tout objet l'ensemble $\{\emptyset\}$ est représentable, nous choisissons une fois pour toutes un représentant O de F. Ce représentant sera appelé l'*objet initial de $\mathbf{C}$*. Pour tout objet Y de $\mathbf{C}$, nous désignons alors par η_Y le seul morphisme de O dans Y.

De façon duale, l'*objet final* O' de $\mathbf{C}$, s'il existe, est tel que $\mathrm{Hom}(Y, \mathrm{O}')$ contienne un et un seul élément ε_Y pour tout objet Y.

On dit que O est *nul* s'il est initial et final. Si M et N sont alors deux objets de $\mathbf{C}$, nous notons $o_{M,N}$ ou simplement o au lieu de $\eta_M \circ \varepsilon_N$.

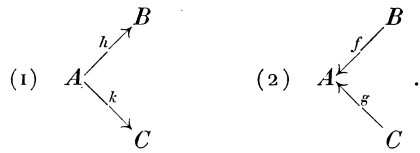
Donnons un autre exemple : on rappelle qu'une *somme directe* de deux objets M et N est un triplet (P, u, v) formé d'un objet P et de deux morphismes, $u : M \to P$ et $v : N \to P$; de plus, on suppose que les applications $\mathrm{Hom}(u, X)$ et $\mathrm{Hom}(v, X)$ définissent pour tout objet X un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(P, X)$ sur le produit cartésien $\mathrm{Hom}(M, X) \times \mathrm{Hom}(N, X)$. L'objet P est donc un représentant du foncteur

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(M, X) \times \mathrm{Hom}(N, X).$$

S'il existe des sommes directes de M et N, nous en choisissons une que nous notons $(M \Sigma N, j_M, j'_N)$. Nous disons alors que $M \Sigma N$ est « la » somme directe de M et de N et que j_M et j'_N sont « les » morphismes canoniques.

La notion duale est la notion de *produit direct* de M et de N : s'il existe, nous notons « le » produit $M \Pi N$; « les » morphismes canoniques sont notés q_M et q'_M.

Considérons maintenant les diagrammes (1) et (2) :



Une *somme fibrée* du diagramme (1) est un triplet (P, u, v) formé d'un objet P et de deux morphismes, $u : B \to P$, $v : C \to P$, tels qu'on ait : $u \circ h = v \circ k$; pour tout couple (b, c) de morphismes tels que $b \circ h$ et $c \circ k$ soient définis et égaux, il existe un et un seul morphisme a dont la source est P, qui a même but que b et c et qui satisfait aux égalités $b = a \circ u$, $c = a \circ v$. S'il existe des sommes fibrées du diagramme (1), nous en choisissons une que nous notons

$$(B \,\Sigma_A\, C, j_B, j'_C).$$

Nous disons alors que $B \,\Sigma_A\, C$ est « la » somme fibrée du diagramme (1) et que j_B et j'_C sont « les » morphismes canoniques.

La notion duale est celle de *produit fibré* : s'il existe, nous notons $B \,\Pi_A\, C$ « le » produit fibré du diagramme (2); « les » morphismes canoniques sont notés q_B et q'_C.

4. **Catégories additives (d'après Grothendieck).** — Soit $\mathbf{C}$ une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :

C Ad 1 : Il existe un objet nul O.

C Ad 2 : Pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathbf{C}$, le produit direct de M et de N, de même que la somme directe de M et de N existent.

LEMME 1. — *Si M et N sont deux objets de $\mathbf{C}$, il existe un et un seul morphisme $h(M, N) : M \,\Sigma\, N \to M \,\Pi\, N$ tel qu'on ait*

$$q_M \circ h(M, N) \circ j_M = 1_M, \qquad q'_N \circ h(M, N) \circ j_M = 0, \qquad q'_N \circ h(M, N) \circ j'_N = 1_N,$$
$$q_M \circ h(M, N) \circ j'_N = 0.$$

Si nous désignons par Π (resp. Σ) le foncteur

$$(M, N) \rightsquigarrow M \,\Pi\, N \text{ [resp. } (M, N) \rightsquigarrow M \,\Sigma\, N]$$

de la catégorie produit $\mathbf{C} \,\Pi\, \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, le lemme 1 peut être complété par le

LEMME 2. — *Les morphismes $h(M, N)$ définissent un morphime fonctoriel du foncteur Σ dans le foncteur Π.*

Supposons maintenant que $\mathbf{C}$ satisfait à un axiome de plus :

C Ad 3 : Pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathbf{C}$, le morphisme $h(M, N)$ de $M \,\Sigma\, N$ dans $M \,\Pi\, N$ est un isomorphisme.

Dans ces conditions, nous pouvons supposer que $M \Sigma N$ a été choisi égal à $M \amalg N$ et tel que $h(M, N)$ soit le morphisme identique de $M \amalg N$. Nous notons alors $M \oplus N$ au lieu de $M \Sigma N$ ou $M \amalg N$. Il est facile de prouver que l'identification de la somme directe avec le produit direct est compatible avec « l'échange des facteurs M et N » et avec les isomorphismes canoniques de $(M \Sigma N) \Sigma P$ sur $M \Sigma (N \Sigma P)$ et de $(M \amalg N) \amalg P$ sur $M \amalg (N \amalg P)$.

Si M est un objet de $\mathbf{C}$, nous désignons par Δ_M (resp. Σ_M) le morphisme, dit *diagonal*, de M dans $M \oplus M$ (resp. de $M \oplus M$ dans M) qui est défini par les égalités $q_M \circ \Delta_M = 1_M$, $q'_M \circ \Delta_M = 1_M$ (resp. $\Sigma_M \circ j_M = 1_M$, $\Sigma_M \circ j'_M = 1_M$). Si f et g sont deux morphismes de même source M et de même but N, nous désignons par $f + g$ le composé des morphismes suivants :

$$M \xrightarrow{\Delta_M} M \oplus M \xrightarrow{f \oplus g} N \oplus N \xrightarrow{\Sigma_M} N.$$

Lemme 3. — *La loi interne $(f, g) \to f + g$ est commutative et associative. Le morphisme $0_{N,M}$ est un élément neutre pour cette loi.*

Lemme 4. — *Soient $f, f' : M \to N$ et $g, g' : N \to P$ des morphismes de $\mathbf{C}$. On a les égalités $g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$ et $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$.*

Il existe des catégories satisfaisant aux axiomes C Ad 1, 2 et 3 et pour lesquelles les monoïdes $\mathrm{Hom}(M, N)$ ne sont pas des groupes abéliens. Ceci ne peut avoir lieu si la catégorie $\mathbf{C}$ satisfait à l'axiome C Ad 4.

C Ad 4 : Pour tout objet M, il existe un morphisme $c(M) : M \to M$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{0} & M \\ {\scriptstyle \Delta_M}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \Sigma_M} \\ M \oplus M & \xrightarrow{1_M \oplus c(M)} & M \oplus M \end{array}$$

La commutativité du diagramme signifie que $c(M)$ est un élément opposé de 1_M dans $\mathrm{Hom}(M, N)$. Il en résulte qu'un morphisme $f : M \to N$ a pour opposé le composé

$$c(N) \circ f = f \circ c(M).$$

Proposition 2. — *Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a. La catégorie $\mathbf{C}$ satisfait aux axiomes C Ad 1, 2, 3 et 4.

b. La catégorie $\mathbf{C}$ satisfait à C Ad 1 *et à l'une ou l'autre assertion de* C Ad 2; *en outre, on peut munir les ensembles* $\mathrm{Hom}(M, N)$ *d'une structure de groupe abélien de telle façon que les lois de composition soient des applications bilinéaires.*

L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ résulte des lemmes précédents. L'implication $(b) \Rightarrow (a)$ est classique; elle est démontrée dans [10].

On appelle *catégorie additive* toute catégorie satisfaisant aux axiomes CAd 1, 2, 3 et 4.

PROPOSITION 3. — *Soient* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *deux catégories additives et* F *un foncteur de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{D}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Pour tout couple (M, N) *d'objets de* $\mathbf{C}$, *l'application* $F(M, N)$ *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FM, FN)$ *est linéaire.*

b. Pour tout couple (M, N) *d'objets de* $\mathbf{C}$, *le triplet*

$$(F(M \oplus N), Fj_M, Fj'_N)$$

est une somme directe de FM *et* FN.

Si les conditions équivalentes de la proposition 3 sont remplies, on dit que F est un foncteur additif. On exprime la condition (b) en disant qu'un *foncteur additif* commute avec la somme directe. Bien entendu, un foncteur additif commute aussi avec le produit direct.

Sauf mention expresse du contraire, dans toute la suite, *les foncteurs d'une catégorie additive dans une autre sont supposés additifs*. Soit par exemple $\mathbf{C}$ une catégorie additive. Nous avons vu que, pour tout couple (M, N) d'objets de $\mathbf{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ est muni d'une structure « naturelle » de groupe abélien. Nous désignons encore par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ ce groupe abélien. Le lemme 4 montre alors que le foncteur $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, Y)$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ab}$ est additif pour tout M.

On remarquera aussi que la catégorie duale d'une catégorie additive $\mathbf{C}$ est additive. Ainsi $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, N)$ est un foncteur additif de $\mathbf{C}^0$ dans $\mathbf{Ab}$.

5. **Catégories abéliennes.** — Soient $\mathbf{C}$ une catégorie additive et $f : M \to N$ un morphisme de $\mathbf{C}$. Nous supposons que f possède noyau, conoyau, image, coimage [10]. Soient i et j (resp. p et q) les morphismes canoniques du noyau $\mathrm{Ker}\, f$ dans M et de l'image $\mathrm{Im}\, f$ dans N (resp. de N dans le conoyau $\mathrm{Coker}\, f$ et de M dans la coimage $\mathrm{Coim}\, f$). On sait qu'il existe un morphisme $\mathfrak{I}$ de $\mathrm{Coim}\, f$ dans $\mathrm{Im}\, f$ et un seul tel qu'on ait $f = j \circ \mathfrak{I} \circ q$. Nous dirons que $\mathfrak{I}$ est le *morphisme canonique de* $\mathrm{Coim}\, f$ *dans* $\mathrm{Im}\, f$.

Une *catégorie additive* $\mathbf{C}$ *est abélienne* si les axiomes suivants sont vérifiés :

CAb 1 : Pour tout morphisme f, les noyau et conoyau de f existent.

CAb 2 : Pour tout morphisme f, le morphisme canonique de $\mathrm{Coim}\, f$ dans $\mathrm{Im}\, f$ est un isomorphisme.

La catégorie duale d'une catégorie abélienne est abélienne.

Nous supposons le lecteur familiarisé avec les raisonnements élémentaires des catégories abéliennes. Lorsqu'on ne considère qu'un nombre fini d'objets et de morphismes, les arguments utilisés sont ceux des groupes abéliens.

Pour accroître cette ressemblance, nous nous servons couramment des notations suivantes : si N est un sous-objet de M, M/N désigne le conoyau de i_N^M; si N et P sont deux sous-objets de M, $N+P$ est l'image du morphisme de $N \oplus P$ dans M qui est défini par i_N^M et i_P^M; de même $M \cap N$ désigne le noyau du morphisme de M dans $M/N \oplus M/P$ qui est défini par les épimorphismes canoniques de M sur M/N et M/P. Si $f : M \to N$ est un morphisme d'une catégorie abélienne et P un sous-objet de M, $f(P)$ désigne l'image de $f \circ i_P^M$; de même, si Q est un sous-objet de N, $f^{-1}(Q)$ désigne le noyau du composé de f avec le morphisme canonique de N dans N/Q.

Les théorèmes d'isomorphisme de Nœther restent valables dans une catégorie abélienne. Il en va de même des résultats sur les suites de composition d'un objet, sur les suites de Jordan-Hölder, sur la longueur d'un objet. De même, nous renvoyons à [6] pour les sorites habituels sur les suites exactes, les foncteurs exacts, exacts à gauche, à droite, les facteurs directs, les objets injectifs.

PROPOSITION 4. — *Si $\mathbf{C}$ est une catégorie abélienne, il existe une somme fibrée (resp. un produit fibré) pour le diagramme* (1) *du paragraphe* 3 [*resp. le diagramme* (2) *du paragraphe* 3].

Nous rappelons seulement la construction de $B \Sigma_A C$: si j_B et j'_C sont les morphismes canoniques de B et C dans $B \oplus C$, $B \Sigma_A C$ est le conoyau du morphisme $j_B \circ h - j'_C \circ k$. Le morphisme canonique j de B dans $B \Sigma_A C$ est composé de j_B et du morphisme canonique de $B \oplus C$ sur $B \Sigma_A C$. Le noyau de j est l'image par h de Ker k; le morphisme canonique de C dans $B \Sigma_A C$ induit un isomorphisme de Coker k sur Coker j.

Rappelons aussi la construction de $B \Pi_A C$: si q_B et q'_C sont les morphismes canoniques de $B \oplus C$ dans B et C, $B \Pi_A C$ est le noyau du morphisme $f \circ q_B - g \circ q'_C$. Le morphisme canonique q de $B \Pi_A C$ dans B est le composé du morphisme canonique de $B \Pi_A C$ dans $B \oplus C$ et de q_B. Le conoyau de q est le quotient de B par $f^{-1}(g(C))$; le morphisme canonique de $B \Pi_A C$ dans $\mathbf{C}$ induit un isomorphisme de Ker q sur Ker g.

6. Catégories avec générateurs et limites inductives exactes.

PROPOSITION 5. — *Si $\mathbf{C}$ est une catégorie abélienne avec générateurs et X un objet de $\mathbf{C}$, il existe un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$ et ayant même puissance que l'ensemble des sous-objets de X.*

Soit en effet $(X_i)_{i \in I}$ une famille de générateurs de $\mathbf{C}$, l'ensemble I appartenant à $\mathfrak{U}$. On sait que la somme E des ensembles $\mathrm{Hom}(X_i, X)$ est un élément de $\mathfrak{U}$. Nous associons à tout sous-objet Y de X la partie EY de E qui est formée des morphismes dont l'image est contenue dans Y. Si Y' est un sous-objet de X ne contenant pas Y, il existe un élément de EY n'appartenant pas à $E(Y \cap Y')$, car $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de générateurs de $\mathbf{C}$.

Autrement dit, l'application $Y \to EY$ est une application injective de l'ensemble des sous-objets de X dans l'ensemble des parties de E. Ceci prouve la proposition.

Supposons maintenant, et pour la fin de ce paragraphe, *que* $\mathbf{C}$ *est une catégorie avec générateurs et limites inductives.* D'après [10], il revient au même de dire que $\mathbf{C}$ est une catégorie avec générateurs et qu'il existe une somme directe pour toute famille d'objets indexée par un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$. Si ces conditions sont réalisées, toute famille filtrante croissante $(M_n)_{n\in E}$ de sous-objets d'un objet M possède une borne supérieure : d'après la proposition précédente, on peut supposer en effet que E appartient à $\mathfrak{U}$; les morphismes canoniques de M_n dans M définissent alors un morphisme de la somme directe $\sum_{n\in E} M_n$ dans M. L'image de ce dernier morphisme est la borne supérieure des M_n.

Soient I un ensemble ordonné filtrant, (M_i, u_{ji}) et (N_i, v_{ji}) deux systèmes inductifs, indexés par I, de morphismes de $\mathbf{C}$ $(I\in\mathfrak{U})$. Un morphisme du premier dans le second est, par définition, une famille $(f_i)_{i\in I}$ de morphismes de source M_i, de but N_i et tels qu'on ait $f_j \circ u_{ji} = v_{ji}\circ f_i$ si $j > i$. Ainsi est définie la catégorie des systèmes inductifs indexés par I, et cette catégorie est abélienne. De plus, le foncteur $(M_i, u_{ji}) \rightsquigarrow \varinjlim M_i$ est exact à droite. Si ce dernier foncteur est exact pour tout $I\in\mathfrak{U}$, nous disons que $\mathbf{C}$ est une *catégorie avec limites inductives exactes.*

PROPOSITION 6. — *Si* $\mathbf{C}$ *est une catégorie avec générateurs et limites inductives, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. $\mathbf{C}$ *est une catégorie avec limites inductives exactes.*

b. Si $(P_i)_{i\in I}$ *est une famille filtrante croissante de sous-objets de* P, *le morphisme canonique de* $\varinjlim P_i$ *dans* P *est un isomorphisme de* $\varinjlim P_i$ *sur la borne supérieure* $\sup_{i\in I} P_i$.

c. Si $(P_i)_{i\in I}$ *est une famille filtrante croissante de sous-objets de* P, *et si* Q *est un sous-objet de* P, *on a l'égalité*

$$(\sup P_i) \cap Q = \sup (P_i \cap Q).$$

Les systèmes inductifs d'une *catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes* $\mathbf{C}$ se traitent « de la même manière » que les systèmes inductifs de groupes abéliens. Nous nous servirons beaucoup dans la suite de la théorie des objets semi-simples d'une telle catégorie : un objet S de $\mathbf{C}$ est dit *simple* s'il est non nul et s'il ne contient aucun sous-objet distinct de S ou de O. Un objet est dit semi-simple s'il est isomorphe à une somme directe d'objets simples. La théorie est en tous points analogue à la

théorie des modules semi-simples [4]. Rappelons seulement quelques résultats :

Soit $\boldsymbol{S}$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{C}$ dont les objets sont les objets semi-simples de $\boldsymbol{C}$; soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples. Si M est un objet de $\boldsymbol{S}$ et si λ appartient à $\mathfrak{S}$; nous désignons par M_λ la composante isotypique de type λ de M : c'est la somme des sous-objets simples de M appartenant à λ. Nous désignons aussi par $\boldsymbol{S}_\lambda$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{S}$ dont les objets M sont tels qu'on ait $M = M_\lambda$. Dans ces conditions on a les résultats suivants :

— Si $f : M \to N$ est un morphisme de $\boldsymbol{S}$, $f(M_\lambda)$ est contenu dans N_λ.

— Le foncteur $M \rightsquigarrow (M_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{S}}$ définit une équivalence entre $\boldsymbol{S}$ et la catégorie produit $\prod_\lambda \boldsymbol{S}_\lambda$ (*voir* le paragraphe 8 pour la définition des équivalences).

— Si S est un objet simple de $\boldsymbol{S}_\lambda$, le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(S, M)$ définit une équivalence entre $\boldsymbol{S}_\lambda$ et la catégorie des espaces vectoriels [sur le corps $\mathrm{Hom}(S, S)$] dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$.

Signalons, pour terminer, que le théorème de Krull-Remak-Schmidt est vrai dans une catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes. De façon précise, disons qu'un objet M est *indécomposable* s'il est non nul et si tout facteur direct de M est égal à O ou à M. On démontre alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes. Soient $(M_i)_{i \in I}$ et $(N_j)_{j \in J}$ deux familles d'objets indécomposables dont l'anneau des endomorphismes est local ($I \in \mathfrak{U}$, $J \in \mathfrak{U}$). Si les sommes directes*

$$\sum_{i \in I} M_i \quad \text{et} \quad \sum_{j \in J} N_j$$

sont isomorphes, il existe une bijection h de I sur J telle que M_i soit isomorphe à $N_{h(i)}$.

Rappelons qu'un anneau A, commutatif ou non, est dit local s'il possède un élément unité non nul et si le quotient de A par son radical de Jacobson est un corps.

AZUMAYA a prouvé ce théorème « dans le cas des modules » [2]. Le lecteur est invité à reprendre cette démonstration en se servant de la proposition 6 pour éviter les raisonnements dans lesquels AZUMAYA parle des éléments d'un module.

7. Foncteurs adjoints. — Le lecteur trouvera dans [20] la preuve des résultats que voici :

Soient $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux catégories*, et soient $T : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $S : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ des foncteurs. Nous désignons par $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(T., .)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(., S.)$ les foncteurs suivants :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(T., .) : \quad (A, B) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TA, B),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(., S.) : \quad (A, B) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, SB).$$

Ces foncteurs sont définis dans la catégorie produit $\mathbf{A}^0 \Pi \mathbf{B}$ et ils prennent leurs valeurs dans la catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles. Un morphisme fonctoriel

$$\psi : \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(T., .) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(., S).$$

définit, pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$, une application

$$\psi(A, B) : \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TA, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, SB)$$

En particulier, si B est égal à TA, l'image du morphisme identique de TA par l'application $\psi(A, TA)$ est un morphisme $\Psi(A) : A \to STA$.

Lemme 1. — *Les morphismes* $\Psi(A)$ *définissent un morphisme fonctoriel* Ψ *du foncteur identique* $I_{\mathbf{A}}$ *de* $\mathbf{A}$ *dans le foncteur* $S \circ T$. *L'application* $\psi \rightsquigarrow \Psi$ *est bijective.*

Nous rappelons seulement comment on peut reconstruire ψ connaissant Ψ : le foncteur S définit pour tout couple (A, B) une application

$$S(TA, B) : \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TA, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(STA, SB).$$

L'application $\psi(A, B)$ est composée de $S(TA, B)$ et de l'application de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(STA, SB)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, SB)$ qui est définie par $\Psi(A)$.

De façon analogue, un morphisme $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(., S.) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(T., .)$ définit, pour tout objet B de $\mathbf{B}$, un morphisme $\Phi(B) : TSB \to B$.

Lemme 2. — *Les morphismes* $\Phi(B)$ *définissent un morphisme fonctoriel* Φ *du foncteur* $T \circ S$ *dans le foncteur identique* $I_{\mathbf{B}}$ *de* $\mathbf{B}$. *L'application* $\varphi \rightsquigarrow \Phi$ *est bijective.*

Avec les notations précédentes, supposons donnés des morphismes fonctoriels ψ et φ et soient Ψ et Φ les morphismes associés à ψ et φ par les lemmes précédents :

Proposition 7. — *Pour que le morphisme fonctoriel composé* $\psi \circ \varphi$ *soit le morphisme identique du foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(., S.)$, *il faut et il suffit que le morphisme composé*

$$S \xrightarrow{\Psi S} STS \xrightarrow{S\Phi} S$$

soit le morphisme identique du foncteur S.

PROPOSITION 8. — *Pour que le morphisme fonctoriel composé* $\varphi \circ \psi$ *soit le morphisme identique du foncteur* $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(T., .)$, *il faut et il suffit que le morphisme composé*

$$T \xrightarrow{T\Psi.} TST \xrightarrow{\Phi T} T$$

soit le morphisme identique du foncteur T.

S'il existe deux morphismes fonctoriels φ et ψ tels que $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$ soient des morphismes identiques, nous dirons que le foncteur S *est adjoint à* T. Dans cette terminologie, S pourra être adjoint à T sans que T soit adjoint à S. Si S et S' sont deux foncteurs adjoints à T, il existe un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., S.)$ sur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., S'.)$. Cet isomorphisme définit pour tout objet B de $\boldsymbol{B}$ un isomorphisme du foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., SB)$ sur le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., S'B)$. Le corollaire de la proposition 1 entraîne la proposition qui suit :

PROPOSITION 9. — *Si* S *et* S' *sont deux foncteurs adjoints à* T, *il existe un isomorphisme fonctoriel de* S *sur* S'. *De même si* S *est un foncteur adjoint à deux foncteurs* T *et* T', *il existe un isomorphisme fonctoriel de* T *sur* T'.

PROPOSITION 10. — *Si* T *est un foncteur de* $\boldsymbol{A}$ *dans* $\boldsymbol{B}$, *les assertions suivantes sont équivalentes* :

a. Il existe un foncteur adjoint à T.

b. Pour tout objet B *de* $\boldsymbol{B}$, *le foncteur* $A \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TA, B)$ *est représentable.*

Il est clair que (a) entraîne (b). Réciproquement, choisissons pour tout objet B de $\boldsymbol{B}$ un représentant SB du foncteur $A \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TA, B)$ et un isomorphisme fonctoriel $\varphi(B) : \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., SB) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(T., B)$. Si $f : B \to B'$ est un morphisme de $\boldsymbol{B}$, il existe un et un seul morphisme $Sf : SB \to SB'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., SB) & \xrightarrow{\varphi(B)} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(T., B) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., Sf)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(T., f)} \\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., SB') & \xrightarrow{\varphi(B')} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(T., B') \end{array}$$

On voit sans peine que les applications $B \rightsquigarrow SB$ et $f \rightsquigarrow Sf$ définissent un foncteur adjoint à T.

Lorsque $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux *catégories additives*, nous supposerons, conformément à nos conventions, que S et T sont des foncteurs additifs. Ce qui précède reste alors valable si l'on veut bien considérer que les foncteurs

$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(T., .)$ et $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., S.)$ prennent leurs valeurs dans la catégorie ***Ab*** des groupes abéliens. Cela implique que les applications $\psi(A, B)$ et $\varphi(A, B)$ sont linéaires. On a en outre la proposition suivante :

PROPOSITION 11. — *Soient* ***A*** *et* ***B*** *deux catégories abéliennes, T un foncteur (additif) de* ***A*** *dans* ***B***, *S un foncteur adjoint à T. Alors S est exact à gauche et T est exact à droite.*

Soit en effet

$$0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$$

une suite exacte de ***B***. On a le diagramme commutatif suivant (A est un objet arbitraire de ***A***) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, SB') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, SB) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(A, SB'') \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(A, B')} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(A, B)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(A, B'')} \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TA, B') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TA, B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TA, B'') \end{array}$$

La deuxième ligne est exacte et les flèches verticales représentent des bijections. Il s'ensuit que la première ligne est exacte et que S est exact à gauche. On démontre de façon analogue que T est exact à droite.

8. Équivalences de catégories. — Soient ***A*** et ***B*** deux catégories. Une *équivalence entre* ***A*** *et* ***B*** consiste en la donnée de deux foncteurs, $T : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ et $S : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$, et de deux isomorphismes de foncteurs, $\Psi : I_{\boldsymbol{A}} \to S \circ T$ et $\Phi' : I_{\boldsymbol{B}} \to T \circ S$. On suppose de plus que les morphismes $T\Psi : T \to TST$ et $\Phi' T : T \to TST$ coïncident.

Il résulte des conditions imposées à T, S, Ψ et Φ' que les morphismes fonctoriels $S\Phi' : S \to STS$ et $\Psi S : S \to STS$ coïncident également. Si Ψ' et Φ sont les isomorphismes fonctoriels inverses de Ψ et Φ', on voit donc que Ψ et Φ font de S un foncteur adjoint de T. En particulier, la donnée de T détermine S à un isomorphisme de foncteurs près. De même, les morphismes fonctoriels Ψ' et Φ' font de T un foncteur adjoint à S.

Soient ψ, ψ', φ et φ' les morphismes fonctoriels associés respectivement à Ψ, Ψ', Φ et Φ' comme cela a été expliqué dans le paragraphe précédent. La donnée de Ψ détermine ψ et donc φ qui est le morphisme fonctoriel inverse de ψ. On en déduit que si S et T sont donnés, la donnée de Ψ détermine Φ'; et réciproquement....

LEMME 1. — *Soit (T, S, Ψ, Φ') une équivalence entre* ***A*** *et* ***B*** :

a. Pour tout couple (M, N) d'objets de ***A***, *l'application $T(M, N)$ de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)$ dans $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TM, TN)$ est bijective.*

b. Tout objet P de ***B*** *est isomorphe à un objet de la forme TM.*

PROPOSITION 12. — *Si T est un foncteur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Il existe un foncteur $S : B \to A$ et des isomorphismes $\Psi : I_{\mathbf{A}} \to S \circ T$ et $\Phi' : I_{\mathbf{B}} \to T \circ S$ tels que (T, S, Ψ, Φ') soit une équivalence entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

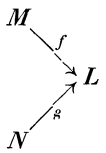
b. Le foncteur T satisfait aux conditions (a) et (b) du lemme 1.

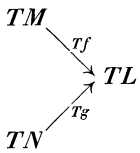
c. Il existe un foncteur $S : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tel que $S \circ T$ soit isomorphe au foncteur $I_{\mathbf{A}}$ et que $T \circ S$ soit isomorphe à $I_{\mathbf{B}}$.

Nous dirons dorénavant que *deux catégories $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont équivalentes* s'il existe un foncteur T satisfaisant aux assertions de la proposition précédente. Dans ce cas nous dirons aussi que T définit une équivalence entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Nous notons enfin que l'assertion (c) s'insère de façon commode dans le formalisme suivant :

Si $\mathfrak{V}$ est un univers dont l'univers $\mathfrak{U}$ est un élément, nous pouvons construire une nouvelle catégorie $\mathbf{E}$: les objets de $\mathbf{E}$ sont les catégories dont l'ensemble des morphismes appartient à $\mathfrak{V}$ (on identifie les objets aux morphismes identiques); si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux objets de $\mathbf{E}$, $\mathrm{Hom}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de foncteurs de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$, la composition se faisant de façon évidente. On remarquera que $\mathbf{E}$ n'est pas une $\mathfrak{U}$-catégorie. L'assertion (c) affirme que la classe des foncteurs isomorphes à T est un isomorphisme de la catégorie $\mathbf{E}$.

Pour finir, nous proposons au lecteur quelques exercices faciles, dont nous utiliserons librement les résultats : soit (T, S, Ψ, Φ') une équivalence entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Si f est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), Tf est un monomorphisme (resp. un épimorphisme). Si M est un générateur de $\mathbf{A}$ (resp. un objet projectif de $\mathbf{A}$), TM est un générateur de $\mathbf{B}$ (resp. un objet projectif de $\mathbf{B}$). Si P est le produit fibré du diagramme (1), TP est le produit fibré du diagramme (2); on dit aussi que T commute avec les produits fibrés. Le foncteur T « commute » aussi avec les sommes fibrées, les limites inductives.... D'une façon générale, les propriétés « homologiques » de deux catégories équivalentes sont les « mêmes ».

(1)


(2)


Les exercices précédents et la proposition 3 ont la conséquence qui suit :

PROPOSITION 13. — *Soit T un foncteur définissant une équivalence entre deux catégories additives $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Alors T est un foncteur additif. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux catégories abéliennes, T est de plus un foncteur exact.*

La dernière assertion résulte de la proposition 11.

9. **Catégories abéliennes ayant assez d'injectifs.** — Ce paragraphe est consacré à quelques résultats sur les objets injectifs d'une catégorie abélienne $\boldsymbol{B}$. Ces résultats sont liés à la notion de catégorie dérivée qui est due à CARTIER et dont nous présentons ici un « morceau » :

Soit $\boldsymbol{I}$ une catégorie additive et soit $\boldsymbol{M}$ la *catégorie des morphismes* de $\boldsymbol{I}$: un objet de $\boldsymbol{M}$ est un morphisme de $\boldsymbol{I}$; si $d : M \to N$ et $d' : M' \to N'$ sont deux objets de $\boldsymbol{M}$, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(d, d')$ est l'ensemble des couples (α, β), $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{I}}(M, M')$, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{I}}(N, N')$, tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{d} & N \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ M' & \xrightarrow{d'} & N' \end{array}$$

Il est bien connu qu'en définissant de la façon évidente la composition des morphismes, on fait de $\boldsymbol{M}$ une catégorie additive.

Avec les notations ci-dessus, nous dirons que (α, β) est *homotope à zéro* s'il existe un élément h de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{I}}(N, M')$ tel qu'on ait $\alpha = h \circ d$. Les morphismes homotopes à zéro forment un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(d, d')$ et nous désignons par $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(d, d')$ le quotient de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(d, d')$ par ce sous-groupe. Il est alors clair que les applications bilinéaires

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(d, d') \times \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(d', d'') \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(d, d'')$$

définissent par passage au quotient des applications bilinéaires

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(d, d') \times \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(d', d'') \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(d, d'').$$

Nous pouvons donc définir une nouvelle catégorie additive $\boldsymbol{KI}$: les objets de $\boldsymbol{KI}$ coïncident avec les morphismes de $\boldsymbol{I}$ (donc avec les objets de $\boldsymbol{M}$); si d et d' sont de tels morphismes, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{KI}}(d, d')$ est choisi égal à $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(d, d')$; les lois de composition, enfin, sont définies par passage au quotient à partir des lois de composition de $\boldsymbol{M}$.

Dans le cas qui nous intéresse, $\boldsymbol{I}$ est une sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{B}$ dont les objets sont des injectifs de $\boldsymbol{B}$. Nous désignons par Ker le foncteur $d \rightsquigarrow \mathrm{Ker}\, d$ de $\boldsymbol{M}$ dans $\boldsymbol{B}$. Si d et d' sont deux objets de $\boldsymbol{M}$, il est clair que les applications $\mathrm{Ker}(d, d')$ de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{M}}(d, d')$ dans $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(\mathrm{Ker}\, d, \mathrm{Ker}\, d')$ définissent, par passage au quotient, des applications de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(d, d')$ dans $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(\mathrm{Ker}\, d, \mathrm{Ker}\, d')$. Ces applications définissent en fait un foncteur (encore noté Ker !) de $\boldsymbol{KI}$ dans $\boldsymbol{B}$.

PROPOSITION 14. — *Soient $\boldsymbol{B}$ une catégorie abélienne, et $\boldsymbol{I}$ une sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{B}$ dont les objets sont des injectifs de $\boldsymbol{B}$. Supposons réalisée la condition suivante : pour tout objet M de $\boldsymbol{B}$, il existe un monomorphisme*

de M dans un objet de $\mathbf{I}$. Le foncteur Ker *définit alors une équivalence entre $\mathbf{KI}$ et $\mathbf{B}$.*

Disons rapidement comment construire un foncteur S adjoint à Ker.

Pour tout objet M de $\mathbf{B}$, on choisit une suite exacte

$$0 \to M \xrightarrow{f_M} I_0 M \xrightarrow{g_M} I_1 M,$$

où $I_0 M$ et $I_1 M$ sont des objets appartenant à $\mathbf{I}$. Pour tout morphisme $u : M \to N$, on choisit des morphismes u_0 et u_1 qui rendent commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f_M} & I_0 M & \xrightarrow{g_M} & I_1 M \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u_0} & & \downarrow{\scriptstyle u_1} \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f_N} & I_0 N & \xrightarrow{g_N} & I_1 N \end{array}$$

On voit facilement que l'image de (u_0, u_1) dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{KI}}(g_M, g_N)$ dépend seulement de u. Si cette image est notée Su et si SM désigne le morphisme g_M, les applications $M \to SM$ et $u \to Su$ définissent un foncteur adjoint à Ker.

Corollaire 1. — *Supposons réalisées les hypothèses de la proposition précédente. Si la catégorie $\mathbf{I}$ est équivalente au produit d'une famille $(\mathbf{I}_n)_{n\in E}$ de catégories additives, la catégorie $\mathbf{B}$ est équivalente au produit de la famille $(\mathbf{KI}_n)_{n\in E}$.*

Soit maintenant $\mathbf{C}$ une autre catégorie abélienne. Tout foncteur additif F de $\mathbf{I}$ dans $\mathbf{C}$ se prolonge d'une manière évidente en un foncteur $\mathbf{K}F$ de $\mathbf{KI}$ dans $\mathbf{KC}$. Par composition, on obtient un foncteur exact à gauche F' de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{B} \xrightarrow{S} \mathbf{KI} \xrightarrow{\mathbf{K}F} \mathbf{KC} \xrightarrow{\mathrm{Ker}} \mathbf{C}.$$

Réciproquement, si G est un foncteur de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{C}$, nous notons G' le composé du foncteur canonique de $\mathbf{I}$ dans $\mathbf{B}$ et de G.

Corollaire 2. — *Supposons réalisées les hypothèses de la proposition précédente. Un foncteur G de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{C}$ est exact à gauche si et seulement s'il est isomorphe à $(G')'$. Tout foncteur F de $\mathbf{I}$ dans $\mathbf{C}$ est isomorphe à $(F')'$.*

Le corollaire 2 montre que l'étude des foncteurs exacts à gauche de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{C}$ est équivalente à l'étude de tous les foncteurs additifs de $\mathbf{I}$ dans $\mathbf{C}$. Nous nous servirons de ce fait dans le corollaire 3 et au début du chapitre II.

Corollaire 3. — *Soient $\mathbf{B}$ (resp. $\mathbf{C}$) une catégorie abélienne, $\mathbf{I}$ (resp. $\mathbf{J}$) une sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}$ (resp. de $\mathbf{C}$) satisfaisant aux conditions de la*

proposition 14. *Un foncteur* G *de* $\mathbf{B}$ *dans* $\mathbf{C}$ *définit une équivalence entre ces deux catégories si les conditions suivantes sont réalisées : G est exact à gauche; GI est un objet de $\mathbf{J}$ pour tout objet I de $\mathbf{I}$; le foncteur $I \rightsquigarrow GI$ définit une équivalence entre $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$.*

Nous dirons dorénavant que $\mathbf{B}$ possède assez d'objets injectifs si la sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}$ qui est formée des objets injectifs satisfait à la condition de la proposition 14. Lorsque cela a lieu, la proposition 14 montre que la donnée de cette sous-catégorie pleine définit $\mathbf{B}$ à une équivalence près. La proposition 14 est donc utile chaque fois qu'on connaît les objets injectifs de $\mathbf{B}$ (*cf.* chap. IV).

Revenons-en aux hypothèses du corollaire 2. Avec les notations utilisées dans la preuve de la proposition 14, nous voyons que $G')'$ n'est autre que le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Ker}(Gg_M)$. Il s'ensuit que $(G')'$ est le $o^{\text{ième}}$ foncteur dérivé de G [6]. En outre, les morphismes Gf_M définissent un morphisme fonctoriel $\rho : G \to (G')' = R^0 G$ et le couple $(R^0 G, \rho)$ satisfait aux conditions de la proposition 15 :

Proposition 15. — *Soit $\mathbf{B}$ une catégorie abélienne possédant assez d'objets injectifs. Pour tout foncteur $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ de $\mathbf{B}$ dans une catégorie abélienne $\mathbf{C}$, il existe un foncteur $R^0 G$ et un morphisme $\rho : G \to R^0 G$ qui satisfont aux conditions suivantes :*

Le foncteur $R^0 G$ est exact à gauche; de plus, si $\sigma : G \to H$ est un morphisme de G dans un foncteur exact à gauche H, il existe un morphisme $\tau : R^0 G \to H$ et un seul tel qu'on ait $\sigma = \tau \circ \rho$.

Soit $\rho' : G \to R' G$ un morphisme fonctoriel satisfaisant au même problème universel que $\rho : G \to R^0 G$; il est clair qu'il existe alors un isomorphisme u de $R' F$ sur $R^0 F$ et un seul tel qu'on ait $\rho = u \circ \rho'$. La proposition 15 détermine donc $R^0 G$ à un isomorphisme fonctoriel près. Nous essaierons d'étendre ces résultats lorsque $\mathbf{B}$ ne possède pas assez d'objets injectifs.

Chapitre II.

Foncteurs exacts à gauche et enveloppes injectives.

D'après un résultat de Grothendieck [10], toute catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes possède assez d'objets injectifs. Nous commençons ici l'étude de ces objets injectifs. Nous montrons aussi comment on peut ramener l'étude de certaines catégories à l'étude d'une catégorie avec générateurs et limites inductives exactes.

1. Catégories de foncteurs. — Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories additives; *nous supposons que l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes de $\mathbf{C}$ sont des éléments de l'univers* $\mathfrak{U}$. Dans ces conditions, nous désignons par

Fonct($\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$), et nous appelons catégorie des foncteurs de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ dont les objets sont les foncteurs *additifs* de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ (*cf.* chap. I, § 3).

PROPOSITION 1. — *Avec les hypothèses que nous avons faites ci-dessus,* Fonct($\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$) *est une catégorie additive. Si* $\mathbf{D}$ *est une catégorie abélienne, il en va de même pour* Fonct($\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$). *Si* $\mathbf{D}$ *est une catégorie avec limites inductives* (*resp. avec limites inductives exactes, resp. avec limites projectives*), Fonct($\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$) *est une catégorie avec limites inductives* (*resp. avec limites inductives exactes, resp. avec limites projectives*).

Si E et F sont deux objets de Fonct($\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$), Hom(E, F) est évidemment un sous-ensemble du produit $\prod_{M \in \mathbf{OC}} \mathrm{Hom}(EM, FM)$. Ceci montre que Fonct($\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$) est une $\mathfrak{U}$-catégorie. Le reste est à peu près clair.

La suite de ce paragraphe est consacrée à l'étude de Fonct($\mathbf{C}$, $\mathbf{Ab}$) *quand* $\mathbf{C}$ *est une catégorie additive dont l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes appartiennent à* $\mathfrak{U}$. Nous désignons par $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$ l'anneau qui suit et qui n'a pas d'élément unité en général :

— Le groupe abélien sous-jacent à $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$ est la somme directe des groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ lorsque M et N parcourent les objets de $\mathbf{C}$.

— Soient $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(P, Q)$ deux éléments de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$. Le produit $f.g$ est le morphisme composé $f \circ g$ quand Q coïncide avec M. Dans le cas contraire $f.g$ est égalé à zéro.

Pour tout objet X de $\mathbf{C}$, le morphisme identique 1_X de X est un idempotent de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$. Si X et Y sont deux objets distincts de $\mathbf{C}$, les idempotents 1_X et 1_Y sont orthogonaux : $1_X . 1_Y = 1_Y . 1_X = 0$. Il s'ensuit que, pour tout $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$-module à gauche M, l'élément 1_X définit une projection de M sur un facteur direct $1_X(M)$. De plus, la somme des sous-groupes abéliens $1_X(M)$ est directe et elle est égale à $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].M$.

LEMME 1. — *Si* N *est un sous-module de* M (*resp.* Q *un quotient de* M), *et si* $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].M$ *est égal à* M, *alors* $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].N$ *est égal à* N (*resp.* $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].Q$ *est égal à* Q).

Un élément m de M appartient en effet à $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].M$ si et seulement s'il existe un nombre fini d'objets de $\mathbf{C}$, soient X, Y, ..., Z tels qu'on ait

$$m = 1_X.m + 1_Y.m + \ldots + 1_Z.m.$$

Lorsque cette condition est satisfaite pour tout élément de M, il en va de même pour N et Q.

Le lemme précédent nous permet de définir une nouvelle *catégorie abélienne* $\mathbf{A}$:

— Les objets de $\mathbf{A}$ sont les modules à gauche M sur $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$ tel que $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].M$ soit égal à M, et dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$.

— Si M et N sont des objets de $\mathbf{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N)$ est l'ensemble des applications $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$-linéaires de M dans N; la composition des morphismes se fait de la façon habituelle.

En particulier, le module à gauche sous-jacent à $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$ et les idéaux à gauche $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].1_X$ sont des objets de $\mathbf{A}$. Un morphisme φ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].1_X$ dans un objet M de $\mathbf{A}$ est déterminé par la donnée de l'élément $\varphi(1_X)$ de $1_X(M)$. Le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{Z}[\mathbf{C}].1_X, M)$ s'identifie donc à $1_X(M)$, et $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].1_X$ est un objet projectif de $\mathbf{A}$. Il en va de même de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$ qui est la somme directe des $\mathbf{Z}[\mathbf{C}].1_X$. D'où :

LEMME 2. — *Le module à gauche sous-jacent à* $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$ *est un générateur projectif de* $\mathbf{A}$.

PROPOSITION 2. — *Les catégories* $\mathbf{A}$ *et* $\mathrm{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$ *sont équivalentes.*

Nous allons construire des foncteurs

$$T : \mathbf{A} \to \mathrm{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab}) \qquad \text{et} \qquad S : \mathrm{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{A}$$

tels que $S \circ T$ et $T \circ S$ soient isomorphes respectivement aux fonctions identiques de $\mathbf{A}$ et de $\mathrm{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$.

Pour cela soit M un objet de $\mathbf{A}$. Pour tout objet X de $\mathbf{C}$, nous désignons par $(TM)X$ le groupe abélien $1_X(M)$ Pour tout morphisme $f : X \to Y$, nous désignons par $(TM)(f)$ l'application $\mathbf{Z}$-linéaire de $1_X(M)$ dans $1_Y(M)$ qui est induite par l'homothétie de M définie par f. Nous avons ainsi défini un foncteur TM de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ab}$. En outre, si $\varphi : M \to N$ est une application $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$-linéaire, φ applique $1_X(M)$ dans $1_X(N)$. Nous noterons $(T\varphi)X$ l'application de $1_X(M)$ dans $1_X(N)$ ainsi définie. Quand X parcourt les objets de $\mathbf{C}$, les applications $(T\varphi)X$ définissent évidemment un morphisme fonctoriel de TM dans TN. La vérification du lemme suivant est laissée au lecteur :

LEMME 3. — *Les applications* $M \to TM$, $\varphi \to T\varphi$ *définissent un foncteur* T *de la catégorie* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathrm{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$.

Réciproquement, soit F un objet de $\mathrm{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathbf{C}$ et $m = (m_X)$ un élément de $\sum_{X \in \mathbf{OC}} FX$, nous définissons un produit $f.m$ à l'aide de la formule

$$\text{projection de } f.m \text{ sur } FZ = \begin{cases} 0 & \text{si } Z \neq Y, \\ (Ff)(m_X) & \text{si } Z = Y. \end{cases}$$

La somme directe $\sum_{X \in \mathbf{OC}} FX$ se trouve ainsi munie d'une structure de module à gauche sur l'anneau $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$. Nous noterons SF ce module qui est évidemment un objet de $\mathbf{A}$. De même, si $\psi : F \to G$ est un morphisme fonctoriel, nous noterons $S\psi$ l'application linéaire

$$\sum_X \psi(X) : \quad \sum_X FX \to \sum_X GX.$$

LEMME 4. — *Les applications $F \to SF$, $\psi \to S\psi$ définissent un foncteur S de* Fonct$(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$ *dans* $\mathbf{A}$.

Il est clair que T et S satisfont aux conditions demandées. Ceci termine la preuve de la proposition 2. Le lemme 2 entraîne donc la proposition qui suit :

PROPOSITION 3. — *La catégorie* Fonct$(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$ *possède un générateur projectif.*

En effet, $\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$ est un générateur projectif de $\mathbf{A}$. Il en résulte que $T\mathbf{Z}[\mathbf{C}]$ est un générateur projectif de Fonct$(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$. Ce foncteur n'est d'ailleurs autre que le foncteur $Y \rightsquigarrow \sum_{X \in \mathbf{OC}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$.

2. Foncteurs exacts à gauche à valeurs dans une catégorie abélienne. — Nous supposons maintenant que $\mathbf{C}$ est une catégorie abélienne dont l'ensemble des morphismes et l'ensemble des objets appartiennent à $\mathfrak{U}$. Si $\mathbf{D}$ est une catégorie abélienne, nous voulons étudier ici la sous-catégorie pleine de Fonct$(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ dont les objets sont les foncteurs exacts à gauche de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$. Cette sous-catégorie pleine sera notée Sex$(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ (S comme sinister, ex comme exact).

PROPOSITION 4. — *Soit $\mathbf{C}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie abélienne dont l'ensemble des morphismes et l'ensemble des objets appartiennent à $\mathfrak{U}$. Soit $\mathbf{D}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes. Pour tout foncteur F de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ il existe un foncteur R^0F et un morphisme $\rho : F \to R^0F$ qui satisfont aux conditions suivantes :*

Le foncteur R^0F est exact à gauche; de plus, si $\sigma : F \to G$ est un morphisme de F dans un foncteur exact à gauche G, il existe un morphisme

$$\tau : \quad R^0F \to G$$

et un seul tel qu'on ait $\sigma = \tau \circ \rho$.

Nous avons déjà prouvé la proposition 4 lorsque $\mathbf{C}$ possède assez d'objets injectifs (*cf.* chap. I, proposition 15). Il est bien connu d'autre part qu'on

peut définir les foncteurs dérivés de F sous les hypothèses de la proposition 4. Dans cette étude, nous nous intéressons seulement au $o^{ième}$ foncteur dérivé de F; nous utilisons une méthode dont BUCHSBAUM se sert dans la construction des foncteurs satellites.

Quelques lemmes vont précéder la preuve de la proposition 4 : pour tout objet $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{C}$, nous considérons l'ensemble $\mathbf{S}_A$ des suites exactes de la forme

$$S : \quad o \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to o.$$

Si

$$S = (o \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to o) \qquad \text{et} \qquad S' = (o \to A \xrightarrow{u'} M' \xrightarrow{v'} N' \to o)$$

sont deux éléments de $\mathbf{S}_A$, on conviendra d'écrire $S \leqq S'$ s'il existe un diagramme du type

$$(\bigstar) \qquad \begin{array}{ccccccccc} o & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & o \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle n} & & \\ o & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \longrightarrow & o \end{array}$$

LEMME 1. — *La relation $S \leqq S'$ est une relation de préordre, filtrante à droite.*

Il est clair qu'on a affaire à une relation de préordre. Soient donc

$$S = (o \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to o) \qquad \text{et} \qquad S' = (o \to A \xrightarrow{u'} M' \xrightarrow{v'} N' \to o)$$

deux éléments de $\mathbf{S}_A$. Nous considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u'} & M' \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'_{M'}} \\ M & \xrightarrow{j_M} & M \,\mathbf{\Sigma}_A\, M' \end{array}$$

D'après la fin du paragraphe 7 (chap. I), j_M et j'_M sont des monomorphismes. On en déduit que la suite

$$S'' = (o \to A \xrightarrow{j_M \circ u} M \,\mathbf{\Sigma}_A\, M' \to \operatorname{Coker}(j_M \circ u) \to o)$$

appartient à $\mathbf{S}_A$ et qu'on a $S'' \geqq S$, $S'' \geqq S'$.

Si F est un foncteur de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{D}$, et si $S \leqq S'$, le diagramme $(\bigstar)$ entraîne l'égalité $(Fn) \circ (Fv) = (Fv') \circ (Fm)$. Il en résulte que Fm induit un morphisme f de $\operatorname{Ker}(Fv)$ dans $\operatorname{Ker}(Fv')$.

LEMME 2. — *Le morphisme f ne dépend pas du choix de m et de n.*

Soient en effet $m' : M \to M'$ un autre morphisme tel qu'on ait $u' = m' \circ u$; soit $n' : N \to N'$ l'unique morphisme tel que $n' \circ v$ soit égal à $v' \circ m'$. Alors

on a $(m' - m) \circ u = 0$; d'où l'existence d'un $w : N \to M'$ tel que $m' - m = w \circ v$. Il s'ensuit que Fm' est égal à $Fm + (Fw) \circ (Fv)$. Le lemme résulte de ce que $(Fw) \circ (Fv)$ s'annule sur $\operatorname{Ker}(Fv)$.

Nous notons désormais FS l'objet $\operatorname{Ker}(Fv)$ et $F(S', S)$ le morphisme f de $\operatorname{Ker}(Fv)$ dans $\operatorname{Ker}(Fv')$. Si $S' \leqq S$ et $S' \geqq S$, le lemme précédent montre que $F(S', S)$ est un isomorphisme dont l'inverse est $F(S, S')$. Il est donc licite de poser la définition

$$(RF)\, A = \varinjlim_{F \in \mathbf{S}_A} FS.$$

Donnons-nous en plus un morphisme $g : A \to A'$. Pour toute suite

$$S = \left(0 \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 0\right)$$

on a le diagramme commutatif et exact qui suit (fin du § 6, chap. I) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle j'_M} & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{j_{A'}} & A' \coprod_A M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Soit fS la suite de la deuxième ligne. Le morphisme Fj'_M induit évidemment un morphisme de FS dans $F(fS)$. Nous désignons par $F(f, S)$ le composé de ce morphisme et du morphisme canonique de $F(fS)$ dans $(RF)A'$. Le lecteur vérifiera les relations $F(f, S) = F(f, S') \circ F(S', S)$ si $S' \geqq S$. Par passage à la limite, les morphismes $F(f, S)$ définissent donc un morphisme $(RF)f$ de $(RF)A$ dans $(RF)A'$.

Lemme 3 :

a. Les applications $A \to (RF)A$ et $f \to (RF)f$ définissent un foncteur RF de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$.

b. RF est nul si et seulement si F vérifie la condition suivante : pour tout objet A de $\mathbf{C}$, FA est le sup *des* $\operatorname{Ker}(Fi)$ *lorsque i parcourt les monomorphismes de source A.*

c. Le foncteur $F \rightsquigarrow RF$ est exact à gauche.

d. Si $\varphi : F \to G$ est un morphisme fonctoriel et si $R(\operatorname{Coker}\varphi)$ est nul, alors $R(\operatorname{Coker} R\varphi)$ est nul.

e. Le foncteur $F \rightsquigarrow RF$ commute avec les limites inductives.

Nous laissons au lecteur la vérification de (a), (b), (e). Prouvons (c) : pour cela soit $0 \to F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F'' \to 0$ une suite exacte de foncteurs de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$. Pour tout objet A de $\mathbf{C}$ et tout élément S de $\mathbf{S}_A$,

$$S = \left(0 \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 0\right),$$

on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F'M & \xrightarrow{\varphi(M)} & FM & \xrightarrow{\psi(M)} & F''M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle F'v} & & \downarrow{\scriptstyle Fv} & & \downarrow{\scriptstyle F''v} & & \\ 0 & \longrightarrow & F'N & \xrightarrow{\varphi(N)} & FN & \xrightarrow{\psi(N} & F''N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Les morphismes $\varphi(M)$ et $\psi(M)$ induisent donc une suite exacte

$$0 \to F'S \to FS \to F''S$$

([4], lemme III, p. 32). L'assertion (c) résulte de cette suite exacte par passage à la limite inductive.

Pour la clarté de l'exposé, nous prouvons l'assertion (d) seulement lorsque $\boldsymbol{D}$ est la catégorie $\boldsymbol{Ab}$ des groupes abéliens; la condition $R(\mathrm{Coker}\,\varphi) = 0$ peut alors s'énoncer de la manière suivante : pour tout objet A de $\boldsymbol{C}$ et tout $a \in GA$, il existe un monomorphisme $i: A \to B$ et un $b \in FB$ tels qu'on ait

$$(Gi)\ (a) = \varphi(B)\ (b).$$

Nous allons voir que cette propriété est encore vraie quand on remplace F par RF, G par RG et φ par $R\varphi$:

Soit en effet a en élément de $(RG)A$. Il existe une suite exacte

$$S = \left(0 \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 0\right)$$

et un élément a' de GS dont l'image par l'application canonique de GS dans $(RG)A$ est a. Il existe donc aussi un monomorphisme $j: M \to B$ et un élément b' de FB tels qu'on ait $(Gj)\ (a') = \varphi(B)\ (b')$. Si b est l'image de b' dans $(RF)B$ et si $i = j \circ u$, on trouve l'égalité cherchée :

$$((RG)\,i)\ (a) = ((R\varphi)\ (B))\ (b).$$

Lemme 4. — *Si $g: A' \to A$ est un monomorphisme, il en va de même pour $(RF)g$.*

Associons en effet à toute suite $S = \left(0 \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 0\right)$ le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle g} & & \uparrow{\scriptstyle 1_M} & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{u \circ g} & M & \xrightarrow{p^M_{N'}} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où N' est le conoyau de $u \circ g$. Si $g^{-1}S$ désigne la suite de la seconde ligne, il est clair que les suites $g^{-1}S$ constituent un sous-ensemble cofinal de $\mathbf{S}_{A'}$. On en tire que $(RF)A'$ est égal à $\varinjlim_{S} F(g^{-1}S)$ et que $(RF)g$ est la limite inductive des monomorphismes canoniques de $F(g^{-1}S)$ dans FS. Ceci prouve le lemme.

LEMME 5. — *Nous supposons que pour tout monomorphisme g de $\mathbf{C}$, Fg est un monomorphisme. Alors :*

a. Les morphismes $F(S', S)$ sont des monomorphismes.

b. Le foncteur RF est exact à gauche.

Pour prouver (a) nous utilisons les notations du lemme 1. Si $S' \geqq S$, la suite exacte

$$S'' = \left(0 \to A \xrightarrow{j_M \circ u} M \,\Sigma_A M' \to \operatorname{Coker} j_M \circ u \to 0\right)$$

« domine » à la fois S et S' (i. e. $S'' \geqq S$, $S'' \geqq S'$) ; en outre $F(S'', S)$ est induit par le morphisme Fj_M. On en tire que $F(S'', S) = F(S'', S') \circ F(S', S)$ et $F(S', S)$ sont des monomorphismes.

Prouvons (b) : soient $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ une suite exacte de $\mathbf{C}$ et $S = \left(0 \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 0\right)$ un élément de $\mathbf{S}_A$. On a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1_{A'}} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{u \circ f} & M & \xrightarrow{j_M} & M\,\Sigma_A A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow & & \\
 & & & & N & \xrightarrow{1_N} & N & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Avec des notations déjà utilisées, on tire de là le diagramme exact

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & F(f^{-1}S) & \longrightarrow & FS & \longrightarrow & F(gS) \\
 & & \uparrow\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F(f^{-1}S) & \longrightarrow & FM & \longrightarrow & F(M\,\Sigma_A A'')
\end{array}$$

Par passage à la limite, il en résulte une suite exacte

$$0 \to (RF)A' \to (RF)A \to \varinjlim_S F(gS).$$

De plus, l'assertion (a) montre que le morphisme canonique de $\varinjlim_S F(gS)$ dans $(RF)A''$ est un monomorphisme ; ceci termine la preuve.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition 4 : soient A un objet de $\mathbf{C}$ et σ un morphisme fonctoriel de F dans un foncteur exact à gauche G. Pour toute suite exacte

$$S = \left(0 \to A \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \to 0\right),$$

on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & FM & \xrightarrow{Fv} & FN \\ & & & & {\scriptstyle \sigma(M)}\downarrow & & {\scriptstyle \sigma(N)}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & GA & \xrightarrow{Gu} & GM & \xrightarrow{Gv} & GN \end{array}$$

Soit $\rho_F(A, S)$ le morphisme de FA dans FS qui est induit par Fu. Il existe un morphisme $\tau_F(A, S)$ et un seul dont le composé avec $\rho_F(A, S)$ est égal à $\sigma(A)$. Par passage à la limite inductive on voit qu'il y a un morphisme $\tau_F(A)$ et un seul de $(RF)A$ dans GA dont le composé avec $\rho_F(A) = \varinjlim_S \rho_F(A, S)$ est égal à $\sigma(A)$. Si le foncteur RF est exact à gauche, la proposition est prouvée. Dans le cas contraire on recommence l'opération. Les lemmes 4 et 5 montrent que le foncteur $R(RF)$ est exact à gauche. Dans tous les cas on peut donc choisir R^0F égal à $R(RF)$, ρ étant égal à $\rho_{RF} \circ \rho_F$.

PROPOSITION 5. — *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition 4. La catégorie* Sex $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ *des foncteurs exacts à gauche de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{D}$ *est une catégorie abélienne avec limites inductives exactes. Si* $\mathbf{D}$ *est une catégorie avec limites projectives, il en va de même de* Sex $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$.

Il est clair que Sex $(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ est une catégorie additive. Si $\varphi : F \to G$ est un morphisme de foncteurs exacts à gauche, $\operatorname{Ker}\varphi$ est le foncteur exact à gauche $M \rightsquigarrow \operatorname{Ker}\varphi(M)$. De même, si H est le foncteur $M \rightsquigarrow \operatorname{Coker}\varphi(M)$, le foncteur exact à gauche $\operatorname{Coker}\varphi$ n'est autre que R^0H. Ceci démontre que l'axiome C Ab 1 est vérifié.

Montrons que l'axiome C Ab 2 est vérifié : pour cela, nous notons K et L les foncteurs $M \rightsquigarrow \operatorname{Coim}\varphi(M)$ et $M \rightsquigarrow \operatorname{Im}\varphi(M)$. Les morphismes canoniques $\mathfrak{I}(M)$ de $\operatorname{Coim}\varphi(M)$ dans $\operatorname{Im}\varphi(M)$ définissent un isomorphisme fonctoriel $\mathfrak{I}$ de K sur L. En outre, on a des suites exactes de foncteurs :

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to F \to K \to 0, \qquad 0 \to L \to G \to H \to 0.$$

Comme $R^0 = R \circ R$ est un foncteur exact à gauche, on a les suites exactes :

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to F \to R^0K, \qquad 0 \to R^0L \to G \to R^0H.$$

La deuxième suite exacte montre que R^0L n'est autre que $\operatorname{Im}\varphi$; de plus, R^0K est égal $\operatorname{Coim}\varphi$ et $R^0\mathfrak{I}$ est le morphisme canonique de $\operatorname{Coim}\varphi$ dans $\operatorname{Im}\varphi$: c'est bien un isomorphisme.

Le reste de la proposition est clair.

COROLLAIRE. — *Le foncteur* $F \rightsquigarrow R^0F$ *est un foncteur exact de* $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ *dans* $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$.

Nous savons déjà que $F \rightsquigarrow R^0F$ est un foncteur exact à gauche. Il suffit donc de prouver que $R^0\varphi$ est un épimorphisme de $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ si φ est un épimorphisme de $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$. Mais l'égalité $\mathrm{Coker}\varphi = 0$ [dans la catégorie $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$] entraîne, d'après le lemme 3 (d), les égalités $R(\mathrm{Coker}R\varphi) = 0$ et $R(\mathrm{Coker}R(R\varphi)) = R(\mathrm{Coker}R^0\varphi) = 0$.

Lorsque $\boldsymbol{C}$ possède assez d'objets injectifs, la proposition 5 résulte aussi de la proposition 1 : en effet, si $\boldsymbol{I}$ désigne la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{C}$ formée des objets injectifs de $\boldsymbol{C}$, les catégories $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ et $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{D})$ sont équivalentes (*cf.* chap. I, corollaire 2 de la proposition 14).

3. Foncteurs exacts à gauche à valeurs dans les groupes abéliens. — Dans ce paragraphe, $\boldsymbol{C}$ est toujours une catégorie dont l'ensemble des morphismes et l'ensemble des objets appartiennent à $\mathfrak{U}$. Nous allons compléter l'étude du paragraphe précédent lorsque $\boldsymbol{D}$ est la catégorie $\boldsymbol{Ab}$ des groupes abéliens.

Si X est un objet de $\boldsymbol{C}$, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X, .)$ est un foncteur exact à gauche de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ab}$ que nous noterons aussi $\dot{X}$. Avec ces notations, le foncteur $X \rightsquigarrow \dot{X}$ de $\boldsymbol{C}^0$ dans $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$ est lui-même exact à gauche.

PROPOSITION 6. — *Le foncteur* $X \rightsquigarrow \dot{X}$ *est un foncteur exact de* $\boldsymbol{C}^0$ *dans* $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$. *Les foncteurs* $\dot{X}$ *forment une famille de générateurs de* $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$.

Nous savons déjà que $X \rightsquigarrow \dot{X}$ est un foncteur exact à gauche de $\boldsymbol{C}^0$ dans $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$. Il reste à prouver que tout monomorphisme $u : X \to X'$, induit un épimorphisme $\dot{u} : \dot{X}' \to \dot{X}$. Cela signifie que $R^0(\mathrm{Coker}\dot{u})$ ou $R(\mathrm{Coker}\dot{u})$ sont nuls, ce qui peut s'énoncer ainsi : pour tout objet A de $\boldsymbol{C}$ et tout $a \in \dot{X}A$, il existe un monomorphisme $i : A \to B$ et un $b \in \dot{X}'B$ tels qu'on ait

$$(\dot{X}i)(a) = \dot{u}(B)(b).$$

Cette dernière assertion est à peu près claire. Enfin, la deuxième partie de la proposition n'offre aucune difficulté, car les $\dot{X}$ forment déjà une famille de générateurs de $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$.

COROLLAIRE 1. — *Tout objet injectif* F *de* $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$ *est un foncteur exact de* $\boldsymbol{C}$ *dans* $\boldsymbol{Ab}$.

En effet, si F est un objet injectif, le foncteur $X \rightsquigarrow FX$ est le composé de deux foncteurs exacts $X \rightsquigarrow \dot{X}$ et $G \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(G, F)$.

COROLLAIRE 2. — *Dans la catégorie* $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$ *tout sous-objet d'un foncteur représentable est borne supérieure de foncteurs représentables.*

Soient en effet Y un objet de $\boldsymbol{C}$, et $i : F \to \dot{Y}$ un monomorphisme non nul de $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$. D'après la proposition 6, il existe un morphisme non nul $\varphi : \dot{X} \to F$; de plus $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Im}\, i \circ \varphi$ est représentable, ce qui prouve que F contient des sous-objets représentables non nuls. Je dis que la borne supérieure G de ces sous-objets est F : dans le cas contraire on pourrait en effet choisir φ de telle façon que $\mathrm{Im}\,\varphi$ ne soit pas sous-objet de G; ceci est absurde.

4. Catégories nœthériennes. — Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie abélienne. Un objet M de $\boldsymbol{C}$ est dit *nœthérien* (resp. *artinien*) si toute suite croissante (resp. décroissante) de sous-objets de M est stationnaire. Le lemme suivant est facile à prouver :

LEMME 1. — *Soient M un objet de $\boldsymbol{C}$, N un sous-objet de M. Alors M est nœthérien (resp. artinien) si et seulement si N et M/N sont nœthériens (resp. artiniens).*

LEMME 2. — *Soient $\boldsymbol{C}$ une catégorie avec générateurs et limites inductives exactes, M un objet nœthérien de C, $(P_i)_{i\in I}$ une famille filtrante croissante de sous-objets d'un objet P ($I \in \mathfrak{U}$). Alors l'application*

$$\varphi_M : \sup_i \mathrm{Hom}(M, P_i) \to \mathrm{Hom}\Big(M, \sup_i P_i\Big)$$

est bijective.

Il suffit de montrer que φ_M est surjectif. Soit donc u un morphisme de M dans $\sup_i P_i$. L'égalité $u^{-1}\big(\sup_i P_i\big) = \sup_i u^{-1}(P_i)$ montre que $u^{-1}(P_i)$ est égal à M pour i assez grand. Ceci prouve le lemme.

On démontre de la même manière l'énoncé dual :

LEMME 3. — *Soient $\boldsymbol{C}$ une catégorie avec cogénérateurs et limites projectives exactes, M un objet artinien de $\boldsymbol{C}$, $(P_i)_{i\in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-objets d'un objet P ($I \in \mathfrak{U}$). Alors l'application*

$$\varphi_M : \sup_i \mathrm{Hom}(P/P_i, M) \to \mathrm{Hom}\Big(P/\inf_i P_i, M\Big)$$

est bijective.

Nous dirons désormais qu'*une catégorie abélienne $\boldsymbol{C}$ est nœthérienne* (resp. *artinienne*) si les conditions suivantes sont réalisées :

— Tout objet de $\boldsymbol{C}$ est nœthérien (resp. artinien).

— Il existe une famille $(M_i)_{i\in I}$ d'objets de $\boldsymbol{C}$ telle que I soit élément de $\mathfrak{U}$ et que tout objet de $\boldsymbol{C}$ soit isomorphe à un objet de la famille.

La deuxième condition assure simplement que l'univers $\mathfrak{U}$ a été choisi assez grand. Elle entraîne que toute catégorie nœthérienne (resp. artinienne) est équivalente à une catégorie nœthérienne (resp. artinienne) dont l'ensemble des objets appartient à $\mathfrak{U}$.

Une catégorie abélienne qui est à la fois nœthérienne et artinienne sera dite *finie* : tous les objets d'une telle catégorie sont de longueur finie.

Nous dirons qu'une catégorie abélienne $\boldsymbol{C}$ est *localement nœthérienne* si les conditions suivantes sont réalisées :

— $\boldsymbol{C}$ est une catégorie avec limites inductives exactes.

— Il existe une famille $(M_i)_{i\in I}$ de générateurs nœthériens de $\boldsymbol{C}$ dont l'ensemble d'indices I est élément de $\mathfrak{U}$.

La deuxième condition signifie que les objets nœthériens de $\boldsymbol{C}$ forment une catégorie nœthérienne, et que tout objet M est borne supérieure de ses sous-objets nœthériens. S'il existe une famille $(M_i)_{i\in I}$ de générateurs de longueur finie, nous dirons que $\boldsymbol{C}$ est *localement finie*.

Soit maintenant $\boldsymbol{C}$ une catégorie artinienne et supposons, pour simplifier, que l'ensemble $\boldsymbol{OC}$ des objets de $\boldsymbol{C}$ est élément de $\mathfrak{U}$. Si X est un objet de $\boldsymbol{C}$, toute famille filtrante croissante de sous-objets représentables de X contient un élément maximal. Le corollaire 2 de la proposition 6 entraîne que tout sous-objet de X appartenant à $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$ est représentable. Alors tout quotient d'un foncteur représentable est représentable, tout foncteur représentable est nœthérien, tout foncteur est borne supérieure de foncteurs représentables, tout foncteur nœthérien est représentable.

Proposition 7. — *Si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie artinienne*, $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$ *est une catégorie localement nœthérienne.*

Nous avons déjà établi la proposition quand l'ensemble $\boldsymbol{OC}$ appartient à $\mathfrak{U}$. Dans le cas général $\boldsymbol{C}$ est équivalente à une catégorie artinienne $\boldsymbol{C}'$ telle que $\boldsymbol{OC}'$ appartienne à $\mathfrak{U}$. De plus la catégorie $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ab})$ est équivalente à $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{Ab})$. La proposition en résulte.

Théorème 1 (*cf.* [11], [19]. — *Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie nœthérienne. Il existe une catégorie localement nœthérienne $\boldsymbol{D}$ telle que $\boldsymbol{C}$ soit équivalente à la catégorie des objets nœthériens de $\boldsymbol{D}$. En outre cette condition détermine $\boldsymbol{D}$ à une équivalence près.*

En effet, la catégorie duale $\boldsymbol{C}^0$ est artinienne. Il résulte des remarques précédentes que $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ab})$ est une catégorie localement nœthérienne et que le foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(., X)$ définit une équivalence de $\boldsymbol{C}$ avec la catégorie formée des objets nœthériens de $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ab})$.

Il reste à démontrer l'unicité de $\boldsymbol{D}$ en montrant que $\boldsymbol{D}$ est nécessairement équivalente à la catégorie $\mathrm{Sex}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ab})$. Nous supposerons pour simplifier que $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des objets nœthériens de $\boldsymbol{D}$. Nous associons alors à tout

objet X de $\mathbf{D}$ le foncteur exact à gauche $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Y, X)$ de $\mathbf{C}^0$ dans $\mathbf{Ab}$; ceci définit un foncteur $T : X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\,.\,, X)$ de $\mathbf{D}$ dans $\mathrm{Sex}(\mathbf{C}^0, \mathbf{Ab})$. On achève la preuve en montrant que T définit une équivalence :

— Pour cela, on montre d'abord que tout objet F de $\mathrm{Sex}(\mathbf{C}^0, \mathbf{Ab})$ est isomorphe à un foncteur du type $TX = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\,.\,, X)$: ceci est évidemment vrai lorsque F est nœthérien; dans le cas général, l'ensemble des sous-objets nœthériens de F peut être indexé par un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$. Il en résulte l'existence d'un système inductif d'objets nœthériens de $\mathbf{D}$, soit $(X_i, u_{ji})_{i,j \in J}$ tel que J soit élément de $\mathfrak{U}$, que les u_{ji} soient des monomorphismes, et que F soit isomorphe à la limite inductive des foncteurs TX_i. Si X est la limite inductive des X_i, l'égalité

$$T\left(\sup_i X_i\right) = \sup_i TX_i \quad \text{(lemme 2)}$$

montre que F est isomorphe à TX.

— On démontre ensuite l'égalité $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Z) = \mathrm{Hom}(TX, TZ)$: si X et Z sont nœthériens, cela résulte du corollaire 1 de la proposition 1 (chap. I). On passe de là au cas où X est nœthérien et Z quelconque : si Z' est un sous-objet nœthérien de Z, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Z') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(X,\, i_{Z'}^{Z})} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Z) \\ \downarrow{\scriptstyle T(X, Z')} & & \downarrow{\scriptstyle T(X, Z)} \\ \mathrm{Hom}(TX, TZ') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(TX,\, Ti_{Z'}^{Z})} & \mathrm{Hom}(TX, TZ) \end{array}$$

L'application $T(X, Z')$ est un isomorphisme. Par passage à la limite inductive sur les sous-objets nœthériens de Z, on voit que $T(X, Z)$ est bijectif (lemme 2). Le cas général se prouve alors par un argument de même type [si X et Z sont arbitraires, considérer le système projectif formé de $\mathrm{Hom}(X', Z)$ où X' parcourt les sous-objets nœthériens de X].

Lemme 4. — *Un foncteur F de* $\mathrm{Sex}(\mathbf{C}^0, \mathbf{Ab})$ *est exact si et seulement si F est un objet injectif de* $\mathrm{Sex}(\mathbf{C}^0, \mathbf{Ab})$. (On suppose toujours la catégorie $\mathbf{C}$ nœthérienne.)

Le corollaire 2 de la proposition 6 prouve une moitié du lemme. Réciproquement, supposons F exact. Nous avons vu que les foncteurs $\dot{X}$ forment une famille de générateurs et que tout sous-objet de $\dot{X}$ est représentable ($\mathbf{C}$ est une catégorie nœthérienne). Tout monomorphisme $i : G \to \dot{X}$ induit donc une surjection de $FX = \mathrm{Hom}(\dot{X}, F)$ sur $\mathrm{Hom}(G, F)$. L'assertion résulte par conséquent d'un lemme de Grothendieck ([10], lemme 1 du théorème 1.10.1).

Dans l'équivalence entre $\mathbf{D}$ et $\mathrm{Sex}(\mathbf{C}^0, \mathbf{Ab})$, les objets injectifs de $\mathbf{D}$ correspondent aux foncteurs exacts et les limites inductives de $\mathbf{D}$ correspondent aux limites inductives de foncteurs. On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. — *Toute limite inductive d'objets injectifs de $\mathbf{D}$ est un objet injectif. Si $(X_i, u_{ji})_{i,j\in J}$ est un système inductif de $\mathbf{D}$ et si Y est un objet nœthérien, on a l'égalité*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}\Big(Y, \varinjlim_i X_i\Big) = \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Y, X_i).$$

COROLLAIRE 2. — *Toute catégorie localement nœthérienne est une catégorie avec limites projectives.*

Car il en est ainsi pour la catégorie $\mathrm{Sex}(\mathbf{C}^0, \mathbf{Ab})$.

Nous laissons au lecteur le soin de formuler les énoncés duaux des énoncés précédents.

5. **Enveloppes injectives dans les catégories abéliennes** [8]. — Soient $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne et M un objet de $\mathbf{C}$. Une *extension essentielle* de M est un monomorphisme $i : M \to P$ qui vérifie la condition suivante : si f est un morphisme de source P et si $f \circ i$ est un monomorphisme, alors f est un monomorphisme.

Il revient au même de dire qu'un sous-objet Q de P est nul si $Q \cap i(M)$ est nul. Si M est un sous-objet de P, et si i est le monomorphisme canonique de M dans P, nous dirons que P est extension essentielle de M.

LEMME 1. — *Soient i et j deux monomorphismes, $i : M \to P$, $j : P \to Q$. Alors $j \circ i$ est une extension essentielle de M si et seulement si j est une extension essentielle de P et i une extension essentielle de M.*

Supposons en effet que $j \circ i$ soit extension essentielle de M : si f est monomorphisme de source Q et si $f \circ j$ est un monomorphisme, alors $f \circ i$ est un monomorphisme; on en tire que f est un monomorphisme et que j est une extension essentielle de P.

Soit maintenant R un sous-objet de P tel que $R \cap i(M) = 0$; soit f le morphisme canonique de Q sur $Q/j(R)$. Dans ces conditions, $f \circ j \circ i$ est un monomorphisme et R est nul. Ceci montre que i est une extension essentielle de M.

La réciproque est claire.

LEMME 2. — *Soient deux extensions essentielles $i : M \to P$, $j : N \to Q$. Le morphisme $i \oplus j : M \oplus N \to P \oplus Q$ est une extension essentielle de $M \oplus N$.*

Nous pouvons supposer, pour simplifier, que M et N sont des sous-objets de P et Q, avec $i = i_M^P$, $j = i_N^Q$. Soit R un sous-objet non nul de $P \oplus Q$. Alors l'un des objets $q_P(R)$ ou $q'_Q(R)$ n'est pas nul. Si $q_P(R)$ n'est pas nul,

il en va de même de $q_P(R) \cap M$ et de $R_1 = q_P^{-1}(M) \cap R$. Si R_1 est contenu dans $q_Q'^{-1}(N)$, nous avons montré que $R \cap (M \oplus N)$ n'est pas nul. Dans le cas contraire, $q_Q'(R_1)$ n'est pas nul et « coupe » N; le sous-objet $R_2 = q_Q'^{-1}(N) \cap R_1$ ne peut donc être nul. Dans tous les cas, un sous-objet non nul de $P \oplus Q$ « coupe » $M \oplus N$, ce qu'il fallait prouver.

Un sous-objet N de M est dit *irréductible dans* M si N est différent de M et si, pour tout couple (P, Q) de sous-objets de M contenant N, la relation $P \cap Q = N$ entraîne $P = N$ ou $Q = N$. Il revient au même de dire que M/N est extension essentielle de tout sous-objet non nul. Si O est irréductible dans M, on dit aussi que M est *coirréductible*.

Considérons un objet M de $\boldsymbol{C}$ et r sous-objets $N_1, N_2, \ldots, N_r$. Soient p_l l'épimorphisme canonique de M sur M/N_l et q_l la projection canonique de $M/N_1 \oplus M/N_2 \oplus \ldots \oplus M/N_r$ sur le $l^{\text{ième}}$ facteur M/N_l. Il existe un morphisme u de M dans $M/N_1 \oplus \ldots \oplus M/N_r$ et un seul tel que $q_l \circ u$ soit égal à p_l pour tout l.

LEMME 3. — *Si les sous-objets N_l sont irréductibles dans M, si* O *est intersection des N_l et n'est pas intersection de moins de r d'entre les N_l, alors u est une extension essentielle de M.*

Soit en effet P_l l'intersection des N_m pour $m \neq l$. Les morphismes $q_m \circ u$ « annulent » P_l si $m \neq l$ et $q_l \circ u$ induit un monomorphisme u_l de P_l dans M/N_l. Les monomorphimes canoniques de P_l dans M induisent un morphisme v de la somme directe $\bigoplus_l P_l$ dans M; de plus, il est clair que $u \circ v$ n'est autre que le morphisme $\bigoplus_l u_l$ de $\bigoplus_l P_l$ dans $\bigoplus_l M/N_l$. Comme u_l est une extension essentielle de P_l pour tout l, les lemmes précédents montrent que $\bigoplus_l u_l$, u et v sont des extensions essentielles.

Si I est un objet injectif de $\boldsymbol{C}$, tout monomorphisme $u : I \to P$ induit un isomorphisme de I sur un facteur direct de P. Si Q est un supplémentaire de $u(I)$, l'intersection $Q \cap u(I)$ est nulle. Il en résulte que u ne peut être une extension essentielle de I que si u est un isomorphisme. Nous dirons désormais qu'un monomorphisme $i : M \to I$ est une *enveloppe injective* de M si i est une extension essentielle de M et si I est un objet injectif de $\boldsymbol{C}$.

PROPOSITION 8. — *Soient $i : M \to I$ une enveloppe injective de M et $j : M \to J$ un monomorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. Le morphisme j est une enveloppe injective de M.

b. Le morphisme j est une extension essentielle de M et toute extension essentielle de J est un isomorphisme.

c. L'objet J est injectif; en outre, pour tout monomorphisme h de M dans un injectif H et pour tout morphisme l de H dans J tel que $l \circ h = j$, l est un épimorphisme.

Si ces conditions sont vérifiées, il existe un isomorphisme u de J sur I tel que $u \circ j = i$.

L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est claire. Prouvons que (b) entraîne (a) : comme I est injectif, il existe un morphisme u de J dans I tel que $u \circ j = i$; comme j est une extension essentielle, u est un monomorphisme, donc une extension essentielle d'après le lemme 1 ; il en résulte que u est un isomorphisme.

Prouvons que (a) entraîne (c) : comme H est injectif, il existe un morphisme v de I dans H tel que $v \circ i = h$. Le morphisme $l \circ v$ est un monomorphisme de I dans J, donc une extension essentielle de I, donc un isomorphisme. Il s'ensuit que l est un épimorphisme.

Réciproquement, (c) entraîne (a) : car tout morphisme v de I dans J tel que $j = v \circ i$ est forcément un isomorphisme.

La dernière assertion a été prouvée en cours de route.

Si $i : M \to I$ est une enveloppe injective de M, la proposition précédente montre que l'objet I est déterminé à un isomorphisme près. Bien qu'en général cet isomorphisme ne soit pas unique, nous dirons parfois de façon impropre que I est l'enveloppe injective de M. Si $j : N \to J$ est une deuxième enveloppe injective, nous dirons que M et N ont même enveloppe injective si I est isomorphe à J.

PROPOSITION 9. — *Soient $M_1, \ldots, M_r$, r objets de $\mathbf{C}$; pour tout entier ι compris entre 1 et r, soit $u_\iota : M_\iota \to I_\iota$ une enveloppe injective de M_ι. Alors le morphisme $\bigoplus_\iota u_\iota$ de $\bigoplus_\iota M_\iota$ dans $\bigoplus_\iota I_\iota$ est une enveloppe injective de $\bigoplus_\iota M_\iota$.*

En effet, tout produit direct d'objets injectifs est un objet injectif : ceci montre que $\bigoplus_\iota I_\iota$ est un objet injectif. De plus, le lemme 2 montre que $\bigoplus_\iota u_\iota$ est une extension essentielle.

Dans le corollaire suivant nous utilisons les notations du lemme 3.

COROLLAIRE. — *Supposons vérifiées les hypothèses du lemme 3 et soit, pour tout i, u_ι une enveloppe injective de M/N_ι. Alors $(\bigoplus_\iota u_\iota) \circ u$ est une enveloppe injective de M.*

Le corollaire précédent découvre le lien qu'il y a entre la notion d'enveloppe injective et la décomposition de O comme intersection de sous-modules irréductibles dans M.

Nous dirons désormais que $\mathbf{C}$ est une *catégorie avec enveloppes injectives* si, pour tout objet M, il existe une enveloppe injective de M.

PROPOSITION 10. — *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

a. $\mathbf{C}$ est une catégorie avec enveloppes injectives.

b. Pour tout objet M de $\mathbf{C}$, il existe un monomorphisme de M dans un objet injectif; de plus, si M est un sous-objet d'un objet N, il existe un sous-objet Q de N, tel que $M \cap Q$ soit nul, et qui est maximal parmi les sous-objets de N satisfaisant à cette condition.

$(a) \Rightarrow (b)$: Car si M est un sous-objet de N et si $i : M \to I$ est une enveloppe injective de M, il existe un morphisme φ de N dans I tel que $i = \varphi \circ i_M^N$. Il suffit alors de poser $Q = \operatorname{Ker}\varphi$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Soit en effet j un monomorphisme de M dans un injectif J; soit Q un sous-objet de J qui est maximal pour l'égalité $Q \cap j(M) = 0$. De même, soit I un sous-objet de J, contenant M et maximal pour l'égalité $I \cap Q = 0$ (pour voir qu'un tel I existe, considérer le quotient J/M). Si p est l'épimorphisme canonique de J sur J/Q, $p \circ j$ est une extension essentielle de M et p induit un isomorphisme de I sur $p(I)$; l'isomorphisme réciproque se prolonge en un monomorphisme h de J/Q dans J; alors $h(J/Q)$ est extension essentielle de I. Donc I est égal à $h(J/Q)$; on a $I + Q = J$, $I \cap Q = 0$ et le monomorphisme de M dans I qui est induit par j est une enveloppe injective de M.

PROPOSITION 11 [17]. — *Soient* $\mathbf{C}$ *une catégorie abélienne avec enveloppes injectives, M un objet non nul de* $\mathbf{C}$ *et $i : M \to I$ une enveloppe injective de M. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. M est coirréductible.

b. I est indécomposable.

c. I est l'enveloppe injective de tout sous-objet non nul de I.

d. L'anneau des endomorphismes de I est un anneau local.

L'équivalence des assertions (a), (b), (c) est claire. Prouvons simplement que (b) et (c) entraînent (d); en effet, si $u : I \to I$ est un monomorphisme, $u(I)$ est facteur direct de I; l'assertion (b) entraîne donc que u est un automorphisme. Il suffit par conséquent de montrer que $\operatorname{Ker} u \neq 0$ et $\operatorname{Ker} v \neq 0$ entraînent $\operatorname{Ker}(u + v) \neq 0$: mais $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v \neq 0$ d'après (c) et $\operatorname{Ker}(u + v)$ contient cette intersection.

COROLLAIRE. — *Soient M et N deux objets coirréductibles d'une catégorie avec enveloppes injectives. Alors M et N ont même enveloppe injective si et seulement si N contient un sous-objet M', non nul et isomorphe à un sous-objet N' de N.*

Si N est un sous-objet de M, on appelle parfois *complément de N dans M* tout sous-objet Q de M qui est maximal pour l'égalité $M \cap Q = 0$. Si un tel Q existe, les compléments de Q qui contiennent N sont les éléments maximaux de l'ensemble des sous-objets de M qui sont extension essentielle de N. Cette situation est souvent mise à profit. En particulier le lecteur vérifiera que les facteurs directs d'un objet injectif I coïncident avec les sous-objets de I « qui sont complément d'un de leurs compléments ».

PROPOSITION 12. — *Soient* $\mathbf{C}$ *une catégorie abélienne avec enveloppes injectives, M un objet de* $\mathbf{C}$, *N un sous-objet de M. Deux compléments de N dans M ont même enveloppe injective. Si Q est un complément de N*

dans M, l'enveloppe injective de M est isomorphe à la somme directe de l'enveloppe injective de N et de l'enveloppe injective de Q.

Soient en effet Q et Q' deux compléments de N dans M, et soit P un élément maximal de l'ensemble des sous-objets de M qui sont extension essentielle de N. Alors P est un complément à la fois de Q et de Q'. Il en résulte que Q et Q' ont même enveloppe injective que M/P, ce qui prouve la première assertion. D'autre part $N+Q$ est isomorphe à la somme directe $N \oplus Q$ et M est extension essentielle de $N+Q$. Il s'ensuit que M a même enveloppe injective que $N \oplus Q$; d'où la preuve grâce à la proposition 9.

Nous laissons au lecteur la recherche des énoncés duaux des énoncés précédents. Disons simplement qu'un *revêtement essentiel* de M est un épimorphisme $p : P \to M$ qui vérifie la condition suivante : si f est un morphisme de but P, et si $p \circ f$ est un épimorphisme, alors f est un épimorphisme. Il revient au même de dire qu'un sous-objet Q' de P est égal à P pourvu que $Q' + \mathrm{Ker}\, p$ soit égal à P.

La notion duale de celle d'enveloppe injective est la notion d'*enveloppe projective*. De même, si M est le quotient de P par un sous-objet M', un complément de M est un quotient P/Q' tel que $Q' + M'$ soit égal à P et que Q' soit minimal parmi les objets de P satisfaisant à cette condition.

6. Catégories avec générateurs et limites inductives exactes. — Dans ce paragraphe, nous supposons que $\mathbf{C}$ est une catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes; la lettre U désigne un générateur de $\mathbf{C}$.

LEMME 1. — *Tout sous-objet M d'un objet N possède un complément Q dans N.*

Soit en effet E l'ensemble des sous-objets P de N tels que $M \cap P = 0$. Il suffit de montrer que E est un ensemble ordonné inductif; pour cela, soit F un sous-ensemble totalement ordonné de E. Comme il existe un ensemble appartenant à l'univers $\mathfrak{U}$ et ayant même puissance que F, la borne supérieure S des éléments P de F est définie. De plus on a les formules

$$S \cap M = \Big(\sup_{P \in F} P\Big) \cap M = \sup_{P \in F} (P \cap M) = 0,$$

Ceci prouve le lemme.

THÉORÈME 2. — *Toute catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes est une catégorie avec enveloppes injectives.*

Pour tout objet M de $\mathbf{C}$ il existe en effet un monomorphisme de M dans un objet injectif : ce fait est prouvé dans [10], théorème 1.10.1. Il reste valable sous nos hypothèses. Le théorème résulte donc de la proposition 10 et du lemme 1.

PROPOSITION 13. — *Soit I un ensemble ordonné appartenant à l'univers $\mathfrak{U}$; donnons-nous deux applications croissantes, $\alpha \to M_\alpha$, $\alpha \to N_\alpha$, de I dans l'ensemble des sous-objets d'un objet P; supposons que M_α soit un sous-objet de N_α pour tout α, et que N_α soit extension essentielle de M_α. Alors $\sup_\alpha N_\alpha$ est extension essentielle de $\sup_\alpha M_\alpha$.*

Soit en effet Q un sous-objet non nul de $\sup_\alpha N_\alpha$. La formule

$$Q = Q \cap \sup_\alpha N_\alpha = \sup_\alpha (Q \cap N_\alpha)$$

montre que $Q \cap N_\alpha$ n'est pas nul pour un α au moins. Il s'ensuit que

$$Q \cap M_\alpha = (Q \cap N_\alpha) \cap M_\alpha$$

n'est pas nul. Le sous-objet Q coupe donc $\sup_\alpha M_\alpha$ suivant un sous-objet non nul.

COROLLAIRE. — *Si J est un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$, et si $(u_i)_{i \in J}$ est une famille d'extensions essentielles, alors $\Sigma_i u_i$ est une extension essentielle.*

Le corollaire a déjà été prouvé quand J est fini. On passe de là au cas général grâce à la proposition 13.

Nous terminons ce paragraphe sur une application du théorème précédent, ou plutôt du théorème 1.10.1 de [10]. L'énoncé et la démonstration en sont dus à des élèves d'EILENBERG.

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne dont l'ensemble des objets est un élément de $\mathfrak{U}$. Il existe un foncteur exact et fidèle F de $\mathbf{C}$ dans la catégorie $\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens.*

Rappelons qu'un foncteur exact F est dit *fidèle* si Ff est non nul pour tout morphisme non nul f. Il revient au même de dire que FX n'est pas nul si X est un objet non nul.

Nous avons vu que $\mathrm{Sex}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$ est une catégorie abélienne avec limites inductives exactes. De plus, le foncteur

$$Y \rightsquigarrow \sum_{X \in \mathbf{OC}} \mathrm{Hom}(X, Y)$$

est un générateur projectif U de $\mathrm{Sex}(\mathbf{C}, \mathbf{Ab})$. Si $i : U \to F$ est un monomorphisme de U dans un injectif F, le corollaire 1 à la proposition 6 montre que F est un foncteur exact. En outre $i(Y)$ est, pour tout objet Y de $\mathbf{C}$, une application injective de UY dans FY; comme UY n'est pas nul, il en va de même de FY. Ceci prouve que F est fidèle.

Le théorème 3 est souvent utilisé pour étendre aux catégories abéliennes des résultats prouvés pour les groupes abéliens; nous donnons un exemple : considérons dans $\boldsymbol{C}$ le diagramme commutatif et exact (★).

(★)
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{u'} & B' \xrightarrow{v'} C' \end{array}$$

Les morphismes u et v induisent des morphismes $u'' : \mathrm{Ker}\,a \to \mathrm{Ker}\,b$ et $v'' : \mathrm{Ker}\,b \to \mathrm{Ker}\,c$. Je dis que la suite (★★) est exacte :

(★★)
$$\mathrm{Ker}\,a \xrightarrow{u''} \mathrm{Ker}\,b \xrightarrow{v''} \mathrm{Ker}\,c.$$

Comme F est un foncteur exact et fidèle, il suffit en effet de vérifier l'exactitude de la suite (★★★) :

(★★★)
$$F\mathrm{Ker}\,a \xrightarrow{Fu''} F\mathrm{Ker}\,b \xrightarrow{Fv''} F\mathrm{Ker}\,c.$$

Or la suite (★★★) peut être construite à partir de (★★★★) comme (★★) a été construit à partir de (★); il suffit donc de prouver notre assertion lorsque (★) est un diagramme de groupes abéliens, ce qui est facile.

(★★★★)
$$\begin{array}{ccccc} FA & \xrightarrow{Fu} & FB & \xrightarrow{Fv} & FC \\ {\scriptstyle Fa}\downarrow & & {\scriptstyle Fb}\downarrow & & {\scriptstyle Fc}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & FA' & \xrightarrow{Fu'} & FB' \xrightarrow{Fv'} FC' \end{array}$$

Chapitre III.

La localisation dans les catégories abéliennes.

Soit E un espace topologique, U un ouvert de E, $\boldsymbol{A}$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur E et $\boldsymbol{B}$ la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur U. Soit $T : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ le foncteur $M \rightsquigarrow M|U$, où $M|U$ désigne la restriction de M à U; soit enfin S le foncteur image directe de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$. Il est bien connu que T est exact, que S est adjoint à T et que $T \circ S$ est isomorphe au foncteur identique de $\boldsymbol{B}$. Nous étudions ici des foncteurs $T : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ et $S : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ qui possèdent les propriétés que nous venons d'énoncer, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ étant remplacées par des catégories abéliennes quelconques. Les résultats de ce chapitre seront utilisés au chapitre IV.

Les catégories considérées dans ce chapitre ne sont pas nécessairement des $\mathfrak{U}$-catégories. Nous nous servirons cependant des résultats du chapitre I en remplaçant, si besoin est, l'univers $\mathfrak{U}$ par un univers plus grand.

1. Catégories quotient. — Rappelons qu'une sous-catégorie pleine $\mathbf{C}$ de la catégorie abélienne $\mathbf{A}$ est dite *épaisse* si la condition suivante est réalisée [10] : pour toute suite exacte de $\mathbf{A}$ de la forme (★), M est un objet de $\mathbf{C}$ si et seulement si M' et M'' sont des objets de $\mathbf{C}$:

$$(\bigstar) \qquad 0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0.$$

La donnée de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{C}$ permet de construire une nouvelle catégorie abélienne que nous noterons $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ et qu'on appelle *catégorie quotient de* $\mathbf{A}$ *par* $\mathbf{C}$ [10] :

— *Les objets* de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ coïncident avec les objets de $\mathbf{A}$.

— Si M et N sont deux objets de $\mathbf{A}$, M' et N' deux sous-objets de M et N, les morphismes canoniques de M' dans M et de N dans N/N' définissent une application linéaire

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(i^{M}_{M'}, p^{N}_{N/N'}) \cdot \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N/N').$$

Quand M' et N' parcourent les sous-objets de M et N tels que M/M' et N' soient des objets de $\mathbf{C}$, les groupes abéliens $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N/N')$ définissent de façon évidente un système inductif. Nous poserons *par définition*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(M, N) = \varinjlim_{M', N'} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N/N').$$

L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(M, N)$ est donc muni d'une structure de groupe abélien.

— Il reste à définir des *lois de composition bilinéaires :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(N, P) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(M, P).$$

Pour cela, soit $\bar{f}$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(M, N)$ et soit $\bar{g}$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(N, P)$. L'élément $\bar{f}$ est l'image d'un morphisme $f : M' \to N/N'$ où M/M' et N' sont des objets de $\mathbf{C}$. De même, $\bar{g}$ est l'image d'un morphisme $g : N'' \to P/P'$, où N/N'' et P' sont des objets de $\mathbf{C}$. Si M'' désigne l'image réciproque $f^{-1}((N'' + N')/N')$, il est facile de voir que M/M'' appartient à $\mathbf{C}$; nous notons f' le morphisme de M'' dans $N'' + N'/N'$ qui est induit par f. De même, $g(N'' \cap N')$ est un objet de $\mathbf{C}$; si P'' désigne la somme $P' + g(N'' \cap N')$, il est facile de voir que P'' appartient à $\mathbf{C}$; nous notons g' le morphisme de $N''/N'' \cap N'$ dans P/P'' qui est induit par g.

Soit h le composé de f', de l'isomorphisme canonique de $N'' + N'/N'$ sur $N''/N'' \cap N'$ et de g'. L'image $\bar{h}$ de h dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(M, P)$ dépend seulement de $\bar{f}$ et $\bar{g}$ et non de f et g. Il est donc licite de définir les lois de composition

de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ par l'égalité $\bar{g} \circ \bar{f} = \bar{h}$. Ces lois de composition sont bilinéaires; elles font de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ une catégorie.

Dans la suite, la lettre T désignera le foncteur (dit *canonique*) de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ qui est défini de la façon suivante : $TM = M$ pour tout objet M de $\boldsymbol{A}$; si $f : M \to N$ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$, Tf est l'image de f dans la limite inductive $\varinjlim \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M', N/N')$.

LEMME 1. — *$\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ est une catégorie additive et T est un foncteur additif de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$.*

Ce lemme est une conséquence directe des propositions 2 et 3 du chapitre I.

LEMME 2. — *Soit $u : M \to N$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$. Le morphisme Tu est nul (resp. est un monomorphisme, resp. est un épimorphisme) si et seulement si $\mathrm{Im}u$ appartient à $\boldsymbol{C}$ (resp. $\mathrm{Ker}u$ appartient à $\boldsymbol{C}$, resp. $\mathrm{Coker}u$ appartient à $\boldsymbol{C}$.*

Si $\mathrm{Im}u$ appartient à $\boldsymbol{C}$, l'image de u dans $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N/\mathrm{Im}u)$ est en effet nulle. Il en va de même, *a fortiori*, de l'image de u dans la limite inductive des groupes $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M', N/N')$. Réciproquement, si Tu est nul, on peut choisir les sous-objets M' et N' de telle façon que le morphisme de M' dans N/N' qui est induit par u, soit nul. Cela signifie que $u(M')$ est contenu dans N' et appartient à $\boldsymbol{C}$. Comme on a d'autre part une suite exacte de la forme

$$0 \to u(M') \to \mathrm{Im}u \to M/(M' + \mathrm{Ker}u) \to 0,$$

il s'ensuit que $\mathrm{Im}u$ appartient à $\boldsymbol{C}$.

Supposons maintenant que Tu est un monomorphisme; soit i le monomorphisme canonique de $\mathrm{Ker}u$ dans M. Comme $u \circ i$ est nul, il en va de même de $Tu \circ Ti$. On en tire que Ti est nul, donc que $\mathrm{Ker}u = \mathrm{Im}i \in \boldsymbol{C}$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker}u$ appartient à $\boldsymbol{C}$. Soit $\bar{f} : TP \to TM$ un morphisme non nul de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$: ce morphisme est l'image d'un morphisme $f : P' \to M/M'$, où P/P' et M' appartiennent à $\boldsymbol{C}$. Quitte à remplacer M' par $M' + \mathrm{Ker}u$, nous pouvons supposer en outre que M' contient $\mathrm{Ker}u$. Dans ce cas, u induit un monomorphisme u' de M/M' dans $N/u(M')$. Comme $\bar{f}$ n'est pas nul, $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Im}(u' \circ f)$ n'appartiennent pas à $\boldsymbol{C}$. Ceci montre que $(Tu) \circ \bar{f}$ n'est pas nul et que Tu est un monomorphisme.

On prouve de façon analogue la dernière assertion du lemme 2.

LEMME 3. — *Soient $u : M \to N$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$, $i : K \to M$ le noyau de u, $p : N \to C$ le conoyau de u. Le morphisme Tu possède un noyau (resp. un conoyau); de plus, Ti (resp. Tp) induit un isomorphisme de TK sur le noyau de Tu (resp. du conoyau Tu sur TC).*

Nous savons déjà que Ti est un monomorphisme. Soit donc $\overline{f}$ un morphisme de TX dans TM tel que $Tu \circ \overline{f}$ soit nul : nous devons prouver l'existence d'un morphisme $\overline{g} : TX \to TK$ tel qu'on ait $Ti \circ \overline{g} = \overline{f}$.

Or $\overline{f}$ est l'image d'un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(X', M/M')$ où X/X' et M appartiennent à $\mathbf{C}$. Nous sommes donc en présence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{u} & N \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ 0 & \longrightarrow & K/K\cap M' & \xrightarrow{i'} & M/M' & \xrightarrow{u'} & N/u(M') \end{array}$$

où p, q et r sont les morphismes canoniques. Comme $Tu \circ \overline{f}$ est nul, l'image de X' par $u' \circ f$ appartient à $\mathbf{C}$. Si X'' désigne l'image réciproque $f^{-1}(\mathrm{Im}\, i')$, il s'ensuit que X'/X'' et X/X'' appartiennent à $\mathbf{C}$. De plus, la restriction de f à X'' est composée d'un morphisme $g : X'' \to K/K\cap M'$ et de i'. Si $\overline{g}$ est l'image de g dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(X, K)$, on a l'égalité cherchée $Ti \circ \overline{g} = \overline{f}$.

La deuxième partie du lemme se prouve de façon « duale ».

LEMME 4. — *Soit $u : M \to N$ un morphisme de $\mathbf{A}$. Alors Tu est un isomorphisme si et seulement si* $\mathrm{Ker}\, u$ *et* $\mathrm{Coker}\, u$ *appartiennent à $\mathbf{C}$.*

Si Tu est un isomorphisme, Tu est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. D'après le lemme 2, il en résulte que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Coker}\, u$ sont des objets de $\mathbf{C}$. Réciproquement, supposons cette dernière condition satisfaite; soient q l'épimorphisme canonique de M sur $\mathrm{Coim}\, u$, j le morphisme canonique de $\mathrm{Im}\, u$ dans N, $\mathfrak{I}$ l'isomorphisme canonique de $\mathrm{Coim}\, u$ sur $\mathrm{Im}\, u$.

Le morphisme identique de $\mathrm{Coim}\, u$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Coim}\, u, M/i(K))$ (les notations sont celles du lemme 3). Cet élément a une image $\overline{q}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(\mathrm{Coim}\, u, M)$ et il est clair que $\overline{q}$ est un morphisme inverse de Tq. Ceci montre que Tq est un isomorphisme. De la même manière Tj est un isomorphisme. Il s'ensuit que $Tu = Tj \circ T\mathfrak{I} \circ Tq$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 1. — *Si $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathbf{A}$, la catégorie $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est abélienne. En outre le foncteur canonique de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est exact.*

Soit en effet $\overline{f} : TM \to TN$ un morphisme de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$. Montrons que $\overline{f}$ possède noyau, conoyau, coimage, image et que le morphisme canonique de la coimage dans l'image est un isomorphisme.

Or $\overline{f}$ est l'image d'un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N/N')$, où M/M' et N' sont des objets de $\mathbf{C}$. On déduit de là le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\overline{f}} & TN \\ {\scriptstyle Ti^M_{M'}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle Tq^N_{N/N'}} \\ TM' & \xrightarrow{Tf} & T(N/N') \end{array}$$

où $Ti^M_{M'}$ et $Tq^N_{N/N'}$ sont des isomorphismes. Ce diagramme montre que $\bar{f}$ a un noyau, conoyau..., si et seulement si il en va de même de Tf. Autrement dit, il est loisible de supposer que $\bar{f}$ est de la forme Tf.

Dans ce cas le lemme 3 montre que $\bar{f}$ possède noyau, conoyau, coimage, image. Nous désignons par q, j, et $\Im$ respectivement les morphismes canoniques de M dans $\mathrm{Coim}f$, de $\mathrm{Im}f$ dans N et de $\mathrm{Coim}f$ dans $\mathrm{Im}f$. Le lemme 3 montre que Tq induit un isomorphisme q_1 de $\mathrm{Coim}\,Tf$ sur $T(\mathrm{Coim}f)$; de même, Tj induit un isomorphisme j_1 de $T(\mathrm{Im}f)$ sur $\mathrm{Im}\,Tf$. Enfin, il est facile de vérifier que le morphisme canonique de $\mathrm{Coim}\,Tf$ dans $\mathrm{Im}\,Tf$ est le composé $j_1 \circ T\Im \circ q_1$; ce morphisme est donc un isomorphisme.

La dernière assertion de la proposition 5 résulte directement du lemme 3.

Corollaire 1. — *Soient* $\mathbf{C}$ *une sous-catégorie épaisse de* $\mathbf{A}$ *et*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

une suite exacte de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$. *Il existe alors un diagramme de la forme* (1), *commutatif, exact et satisfaisant aux conditions suivantes* : u, v *et* w *sont des isomorphismes de* $\mathbf{A}/\mathbf{C}$; *de plus*, $0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} N_1 \xrightarrow{g_1} P_1 \to 0$ *est une suite exacte de* $\mathbf{A}$.

(1)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \\ 0 & \longrightarrow & TM_1 & \xrightarrow{Tf_1} & TN_1 & \xrightarrow{Tg_1} & TP_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Le morphisme f est en effet l'image d'un élément $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N/N')$, où M/M' et N' appartiennent à $\mathbf{C}$. Comme Tf' est un monomorphisme, $\mathrm{Ker}f'$ appartient à $\mathbf{C}$. Si q désigne le morphisme canonique de M' sur $\mathrm{Coim}f'$, il est donc possible de faire les choix suivants : $M_1 = \mathrm{Coim}f'$; $N_1 = N/N'$; $f_1 =$ morphisme induit par f'; $P_1 = \mathrm{Coker}f_1$; $g_1 =$ morphisme canonique; $u = (Tq) \circ (Ti^M_{M'})^{-1}$; $v = Tq^N_{N/N'}$; $w =$ morphisme induit par $(Tg_1) \circ v$.

Corollaire 2. — *Soient* $\mathbf{C}$ *une sous-catégorie épaisse de* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{G}$ *un foncteur exact de* $\mathbf{A}$ *dans une catégorie abélienne* $\mathbf{D}$. *Si* GM *est nul pour tout objet* M *de* $\mathbf{C}$, *il existe un et un seul foncteur* H *de* $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{D}$ *tel qu'on ait* $G = H \circ T$.

Soient en effet M et N deux objets de $\mathbf{A}$, M' et N' des sous-objets de M et N tels que M/M' et N' appartiennent à $\mathbf{C}$. Considérons le diagramme commutatif suivant, où φ et ψ désignent respectivement les applications $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(i^M_{M'}, p^N_{N/N'})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Gi^M_{M'}, Gp^N_{N'})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, N) & \xrightarrow{G(M,N)} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(GM, GN) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N/N') & \xrightarrow{G(M', N/N')} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(GM', G(N/N')) \end{array}$$

Il est clair que ψ est une application bijective; les applications $\psi^{-1} \circ G(M', N/N')$ définissent donc une application $H(M, N)$ de

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M', N/N')$$

dans $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}}(GM, GN)$. Lorsque M et N parcourent les objets de $\boldsymbol{A}$ (ou de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$) les applications $H(M, N)$ déterminent un foncteur H de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{D}$; ce foncteur associe à tout objet M de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ l'objet GM de $\boldsymbol{D}$; il satisfait à l'égalité $G = H \circ T$.

La preuve de l'unicité de H est laissée au lecteur.

COROLLAIRE 3. — *Soient $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie épaisse de $\boldsymbol{A}$ et H un foncteur de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ dans une catégorie abélienne $\boldsymbol{D}$. Le foncteur H est exact si et seulement si le foncteur $H \circ T$ est exact.*

Il est clair que $H \circ T$ est exact si H est exact. Réciproquement, supposons $H \circ T$ exact. Si $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ est une suite exacte de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$, nous considérons un diagramme de la forme (1). Comme la suite

$$0 \longrightarrow HTM_1 \xrightarrow{HTf_1} HTN_1 \xrightarrow{HTg_1} HTF_1 \longrightarrow 0$$

est exacte, il en va de même de la suite

$$0 \longrightarrow HM \xrightarrow{Hf} HN \xrightarrow{Hg} HP \longrightarrow 0.$$

2. Propriétés du foncteur section. — Soient $\boldsymbol{A}$ une catégorie abélienne, $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie épaisse de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ la catégorie quotient $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ et T le foncteur canonique de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$.

Les raisonnements du paragraphe précédent étaient « autoduaux » : ils s'appliquaient aussi bien à la catégorie $\boldsymbol{A}$ qu'à la catégorie duale $\boldsymbol{A}^0$. *Nous allons supposer au début de ce paragraphe qu'il existe un foncteur S adjoint à T.* Cette condition n'est pas autoduale; nous laissons au lecteur le soin de formuler les énoncés duaux des énoncés qui vont suivre.

Un foncteur adjoint à T est défini à un isomorphe près. Nous choisissons une fois pour toutes un tel foncteur S et nous l'appelons *foncteur section*. Nous utilisons aussi les notations du chapitre I, § 6; en particulier, les lettres φ, ψ, Φ, Ψ auront les significations suivantes : φ est un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(., S.)$ sur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(T., .)$ et ψ est l'isomorphisme inverse de φ; la lettre Φ (resp. la lettre Ψ) désigne le morphisme fonctoriel de $T \circ S$ dans $1_{\boldsymbol{B}}$ (resp. de $1_{\boldsymbol{A}}$ dans $S \circ T$) qui est associé à φ (resp. à ψ).

PROPOSITION 2. — *Le foncteur section est exact à gauche.*

L'assertion est en effet vérifiée pour tout foncteur adjoint (proposition 11, chap. I).

LEMME 1. — *Si M est un objet de $\mathbf{A}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Pour tout morphisme $u : P \to Q$ tel que Ker$u$ *et* Coker$u$ *appartiennent à $\mathbf{C}$,* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(u, M)$ *est une bijection de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(Q, M)$ *sur* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(P, M)$.

b. Tout sous-objet de M appartenant à $\mathbf{C}$ est nul; de plus, toute suite exacte $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ *telle que P appartienne à $\mathbf{C}$, se scinde (i. e. f induit un isomorphisme de M sur un facteur direct de N).*

c. Pour tout objet P de $\mathbf{A}$, $T(P, M)$ est une bijection de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(P, M)$ *sur* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TP, TM)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Soit en effet L un sous-objet de M appartenant à $\mathbf{C}$. Le morphisme identique 1_M est l'image d'un élément v de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M/L, M)$ par l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(p^M_{M/L}, M)$. Autrement dit, on a une égalité du type $1_M = v \circ p^M_{M/L}$; donc $p^M_{M/L}$ est un monomorphisme et L est nul.

De même, il existe un élément g de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(N, M)$ tel qu'on ait $1_M = g \circ f$. Ceci prouve que f est un isomorphisme de M sur un facteur direct de N.

$(b) \Rightarrow (c)$: Comme tout sous-objet de M appartenant à $\mathbf{C}$ est nul, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TP, TM)$ est en effet la limite inductive des groupes abéliens $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(P' M)$, lorsque P' parcourt les sous-objets de P tels que P/P' appartienne à $\mathbf{C}$. En particulier, tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TP, TM)$ est l'image d'un morphisme $f : P' \to M$.

Désignons par $M \Sigma_{P'} P$ la somme fibrée du diagramme défini par les morphismes f et $i^P_{P'}$. Le morphisme canonique j_M est un monomorphisme et Coker j_M est isomorphe à P/P' (chap. I, fin du § 5). D'après l'assertion (b), il existe un morphisme p de $M \Sigma_{P'} P$ sur M tel qu'on ait $p \circ j_M = 1_M$; on en déduit que f est égal à $(p \circ j_P) \circ i^P_{P'}$. Ceci prouve que $T(P, M)$ est surjectif.

Soit maintenant g un morphisme non nul de P dans M. L'image de g n'est pas nulle et n'appartient pas à $\mathbf{C}$. Il en résulte que Tg n'est pas nul (lemme 2, § 1). Ceci prouve que $T(P, M)$ est injectif.

$(c) \Rightarrow (a)$: On a en effet le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(P, M) & \xrightarrow{T(P, M)} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TP, TM) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(u, M)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(Tu, TM)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(Q, M) & \xrightarrow{T(Q, M)} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TQ, TM) \end{array}$$

Les applications $T(P, M)$ et $T(Q, M)$ sont bijectives. Si Ker$u$ et Coker$u$ appartiennent à $\mathbf{C}$, Tu est un isomorphisme (lemme 4, § 1). Il en va donc de même pour $\mathrm{Hom}(u, M)$.

Nous dirons dorénavant que l'objet M est ***C*-fermé** s'il satisfait aux conditions équivalentes du lemme précédent. Notre objet est de prouver que M est ***C***-fermé si et seulement si le morphisme $\Psi(M)$ de M dans STM est un isomorphisme. Pour cela, nous aurons besoin du

LEMME 2. — *Pour tout objet N de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$, SN est $\boldsymbol{C}$-fermé.*

Vérifions en effet l'assertion (a) du lemme 1 ; on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(P, SN) & \xrightarrow{\varphi(P,N)} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TP, N) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(u, SN)} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(Tu, N)} \\ \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(Q, SN) & \xrightarrow{\varphi(Q,N)} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TQ, N) \end{array}$$

Les applications $\varphi(P, N)$ et $\varphi(Q, N)$ sont bijectives. Il en résulte que $\mathrm{Hom}(u, SN)$ est une bijection si Tu est un isomorphisme.

PROPOSITION 3 :

a. Le morphisme fonctoriel Φ est un isomorphisme de $T \circ S$ sur $1_{\boldsymbol{B}}$.

b. Pour tout objet M de $\boldsymbol{A}$, $\mathrm{Ker}\,\Psi(M)$ et $\mathrm{Coker}\,\Psi(M)$ appartiennent à $\boldsymbol{C}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, SN) & \xrightarrow{\varphi(M,N)} & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TM, N) \\ & {\scriptstyle T(M,SN)}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(TM, \Phi(N))} & \\ & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(TM, TSN) & \end{array}$$

Prouvons (a) : soient en effet M un objet de $\boldsymbol{A}$, N un objet de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}$. On a le diagramme commutatif ci-dessus.

L'application $\varphi(M, N)$ est une bijection ainsi que $T(M, SN)$ (lemmes 1 et 2). Il s'ensuit que $\mathrm{Hom}(TM, \Phi(M))$ est une bijection pour tout M. L'assertion (a) résulte de ce que tout objet de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ est de la forme TM (corollaire 2 de la proposition 1, chap. I).

Prouvons maintenant (b) en montrant que $T\Psi(M)$ est un isomorphisme pour tout M. Or le composé de $T\Psi(M)$ et de $\Phi(TM)$ est le morphisme identique de TM (proposition 8, chap. I). Comme Φ est un isomorphisme fonctoriel, le résultat est démontré.

COROLLAIRE. — *Un objet M de $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{C}$-fermé si et seulement si $\Psi(M)$ est un isomorphisme de M sur STM.*

Nous savons déjà que STM est ***C***-fermé. Supposons donc que M est ***C***-fermé : comme tout sous-objet de M appartenant à $\boldsymbol{C}$ est nul, $\mathrm{Ker}\,\Psi(M)$ est nul ; ceci prouve que $\Psi(M)$ est un monomorphisme. L'assertion (b) du lemme 1 montre alors que $\mathrm{Coker}\,\Psi(M)$ est isomorphe à un facteur direct

de STM. Comme tout sous-objet de STM appartenant à $\mathbf{C}$ est nul, $\operatorname{Coker}\Psi(M)$ est nul; ceci prouve le corollaire.

Nous dirons dorénavant qu'une sous-catégorie épaisse $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$ est une *sous-catégorie localisante* de $\mathbf{A}$ s'il existe un foncteur S adjoint à T. Dans ce cas, le foncteur exact à gauche $S \circ T$ est appelé *foncteur localisation*. Ce foncteur localisation est exact si et seulement si S est exact (corollaire 3 de la proposition 1).

PROPOSITION 4. — *Si $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathbf{A}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$.

b. Tout objet M de $\mathbf{A}$ contient un sous-objet qui est maximal parmi les sous-objets de M appartenant à $\mathbf{C}$; de plus, si tout sous-objet de M appartenant à $\mathbf{C}$ est nul, il existe un monomorphisme de M dans un objet $\mathbf{C}$-fermé.

$(a) \Rightarrow (b)$: Avec les notations habituelles il est en effet clair que $\operatorname{Ker}\Psi(M)$ est maximal parmi les sous-objets de M appartenant à $\mathbf{C}$. Si $\operatorname{Ker}\Psi(M)$ est nul, $\Psi(M)$ est un monomorphisme de M dans un objet $\mathbf{C}$-fermé.

$(b) \Rightarrow (a)$: Soit $u : M \to N$ un morphisme de $\mathbf{A}$. Nous disons que u est une *$\mathbf{C}$-enveloppe* de M si N est $\mathbf{C}$-fermé et si $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Coker} u$ sont des objets de $\mathbf{C}$. Nous allons d'abord montrer que tout objet M possède une $\mathbf{C}$-enveloppe :

Soit en effet M' le plus grand sous-objet de M appartenant à $\mathbf{C}$ et soit i un monomorphisme de M/M' dans un objet $\mathbf{C}$-fermé R. Soit d'autre part N l'image réciproque dans R du plus grand sous-objet de $\operatorname{Coker} i$ appartenant à $\mathbf{C}$. La condition (a) du lemme 1 montre que N est $\mathbf{C}$-fermé. Si j est le morphisme de M/M' dans N qui est induit par i, alors $j \circ p^{M}_{M/M'}$ est une $\mathbf{C}$-enveloppe de M.

Nous sommes maintenant en mesure de construire un foncteur adjoint à T : tout objet N de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ peut être considéré comme un objet de $\mathbf{A}$; nous choisissons une $\mathbf{C}$-enveloppe de cet objet, soit $u(N) : N \to SN$. Tout objet M de $\mathbf{A}$ donne alors naissance aux applications suivantes :

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(TM, N) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(TM, TN) \xrightarrow{\text{Hom}(TM, Tu(N))} \operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(TM, TSN) \xleftarrow{T(M, SN)} \operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(M, SN).$$

Ces applications sont bijectives et elles définissent un isomorphisme fonctoriel de $\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(T., N)$ sur $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(., SN)$. Autrement dit, $\operatorname{Hom}_{\mathbf{B}}(T., N)$ est un foncteur représentable et la proposition résulte de la proposition 10 (chap. I).

Supposons maintenant que $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$ et considérons un morphisme $u : M \to N$ de $\mathbf{A}$. Soit M' (resp. N') le plus grand sous-objet de M (resp. de N) appartenant à $\mathbf{C}$. Comme $u(M')$ est

contenu dans N', u induit un morphisme u' de M/M' dans N/N'. On a alors l'assertion suivante qui nous sera bien utile dans le paragraphe 3.

LEMME 3. — *Avec les notations et les hypothèses ci-dessus, Tu est une extension essentielle de TM si et seulement si u' est une extension essentielle de M/M'.*

Comme $Tp^{M}_{M/M'}$ et $Tp^{N}_{N/N'}$ sont des isomorphismes, Tu est une extension essentielle si et seulement s'il en va de même de Tu'. Autrement dit, il suffit d'établir la preuve lorsque M' et N' sont nuls. Nous faisons cette hypothèse dans la suite, et nous choisissons les sous-objets de TN (resp. de TM) parmi les TP, où P est un sous-objet de N (resp. de M).

Supposons que u est une extension essentielle de M, et soit TP un sous-objet de N. Si TP n'est pas nul, il en va de même pour P et pour $u^{-1}(P)$. Ce dernier objet n'appartient pas à $\mathbf{C}$. Comme $(Tu)^{-1}(TP)$ est isomorphe à $T(u^{-1}(P))$, il s'ensuit que $(Tu)^{-1}(TP)$ n'est pas nul et que Tu est une extension essentielle de TM.

Réciproquement, supposons que Tu est une extension essentielle et soit P un sous-objet non nul de N. Comme tout sous-objet de N appartenant à $\mathbf{C}$ est nul, TP ne peut être nul. Il en résulte que $u^{-1}(P)$ n'est pas nul.

LEMME 4. — *Soient $\mathbf{C}$ une sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$ et $(U_i)_{i\in I}$ une famille de générateurs de $\mathbf{A}$. Alors $(TU_i)_{i\in I}$ est une famille de générateurs de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$.*

Soit en effet $u : M \to N$ un monomorphisme de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$, qui n'est pas un isomorphisme. Nous devons prouver que l'application $\prod_i \mathrm{Hom}(TU_i, u)$ de $\prod_i \mathrm{Hom}(TU_i, M)$ dans $\prod_i \mathrm{Hom}(TU_i, N)$ n'est pas surjective. Or Su n'est pas un isomorphisme [prop. 3 (a)]. Il en résulte que l'application $\prod_i \mathrm{Hom}(U_i, Su)$ de $\prod_i \mathrm{Hom}(u_i, SM)$ dans $\prod_i \mathrm{Hom}(U_i, SN)$ n'est pas surjective. Le lemme est une conséquence de ce fait et des propriétés des foncteurs adjoints.

LEMME 5. — *Soit $\mathbf{C}$ une sous-catégorie localisante d'une $\mathfrak{U}$-catégorie avec générateurs $\mathbf{A}$. Alors $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie avec générateurs.*

Soient en effet M et N deux objets de $\mathbf{A}$. D'après la proposition 5 (chap. I), l'ensemble des sous-objets M' de M tels que M/M' appartienne à $\mathbf{C}$, peut être indexé par un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$. Il en va de même pour l'ensemble des sous-objets N' de N qui appartiennent à $\mathbf{C}$. Il s'ensuit que la limite inductive $\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M', N/N')$ est un objet de la catégorie $\mathfrak{U}\mathbf{Ab}$. Ceci prouve que $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie.

L'existence de générateurs résulte du lemme 4.

La « nature » recèle beaucoup de sous-catégories localisantes. La proposition qui suit permet parfois de les déceler : soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux catégories abéliennes, T_1 un foncteur de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ et S_1 un foncteur adjoint à T_1. Nous conservons aux lettres Φ_1, Ψ_1, φ_1 et ψ_1 leur signification habituelle (*cf.* chap. I, § 7).

PROPOSITION 5. — *Supposons, avec les notations ci-dessus, que T_1 est un foncteur exact et que Φ_1 est un isomorphisme de $T_1 \circ S_1$ sur $I_{\boldsymbol{B}}$. Alors* $\operatorname{Ker} T_1$ *est une sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$ et T_1 induit une équivalence entre $\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} T_1$ et $\boldsymbol{B}$.*

Soit en effet T le foncteur canonique de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} T_1$; ($\operatorname{Ker} T_1$ désigne la sous-catégorie épaisse de $\boldsymbol{A}$ dont les objets sont annulés par T_1) ; soit R l'unique foncteur de $\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} T_1$ dans $\boldsymbol{B}$ tel qu'on ait $T_1 = R \circ T$. Si f est un morphisme de $\boldsymbol{A}$, $T_1 f$ est un isomorphisme si et seulement si $T_1 \operatorname{Ker} f$ et $T_1 \operatorname{Coker} f$ sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si Tf est un isomorphisme. Nous appliquons cette remarque au cas particulier où f est le morphisme $\Psi_1(M)$ de M dans $(S_1 \circ T_1)M$. On sait en effet que le composé de $T_1\Psi_1(M)$ et de $\Phi_1(T_1 M)$ est le morphisme identique de $T_1 M$. Comme $\Phi_1(T_1 M)$ est un isomorphisme, il s'ensuit que $T_1\Psi_1(M)$, donc $T\Psi_1(M)$, sont des isomorphismes. Comme d'autre part les objets M de $\boldsymbol{A}$ coïncident avec les objets TM de $\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} T_1$, les morphismes $T\Psi_1(M)$ définissent un isomorphisme du foncteur identique de $\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} T_1$ sur le foncteur $(TS_1)R$. On en tire que $(TS_1)R$ et $R(TS_1)$ sont isomorphes aux foncteurs identiques de $\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} T_1$ et de $\boldsymbol{B}$. Cela signifie que R et TS_1 définissent une équivalence de $\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} T_1$ avec $\boldsymbol{B}$.

Nous laissons au lecteur le soin de prouver que $S_1 \circ R$ est un foncteur adjoint à T, ce qui montre que $\operatorname{Ker} T_1$ est une sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$.

3. **Catégories avec enveloppes injectives.** — Nous utilisons les notations du paragraphe précédent.

PROPOSITION 6. — *Soit $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne $\boldsymbol{A}$. Soit $i : M \to I$ une enveloppe injective d'un objet M de $\boldsymbol{A}$ qui ne contient aucun objet non nul de $\boldsymbol{C}$. Alors I est $\boldsymbol{C}$-fermé et le morphisme Ti est une enveloppe injective de TM.*

Soit en effet N un sous-objet de I appartenant à $\boldsymbol{C}$; alors $i^{-1}(N)$ appartient à $\boldsymbol{C}$ et est donc nul ; comme i est une extension essentielle, il en résulte que N est nul. Ceci prouve que I est $\boldsymbol{C}$-fermé [lemme 1 (b), § 2].

Un argument déjà employé dans la preuve du lemme 3 (§ 2) montre que Ti est une extension essentielle. Il reste donc à démontrer que TI est injectif : donnons-nous pour cela un monomorphisme $f' : TI \to TM$; ce monomorphisme est l'image d'un morphisme $f : I' \to M/M'$, où I' et M'

sont des sous-objets de I et de M tels que I/I' et M' appartiennent à $\mathbf{C}$. Comme Tf est un monomorphisme, Ker f appartient à $\mathbf{C}$ et est donc nul. Autrement dit, f est un monomorphisme et le morphisme canonique i de I' dans I est composé de f et d'un morphisme $g : M/M' \to I$. On aboutit ainsi au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} TI' & \xrightarrow{Tf} & T(M/M') \\ {\scriptstyle Ti}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle Tg} & \uparrow{\scriptstyle Tp^{M}_{M/M'}} \\ TI & \xrightarrow{f'} & TM \end{array}$$

Comme Ti et $Tp^{M}_{M/M'}$ sont des isomorphismes, f' est un isomorphisme de TI sur un facteur direct de TM.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. — *Si $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie épaisse d'une catégorie avec enveloppes injectives $\mathbf{A}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$.

b. Tout objet M de $\mathbf{A}$ contient un sous-objet qui est maximal parmi les sous-objets de M appartenant à $\mathbf{C}$.

Le corollaire résulte des propositions 6 et 4.

COROLLAIRE 2. — *Soit $\mathbf{C}$ une sous-catégorie localisante d'une catégorie avec enveloppes injectives $\mathbf{A}$. Alors $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est une catégorie avec enveloppes injectives; tout objet injectif de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est isomorphe à un objet TI, où I est un objet injectif de $\mathbf{A}$ ne contenant aucun sous-objet non nul de $\mathbf{C}$. Réciproquement, tout objet injectif J de $\mathbf{A}$ est isomorphe à une somme directe $J_1 \oplus SJ_2$ où J_1 est l'enveloppe injective d'un objet de $\mathbf{C}$ et où J_2 est un objet injectif de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$. En outre, ces conditions déterminent J_1 et J_2 à des isomorphismes près.*

D'après le corollaire 1, tout objet de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est en effet isomorphe à un objet TM, où M ne contient aucun sous-objet non nul de $\mathbf{C}$. Les deux premières assertions résultent donc directement de la proposition 6. Pour prouver le reste, on choisira pour J_1 l'enveloppe injective du plus grand sous-objet de J appartenant à $\mathbf{C}$.

COROLLAIRE 3. — *Les hypothèses sont celles du corollaire 2. On suppose en outre que l'enveloppe injective (dans $\mathbf{A}$) d'un objet de $\mathbf{C}$ appartient à $\mathbf{C}$. Alors TJ est un objet injectif de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ si J est un objet injectif de $\mathbf{A}$.*

Avec les notations du corollaire 2, TJ se réduit en effet à TSJ_2.

Le corollaire 3 est souvent utilisé de la façon qui suit : soit $F : \mathbf{A}/\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ dans une catégorie abélienne $\mathbf{D}$, $\mathbf{C}$ satisfaisant aux conditions du corollaire 3. Comme le foncteur T est exact et transforme injectifs

en injectifs, on sait [10] que les foncteurs dérivés $R^n(F \circ T)$ s'identifient aux foncteurs $(R^n F) \circ T$. Cela est vrai en particulier si F est le foncteur $N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}}(TM, N)$. On en déduit les corollaires 4 et 5 :

COROLLAIRE 4. — *Les hypothèses sont celles du corollaire* 3. *Le foncteur* $N \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}}(TM, TN)$ *est isomorphe au n-ième foncteur dérivé du foncteur* $N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, STN)$.

COROLLAIRE 5. — *Les hypothèses sont celles du corollaire* 3. *La dimension homologique de* $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ *est inférieure ou égale à la dimension homologique de* $\boldsymbol{A}$.

On rappelle que la dimension homologique d'une catégorie $\boldsymbol{A}$ est le plus petit entier n tel que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\boldsymbol{A}}(M, N)$ soit nul pour tout couple (M, N) d'objets de $\boldsymbol{A}$.

Le calcul des groupes $\mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}}(M, N)$ peut se faire d'une autre manière lorsque le foncteur section est exact : en effet, S transforme les objets injectifs de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ en objets injectifs de $\boldsymbol{A}$. Par conséquent, si G est un foncteur de $\boldsymbol{A}$ dans une catégorie abélienne $\boldsymbol{D}$, les foncteurs $(R^n G) \circ S$ et $R^n(G \circ S)$ sont encore isomorphes. Cela est vrai en particulier si G est le foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, X)$.

COROLLAIRE 6. — *Les hypothèses sont celles du corollaire* 2. *On suppose en outre que le foncteur section est exact. Les foncteurs* $N \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}}(TM, N)$ *et* $N \rightsquigarrow \mathrm{Ext}^n_{\boldsymbol{A}}(M, SN)$ *sont alors isomorphes.*

La proposition suivante examine le cas où le foncteur section est exact :

PROPOSITION 7. — *Soit* $\boldsymbol{C}$ *une sous-catégorie localisante d'une catégorie avec enveloppes injectives* $\boldsymbol{A}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Le foncteur localisation (ou le foncteur section) est exact.

b. Si N est un sous-objet de M et si N et M sont $\boldsymbol{C}$*-fermés, alors M/N est* $\boldsymbol{C}$*-fermé.*

c. Si I est un injectif ne contenant aucun sous-objet non nul de $\boldsymbol{C}$, *et si N est un sous-objet* $\boldsymbol{C}$*-fermé de I, alors I/N est* $\boldsymbol{C}$*-fermé.*

$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$: Clair.

$(c) \Rightarrow (a)$: Si L est le foncteur localisation $S \circ T$, on va montrer que le premier foncteur dérivé $R^1 L$ de L est nul.

Supposons d'abord que M est un objet de $\boldsymbol{C}$; soient $i : M \to I$ une enveloppe injective de I et $p : I \to N$ le conoyau de i. Comme Lp est un isomorphisme, la suite exacte $0 \to 0 = LM \xrightarrow{Li} LI \xrightarrow{Lp} LN \to R^1 LM \to 0$ montre que $R^1 LM$ est nul.

Supposons maintenant que M ne contient pas d'objet non nul de $\mathbf{C}$ et conservons les notations précédentes. Comme Lp est un épimorphisme, R^1LM est nul.

Dans le cas général, soit M' le plus grand sous-objet de M appartenant à $\mathbf{C}$ et soit $M''=M/M'$. La suite exacte $R^1LM'\to R^1LM\to R^1LM''$ prouve la nullité de R^1LM.

COROLLAIRE. — *Soit $\mathbf{C}$ une sous-catégorie localisante d'une catégorie avec enveloppes injectives $\mathbf{A}$. Si la dimension homologique de $\mathbf{A}$ vaut* 0 *ou* 1, *le foncteur localisation est exact.*

4. $\mathfrak{U}$-catégories avec générateurs et limites inductives exactes. — Nous utilisons toujours les notations des paragraphes précédents.

PROPOSITION 8. — *Si $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie épaisse d'une $\mathfrak{U}$-catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes $\mathbf{A}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$.

b. La limite inductive (dans $\mathbf{A}$) d'un système inductif d'objets de $\mathbf{C}$ appartient à $\mathbf{C}$.

$(a)\Rightarrow(b)$: Soit en effet (M_i, φ_{ji}) un système inductif d'objets de $\mathbf{C}$, l'ensemble d'indexation appartenant à l'univers $\mathfrak{U}$. Soient M la limite inductive de ce système et φ_i le morphisme canonique de M_i dans M. D'après le corollaire 1 de la proposition 6, M contient un sous-objet M' qui appartient à $\mathbf{C}$ et qui contient tous les sous-objets de M appartenant à $\mathbf{C}$; en particulier, M' contient $\operatorname{Im}\varphi_i$ pour tout i et est donc égal à M.

$(b)\Rightarrow(a)$: Soit en effet M un objet de $\mathbf{A}$. Si P et N sont deux sous-objets de M appartenant à $\mathbf{C}$, $P+N$ est isomorphe à un quotient de $P\oplus N$. Il s'ensuit que $P+N$ appartient à $\mathbf{C}$ et que les sous-objets de M appartenant à $\mathbf{C}$ forment un ensemble filtrant croissant de sous-objets de M. D'après (b), la borne supérieure de ces sous-objets appartient à $\mathbf{C}$ et elle est le plus grand sous-objet de M appartenant à $\mathbf{C}$; d'où le résultat, grâce au corollaire 1 de la proposition 6.

COROLLAIRE. — *Soient $\mathbf{A}$ une $\mathfrak{U}$-catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes, et (I_j) une famille d'objets injectifs de $\mathbf{A}$. Les objets M de $\mathbf{A}$ tels que* $\operatorname{Hom}(M, I_j)$ *soit nul pour tout j sont les objets d'une sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$. Réciproquement, toute sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$ peut être définie ainsi.*

Soit en effet $\mathbf{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}$ dont les objets M sont tels que $\operatorname{Hom}(M, I_j)$ soit nul pour tout j. Si $0\to M'\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M''\to 0$ est une suite exacte de $\mathbf{A}$, on a aussi les suites exactes

$$0\to\operatorname{Hom}(M'', I_j)\to\operatorname{Hom}(M, I_j)\to\operatorname{Hom}(M', I_j)\to 0.$$

Ces suites exactes montrent que M appartient à $\mathbf{C}$ si et seulement si M' et M'' appartiennent à $\mathbf{C}$. Autrement dit, $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathbf{A}$. D'autre part, tout système inductif (M_i, φ_{hi}) de $\mathbf{A}$ donne naissance aux « égalités »

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\varinjlim_i M_i, I_j\right) = \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M_i, I_j).$$

Il s'ensuit que $\varinjlim_i M_i$ appartient à $\mathbf{C}$ si les M_i appartiennent à $\mathbf{C}$.

Réciproquement, si $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est une catégorie avec enveloppes injectives ; un objet M de $\mathbf{A}$ appartient donc à $\mathbf{C}$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I)$ est nul pour tout injectif $\mathbf{C}$-fermé I.

PROPOSITION 9. — *Soit $\mathbf{C}$ une sous-catégorie localisante d'une $\mathfrak{U}$-catégorie abélienne avec générateurs et limites inductives exactes. Les catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ sont des $\mathfrak{U}$-catégories avec générateurs et limites inductives exactes. En outre, le foncteur canonique T de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ commute avec les limites inductives.*

Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de générateurs de $\mathbf{A}$. Les quotients, appartenant à $\mathbf{C}$, des objets U_λ forment une famille de générateurs de $\mathbf{C}$. De plus, tout système inductif d'objets de $\mathbf{C}$ possède une limite inductive dans $\mathbf{A}$. La proposition 8 montre que cette limite inductive appartient encore à $\mathbf{C}$. Il en résulte que $\mathbf{C}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie avec générateurs et limites inductives exactes.

Le lemme 5 (§ 2) prouve que $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie avec générateurs. Considérons maintenant un système inductif d'objets de $\mathbf{A}$, soit $(M_i, \varphi_{ji})_{i,j\in I}$. Soit φ_i le morphisme canonique de M_i dans la limite inductive $\varinjlim M_i$. On a alors des « égalités » :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}\left(T\varinjlim M_i, N\right) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\varinjlim M_i, SN\right)$$
$$= \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M_i, SN) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}/\mathbf{C}}(TM_i, N).$$

Ces égalités montrent que $\left(T\varinjlim M_i,\ T\varphi_i\right)$ est une limite inductive du système inductif $(TM_i, T\varphi_{ji})$. Le foncteur T commute donc avec les limites inductives.

Soient maintenant $(N_i, \psi_{ji})_{i,j\in J}$ un système inductif d'objets de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ et ψ_i le morphisme canonique de SN_i dans $\varinjlim SN_i$. Ce qui précède prouve que

$$\left(T\varinjlim SN_i, (T\psi_i)\circ\Phi(N_i)^{-1}\right)$$

est une limite inductive de (N_i, φ_{ji}). Nous écrirons brièvement .

$$\varinjlim N_i = T\varinjlim SN_i.$$

Cette dernière « formule » montre en particulier qu'une limite inductive de monomorphismes est un monomorphisme; ceci termine la preuve.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $\mathbf{C}$ *une sous-catégorie localisante d'une* $\mathfrak{U}$*-catégorie localement nœthérienne. Alors* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ *sont des* $\mathfrak{U}$*-catégorie localement nœthériennes. De plus, le foncteur section commute avec les limites inductives.*

Il reste à montrer que S commute avec les limites inductives. Si (N_i, ψ_{ij}) est un système inductif d'objets de $\mathbf{A}/\mathbf{C}$, $\varinjlim N_i$ est égal à $T \varinjlim SN_i$. Il suffit donc de prouver que le morphisme fonctoriel Ψ définit un isomorphisme de $\varinjlim SN_i$ sur $ST \varinjlim SN_i$: cela revient à dire que $\varinjlim SN_i$ est $\mathbf{C}$-fermé.

Cette dernière assertion résulte du lemme 1 (a), § 2 : avec les notations de ce lemme, il suffit en effet de vérifier la condition (a) quand P et Q sont des objets nœthériens. Les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}\left(P, \varinjlim SN_i\right)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}\left(Q, \varinjlim SN_i\right)$ s'identifient alors respectivement à $\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(P, SN_i)$ et $\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(Q, SN_i)$ (corollaire 1 du théorème 1, chap. II); la preuve découle directement de ces faits (lemme 2, § 2).

COROLLAIRE 2. — *Soit* $\mathbf{C}$ *une sous-catégorie localisante d'une* $\mathfrak{U}$*-catégorie localement finie. Alors* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ *sont des* $\mathfrak{U}$*-catégories localement finies.*

Supposons maintenant que $\mathbf{A}$ *est une* $\mathfrak{U}$*-catégorie localement nœthérienne.* Soit $\mathbf{A}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}$ qui est définie par les objets nœthériens de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$, nous désignons par $\mathbf{C}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}$ qui est définie par les objets nœthériens de $\mathbf{C}$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce qui suit :

PROPOSITION 10. — *L'application* $\mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ *est une application bijective de l'ensemble des sous-catégories localisantes de* $\mathbf{A}$ *sur l'ensemble des sous-catégories épaisses de* $\mathbf{A}'$.

En particulier, si $\mathbf{A}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie localement finie, toute sous-catégorie localisante $\mathbf{C}$ est caractérisée par les objets simples qu'elle contient. On peut dire que $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ s'obtient à partir de $\mathbf{A}$ en négligeant un certain nombre d'objets simples.

5. Quelques exemples de sous-catégories localisantes.

a. Faisceaux de modules. — Soient E un espace topologique, A un faisceau d'anneaux sur E et $\mathbf{A}$ la catégorie des faisceaux de A-modules (ou de A-modules). Si F est un fermé de E, U l'ouvert complémentaire de F dans E, nous utiliserons les notations suivantes :

— Si M est un A-module, $M \mid U$ désigne sa restriction à U;
— T_1 désigne le foncteur $M \rightsquigarrow M \mid U$;

— $\mathbf{B}$ désigne la catégorie de $A \mid U$-modules;

— S_1 désigne le foncteur image directe : si N est un $A \mid U$-module, $S_1 N$ est l'image directe de N dans E.

Il est clair que T_1 est un foncteur exact et que $\operatorname{Ker} T_1$ est formé des A-modules dont la restriction à U est nulle. Comme S_1 est un foncteur adjoint à T_1 et que $T_1 \circ S_1$ est isomorphe à $1_{\mathbf{B}}$, la proposition 5 montre que les catégories $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}/\operatorname{Ker} T_1$ sont équivalentes.

b. Foncteurs exacts à gauche. — Les hypothèses et les notations sont celles de la proposition 4 (chap. II). Soient $\mathbf{A}$ la catégorie $\operatorname{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$, $\mathbf{B}$ la catégorie $\operatorname{Sex}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$, T_1 le foncteur R^0, S_1 le foncteur canonique de $\operatorname{Sex}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ dans $\operatorname{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$. La proposition 4 (chap. II) dit que S_1 est adjoint à T_1. Tout objet injectif de $\operatorname{Sex}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ est donc injectif dans $\operatorname{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$.

c. Foncteurs satellites [6]. — Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories abéliennes. Nous supposons, pour simplifier, que la catégorie $\mathbf{C}$ « contient assez d'objets projectifs ». Soit alors $\mathbf{A}$ la catégorie suivante :

— un objet de $\mathbf{A}$ est une « connected sequence of functors » (F_n) de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$, $n \geqq 0$;

— si (F_n) et (G_n) sont deux objets de $\mathbf{A}$, un morphisme du premier dans le second est une suite de morphismes fonctoriels $f_n : F_n \to G_n$; on suppose en outre que les morphismes f_n commutent avec les opérateurs bord (« connecting homomorphisms »);

— la composition des morphismes est définie de façon évidente.

Les objets (F_n) dont la première composante F_0 est nulle forment une sous-catégorie épaisse $\mathbf{B}$ de la catégorie abélienne $\mathbf{A}$. En outre, le lecteur vérifiera facilement que le foncteur $(F_n) \rightsquigarrow F_0$ définit une équivalence entre $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ et $\operatorname{Fonct}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$.

Réciproquement, soit F un foncteur de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{D}$ et désignons par $S_n F$ le n-ième foncteur satellite de F : le foncteur $F \rightsquigarrow (S_n F)$ est alors adjoint au foncteur $(F_n) \rightsquigarrow F_0$.

Le lecteur trouvera une interprétation analogue des foncteurs satellites à droite $S^n F$ lorsqu'il aura énoncé les propositions duales des propositions de ce chapitre.

d. Localisation par rapport au centre. — Si $\mathbf{A}$ est une catégorie additive, on appelle *centre* de $\mathbf{A}$ l'ensemble des morphismes fonctoriels du foncteur identique $I_{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{A}$ dans lui-même. L'addition et la composition des morphismes fonctoriels définissent sur cet ensemble une structure d'anneau. Cet anneau sera noté $Z(\mathbf{A})$; le lecteur vérifiera que $Z(\mathbf{A})$ est un anneau commutatif.

Nous supposons maintenant que $\boldsymbol{A}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie avec générateurs et limites inductives exactes. Si Σ est une partie multiplicative de $Z(\boldsymbol{A})$, nous désignons par $\boldsymbol{A}_\Sigma$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{A}$ qui suit : un objet M appartient à $\boldsymbol{A}_\Sigma$ si M est la borne supérieure des sous-objets N tels que $s(N)$ soit nul pour au moins un élément s de Σ. Il est clair que $\boldsymbol{A}_\Sigma$ est une sous-catégorie épaisse et fermée de $\boldsymbol{A}$. Pour tout objet M de $\boldsymbol{A}$ nous pouvons donc choisir une $\boldsymbol{A}_\Sigma$-enveloppe $j_M : M \to M_\Sigma$.

PROPOSITION. 11. — *Sous les hypothèses ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. M est un objet $\boldsymbol{A}_\Sigma$-fermé.

b. Pour tout élément s de Σ, $s(M)$ est un automorphisme de M.

$(a) \Rightarrow (b)$: Il est clair en effet que $s(M)$ est un monomorphisme de M dans M. Il en résulte que $\operatorname{Im} s(M)$ est $\boldsymbol{A}_\Sigma$-fermé. D'après le lemme 1 (b), § 2, $\operatorname{Im} s(M)$ est donc un facteur direct de M et tout supplémentaire de $\operatorname{Im} s(M)$ appartient à $\boldsymbol{A}_\Sigma$. Ceci n'est possible que si $\operatorname{Im} s(M) = M$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Il est clair en effet que M ne contient aucun sous-objet non nul appartenant à $\boldsymbol{A}_\Sigma$. Nous supposons, pour simplifier, que M est un sous-objet de M_Σ et que j_M est le morphisme canonique de M dans M_Σ. Soit alors N un sous-objet de M_Σ, contenant M et tel que $\operatorname{Im} s(N)$ soit contenu dans M pour au moins un élément s de Σ. Si i désigne le monomorphisme canonique de M dans N, on a l'égalité $1_M = s(M)^{-1} \circ s(N) \circ i$. Cette égalité montre que M est un facteur direct de N; il s'ensuit que M est égal à N, donc à M_Σ.

COROLLAIRE. — *Le foncteur localisation $M \rightsquigarrow M_\Sigma$ est exact.*

Cela résulte des propositions 11 et 7 (b).

PROPOSITION 12. — *Les hypothèses et les notations sont celles de la proposition 11. On suppose en outre que $\boldsymbol{A}$ est une catégorie localement nœthérienne. L'enveloppe injective d'un objet de $\boldsymbol{A}_\Sigma$ appartient à $\boldsymbol{A}_\Sigma$.*

Supposons en effet que N est extension essentielle d'un sous-objet M appartenant à $\boldsymbol{A}_\Sigma$. Nous voulons montrer que N appartient à $\boldsymbol{A}_\Sigma$; pour cela il suffit de prouver que tout sous-objet nœthérien N' de N appartient à $\boldsymbol{A}_\Sigma$; comme N' est extension essentielle de $M \cap N'$, nous pouvons donc nous ramener au cas où N est nœthérien.

Dans ce cas, il existe un élément s de Σ tel que $s(M)$ soit nul. Comme N est nœthérien, $\operatorname{Ker}(s(N))^n$ est égal à $\operatorname{Ker}(s(N))^{n+1}$ pour n assez grand. On tire de là l'égalité $\operatorname{Ker}(s(N))^n \cap \operatorname{Im}(s(N))^n = 0$. Comme $\operatorname{Ker}(s(N))^n$ contient M et que N est extension essentielle de M, $\operatorname{Im}(s(N))^n$ est nul. Autrement dit $s^n(N)$ est nul et N appartient à $\boldsymbol{A}_\Sigma$.

Chapitre IV.

Catégories localement nœthériennes.

Sauf mention expresse du contraire, toutes les catégories considérées dans ce chapitre sont des $\mathfrak{U}$-catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes.

Ce chapitre est consacré à l'étude des objets injectifs d'une $\mathfrak{U}$-catégorie localement nœthérienne. Nous tirons de cette étude la morale suivante : une catégorie localement nœthérienne est une « extension » de catégorie localement finies; une catégorie localement finie se compare à une catégorie de modules.

1. La dimension de Krull d'une catégorie abélienne. — Soit $\boldsymbol{A}$ une catégorie (abélienne...). Nous allons associer à tout ordinal α une sous-catégorie localisante $\boldsymbol{A}_\alpha$ de $\boldsymbol{A}$. L'ordinal ne possédant aucun élément sera noté -1 pour des raisons historiques; de même, l'ordinal possédant un nombre fini d'éléments n sera noté $n-1$. Si α et β sont deux ordinaux, le symbole $\alpha \mathbf{T} \beta$ désignera l'ordinal obtenu en prenant « d'abord α, ensuite β ». Si α et β sont deux ordinaux finis, on a par exemple la formule $\alpha \mathbf{T} \beta = \alpha + \beta + 1$: Nous noterons T_α le foncteur canonique de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$.

La construction des sous-catégories $\boldsymbol{A}_\alpha$ se fait par récurrence transfinie :

— $\boldsymbol{A}_{-1}$ est la sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$ dont les seuls objets sont les objets nuls de $\boldsymbol{A}$. Le foncteur T_{-1} est donc le foncteur identique de $\boldsymbol{A}$.

— Si l'ordinal α a un prédécesseur β, $\boldsymbol{A}_\alpha$ est la plus petite sous-catégorie localisante contenant tous les objets M tels que $T_\beta M$ soit de longueur finie.

— Si α est un ordinal limite, $\boldsymbol{A}_\alpha$ est la plus petite sous-catégorie localisante contenant toutes les sous-catégories $\boldsymbol{A}_\beta$ pour $\beta < \alpha$.

Nous désignons par $\boldsymbol{A}_\omega$ la plus petite sous-catégorie localisante contenant toutes les sous-catégories $\boldsymbol{A}_\alpha$; la catégorie quotient $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\omega$ ne possède alors aucun objet simple. Lorsque M est un objet de $\boldsymbol{A}_\omega$, *la dimension de Krull* de M est le plus petit ordinal α tel que M appartienne à $\boldsymbol{A}_\alpha$ (notation : $\operatorname{Kdim} M = \alpha$). Si $\boldsymbol{A}_\omega$ coïncide avec $\boldsymbol{A}$, le plus petit ordinal α tel que $\boldsymbol{A}_\alpha$ soit égal à $\boldsymbol{A}$ sera appelé *la dimension de Krull de* $\boldsymbol{A}$ (notation $\operatorname{Kdim} \boldsymbol{A} = \alpha$). La proposition suivante résulte des définitions :

Proposition 1. — *Soit $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$. Alors $\boldsymbol{A}_\omega$ coïncide avec $\boldsymbol{A}$ si et seulement si $\boldsymbol{C}_\omega$ et $(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C})_\omega$ coïncident respectivement avec $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$. Dans ce cas on a les inégalités*

$$\sup(\operatorname{Kdim} \boldsymbol{C}, \operatorname{Kdim} \boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}) \leqq \operatorname{Kdim} \boldsymbol{A} \leqq (\operatorname{Kdim} \boldsymbol{C}) \mathbf{T} (\operatorname{Kdim} \boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}).$$

Nous supposons dans toute la suite de ce paragraphe que *la dimension de Krull de* $\boldsymbol{A}$ *est définie*, c'est-à-dire que $\boldsymbol{A}_\omega$ coïncide avec $\boldsymbol{A}$. Pour tout ordinal $\alpha < \operatorname{Kdim} \boldsymbol{A}$, la catégorie $\boldsymbol{A}_{\alpha \mathbf{T}_0}/\boldsymbol{A}_\alpha$ est alors de dimension nulle.

Si M est un objet de $\boldsymbol{A}$, *le type* de cet objet sera l'ensemble des objets de $\boldsymbol{A}$ isomorphes à M. Nous désignons par $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A})$ (*spectre de* $\boldsymbol{A}$) l'ensemble des types d'objets injectifs indécomposables de $\boldsymbol{A}$. Pour tout ordinal $\alpha < \operatorname{Kdim} \boldsymbol{A}$, nous désignons par $\operatorname{Sp}_\alpha(\boldsymbol{A})$ l'ensemble des types qui sont formés d'objets injectifs indécomposables $\boldsymbol{A}_\alpha$-fermés et contenant un sous-objet non nul de $\boldsymbol{A}_{\alpha \mathbf{T}_0}$. Il est clair que les ensembles $\operatorname{Sp}_\alpha(\boldsymbol{A})$ sont disjoints deux à deux et que leur réunion est égale à $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A})$.

Si I est un objet injectif indécomposable dont le type appartient à $\operatorname{Sp}_\alpha(\boldsymbol{A})$, $T_\alpha I$ contient un sous-objet de longueur finie de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$. Il en résulte que le socle de $T_\alpha I$ n'est pas nul et est un objet simple de $\boldsymbol{A}_{\alpha \mathbf{T}_0}/\boldsymbol{A}_\alpha$. Nous notons $s(I)$ le plus petit sous-objet non nul et $\boldsymbol{A}_\alpha$-fermé de I. Le morphisme canonique de $s(I)$ dans I induit alors un isomorphisme de $T_\alpha s(I)$ sur le socle de $T_\alpha I$. Par abus de langage, nous dirons que $s(I)$ est le socle de I. Nous traiterons $s(I)$ indifféremment comme un objet de $\boldsymbol{A}$ ou comme un objet de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$.

PROPOSITION 2. — *Soit* $\boldsymbol{A}$ *une catégorie dont la dimension de Krull est définie. Pour tout ordinal* $\alpha < \operatorname{Kdim} \boldsymbol{A}$, *l'application* $I \to s(I)$ *induit une bijection de* $\operatorname{Sp}_\alpha(\boldsymbol{A})$ *sur l'ensemble des types d'objets simples de* $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$.

Soient en effet I et J deux injectifs indécomposables dont les types appartiennent à $\operatorname{Sp}_\alpha(\boldsymbol{A})$. Le corollaire de la proposition 11 (chap. II), entraîne que I et J sont isomorphes si et seulement s'il en va de même de $s(I)$ et $s(J)$. Soit d'autre part M un objet simple de $\boldsymbol{A}_{\alpha \mathbf{T}_0}/\boldsymbol{A}_\alpha$ et soit $u : M \to EM$ une enveloppe injective de M dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$. Si S_α est un foncteur adjoint à T_α, $S_\alpha EM$ est un injectif indécomposable dont le socle est isomorphe à M (comme objet de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$). Ceci termine la preuve.

Si l'on rapproche la proposition 2 de la proposition 11 (chap. II) on voit comment sont liées les notions de spectre, d'objet simple et d'objet coirréductible.

Soit maintenant $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$, soit T le foncteur canonique de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$ et soit S un foncteur adjoint à T. Si I est un injectif indécomposable de $\boldsymbol{C}$ et si EI est une enveloppe injective de I dans $\boldsymbol{A}$, il est immédiat que EI est encore indécomposable. L'application $I \to EI$ induit donc une injection de $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{C})$ dans $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A})$; nous identifierons toujours $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{C})$ avec l'image de cette injection. De même, si J est un injectif indécomposable de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C}$, SJ est un injectif indécomposable de $\boldsymbol{A}$. L'application $J \to SJ$ induit une injection de $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C})$ dans $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A})$; nous identifions toujours $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C})$ avec l'image de cette injection. Le corollaire 2 de la proposition 6 (chap. III), montre alors que $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{C})$ est le complémentaire de $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{C})$ dans $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A})$. En outre la proposition 2 entraîne le

COROLLAIRE 1. — *Soit* $\mathbf{C}$ *une sous-catégorie localisante d'une catégorie* $\mathbf{A}$ *dont la dimension de Krull est définie. Un objet* M *de* $\mathbf{A}$ *appartient à* $\mathbf{C}$ *si et seulement si* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I)$ *est nul pour tout injectif indécomposable de* $\mathbf{A}$ *dont le type appartient à* $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}/\mathbf{C})$.

Soit en effet $\mathbf{D}$ la sous-catégorie localisante de $\mathbf{A}$ dont les objets M sont tels que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I)$ soit nul pour tout injectif indécomposable dont le type appartient à $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}/\mathbf{C})$ (corollaire de la proposition 8, chap. III). Il est clair que $\mathbf{D}$ contient $\mathbf{C}$. Si $\mathbf{D}$ ne coïncide pas avec $\mathbf{C}$, il existe un objet M de $\mathbf{D}$ qui est non nul et qui ne contient aucun sous-objet non nul de $\mathbf{C}$. Soit donc β le plus petit ordinal tel que M contienne un sous-objet non nul de $\mathbf{A}_\beta$. Il est clair que β a un prédécesseur α. Il existe donc un sous-objet N de M tel que $T_\alpha N$ soit simple. Si I est l'enveloppe injective de N, le type de I appartient à $\mathrm{Sp}(\mathbf{A}/\mathbf{C})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I)$ n'est pas nul : il y a contradiction.

COROLLAIRE 2. — *Soient* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{D}$ *deux sous-catégories localisantes d'une catégorie* $\mathbf{A}$ *dont la dimension de Krull est définie. Alors* $\mathbf{C}$ *coïncide avec* $\mathbf{D}$ *si et seulement si* $\mathrm{Sp}(\mathbf{C})$ *coïncide avec* $\mathrm{Sp}(\mathbf{D})$.

Cela résulte du corollaire 1.

Si I est un injectif indécomposable de $\mathbf{A}$, on remarque que l'anneau des endomorphismes de $s(I)$ (dans $\mathbf{A}$ ou dans $\mathbf{A}/\mathbf{A}_\alpha$) est un corps. Si A est l'anneau local des endomorphismes de I, ce corps n'est autre que le quotient de A par son radical de Jacobson : soit en effet f un endomorphisme de I (dans $\mathbf{A}$ ou dans $\mathbf{A}/\mathbf{A}_\alpha$) ; l'image de $s(I)$ par f est nulle ou est un objet simple (dans $\mathbf{A}/\mathbf{A}_\alpha$) ; le morphisme f induit donc un endomorphisme f' de $s(I)$; comme I est injectif, tout endomorphisme de $s(I)$ se prolonge réciproquement en un endomorphisme de I. Ceci montre que l'application $f \rightsquigarrow f'$ est surjective. D'autre part f' est non nul si et seulement si f est un automorphisme. Nous avons ainsi prouvé la

PROPOSITION 3. — *Soient* $\mathbf{A}$ *une catégorie dont la dimension de Krull est définie, et* I *un objet injectif indécomposable de* $\mathbf{A}$. *Le corps des endomorphismes du socle* $s(I)$ *est le quotient de l'anneau des endomorphismes de* I *par son radical de Jacobson.*

La proposition suivante va nous donner des renseignements sur les enveloppes injectives de la catégorie $\mathbf{A}$:

PROPOSITION 4. — *Soit* M *un objet d'une catégorie* $\mathbf{A}$ *dont la dimension de Krull est définie. Il existe une famille* (f_α) *de morphismes de* $\mathbf{A}$, *qui est indexée par les ordinaux* $\alpha < \mathrm{Kdim}\,\mathbf{A}$ *et qui satisfait aux conditions* (a), (b), (c) *et* (d) :

a. f_α *est un morphisme d'un objet* N_α *dans* M.

b. Tout sous-objet de N_α *appartenant à* $\mathbf{A}_\alpha$ *est nul.*

c. $T_\alpha N_\alpha$ *est un objet semi-simple de* $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$.

d. Le morphisme f *de* $\sum_\alpha N_\alpha$ *dans* M *qui est défini par la famille* (f_α) *est une extension essentielle de* $\sum_\alpha N_\alpha$.

Pour toute famille (f_α) *satisfaisant à* (a), (b), (c) *et* (d), $T_\alpha f_\alpha$ *est un isomorphisme de* $T_\alpha N_\alpha$ *sur le socle de* $T_\alpha M$.

Désignons en effet par M_α le plus grand sous-objet de M appartenant à $\boldsymbol{A}_\alpha$ ($\alpha < \mathrm{Kdim}\,\boldsymbol{A}$). Soit Q_α un complément de M_α dans $M_{\alpha\,\mathbf{T}_0}$ (chap. II, § 5); soit i_α le monomorphisme canonique de Q_α dans M.

LEMME 1. — *Le morphisme* j *de* $\sum_\alpha Q_\alpha$ *dans* M *qui est défini par la famille* (i_α) *est une extension essentielle de* $\sum_\alpha Q_\alpha$.

Cela est clair si $\mathrm{Kdim}\,\boldsymbol{A}$ est égal à -1; nous supposerons donc la propriété démontrée pour toutes les catégories $\boldsymbol{B}$ telles que $\mathrm{Kdim}\,\boldsymbol{B} < \mathrm{Kdim}\,\boldsymbol{A}$; nous prouvons qu'alors la propriété est vraie pour $\boldsymbol{A}$. Deux cas sont possibles en effet :

— L'ordinal $\mathrm{Kdim}\,\boldsymbol{A}$ a un prédécesseur β : on sait qu'alors le morphisme h de $M_\beta \oplus Q_\beta$ dans M qui est défini par les morphismes canoniques de M_β et Q_β dans M, est une extension essentielle. D'autre part, j est composé d'un morphisme i de $\sum_\alpha Q_\alpha$ dans $M_\beta \oplus Q_\beta$ et de h; comme i est une extension essentielle d'après l'hypothèse de récurrence et le lemme 2 (§ 5, chap. II), il s'ensuit que j est une extension essentielle (lemme 1, § 5, chap. II).

— $\mathrm{Kdim}\,\boldsymbol{A}$ est un ordinal limite : M est alors la borne supérieure des M_β, pour $\beta < \mathrm{Kdim}\,\boldsymbol{A}$. Soit j_β le morphisme de $\sum_{\gamma<\beta} Q_\gamma$ dans M_β qui est défini par les morphismes i_γ. Comme j_β est une extension essentielle d'après l'hypothèse de récurrence, l'assertion résulte de la proposition 13 (chap. II).

Le lemme étant démontré, la construction d'une famille (f_α) est simple : soit en effet N_α un sous-objet de Q_α et soit g_α le morphisme canonique de N_α dans Q_α; nous supposerons que $T_\alpha g_\alpha$ est un isomorphisme de $T_\alpha N_\alpha$ sur le socle de $T_\alpha Q_\alpha$. Si P est un sous-objet non nul de Q_α, $T_\alpha P$ contient un sous-objet simple et $T_\alpha P \cap T_\alpha N_\alpha$ n'est pas nul. Il s'ensuit que $P \cap N_\alpha$ n'est pas nul. Ceci prouve que g_α est une extension essentielle. Si nous posons $f_\alpha = i_\alpha \circ g_\alpha$, les conditions (a), (b), (c) et (d) sont vérifiées.

Réciproquement, soit (f_α) une famille de morphismes satisfaisant aux conditions (a), (b), (c) et (d). Il est clair que $\operatorname{Im} T_\alpha f_\alpha$ est le plus grand sous-objet de $\operatorname{Im} T_\alpha f$ qui appartient à $\boldsymbol{A}_{\alpha\mathbf{T}_0}$. Si S est un sous-objet simple de $T_\alpha M$, $S \cap \operatorname{Im} T_\alpha f$ est un sous-objet non nul de $T_\alpha M$ et appartient à $\boldsymbol{A}_{\alpha\mathbf{T}_0}$. Il en résulte que $S \cap \operatorname{Im} T_\alpha f$ est contenu dans $\operatorname{Im} T_\alpha f_\alpha$; tout sous-objet simple de $T_\alpha M$ « coupe » donc $\operatorname{Im} T_\alpha f_\alpha$, ce qui prouve la dernière assertion.

THÉORÈME 1. — *Soit I un objet injectif d'une catégorie $\boldsymbol{A}$ dont la dimension de Krull est définie. Il existe une famille $(I_l)_{l\in\boldsymbol{L}}$ d'injectifs indécomposables de $\boldsymbol{A}$, telle que I soit isomorphe à l'enveloppe injective de la somme directe $\sum_{l\in\boldsymbol{L}} I_l$.*

Si $(J_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est une deuxième famille d'injectifs indécompasables, et si $\sum_l I_l$ et $\sum_n J_n$ ont même enveloppe injective, il existe une bijection h de $\boldsymbol{L}$ sur $\boldsymbol{N}$ telle que I_l soit isomorphe à $J_{h(l)}$.

Prouvons d'abord l'existence d'une famille $(I_l)_{l\in\boldsymbol{L}}$: nous utilisons la proposition précédente en choisissant M égal à I. Si EN_α est « l » 'enveloppe injective de N_α, il est clair que I est isomorphe à l'enveloppe injective de la somme directe $\sum_\alpha EN_\alpha$. Il est donc suffisant de prouver que EN_α est l'enveloppe injective d'une somme directe d'injectifs indécomposables. Or N_α ne contient aucun sous-objet non nul appartenant à $\boldsymbol{A}_\alpha$; de plus, $T_\alpha N_\alpha$ est un objet semi-simple de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$. On en déduit l'existence d'une famille $(N'^\sigma_\alpha)_{\sigma\in\boldsymbol{S}}$ de sous-objets de N_α, qui satisfait aux conditions suivantes : $T_\alpha N'^\sigma_\alpha$ est un objet simple; la somme N'_α des N'^σ_α est directe; le monomorphisme canonique de N'_α dans N_α induit un isomorphisme de $T_\alpha N'_\alpha$ sur $T_\alpha N_\alpha$. Si EN'^σ_α est l'enveloppe injective de N'^σ_α, il en résulte que N_α et $\sum_\sigma EN'^\sigma_\alpha$ ont même enveloppe injective. Comme EN'^σ_α est indécomposable, la première partie du théorème est prouvée.

Prouvons la deuxième assertion : désignons par $\boldsymbol{L}_\alpha$ (resp. par $\boldsymbol{N}_\alpha$) l'ensemble des l (resp. des n) tels que le socle de I_l (resp. de J_n) « appartienne » à $\operatorname{Sp}_\alpha(\boldsymbol{A})$. Avec les notations de la proposition précédente, il est alors clair que N_α, $\sum_{l\in\boldsymbol{L}_\alpha} I_l$ et $\sum_{n\in\boldsymbol{N}_\alpha} J_n$ ont même enveloppe injective. Si l'on considère ces objets comme des objets de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\alpha$, il en résulte que N_α, $\sum_{l\in\boldsymbol{L}_\alpha} I_l$ et $\sum_{n\in\boldsymbol{N}_\alpha} J_n$

ont même socle; autrement dit, les sommes directes $\sum_{l\in L_\alpha} s(I_l)$ et $\sum_{n\in N_\alpha} s(J_n)$ sont isomorphes dans A/A_α. Les propriétés des objets semi-simples entraînent l'existence d'une bijection h_α de L_α sur N_α telle que $s(I_l)$ soit isomorphe à $s(J_{h\alpha(l)})$. Alors I_l est isomorphe à $J_{h\alpha(l)}$.

PROPOSITION 5 (théorème d'échange). — *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème* 1. *Soient* $(I_l)_{l\in L}$ *une famille d'injectifs indécomposables et* $u : \sum_{l\in L} I_l \to I$ *une enveloppe injective. Si* J *est un facteur direct de* I, *il existe une partie* N *de* L *qui satisfait à la condition suivante : toute extension essentielle maximale de* $u\left(\sum_{l\in N} I_l\right)$ *dans* I *est un supplémentaire de* J.

Soit en effet N un élément maximal de l'ensemble des parties M de L qui satisfont à la condition suivante : J et $u\left(\sum_{l\in M} I_l\right)$ ont une intersection nulle. Nous allons prouver que I est une extension essentielle de la somme $J + u\left(\sum_{l\in N} I_l\right)$: soit en effet L une extension essentielle maximale de cette somme dans I. Comme N est maximal, L « coupe » tous les $u(I_l)$; autrement dit, $u(I_l)$ est extension essentielle de $L \cap u(I_l)$ pour tout $l\in L$. Il en résulte que I est extension essentielle de L. D'où l'égalité $L = I$. Ceci achève la preuve.

2. La structure des objets injectifs dans une catégorie localement nœthérienne. — Les énoncés du paragraphe précédent se simplifient quand A est une catégorie localement nœthérienne. Le corollaire 1 du théorème 1 (chap. II) a en effet la conséquence qui suit :

PROPOSITION 6. — *Soient* A *une catégorie localement nœthérienne et* $(I_l)_{l\in L}$ *une famille d'objets injectifs de* A. *La somme directe* $\sum_{l\in L} I_l$ *est alors un objet injectif de* A.

PROPOSITION 7. — *Pour toute catégorie localement nœthérienne* A, *la sous-catégorie localisante* A_ω *coïncide avec* A ; *de plus, les catégories* $A_{\alpha T_0}/A_\alpha$ *sont localement finies.*

Nous savons en effet que A/A_ω ne possède aucun objet simple. Comme A est une catégorie localement nœthérienne, il en va de même pour A/A_ω. Si A_ω

ne coïncidait pas avec $\mathbf{A}$, la catégorie $\mathbf{A}/\mathbf{A}_\omega$ contiendrait donc un objet nœthérien non nul M. Pour tout sous-objet propre maximal N de M, le quotient M/N serait simple, ce qui est absurde.

La dernière assertion provient du fait que toute catégorie localement nœthérienne dont la dimension de Krull est nulle, est localement finie.

Modulo les propositions 6 et 7, le théorème 1 et la proposition 5 s'énoncent de la façon suivante :

THÉORÈME 2 (MATLIS [17]). *Soit $\mathbf{A}$ une catégorie localement nœthérienne. Tout injectif I est isomorphe à la somme directe $\sum_{l\in\mathbf{L}} I_l$ d'une famille $(I_l)_{l\in\mathbf{L}}$ d'objets injectifs indécomposables.*

Si $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une deuxième famille d'injectifs indécomposables, et si les sommes directes $\sum_{l\in\mathbf{L}} I_l$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} J_n$ sont isomorphes, il existe une bijection h de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{N}$ telle que I_l soit isomorphe à $J_{h(l)}$.

La deuxième assertion du théorème 2 résulte aussi du théorème 1 (chap. I).

PROPOSITION 8 (théorème d'échange). — *Soient $\mathbf{A}$ une catégorie localement nœthérienne et $(I_l)_{l\in\mathbf{L}}$ une famille d'injectifs indécomposables de $\mathbf{A}$. Si J est un facteur direct de $\sum_{l\in\mathbf{L}} I_l$, il existe une partie $\mathbf{N}$ de $\mathbf{L}$ telle que $\sum_{l\in\mathbf{N}} I_l$ soit un supplémentaire de J dans $\sum_{l\in\mathbf{L}} I_l$.*

Nous supposons dans la suite de ce paragraphe que $\mathbf{A}$ est une catégorie localement nœthérienne. Nous disons que la catégorie $\mathbf{A}$ est *connexe* si elle n'est pas équivalente au produit de deux catégories non nulles.

COROLLAIRE. — *Toute catégorie localement nœthérienne $\mathbf{A}$ est équivalente au produit d'une famille $(\mathbf{A}_n)_{n\in E}$ de catégories connexes.*

Soit en effet $\mathbf{I}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}$ dont les objets sont les objets injectifs de $\mathbf{A}$. D'après le corollaire 1 de la proposition 14 (chap. I), il suffit de montrer que $\mathbf{I}$ est produit d'une famille $(\mathbf{I}_n)_{n\in E}$ de catégories additives telles que $\mathbf{KI}_n$ soit une catégorie connexe pour tout n. Pour cela nous convenons de dire que deux injectifs indécomposables I et J sont équivalents s'il existe une suite finie (I_l), $1\leqq l\leqq k$, d'injectifs indécomposables satisfaisant aux conditions suivantes : $I_1=I$, $I_k=J$; si $1\leqq l\leqq k-1$, les groupes abéliens $\mathrm{Hom}(I_l, I_{l+1})$ et $\mathrm{Hom}(I_{l+1}, I_l)$ ne sont pas nuls tous les deux. Nous désignons par E l'ensemble des classes d'équivalence ainsi obtenues

(BRAUER appelle une telle classe un *bloc* ; pour être précis disons que BRAUER considère les modules projectifs indécomposables sur un anneau artinien A ; il dit que deux projectifs indécomposables P et Q appartiennent au même bloc s'il existe une suite $P_1 = P, P_2, \ldots, P_k = Q$ formée de projectifs indécomposables tels que les groupes $\mathrm{Hom}_A(P_l, P_{l+1})$ et $\mathrm{Hom}_A(P_{l+1}, P_l)$ ne soient jamais nuls tous les deux ; nous verrons au paragraphe 3 que la théorie de BRAUER est un cas particulier de celle que nous développons ici). Si n est une telle classe, soit $\boldsymbol{I}_n$ la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{I}$ qui est définie par les sommes directes d'injectifs indécomposables de n. Il est clair que la catégorie $\boldsymbol{I}$ est équivalente au produit des catégories $\boldsymbol{I}_n$; de plus, $\boldsymbol{I}_n$ n'est pas équivalente au produit de deux catégories additives non nulles ; d'où l'assertion.

Soit $\boldsymbol{A}_n$ la sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$ qui est définie par les objets M tels que $\mathrm{Hom}(M, I)$ soit nul pour tout injectif indécomposable n'appartenant pas à n. Il est clair que les catégories $\boldsymbol{A}_n$ et $\boldsymbol{KI}_n$ sont équivalentes. La catégorie $\boldsymbol{A}$ est donc équivalente au produit des catégories connexes $\boldsymbol{A}_n$. Nous dirons que $\boldsymbol{A}_n$ est une *composante connexe* de $\boldsymbol{A}$.

Nous terminons ce paragraphe sur une généralisation de la décomposition primaire de Lasker-Nœther. Pour tout élément s du spectre de $\boldsymbol{A}$, nous choisissons un injectif indécomposable I_s de type s. Si M est un objet de $\boldsymbol{A}$, nous disons que *s est associé à M* si l'enveloppe injective de M contient un sous-objet isomorphe à I_s. L'ensemble des éléments s de $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$ qui sont associés à M sera noté $\mathrm{ass}(M)$. Nous disons que *M est isotypique de type s* si $\mathrm{ass}(M)$ a s pour seul élément.

PROPOSITION 9. — *Soit M un objet nœthérien d'une catégorie localement nœthérienne $\boldsymbol{A}$. Il existe une application $s \rightsquigarrow N_s$ d'une partie finie $\boldsymbol{L}$ de $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A})$ dans l'ensemble des sous-objets de M qui remplit les conditions suivantes : M/N_s est isotypique de type s ; l'intersection des N_s est nulle ; si $\boldsymbol{P}$ est une partie de $\boldsymbol{L}$ qui est distincte de $\boldsymbol{L}$, l'intersection $\bigcap_{s \in \boldsymbol{P}} N_s$ n'est pas nulle. Si ces conditions sont remplies, $\boldsymbol{L}$ est égal à* $\mathrm{ass}(M)$.

Soit en effet $i : M \to I$ une enveloppe injective de M. Nous supposons pour simplifier que M est un sous-objet de I et que i est le morphisme canonique de M dans I. Nous supposons aussi que I est la somme directe d'une somme directe d'une famille $(I_l)_{l \in \boldsymbol{L}}$ d'injectifs indécomposables. Les sous-objets $M \cap I_l$ de M sont alors différents de O pour tout l et leur somme est directe. Comme M est nœthérien, l'ensemble $\boldsymbol{L}$ est fini. Si s est un élément de $\mathrm{ass}(M)$, désignons par J_s la somme directe des I_l isomorphes à I_s. Dans ces conditions, il suffit de choisir $\boldsymbol{L}$ égal à $\mathrm{ass}(M)$ et N_s égal à $M \cap \left(\sum_{l \neq s} J_t \right)$.

Réciproquement, supposons données $\mathbf{L}$ et l'application $s \rightsquigarrow N_s$. Les morphismes canoniques $q_s : M \to M/N_s$ définissent un monomorphisme q de M dans la somme directe N des M/N_s. On en tire la formule $\mathrm{ass}(M) \subset \mathrm{ass}(N) = \mathbf{L}$. Soit d'autre part M_s l'intersection des N_t pour t différent de s. Le morphisme q_s induit un monomorphisme de M_s dans M/N_s. Comme $\mathrm{ass}(M_s)$ n'est pas nul et que $\mathrm{ass}(M/N_s) = \{s\}$, on a les formules suivantes : $s \in \mathrm{ass}(M_s) \subset \mathrm{ass}(M)$. Ceci prouve que $\mathbf{L}$ est contenu dans $\mathrm{ass}(M)$, ce qui restait à démontrer.

Nous laissons au lecteur le soin de transcrire dans le langage de cet article les multiples propositions de la décomposition primaire. Nous lui laissons aussi le soin de formuler les énoncés duaux des énoncés précédents.

3. **Modules pseudo-compacts.** — Nous avons vu dans les paragraphes précédents comment les catégories localement finies s'introduisent dans l'étude des catégories localement nœthériennes. La fin de ce chapitre sera consacrée à une étude plus approfondie des catégories localement finies. Nous commençons par donner un exemple :

Appelons *anneau pseudo-compact* à gauche un anneau A avec élément unité, topologique, séparé, complet, dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$ et qui satisfait à l'axiome APC :

APC : L'anneau A possède une base de voisinages de O formée d'idéaux à gauche l de colongueur finie [i. e. $\mathrm{long}_A(A/l) < +\infty$].

Sauf mention expresse du contraire, nous ne considérons dans la suite de ce chapitre que des A-modules à gauche unitaires dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$. Si M est un tel A-module, la topologie discrète fait de M un module topologique sur l'anneau topologique A si et seulement si l'annulateur de tout élément m de M est un idéal à gauche ouvert (donc de colongueur finie). Les *A-modules topologiques discrets* forment une catégorie localement finie que nous notons $\mathrm{dis}(A)$ (pour la définition des modules topologiques, *cf.* Bourbaki, *Topologie*, III, § 6, n° 6, 3e éd.).

Les objets de longueur finie de $\mathrm{dis}(A)$ sont les modules topologiques discrets de longueur finie. Ces modules définissent une catégorie abélienne finie $\mathbf{T}(A)$ et le théorème 1 (chap. II) montre que la donnée de $\mathbf{T}(A)$ détermine $\mathrm{dis}(A)$ à une équivalence près. Comme la catégorie duale $\mathbf{T}(A)^0$ est aussi une catégorie abélienne finie, le même théorème prouve l'existence d'une catégorie localement finie $\mathbf{D}$ telle que $\mathbf{T}(A)^0$ soit équivalente à la catégorie des objets de longueur finie de $\mathbf{D}$. Nous allons montrer que la catégorie duale $\mathbf{D}^0$ est équivalente à une catégorie de A-modules :

Appelons *A-module pseudo-compact* tout A-module à gauche, topologique, séparé, complet M qui satisfait à l'axiome MPC :

MPC : Le module M possède une base de voisinages de O formée de sous-modules N tels que M/N soit de longueur finie.

Si M et N sont deux A-modules pseudo-compacts, un morphisme de M dans N sera une application A-linéaire continue de M dans N; la composition des morphismes sera la composition usuelle des applications. Nous avons ainsi défini une nouvelle catégorie que nous noterons $PC(A)$. Il est clair que $PC(A)$ est une catégorie additive. Nous allons voir que $PC(A)$ est même une catégorie abélienne. La preuve de ce fait s'appuie sur un lemme d'algèbre bien connu (BOURBAKI, *Topologie*, I Appendice, 3e éd.) :

LEMME 1. — *Soient B un anneau, I un ensemble ordonné filtrant, (M_i, f_{ji}) et (N_i, g_{ji}) deux systèmes projectifs, indexés par I et formés de B-modules à gauche. Soit (h_i) un morphisme du premier système dans le second, et supposons h_i surjectif et de noyau artinien pour tout i. Alors $\varprojlim h_i$ est une application surjective de $\varprojlim M_i$ sur $\varprojlim N_i$.*

Ce lemme a pour conséquence les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 10. — *Soient M un A-module pseudo-compact, (M_i) une famille filtrante décroissante de sous-modules fermés de M. L'application canonique de M dans la limite projective $\varprojlim M/M_i$ est surjective et a pour noyau $\inf_i M_i$.*

Soit en effet (N_j) la famille filtrante décroissante des sous-modules ouverts de M. Dans le diagramme suivant, toutes les flèches représentent des applications « évidentes » :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{p} & \varprojlim_j M/N_j & & \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \\ 0 \longrightarrow \varprojlim_{i,j} (M_i+N_j)/M_i & \longrightarrow & \varprojlim_i M/M_i & \xrightarrow{r} & \varprojlim_{i,j} M/(M_i+N_j) & & \end{array}$$

Comme M est complet, p est un isomorphisme; d'après le lemme 1, s est surjectif. Il s'ensuit que r est surjectif. On a d'autre part les égalités

$$\varprojlim_{i,j} (M_i+N_j)/M_i = \varprojlim_i \varprojlim_j (M_i+N_j)/M_i = \varprojlim_i M_i/M_i = 0,$$

car M_i est fermé et est l'intersection des M_i+N_j. Il en résulte que r est un isomorphisme et que q est surjectif. Enfin, le noyau de q est la limite projective des M_i, c'est-à-dire $\inf_i M_i$.

PROPOSITION 11. — *Soient M un A-module pseudo-compact, N un sous-module fermé de M et (M_i) une famille filtrante décroissante de sous-modules fermés de M. Alors les sous-modules $N+\inf_i M_i$ et $\inf(N+M_i)$ coïncident.*

On a en effet le diagramme commutatif et exact suivant (les flèches représentent des applications « évidentes ») :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_i N/(N\cap M_i) & \longrightarrow & \varprojlim_i M/M_i & \longrightarrow & \varprojlim_i M/(M_i+N) & & \end{array}$$

Or N est manifestement un module pseudo-compact pour la topologie induite par M. La proposition précédente montre donc que l et j sont des surjections. Il en résulte que le noyau de h est l'image du noyau de j ([6], lemme III, 3.3). Comme $\operatorname{Ker} h$ est égal à $\inf_i (M_i+N)/N$ et $\operatorname{Ker} j$ à $\inf_i M_i$, on a « l'égalité »

$$\inf_i (M_i+N)/N = \Big(\big(\inf_i M_i\big)+N\Big)/N.$$

THÉORÈME 3. — *Les modules pseudo-compacts sur l'anneau pseudo-compact A forment une catégorie abélienne avec cogénérateurs et limites projectives exactes. La catégorie duale est localement finie.*

Soit en effet M un module pseudo-compact et soit $\operatorname{Hom}_{PC(A)}(M, .)$ le foncteur $N \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_{PC(A)}(M, N)$ de $\boldsymbol{T}(A)$ dans $\boldsymbol{Ab}$. On peut vérifier directement que le foncteur $M \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_{PC(A)}(M, .)$ définit une équivalence entre $PC(A)^0$ et la catégorie $\operatorname{Sex}(\boldsymbol{T}(A), \boldsymbol{Ab})$ (*cf.* chap. II). Nous préférons cependant une démonstration qui explicite la construction des noyaux et des conoyaux :

Si $f : M \to N$ est un morphisme de modules pseudo-compacts, le module sous-jacent à $\operatorname{Ker} f$ est formé des éléments m de M tels que $f(m)$ soit nul. Ce sous-module est fermé et on le munit de la topologie induite par M.

Le coimage de f est le module quotient $M/\operatorname{Ker} f$ qu'on munit de la topologie quotient. Montrons que $M/\operatorname{Ker} f$ est un module pseudo-compact : la vérification de l'axiome MPC est immédiate; il reste à voir que $M/\operatorname{Ker} f$ est complet, ou encore que l'application canonique de $M/\operatorname{Ker} f$ dans $\varprojlim M/(\operatorname{Ker} f + N_j)$ est un isomorphisme quand N_j parcourt le système projectif des sous-modules ouverts de M. Cela résulte de la proposition 10.

Soit N' l'image « ensembliste » de M par l'application f et confondons N' avec $M/\operatorname{Ker} f$ pour la commodité du raisonnement. La topologie induite par N dans N' est séparée, linéaire (i. e. définie par des sous-modules) et elle est plus grossière que la topologie quotient. Soit (N'_j) une famille filtrante décroissante vers O de sous-modules de N' ouverts pour la topologie induite. Si P est un sous-module de N' qui est ouvert pour la topologie quotient, la famille $(P+N'_j)$ est filtrante décroissante. Comme N'/P est artinien, cette famille possède un plus petit élément. Comme enfin $\inf_j (P+N'_j)$

est égal à $P + \inf_j N'_j$ d'après la proposition 11, on voit que ce plus petit élément est égal à P. Autrement dit, P contient N'_j quand N'_j est assez petit : la topologie induite coïncide avec la topologie quotient.

En particulier, N' est complet pour la topologie induite par N; donc N' est fermé dans N. Il en résulte que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Coim}f$ sont isomorphes et que $\mathrm{Coker}f$ est le quotient N/N' muni de la topologie quotient. Ceci prouve que $PC(A)$ est une catégorie abélienne.

Si (M_i, f_{ji}) est un système projectif de modules pseudo-compacts, la limite projective de ce système est définie de la façon suivante : le module sous-jacent à $\varprojlim M_i$ est la limite projective des modules sous-jacents; la topologie de $\varprojlim M_i$ est la topologie de la limite projective. L'exactitude des limites projectives équivaut à l'une ou l'autre des propositions 10 et 11 (proposition duale de la proposition 6, chap. I).

Enfin, lorsque n parcourt les entiers positifs et M les sous-modules pseudo-compacts de colongueur finie de A^n, les quotients A^n/M définissent une famille de cogénérateurs de $PC(A)$. Ceci achève la preuve du théorème.

COROLLAIRE 1. — *L'anneau pseudo-compact A est produit direct topologique d'idéaux à gauche fermés et indécomposables. Tout module pseudo-compact projectif est produit direct topologique de modules pseudo-compacts projectifs et indécomposables. Tout module pseudo-compact projectif et indécomposable est isomorphe à un idéal à gauche $A.e$, où e est un idempotent primitif de A.*

Rappelons qu'un idempotent e est dit primitif si e n'est pas somme de deux idempotents e' et e'' tels que $e'.e'' = e''.e' = 0$.

Tout morphisme de A dans un module pseudo-compact M est en effet de la forme $a \to a.m$, où $m \in M$. Il s'ensuit que A est un module pseudo-compact projectif. Les deux premières assertions du corollaire résultent donc par dualité du théorème 2. D'autre part, tout projectif indécomposable P est « l » 'enveloppe projective d'un module pseudo-compact simple S. Comme S est isomorphe à un quotient de A, P est isomorphe à un facteur direct de A.

COROLLAIRE 2. — *Soient A un anneau pseudo-compact, $(e_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'idempotents orthogonaux deux à deux. Si e est la somme de cette famille, les injections canoniques de $A.e_i$ dans $A.e$ se prolongent en un isomorphisme du produit direct $\prod_i A.e_i$ sur $A.e$.*

Rappelons que deux idempotents e et f sont dits orthogonaux si $e.f = f.e = 0$.

Il est en effet clair que e est un idempotent de A. Désignons par f_i l'application $a.e \to a.e_i$ de $A.e$ sur $A.e_i$. Ces applications définissent un mor-

phisme f de $A.e$ dans le produit direct $\prod_{i\in I} A.e_i$. Si J est une partie finie de I, f induit une surjection de $A.e$ sur $\prod_{i\in J} A.e_i$. Il s'ensuit que f est une surjection (exactitude des limites projectives) et que le noyau $\mathrm{Ker}f$ est un facteur direct de $A.e$. Supposons $\mathrm{Ker}f$ non nul et soit l un idéal à gauche de A, ouvert et ne contenant pas $\mathrm{Ker}f$. Pour toute partie finie J de I, $A.e$ est produit direct des $A.e_i$, $i\in J$, de $\mathrm{Ker}f$ et d'un troisième facteur. On a donc une décomposition de e en somme finie d'idempotents orthogonaux deux à deux, soit

$$e=\sum_{i\in J} e_i + e' + e'',$$

où e' engendre $\mathrm{Ker}f$.

Pour J assez grand, $e-\sum_{i\in J} e_i$ doit appartenir à l; donc $e'+e''$ et $e'=e'.(e'+e'')$ appartiennent à l : ceci est absurde. Autrement dit, $\mathrm{Ker}f$ est nul et le corollaire est prouvé.

Corollaire 3. — *Soient A un anneau pseudo-compact, $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère fermé de A et $(e_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'idempotents orthogonaux deux à deux de $A/\mathfrak{a}$. Il existe une famille sommable $(f_i)_{i\in I}$ d'idempotents orthogonaux deux à deux de A telle que e_i soit l'image de f_i par l'application canonique de A dans $A/\mathfrak{a}$.*

L'anneau $A/\mathfrak{a}$ est en effet pseudo-compact pour la topologie quotient. Il s'ensuit que l'application $f : a \to (a.e_i)$ de $A/\mathfrak{a}$ dans le produit $\prod_{i\in I} A.e_i$ est surjective (corollaire 2). Soient p l'application canonique de A sur $A/\mathfrak{a}$, $u_i : P_i \to A.e_i$ une enveloppe projective de $A.e_i$ et u le produit $\prod_{i\in I} u_i$.

Comme A est projectif, il existe un morphisme g de A dans $\prod_{i\in I} P_i$ tel que $u\circ g$ soit égal à $f\circ p$. Comme u est une enveloppe projective et que $u\circ g$ est surjectif, il existe un morphisme h de $\prod_{i} P_i$ dans A tel que $h\circ g$ soit l'application identique de $\prod_{i} P_i$. Il suffit alors de choisir pour f_i l'image

de 1 dans la projection de A sur $h(P_i)$ qui annule $\mathrm{Ker}\, g$ et les modules $h(P_j)$, $j \neq i$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & A/\mathfrak{a} \\ {\scriptstyle h}\uparrow\downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \prod_i P_i & \xrightarrow{u} & \prod_i A.e_i \end{array}$$

Remarque. — Les démonstrations de ce paragraphe restent valables quand on remplace APC et MPC par les conditions plus faibles que voici :

APC′ : L'anneau A possède une base de voisinages de O formée d'idéaux à gauche I tels que A/I soit artinien.

MPC′ : Le module M possède une base de voisinages de O formée de sous-modules N tels que M/N soit artinien.

Les seules modifications à effectuer dans les énoncés précédents sont les suivantes : les A-modules à gauche satisfaisant à MPC′ forment une catégorie abélienne dont la catégorie duale est localement nœthérienne. En outre, la dernière assertion du corollaire 1 n'est plus vraie.

Les anneaux topologiques satisfaisant à la condition APC′ ont été étudiés par H. LEPTIN à l'aide de méthodes différentes ([13], [14]); nous n'aurons besoin que des anneaux pseudo-compacts.

4. Dualité entre catégories localement finies et modules pseudo-compacts. — Nous nous proposons de montrer que toute catégorie localement finie est équivalente à la catégorie duale d'une catégorie de modules pseudo-compacts; nous commençons par quelques définitions :

Une sous-catégorie pleine d'une catégorie $\boldsymbol{A}$ est dite *fermée* si les conditions suivantes sont réalisées : tout sous-objet et tout quotient d'un objet de $\boldsymbol{C}$ appartient à $\boldsymbol{C}$; la somme directe (dans $\boldsymbol{A}$) de deux objets de $\boldsymbol{C}$ appartient à $\boldsymbol{C}$; la limite inductive (dans $\boldsymbol{A}$) d'un système inductif d'objets de $\boldsymbol{C}$ appartient à $\boldsymbol{C}$.

Si M est un objet de $\boldsymbol{A}$, M contient un sous-objet $\boldsymbol{C}M$ qui appartient à $\boldsymbol{C}$ et qui contient tous les autres sous-objets de M appartenant à $\boldsymbol{C}$. Si $f : M \to N$ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$, $f(\boldsymbol{C}M)$ est contenu dans $\boldsymbol{C}N$; en outre, le foncteur $M \rightsquigarrow \boldsymbol{C}M$ est adjoint au foncteur canonique de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{A}$; en particulier, le foncteur $M \rightsquigarrow \boldsymbol{C}M$ est exact à gauche (proposition 11, chap. I). Par exemple, les objets semi-simples de $\boldsymbol{A}$ sont les objets d'une sous-catégorie fermée $\boldsymbol{S}$. Si M est un objet de $\boldsymbol{A}$, le sous-objet $\boldsymbol{S}M$ est appelé *le socle de* M.

Si $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont deux sous-catégories fermées de $\boldsymbol{A}$, nous désignons par $\boldsymbol{C}.\boldsymbol{D}$ la sous-catégorie fermée qui suit : un objet M de $\boldsymbol{A}$ appartient à $\boldsymbol{C}.\boldsymbol{D}$ si $M/\boldsymbol{D}M$ est un objet de $\boldsymbol{C}$. Le produit $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) \rightsquigarrow \boldsymbol{C}.\boldsymbol{D}$ est manifestement associatif. Nous pouvons donc parler des puissances $\boldsymbol{C}^n$ d'une sous-catégorie fermée $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{A}$.

Soient maintenant $\boldsymbol{A}$ une catégorie localement finie et $\boldsymbol{S}$ la sous-catégorie fermée de $\boldsymbol{A}$ qui est définie par les objets semi-simples de $\boldsymbol{A}$. Si M est un objet de $\boldsymbol{A}$, nous désignons par M_n le plus grand sous-objet de M qui appartienne à la sous-catégorie fermée $\boldsymbol{S}^{n+1}$ (par exemple, M_0 désignera le socle de M). Comme $\boldsymbol{A}$ est une catégorie localement finie, il est clair que M est la borne supérieure des sous-objets M_n. Nous allons examiner le cas où M est un objet injectif de $\boldsymbol{A}$.

PROPOSITION 12. — *Soient I un objet injectif d'une catégorie localement finie $\boldsymbol{A}$, A l'anneau des endomorphismes de I et $\mathfrak{r}$ l'ensemble des endomorphismes de I dont le noyau contient le socle I_0. Alors $\mathfrak{r}$ est le radical de Jacobson de A; l'intersection des puissances $\mathfrak{r}^n$ est nulle; l'anneau quotient $A/\mathfrak{r}$ est isomorphe au produit des anneaux des endomorphismes d'une famille d'espaces vectoriels.*

Soit en effet $\mathfrak{r}^{(n)}$ l'idéal bilatère formé des endomorphismes de I dont le noyau contient I_{n-1}. Si f est un élément de $\mathfrak{r}^{(n)}$, il est clair que $f(I_{m+n})$ est contenu dans I_m. Il s'ensuit que $\mathfrak{r}^{(m)}.\mathfrak{r}^{(n)}$ est contenu dans $\mathfrak{r}^{(m+n)}$. En particulier $\mathfrak{r}^n$ est contenu dans $\mathfrak{r}^{(n)}$.

D'autre part les morphismes canoniques de I_n dans I et de I dans I/I_n donnent naissance à des suites exactes

$$0 \to \mathrm{Hom}(I/I_n, I) \xrightarrow{i_n} \mathrm{Hom}(I, I) \xrightarrow{p_n} \mathrm{Hom}(I_n, I) \to 0.$$

L'idéal $\mathfrak{r}^{(n+1)}$ n'est autre que l'image de i_n. L'application p_n définit donc un isomorphisme de $A/\mathfrak{r}^{(n+1)}$ sur $\mathrm{Hom}(I_n, I)$. Les formules

$$A = \mathrm{Hom}(I, I) = \mathrm{Hom}\left(\varinjlim I_n, I\right) = \varprojlim \mathrm{Hom}(I_n, I) = \varprojlim A/\mathfrak{r}^{(n+1)}$$

montrent alors que A est séparé et complet pour la filtration définie par les idéaux $\mathfrak{r}^{(n)}$. La formule $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$ montre en outre que l'inverse de $1-x$ existe si x appartient à $\mathfrak{r}$; autrement dit, $\mathfrak{r}$ est contenu dans le radical de Jacobson de A.

Remarquons enfin que pour tout morphisme f de I_0 dans I, $f(I_0)$ est contenu dans I_0. Le quotient $A/\mathfrak{r}$ est donc égal à $\mathrm{Hom}(I_0, I_0)$: c'est l'anneau des endomorphismes d'un objet semi-simple. La dernière assertion de la proposition résulte de là (*cf.* chap. I, § 6). Il s'ensuit aussi que $\mathfrak{r}$ est une intersection d'idéaux maximaux et contient le radical de Jacobson ; ceci achève la preuve.

Lorsque M parcourt les sous-objets de longueur finie de I, le morphisme canonique de I sur I/M définit une injection de $\mathrm{Hom}(I/M, I)$ dans A. L'image de cette application est un idéal à gauche que nous noterons $\mathfrak{l}(M)$. Si M et N sont deux sous-objets de longueur finie, l'exactitude du foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X, I)$ entraîne l'égalité $\mathfrak{l}(M+N) = \mathfrak{l}(M) \cap \mathfrak{l}(N)$. Cette

égalité montre que les idéaux à gauche $\mathfrak{l}(M)$ forment une base de voisinages de O pour une topologie qui fait de A un groupe topologique. Nous munirons toujours A de cette topologie que nous qualifierons de *naturelle*.

PROPOSITION 13 :

a. Soient $\mathbf{A}$ *une catégorie localement finie, I un injectif de* $\mathbf{A}$ *et A l'anneau des endomorphismes de I. Muni de la topologie naturelle, A est un anneau pseudo-compact.*

b. Réciproquement, tout anneau pseudo-compact A est isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un injectif d'une catégorie localement finie. En particulier, le radical de Jacobson $\mathfrak{r}$ de A est l'intersection des idéaux à gauche ouverts maximaux; l'intersection des $\mathfrak{r}^n$ est nulle et $A/\mathfrak{r}$ est isomorphe au produit des anneaux des endomorphismes d'une famille d'espaces vectoriels.

a. Montrons d'abord que A est un anneau topologique. Comme il existe une base de voisinages de O formée d'idéaux à gauche, il suffit de prouver la chose suivante : pour tout sous-objet de longueur finie M de I et pour tout élément a de A, il existe un sous-objet de longueur finie N tel que $\mathfrak{l}(N).a$ soit contenu dans $\mathfrak{l}(M)$. Or il suffit de choisir N égal à $a(M)$.

On a d'autre part les « égalités »

$$A = \operatorname{Hom}(I, I) = \operatorname{Hom}\left(\varinjlim M, I\right) = \varprojlim \operatorname{Hom}(M, I) = \varprojlim A/\mathfrak{l}(M).$$

Ces égalités montrent à la fois que A est séparé et que A est complet. Il reste à prouver que les A-modules $A/\mathfrak{l}(M)$ sont de longueur finie : pour cela, nous étudions d'abord le A-module $\operatorname{Hom}(S, I)$ lorsque S est un objet simple de $\mathbf{A}$; nous désignons par I_S la composante isotypique de type S de I_0 et par B l'anneau des endomorphismes de I_S.

Pour tout endomorphisme f de I, $f(I_S)$ est contenu dans I_S; il s'ensuit que f induit un endomorphisme g de I_S et que l'application $p : f \rightsquigarrow g$ de A dans B est un épimorphisme d'anneaux. Cet épimorphisme est compatible avec la bijection canonique du A-module $\operatorname{Hom}(S, I)$ sur le B-module $\operatorname{Hom}(S, I_S)$. Il en résulte que $\operatorname{Hom}(S, I)$ est nul ou est un A-module simple suivant que I_S est nul ou non.

Soit maintenant M un sous-objet de longueur finie de I et soit

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset M$$

une suite de Jordan-Hölder de M. Le A-module $A/\mathfrak{l}(M)$ est isomorphe à $\operatorname{Hom}(M, I)$ et les modules $\operatorname{Hom}(M/M_i, I)$ définissent une suite de composition de $\operatorname{Hom}(M, I)$. Le quotient de $\operatorname{Hom}(M/M_i, I)$ par $\operatorname{Hom}(M/M_{i+1}, I)$ est isomorphe à $\operatorname{Hom}(M_{i+1}/M_i, I)$. Il en résulte que la longueur de $A/\mathfrak{l}(M)$ est inférieure ou égale à la longueur de M. Ceci prouve (a).

b. Soit $\mathbf{A}$ la catégorie duale de $PC(A)$. Le A-module à gauche sous-jacent à A est projectif; c'est donc un objet injectif de $\mathbf{A}$. L'assertion (*b*) résulte de ce que A est l'anneau des endomorphismes de cet objet injectif.

La proposition 13 étant prouvée, nous portons notre intérêt sur le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(M, I)$: le groupe abélien $\mathrm{Hom}(M, I)$ est muni d'une structure de module à gauche sur l'anneau A des endomorphismes de I. D'autre part, lorsque N parcourt les sous-objets de longueur finie de M, l'épimorphisme canonique de M sur M/N définit une injection de $\mathrm{Hom}(M/N, I)$ dans $\mathrm{Hom}(M, I)$. L'image de cette application est un sous-module que nous noterons encore $\mathrm{I}(N)$. D'une façon générale, les arguments que nous avons employés lorsque M était égal à I restent valables ici et ils ont la conséquence suivante : les sous-modules $\mathrm{I}(N)$ de $\mathrm{Hom}(M, I)$ forment une base de voisinages de O pour une topologie qui fait de $\mathrm{Hom}(M, I)$ un A-module pseudo-compact. Nous munirons toujours $\mathrm{Hom}(M, I)$ de cette topologie que nous qualifierons de *naturelle*.

Si $f : M \to M'$ est un morphisme de $\mathbf{A}$, $\mathrm{Hom}(f, I)$ est une application continue de $\mathrm{Hom}(M', I)$ dans $\mathrm{Hom}(M, I)$: comme $\mathrm{Hom}(f, I)$ est une application linéaire, il suffit en effet de prouver que, pour tout sous-objet de longueur finie N de M, il existe un sous-objet de longueur finie N' de M' tel que $\mathrm{Hom}(f, I)$ applique $\mathrm{I}(N')$ dans $\mathrm{I}(N)$. Or il suffit de choisir N' égal à $f(N)$. Ceci montre que $\mathrm{Hom}(f, I)$ est un morphisme de modules pseudo-compacts. Nous avons donc défini un foncteur de $\mathbf{A}$ dans la catégorie duale de $PC(A)$.

THÉORÈME 4. — *Soient I un objet injectif d'une catégorie localement finie $\mathbf{A}$, A l'anneau des endomorphismes de I et F le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(M, I)$. Le foncteur F définit par passage au quotient une équivalence entre $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}F$ et la catégorie duale de la catégorie $PC(A)$ des modules pseudo-compacts sur A.*

La sous-catégorie $\mathrm{Ker}F$ est formée des M tels que $\mathrm{Hom}(M, I) = 0$ et elle est localisante (corollaire de la proposition 8, chap. III). D'après la proposition 10 (chap. III), $\mathrm{Ker}F$ est la plus petite sous-catégorie localisante contenant les objets simples S tels que $\mathrm{Hom}(S, I)$ soit nul. On peut dire aussi que la sous-catégorie localisante $\mathrm{Ker}F$ est engendrée par les objets simples qui « n'interviennent pas » dans la décomposition du socle de I en composantes isotypiques.

Soit T le foncteur canonique de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}F$. Alors TI est un objet injectif de $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}F$ et le socle de TI contient des objets simples de $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}F$ de tous les types. De plus, comme I est $\mathrm{Ker}F$-fermé, l'application $T(M, I)$ de $\mathrm{Hom}(M, I)$ dans $\mathrm{Hom}(TM, TI)$ est une bijection. Nous pouvons donc remplacer $\mathbf{A}$ par la catégorie localement finie $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}F$ et remplacer I par TI. Autrement dit, nous pouvons nous ramener au cas où la catégorie $\mathrm{Ker}F$ est nulle : c'est ce que nous supposerons dans la suite de cette preuve.

LEMME 1. — *Pour tout objet M de $\mathbf{A}$, l'application $F(M, I)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I)$ dans $\mathrm{Hom}_{PC(A)}(FI, FM)$ est une bijection.*

Soit en effet f un morphisme de M dans I. L'image de f par l'application $F(M, I)$ n'est autre que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(f, I)$; cette dernière application associe à tout élément a de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(I, I)$ l'élément $a \circ f$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I)$. Or les morphismes de $A = FI$ dans FM sont de la forme $a \rightsquigarrow a \circ f$. Ceci prouve le lemme.

LEMME 2. — *Soient M un objet de $\mathbf{A}$, $(I_j)_{j\in E}$ une famille d'objets isomorphes à I et J la somme directe de la famille $(I_j)_{j\in E}$. L'application $F(M, J)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, J)$ dans $\mathrm{Hom}_{PC(A)}(FJ, FM)$ est bijective.*

Nous considérons d'abord le cas où l'objet M est de longueur finie. On sait qu'alors l'application canonique u de la somme directe des groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, I_j)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, J)$ est une bijection (corollaire 1 du théorème 1, chap. II); il en va de même de l'applicatiou canonique v de la somme directe des $\mathrm{Hom}_{PC(A)}(FI_j, FM)$ dans $\mathrm{Hom}_{PC(A)}(FJ, FM)$. En outre, $F(M, I_j)$ est une bijection pour tout j. L'assertion résulte donc de l'égalité

$$v \circ \left(\sum F(M, I_j) \right) = F(M, J) \circ u.$$

Dans le cas général, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, J)$ est la limite projective des groupes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(N, J)$ lorsque N parcourt les sous-objets de longueur finie de M. De même, $\mathrm{Hom}_{PC(A)}(FJ, FM)$ est la limite projective des groupes $\mathrm{Hom}_{PC(A)}(FJ, FN)$. On a de plus le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(M, J) & \xrightarrow{F(M,J)} & \mathrm{Hom}_{PC(A)}(FJ, FM) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(N, J) & \xrightarrow{\varprojlim F(N,J)} & \varprojlim \mathrm{Hom}_{PC(A)}(FJ, FN) \end{array}$$

Comme $F(N, J)$ est un isomorphisme pour tout N, il en va de même pour $F(M, J)$, ce qui démontre le lemme 2.

Si la catégorie $\mathrm{Ker}F$ est nulle, désignons par $\mathbf{I}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}$ dont les objets sont isomorphes à la somme directe d'une famille d'objets égaux à I. De même, soit $\mathbf{L}$ la sous-catégorie pleine de $PC(A)$ dont les objets sont isomorphes au produit direct d'une famille de modules pseudo-compacts égaux à A. Le lemme 2 montre que le foncteur F induit une équivalence entre $\mathbf{I}$ et la catégorie $\mathbf{L}^0$ duale de $\mathbf{L}$. Le corollaire 3 de la proposition 14 (chap. I) montre que F définit une équivalence entre $\mathbf{A}$ et la catégorie $PC(A)^0$.

COROLLAIRE 1. — *Les hypothèses et les notations sont celles du théorème* 4. *Si I contient un injectif indécomposable de chaque type, le foncteur F définit une équivalence entre $\mathbf{A}$ et la catégorie duale de $PC(A)$.*

Nous supposerons à partir de maintenant que I contient un injectif indécomposable de chaque type. Si M est un sous-objet quelconque de I, nous désignons par $\mathfrak{l}(M)$ l'idéal à gauche de A formé des endomorphismes de I dont le noyau contient M.

COROLLAIRE 2. — *Les hypothèses et les notations sont celles du corollaire* 1. *L'application $M \rightsquigarrow \mathfrak{l}(M)$ est une bijection de l'ensemble des sous-objets de I sur l'ensemble des idéaux à gauche fermés de A. L'idéal $\mathfrak{l}(M)$ est bilatère si et seulement si le sous-objet M de I est caractéristique* [i. e. $f(M)$ est contenu dans M pour tout endomorphisme f de I].

La démonstration du corollaire 2 est laissée au lecteur. Nous associons à toute sous-catégorie fermée $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$ le plus grand sous-objet $\mathbf{C}I$ de I qui appartienne à $\mathbf{C}$. Si f est un endomorphisme de I, $f(\mathbf{C}I)$ est contenu dans $\mathbf{C}I$. Autrement dit, $\mathbf{C}I$ est un sous-objet caractéristique de I.

Réciproquement, soit J un sous-objet caractéristique de I. Les objets M pour lesquels l'application canonique de $\mathrm{Hom}(M, J)$ dans $\mathrm{Hom}(M, I)$ est bijective, forment une sous-catégorie fermée $J\mathbf{A}$ de $\mathbf{A}$. De plus, si I contient un injectif indécomposable de chaque type, les applications $\mathbf{C} \to \mathbf{C}I$ et $J \to J\mathbf{A}$ définissent une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-catégories fermées de $\mathbf{A}$ et l'ensemble des sous-objets caractéristiques de I. Autrement dit, l'application $\mathbf{C} \to \mathfrak{l}(\mathbf{C}I)$ est une bijection de l'ensemble des sous-catégories fermées de $\mathbf{A}$ sur l'ensemble des idéaux bilatères fermés de A. Dans le corollaire qui suit, nous notons $\mathfrak{l}(\mathbf{C})$ au lieu de $\mathfrak{l}(\mathbf{C}I)$.

COROLLAIRE 3. — *Les hypothèses et les notations sont celles du corollaire* 1. *Si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont deux sous-catégories fermées de $\mathbf{A}$, l'idéal bilatère $\mathfrak{l}(\mathbf{C}.\mathbf{D})$ est l'adhérence du produit $\mathfrak{l}(\mathbf{C}).\mathfrak{l}(\mathbf{D})$.*

La preuve du corollaire 3 est laissée au lecteur. Il en résulte qu'avec les notations de la proposition 12, $\mathfrak{r}^{(n)}$ est l'adhérence du produit $\mathfrak{r}^n$.

Si l'injectif I contient un et un seul injectif indécomposable de chaque type, le socle I_0 de I contient un et un seul objet simple de chaque type. On dit alors que l'anneau A des endomorphismes de I est l'*anneau pseudo-compact associé à* $\mathbf{A}$. Cet anneau est déterminé à un isomorphisme près par la donnée de la catégorie $\mathbf{A}$. Deux catégories localement finies équivalentes ont des anneaux pseudo-compacts associés qui sont isomorphes.

Nous disons qu'un anneau pseudo-compact A est *sobre* si le quotient de $\mathbf{A}$ par son radical de Jacobson est un produit de corps. Nous disons que deux anneaux pseudo-compacts A et B sont *équivalents* si les catégories $PC(A)$ et $PC(B)$ sont équivalentes. On a alors les résultats suivants : l'anneau

pseudo-compact associé à une catégorie localement finie est sobre. Tout anneau pseudo-compact est équivalent à un anneau pseudo-compact sobre. Deux anneaux pseudo-compacts sobres sont équivalents si et seulement si ils sont isomorphes.

Si A est un anneau pseudo-compact, le théorème 4 s'applique en particulier à la catégorie $\mathrm{dis}(A)$ des A-modules topologiques discrets. Si A^* est l'anneau pseudo-compact associé à $\mathrm{dis}(A)$, les catégories $\mathrm{dis}(A)$ et $PC(A^*)$ sont *duales* [i. e. les catégories $\mathrm{dis}(A)$ et $PC(A^*)^0$ sont équivalentes]. Il s'ensuit que les catégories $\boldsymbol{T}(A)$ et $\boldsymbol{T}(A^*)$, formées des modules discrets de longueur finie sur A et A^*, sont duales. D'après le théorème 1 (chap. II) enfin, toute dualité entre $\boldsymbol{T}(A)$ et $\boldsymbol{T}(A^*)$ se prolonge en une dualité entre $PC(A)$ et $\mathrm{dis}(A^*)$. Si A est sobre, A est donc isomorphe à $(A^*)^*$ et l'on pourra dire que A^* est l'anneau pseudo-compact dual de A.

Le corollaire 1 a la conséquence suivante :

COROLLAIRE 4. — *Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie localement finie et si A est l'anneau pseudo-compact associé à $\boldsymbol{A}$, alors $\boldsymbol{A}$ est équivalente à la catégorie des modules topologiques discrets sur l'anneau A^* dual de A.*

COROLLAIRE 5. — *Soient I un objet injectif d'une catégorie localement finie $\boldsymbol{A}$ et A l'anneau des endomorphismes de I. Si I contient un injectif indécomposable de chaque type, le centre $Z[\boldsymbol{A}]$ de la catégorie $\boldsymbol{A}$* (chap. III, § 5) *est isomorphe au centre de l'anneau A.*

Un élément z de $Z[\boldsymbol{A}]$ est en effet un morphisme du foncteur identique $I_{\boldsymbol{A}}$ dans lui-même. En particulier, z définit un endomorphisme $z(I) : I \to I$. Comme $z(I)$ commute avec tous les endomorphismes de I, $z(I)$ appartient au centre de A. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'application $z \to z(I)$ est une bijection de $Z[\boldsymbol{A}]$ sur le centre de A.

COROLLAIRE 6. — *Tout anneau pseudo-compact commutatif A est isomorphe à l'anneau dual A^*. En particulier, la catégorie $\boldsymbol{T}(A)$ des A-modules topologiques discrets de longueur finie est équivalente à la catégorie duale $\boldsymbol{T}(A)^0$.*

Comme A est un anneau pseudo-compact sobre, il suffit en effet de montrer que les anneaux pseudo-compacts A et A^* sont équivalents, c'est-à-dire que les catégories $\boldsymbol{T}(A)$ et $\boldsymbol{T}(A)^0$ sont équivalentes. Nous allons exhiber un foncteur contravariant de $\boldsymbol{T}(A)$ dans $\boldsymbol{T}(A)$ qui définit une équivalence entre $\boldsymbol{T}(A)$ et $\boldsymbol{T}(A)^0$.

Lorsque $\mathfrak{m}$ parcourt les idéaux ouverts maximaux de A, les quotients $A/\mathfrak{m}$ parcourent des objets simples de chaque type de la catégorie $\mathrm{dis}(A)$. Nous désignons par E une enveloppe injective [dans $\mathrm{dis}(A)$] de la somme directe de ces quotients.

Pour tout A-module M, le groupe abélien $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ se trouve alors muni d'une structure de A-module : si φ est un élément de $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ et

si a est un élément de A, $a.\varphi$ est l'application $x \to a.\varphi(x) = \varphi(a.x)$ de M dans E. En particulier, l'annulateur de $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ contient l'annulateur de M. Il en résulte que $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ est un A-module topologique discret si M est un objet de $\boldsymbol{T}(A)$. En outre, $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ est isomorphe à $A/\mathfrak{m}$ si M est isomorphe à $A/\mathfrak{m}$. L'exactitude du foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(M, E)$ entraîne donc que $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ est un A-module topologique discret de même longueur que M lorsque M parcourt les objets de $\boldsymbol{T}(A)$. Nous désignerons par D le foncteur contravariant de $\boldsymbol{T}(A)$ dans $\boldsymbol{T}(A)$ que nous venons ainsi de définir : $DM = \mathrm{Hom}_A(M, E)$.

Il suffit de montrer que le foncteur $D \circ D$ est isomorphe au foncteur identique de $\boldsymbol{T}(A)$ (chap. I, proposition 12) : si M est un A-module topologique discret de longueur finie et si m est un élément de M, nous notons m' l'application A-linéaire de $\mathrm{Hom}_A(M, E)$ dans E qui est définie par la formule $m'(f) = f(m)$. Lorsque M varie, les applications $m \to m'$ définissent un morphisme du foncteur identique de $\boldsymbol{T}(A)$ dans $D \circ D$. En outre, l'application $m \to m'$ est bijective lorsque M est de la forme $A/\mathfrak{m}$. L'exactitude du foncteur $D \circ D$ entraîne qu'elle est encore bijective lorsque M est de longueur finie. Ceci achève la preuve.

Chapitre V.

Applications à l'étude des modules.

Nous reprenons ici quelques propriétés des anneaux commutatifs. Nous essayons de les généraliser aux anneaux non nécessairement commutatifs.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés dans ce chapitre admettent un élément unité. Tous les modules considérés sont des *modules à droite unitaires*. Nous supposons en outre que l'ensemble sous-jacent à un anneau ou à un module est un élément de l'univers $\mathfrak{U}$.

1. **Catégories de modules.** — Soit A un anneau. Nous appelons *catégorie des modules* (à droite) sur A et nous notons $\mathrm{mod}\,A$ la catégorie qui suit :

— un objet de $\mathrm{mod}\,A$ est un module sur A ;

— si M et N sont deux modules sur A, un morphisme de M dans N est une application A-linéaire de M dans N;

— la composition des morphismes coïncide avec la composition des applications.

Il est clair que $\mathrm{mod}\,A$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie abélienne avec limites inductives exactes. De plus, le A-module à droite A_A, sous-jacent à l'anneau A, est un géuérateur projectif de $\mathrm{mod}\,A$. La catégorie $\mathrm{mod}\,A$ est localement nœthérienne si et seulement si l'anneau A est nœthérien à droite.

On définit de façon analogue la catégorie des modules à gauche sur A.

Considérons maintenant un objet U d'une catégorie abélienne $\mathcal{B}$ et soit $\chi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(U, U)$ un homomorphisme d'anneaux avec élément unité. Quand M parcourt les objets de $\mathcal{B}$, la composition des morphismes définit une application bilinéaire de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(U, M) \times A$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(U, M) : (f, a) \to f \circ \chi(a)$. Cette application fait de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(U, M)$ un A-module. On définit ainsi un foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(U, M)$ de $\mathcal{B}$ dans $\mathrm{mod}\, A$. Ce foncteur sera noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\chi U, .)$, ou $\mathrm{Hom}(U, .)$ lorsque aucune confusion ne sera possible.

PROPOSITION 1. — *Soient A un anneau, $\mathcal{B}$ une $(\mathfrak{U})$-catégorie abélienne et S un foncteur de $\mathcal{B}$ dans* $\mathrm{mod}\, A$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. S est adjoint à un foncteur T : $\mathrm{mod}\, A \to \mathcal{B}$.

b. Il existe un homomorphisme χ de A dans l'anneau des endomorphismes d'un objet U de $\mathcal{B}$, qui satisfait aux conditions suivantes : S est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\chi U, .)$; en outre, toute famille d'objets isomorphes à U possède une somme directe.

$(a) \Rightarrow (b)$: Soit en effet ψ un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T., .)$ sur $\mathrm{Hom}_{A}(., S.)$. Identifions A à l'anneau des endomorphismes de A_d et posons $U = TA_d$, $\chi = T(A_d, A_d)$. Pour tout objet N de $\mathcal{B}$, $\psi(A_d, N)$ est une application bijective de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA_d, N)$ sur $\mathrm{Hom}_{A}(A_d, SN)$. Il est facile de voir que cette application est A-linéaire. Comme $\mathrm{Hom}_{A}(A_d, SN)$ est isomorphe à SN, il en résulte un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(U, .)$ sur S.

D'autre part, soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille formée d'objets isomorphes à U et indexée par un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$. Soit u_i un isomorphisme de U_i sur U et posons $A_i = A_d$ pour tout i. Si φ_i est l'application canonique de A_i dans la somme directe $\sum_i A_i$, les égalités suivantes montrent que les morphismes $(T\varphi_i) \circ u_i$ font de $T\left(\sum_i A_i\right)$ une somme directe de la famille $(U_i)_{i \in I}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left(T\sum A_i\right), N\Big) = \mathrm{Hom}_{A}\Big(\sum A_i, SN\Big)$$

$$= \prod \mathrm{Hom}_{A}(A_i, SN) = \prod \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TA_i, N).$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Choisissons en effet pour tout A-module M une suite exacte

$$\sum A_j \xrightarrow{q} \sum A_i \xrightarrow{p} M \to 0,$$

où $(A_i)_{i\in I}$ et $(A_j)_{j\in J}$ sont deux familles de modules égaux à A_d. Posons $U_j = U$ pour tout j et $U_i = U$ pour tout i. Tout isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\chi U, .)$ sur S induit des isomorphismes fonctoriels :

$$\psi_0 : \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}\left(\sum_{i\in I} U_i, .\right) \to \mathrm{Hom}_A\left(\sum_{i\in I} A_i, S.\right),$$

$$\psi_1 : \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}\left(\sum_{j\in J} U_j, .\right) \to \mathrm{Hom}_A\left(\sum_{j\in J} A_j, S.\right).$$

De plus, il existe un morphisme q' de $\sum_j U_j$ dans $\sum_i U_i$ tel qu'on ait

$$\mathrm{Hom}_A(q, .).\psi_0 = \psi_1.\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(q', .).$$

Si nous posons $TM = \mathrm{Coker}\, q'$, ψ_0 induit un isomorphisme $\psi(M, .)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(TM, .)$ sur $\mathrm{Hom}_A(M, S .)$. Ceci montre que le foncteur

$$N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(M, SN)$$

est représentable pour tout M; l'implication cherchée résulte donc de la proposition duale de la proposition 10 (chap. I).

Lorsque $\mathbf{B}$ est la catégorie des modules sur un annean B, l'homomorphisme χ fait de U un A-B-bimodule (A à gauche, B à droite). Dans ce cas, on peut choisir pour T le foncteur $M \rightsquigarrow M \otimes_A U$. L'isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_R(T., .)$ sur $\mathrm{Hom}_A(., S.)$ qui est décrit dans [6] sera dit *canonique*.

PROPOSITION 1 *bis*. — *Soient A un anneau, $\mathbf{B}$ une catégorie abélienne et T un foncteur de* mod$A$ *dans $\mathbf{B}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Il existe un foncteur S adjoint à T.

b. Le foncteur T est exact à droite et il commute avec les sommes directes.

$(a) \Rightarrow (b)$: La proposition 11 (chap. I) montre que T est exact à droite. Un argument analogue à celui qui a été employé pour prouver l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ de la proposition 1, démontre que T commute avec les sommes directes.

$(b) \Rightarrow (a)$: Posons en effet $TA_d = U$ et $\chi = T(A_d, A_d)$. Nous allons définir un morphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(T., .)$ dans $\mathrm{Hom}_A(., S.)$, où S est le foncteur $\mathrm{Hom}_B(\chi U, .)$; pour cela, soient M un A-module, N un objet de $\mathbf{B}$ et f un morphisme de TM dans N. Si m est un élément de M, nous désignons par g_m l'application $a \rightsquigarrow m.a$ de A dans M. On vérifie facilement que l'application $m \rightsquigarrow f \circ Tg_m$ est une application A-linéaire f' de M

dans SN. Quand M et N varient, les applications $f \rightsquigarrow f'$ définissent un morphisme fonctoriel $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(T., .) \to \mathrm{Hom}_{A}(., S.)$.

Il reste à démontrer que les applications $\psi(M, N) : f \rightsquigarrow f'$ sont bijectives. Cela est évidemment vrai lorque M est égal à A_d, N étant quelconque. Comme les foncteurs contravariants $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(T., N)$ et $\mathrm{Hom}_{A}(., SN)$ transforment les sommes directes en produits directs, $\psi(M, N)$ est encore bijective lorsque M est libre. Dans le cas général, on choisit une suite exacte

$$L_1 \xrightarrow{q} L_0 \xrightarrow{p} M \to 0,$$

où L_0 et L_1 sont des modules libres. Les foncteurs contravariants $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(T., N)$ et $\mathrm{Hom}_{A}(., SN)$ sont exacts à gauche et les applications $\psi(L_1, N)$ et $\psi(L_0, N)$ sont bijectives. Il en résulte par un argument classique que $\psi(M, N)$ est bijective.

COROLLAIRE 1. — *Soient S un foncteur d'une catégorie abélienne $\mathfrak{B}$ dans* mod A. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. S définit une équivalence entre $\mathfrak{B}$ et mod A.

b. Il existe un isomorphisme χ de A sur l'anneau des endomorphismes d'un objet U de $\mathfrak{B}$, qui satisfait aux conditions suivantes : S est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\chi U, .)$; l'objet U est un générateur projectif de $\mathfrak{B}$; toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'objets isomorphes à U possède une somme directe; de plus, l'application canonique de $\sum_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(U, U_i)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}\left(U, \sum_{i \in I} U_i\right)$ est bijective.

$(a) \Rightarrow (b)$: En effet, S est adjoint à un foncteur T : mod $A \to \mathfrak{B}$. Si nous posons $U = TA_d$ et $\chi = T(A_d, A_d)$, nous avons vu que S est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\chi U, .)$. Comme T définit une équivalence, $T(A_d, A_d)$ est une application bijective. Comme A_d est un générateur projectif de mod A, TA_d est un générateur projectif de $\mathfrak{B}$. Enfin, comme S définit une équivalence, S commute avec les sommes directes. Il en va de même pour le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\chi U, .)$ ce qui prouve la dernière assertion de (b).

$(b) \Rightarrow (a)$: Montrons en effet que le foncteur $S' = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{B}}(\chi U, .)$ définit une équivalence entre $\mathfrak{B}$ et mod A : comme U est projectif, S' est un foncteur exact. Comme χ est un isomorphisme, $S'U$ s'identifie à A_d. Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'objets égaux à U, la dernière assertion de (b) montre que $S'\left(\sum_{i \in I} U_i\right)$ est un A-module libre. Si $(U_j)_{j \in J}$ est une

autre famille d'objets égaux à U, la même condition fournit les « égalités » suivantes :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}\Big(\sum_i U_i,\ \sum_j U_j\Big)\\ &=\prod_i\sum_j \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(U_i,\ U_j)=\prod_i\sum_j \mathrm{Hom}_A(S'U_i,\ S'U_j)\\ &=\mathrm{Hom}_A\Big(\sum_i S'U_i,\ \sum_j S'U_j\Big)=\mathrm{Hom}_A\Big(S'\sum_i U_i,\ S'\sum_j U_j\Big).\end{aligned}$$

Désignons par $\boldsymbol{P}$ (resp. par $\boldsymbol{Q}$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}\,A$ (resp. de $\boldsymbol{B}$) formée des A-modules libres (resp. des objets isomorphes à la somme directe d'une famille d'objets égaux à U). Ce qui précède prouve que S' induit une équivalence entre $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{P}$ [proposition 12 (b), chap. I]. L'implication résulte donc de la proposition duale de la proposition 14, corollaire 3, (chap. I).

On remarquera qu'on peut remplacer les deux dernières conditions de l'assertion (b) par les conditions plus fortes que voici : $\boldsymbol{B}$ est une catégorie avec générateurs et limites inductives exactes et U est un objet de *type fini* de $\boldsymbol{B}$ (i. e. toute famille filtrante croissante de sous-objets de U dont la borne supérieure est égale à U. est stationnaire).

COROLLAIRE 2. — *Soient A et B deux anneaux et S un foncteur de* $\mathrm{mod}\,B$ *dans* $\mathrm{mod}\,A$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. S définit une équivalence entre $\mathrm{mod}\,B$ *et* $\mathrm{mod}\,A$.

b. Il existe un isomorphisme χ de A sur l'anneau des endomorphismes d'un B-module U, qui satisfait aux conditions suivantes : S est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_B(\chi U,\ .)$; *$U$ est un B-module projectif de type fini; de plus, U est un générateur projectif de* $\mathrm{mod}\,B$.

Il revient évvidemment au même de se donner un homomorphisme χ de A dans l'anneau des endomorphismes d'un B-module U ou de se donner sur U une structure de A-B-module (A à gauche, B à droite). Dans le corollaire 3, U est un tel bimodule; nous désignons par ${}_AU$ (resp. par U_B) le A-module à gauche (resp. le B-module à droite) sous-jacent à U. Si a est un élément de A (resp. B un élément de B), a_U (resp. b_U) désigne l'endomorphisme $x \rightsquigarrow a.x$ (resp. $x \rightsquigarrow x.b$) du groupe abélien sous-jacent à U.

COROLLAIRE 3 (MORITA [18]). — *Soient A et B deux anneaux et U un A-B-module (A à gauche, B à droite). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Le foncteur $M \rightsquigarrow M \otimes_A U$ définit une équivalence entre $\mathrm{mod}\,A$ *et* $\mathrm{mod}\,B$.

b. Le foncteur $N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_B(U, N)$ *définit une équivalence entre* mod B *et* mod A.

c. U_B *(resp.* ${}_AU$*) est un* B*-module (resp. un* A*-module à gauche), projectif et de type fini; l'application* $a \rightsquigarrow a_U$ *(resp.* $b \rightsquigarrow b_U$*) est un isomorphisme de* A *(resp. de l'anneau opposé à* B*) sur l'anneau des endomorphismes de* U_B *(resp. de* ${}_AU$*).*

L'équivalence de (a) et de (b) résulte de ce que le foncteur

$$S : N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_B(U, N)$$

est adjoint au foncteur $T : M \rightsquigarrow M \otimes_A U$.

$(a) \Rightarrow (c)$: On a en effet $TA_d = U$ et l'application $a \rightsquigarrow a_U$ coïncide avec $T(A_d, A_d)$. Il résulte de la démonstration du corollaire 1 que U_B est un B-module de type fini et que $a \rightsquigarrow a_U$ est une bijection de A sur l'anneau des endomorphismes de U_B.

D'après le corollaire 2, il existe d'autre part un B-A-bimodule V tel que T soit isomorphe au foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(V, M)$. De plus, V_A est projectif, de type fini et l'application $b \rightsquigarrow b_V$ est un isomorphisme de B sur l'anneau des endomorphismes de V_A.

L'anneau B opère à droite sur le groupe abélien $\mathrm{Hom}_A(V, A_d)$; l'anneau des endomorphismes de A_d opère à gauche sur $\mathrm{Hom}_A(V, A_d)$; ce groupe se trouve ainsi muni d'une structure de A-B-bimodule. Comme U s'identifie à TA_d, les A-B-bimodules U et $\mathrm{Hom}_A(V, A_d)$ sont isomorphes. Les propriétés de V_A et le lemme suivant entraînent donc que ${}_AU$ est projectif, de type fini et que l'application $b \rightsquigarrow b_U$ est un isomorphisme de l'anneau B^0, opposé à B, sur l'anneau des endomorphismes de ${}_AU$.

LEMME 1. — *Si* M *est un* A*-module à droite projectif et de type fini, le* A*-module à gauche* $\mathrm{Hom}_A(M, A_d)$ *est projectif et de type fini. Le foncteur* $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(M, A_d)$ *définit une dualité entre les* A*-modules à droite, projectifs et de type fini et les* A*-modules à gauche, projectifs et de type fini.*

La structure de A-module à gauche de $\mathrm{Hom}_A(M, A_d)$ est évidemment définie de la façon suivante : si a appartient à A et f à $\mathrm{Hom}_A(M, A_d)$, $a.f$ est tel qu'on ait $(a.f)(x) = a.f(x)$ si $x \in M$. Le lemme 1 est bien connu et nous nous passerons de démonstration.

$(c) \Rightarrow (b)$: D'après le corollaire 2, il suffit de prouver que U_B est un générateur de la catégorie mod B. Pour cela nous allons montrer que B_d est facteur direct d'un produit U_B^n :

Considérons d'abord deux A-modules à gauche P et Q et soit ${}_sA$ le A-module à gauche sous-jacent à A. Le groupe abélien $\mathrm{Hom}_A(P, {}_sA)$ est muni de façon naturelle d'une structure de A-module à droite, de sorte qu'il

est licite de parler du produit tensoriel $\mathrm{Hom}_A(P, {}_sA) \otimes_A Q$. Si q est un élément de Q et f un élément de $\mathrm{Hom}_A(P, {}_sA)$, nous désignons par $\varphi_{q,f}$ l'application A-linéaire $p \rightsquigarrow f(p).q$. Lorsque q et f varient, la fonction $(q, f) \rightsquigarrow \varphi_{q,f}$ définit une application linéaire $\varphi(P, Q)$ de $\mathrm{Hom}_A(P, {}_sA) \otimes_A Q$ dans $\mathrm{Hom}_A(P, Q)$. Lorsque P et Q varient, les applications $\varphi(P, Q)$ définissent un morphisme du foncteur $(P, Q) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(P, {}_sA) \otimes_A Q$ dans le foncteur $(P, Q) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(P, Q)$. Il s'ensuit en particulier que $\varphi(P, Q)$ est un morphisme de modules à gauche sur l'anneau C des endomorphismes de Q.

Lorsque P est égal à ${}_sA$, $\varphi(P, Q)$ est une bijection. On en déduit facilement que $\varphi(P, Q)$ est une bijection chaque fois que P est un A-module à gauche projectif et de type fini. Si cela est vrai, le C-module à gauche $\mathrm{Hom}_A(P, Q)$ est isomorphe au C-module à gauche $\mathrm{Hom}_A(P, {}_sA) \otimes_A Q$ qui est facteur direct d'un produit Q^n.

On obtient le résultat cherché en choisissant P et Q égaux à ${}_AU$. L'anneau C s'identifie alors à l'anneau opposé à B.

COROLLAIRE 4. — *Soient A et B deux anneaux et U un A-B-bimodule (A à gauche, B à droite). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. U_B est un B-module projectif de type fini; c'est un générateur de la catégorie mod B*; de plus, l'application $a \rightsquigarrow a_U$ est un isomorphisme de A sur l'anneau des endomorphismes de U_B.*

b. U satisfait à l'assertion (b) du corollaire 3.

c. ${}_AU$ est un A-module à gauche projectif et de type fini; c'est un générateur de la catégorie des A-modules à gauche; de plus, l'application $b \to b_U$ est un isomorphisme de l'anneau opposé à B sur l'anneau des endomorphismes de ${}_AU$.

L'équivalence entre (a) et (b) résulte des corollaires 2 et 3. Il en va de même pour l'équivalence de (b) et de (c) à condition de remplacer A et B respectivement par B^0 et A^0.

Nous donnons maintenant quelques applications de ce qui précède :

a. Soit tout d'abord $\mathfrak{V}$ un univers tel que $\mathfrak{U} \in \mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}$ étant l'univers que nous avons choisi une fois pour toutes au début de ce travail. Soit d'autre part $\boldsymbol{E}$ la catégorie dont les objets sont les catégories $\boldsymbol{C}$ telles que $\boldsymbol{MC} \in \mathfrak{V}$ et $\boldsymbol{OC} \in \mathfrak{V}$, les morphismes de $\boldsymbol{E}$ étant les classes d'isomorphisme de foncteurs (*cf.* chap. I, § 8). Si A est un anneau dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathfrak{U}$, la catégorie mod A est un objet de $\boldsymbol{E}$; ce qui précède permet de déterminer le groupe $G(A)$ des automorphismes de cet objet :

D'après les corollaires 2 et 3 de la proposition 1, un foncteur T : mod $A \to$ mod A définit une équivalence s'il est isomorphe à un foncteur $M \rightsquigarrow M \otimes_A U$, où U est un A-A-bimodule satisfaisant à l'assertion (c) du corollaire 3. Nous pouvons donc identifier les éléments de $G(A)$ aux types

de A-A-bimodules satisfaisant à l'assertion (c) du corollaire 3. Modulo cette identification, la loi de $G(A)$ est définie par l'application $(U, V) \rightsquigarrow V \otimes_A U$. En outre, si U satisfait à l'assertion (c) du corollaire 3, il en va de même pour le A-A-bimodule $\mathrm{Hom}_A(U, A_d)$; les types de U et de $\mathrm{Hom}_A(U, A_d)$ sont alors des éléments inverses l'un de l'autre.

b. Soient B un anneau et U le B-module libre B_d^n. L'anneau des endomorphismes de B_d^n est l'anneau $M_n(B)$ formé des matrices (n, n) à coefficients dans B. Le corollaire 2 montre que le foncteur $N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_B(B_d^n, M)$ définit une équivalence entre mod B et mod $M_n(B)$.

En particulier, si M est un B-sous-module de B_d^n, $\mathrm{Hom}_B(B_d^n, M)$ s'identifie à l'idéal à droite $\mathfrak{d}(M)$ de $M_n(B)$ qui est formé des endomorphismes f de B_d^n dont l'image est contenue dans M. On retrouve ainsi que l'application $M \rightsquigarrow \mathfrak{d}(M)$ est une bijection de l'ensemble des B-sous-modules de B_d^n sur l'ensemble des idéaux à droite de $M_n(B)$.

c. L'exemple qui suit est dû à Azumaya [3] : Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre finie (*i. e.* le R-module sous-jacent à A est de type fini) et fidèle (*i. e.* l'application $r \rightsquigarrow r.1_A$ est une injection de R dans A). Nous désignons par A^0 l'algèbre opposée à A et par A^e l'algèbre $A \otimes_R A^0$ [6]. L'application $(x, a \otimes b) \rightsquigarrow b.x.a$ définit sur A une structure de A^e-module à droite; l'application $(r, x) \rightsquigarrow r.x$ définit une structure de R-module à gauche sur A : l'algèbre A se trouve ainsi munie d'une structure de R-A^e-bimodule (R à gauche, A^e à droite). C'est cette structure que nous considérons dans la suite du paragraphe.

Lemme 2. — *Soient R un anneau commutatif, A une R-algèbre, S une R-algèbre commutative, B la S-algèbre déduite de A par extension des scalaires et B^e le produit tensoriel $B \otimes_S B^0$. Nous supposons que A_{A^e} est un A^e-module projectif; B_{B^e} est alors un B^e-module projectif.*

Soit en effet $\mu(A \mid R)$ l'application $a \otimes b \rightsquigarrow b.a$ de A^e dans A. Le A^e-module A_{A^e} est projectif si et seulement si $\mu(A \mid R)$ induit un isomorphisme d'un facteur direct de A^e sur A. Dans ce cas $\mu(A \mid R) \otimes_R S$ induit un isomorphisme d'un facteur direct de $A^e \otimes_R S$ sur $A \otimes_R S$. Le lemme résulte de ce que $\mu(A \mid R) \otimes_R S$, $A^e \otimes_R S$ et $A \otimes_R S$ « s'identifient » respectivement à $\mu(B \mid S)$, B^e et B.

Lemme 3. — *Les hypothèses sont celles du lemme 2; pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, $(A/\mathfrak{p}A)_{\mathfrak{p}}$ est alors une algèbre semi-simple séparable sur $(R/\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$.*

On applique le lemme 2 en choisissant pour S l'algèbre $(R/\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$. Dans ce cas, B coïncide avec $(A/\mathfrak{p}A)_{\mathfrak{p}}$. Comme S est un corps, on sait d'autre part que B_{B^e} est un B^e-module projectif si et seulement si B est une S-algèbre séparable (*cf.* [6], chap. VI).

LEMME 4. — *Les hypothèses sont celles du lemme* 2. *Si i est l'application canonique du centre $Z(A)$ de A dans A, alors $i \otimes_R S$ est un isomorphisme de $Z(A) \otimes_R S$ sur le centre de $A \otimes_R S$.*

Les centres de A et de B s'identifient en effet à $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A)$ et $\mathrm{Hom}_{B^e}(B, B)$. Le lemme résulte de là et du fait que l'application canonique de $\mathrm{Hom}_{A^e}(M, N) \otimes_R S$ dans $\mathrm{Hom}_{B^e}(M \otimes_R S, N \otimes_R S)$ est une bijection lorsque M est un A^e-module projectif de type fini.

LEMME 5. — *Si R est un anneau commutatif et M un R-module projectif de type fini, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. M est un générateur de mod R.

b. M est un R-module fidèle (i. e. l'annulateur de M est nul).

L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est claire. Prouvons la réciproque : il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ n'est pas nul si N n'est pas nul; soit donc $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R tel que $N_{\mathfrak{m}}$ soit non nul. Il est clair que $M_{\mathfrak{m}}$ est un $R_{\mathfrak{m}}$-module projectif (donc libre) et que l'annulateur de $M_{\mathfrak{m}}$ est nul. Comme M est de présentation finie, $(\mathrm{Hom}_R(M, N))_{\mathfrak{m}}$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}})$ [5]. Comme ce dernier module n'est pas nul, il en va de même pour $(\mathrm{Hom}_R(M, N))_{\mathfrak{m}}$, donc pour $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

PROPOSITION 2. — *Soient R un anneau commutatif et A une R-algèbre finie et fidèle. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Le fonteur $N \rightsquigarrow N \otimes_R A$ définit une équivalence entre mod R *et* mod A^e.

b. Le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$ définit une équivalence entre mod A^e *et* mod R.

c. Le A^e-module à droite A_{A^e} est projectif; de plus, l'application $r \rightsquigarrow r.1_A$ est un isomorphisme de R sur le centre de A.

d. Le R-module à gauche ${}_RA$ est projectif; de plus, l'application $b \rightsquigarrow b_A$ est un isomorphisme de l'anneau opposé à A^e sur l'anneau des endomorphismes de ${}_RA$.

e. Le R-module à gauche ${}_RA$ est projectif; pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, $A/\mathfrak{m}A$ est en outre une algèbre simple et centrale sur A.

L'équivalence entre (a) et (b) résulte du corollaire 3 de la proposition 1. L'équivalence entre (a) et (d) résulte du lemme 5 et des corollaires 2 et 4 de la proposition 1. L'implication $(b) \Rightarrow (c)$ résulte du corollaire 3 de la proposition 1 et du fait que $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A)$ est le centre de A.

$(c) \Rightarrow (b)$: D'après le corollaire 3 de la proposition 1 il suffit de prouver que A_{A^e} est un générateur de mod A^e. Il est équivalent de dire que, pour tout idéal à droite maximal $\mathfrak{m}$ de A^e, il existe une application A^e-linéaire

$f : A \to A^e$ telle que $\operatorname{Im} f$ ne soit pas contenu dans $\mathfrak{m}$. Or $\mathfrak{m} \cap R$ est un idéal premier $\mathfrak{p}$ de R et $A^e/\mathfrak{m}$ est un module simple sur l'anneau $B^e = B \otimes_S B^0$, où $S = (R/\mathfrak{p}R)_{\mathfrak{p}}$ et $B = (A/\mathfrak{p}A)_{\mathfrak{p}}$. Comme B est une algèbre simple et centrale sur S d'après les lemmes 3 et 4, B^e est un anneau simple et le groupe abélien $\operatorname{Hom}_{B^e}(B, A^e/\mathfrak{m})$ n'est pas nul. Comme $\operatorname{Hom}_{B^e}(B, A^e/\mathfrak{m})$ s'identifie à $(\operatorname{Hom}_{A^e}(A, A^e/\mathfrak{m}))_{\mathfrak{p}}$, on en tire que $\operatorname{Hom}_{A^e}(A, A^e/\mathfrak{m})$ n'est pas nul. Enfin, comme A est projectif, tout morphisme non nul de A dans $A^e/\mathfrak{m}$ se relève en $f : A \to A^e$ tel que $\operatorname{Im} f \not\subset \mathfrak{m}$.

(c), $(d) \Rightarrow (e)$: Résulte des lemmes 3 et 4.

$(e) \Rightarrow (d)$: Posons en effet $L_R(A) = \operatorname{Hom}_R(A, A)$. Soit d'autre part $\varphi(A \mid R)$ l'application $b \rightsquigarrow b_A$ de l'anneau $A^0 \otimes_R A$, opposé à A^e, dans $L_R(A)$.

Comme ${}_RA$ est projectif, $L_R(A)$ et $A^0 \otimes_R A$ sont des R-modules projectifs de type fini. Pour montrer que $\varphi(A \mid R)$ est une bijection, il suffit donc de prouver que $\varphi(A \mid R) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ est une bijection pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R. Or $(A^0 \otimes_R A) \otimes_R R/\mathfrak{m}$, $L_R(A) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ et $\varphi(A \mid R) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ s'identifient respectivement $B^0 \otimes_S B$, $L_S(B)$ et $\varphi(B \mid S)$, où nous avons posé $B = A/\mathfrak{m}.A$ et $S = R/\mathfrak{m}$. Comme B est une algèbre simple et centrale sur $R/\mathfrak{m}$, $\varphi(B \mid S)$ est une bijection pour tout $\mathfrak{m}$; l'assertion (c) en résulte.

COROLLAIRE. — *Supposons satisfaites les conditions équivalentes de la proposition* 2. *L'application* $\mathfrak{a} \rightsquigarrow \mathfrak{a}.A$ *est une bijection de l'ensemble des idéaux de R sur l'ensemble des idéaux bilatères de A.*

L'injection canonique de $\mathfrak{a}$ dans R définit en effet une injection de $\mathfrak{a} \otimes_R A$ dans $R \otimes_R A = A$. L'image de cette injection n'est autre que $\mathfrak{a}.A$ et nous confondrons $\mathfrak{a} \otimes_R A$ avec cette image. Comme le foncteur $N \rightsquigarrow N \otimes_R A$ définit une équivalence entre mod R et mod A^e, l'application $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \otimes_R A$ est une bijection de l'ensemble des R-sous-modules de R sur l'ensemble des A^e-sous-modules de A ; ces derniers coïncident avec les idéaux bilatères de A. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour d'autres applications de la proposition 2.

2. **La localisation.** — Soit A un anneau. Une *topologie* sur A est dite *linéaire* (à droite) si elle fait de A un anneau topologique et s'il existe une base de voisinages de O formée d'idéaux à droite. Dans ce cas, l'ensemble F des idéaux à droite ouverts vérifie les conditions suivantes :

a. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal à droite contenant un élément $\mathfrak{l}$ de F, alors $\mathfrak{m}$ appartient à F.

b. Si $\mathfrak{m} \in F$ et si $\mathfrak{l} \in F$, alors $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l} \in F$.

c. Si $\mathfrak{l} \in F$ et si $a \in A$, alors $(\mathfrak{l} : a) = \{ x \mid a.x \in \mathfrak{l} \}$ appartient à F.

Nous dirons qu'un ensemble F, formé d'idéaux à droite de A, est *topologisant* si les conditions (a), (b) et (c) sont vérifiées. Nous dirons aussi qu'un A-module M est *F-négligeable* si l'annulateur de tout élément de M est un

idéal à droite appartenant à F. Si $\boldsymbol{F}$ est la sous-catégorie pleine de mod A dont les objets sont les A-modules F-négligeables, $\boldsymbol{F}$ est une sous-catégorie fermée (*cf.* chap. IV, § 4).

LEMME 1. — *L'application $F \to \boldsymbol{F}$ est une bijection de l'ensemble des ensembles d'idéaux à droite topologisants sur l'ensemble des sous-catégories fermées de* mod A.

Si l'on connaît $\boldsymbol{F}$, on peut en effet retrouver F : un idéal à droite $\mathfrak{l}$ appartient à F si et seulement si $A/\mathfrak{l}$ est un objet de $\boldsymbol{F}$.

Si F et G sont deux ensembles d'idéaux à droite topologisants, $F.G$ désignera l'ensemble topologisant associé au produit $\boldsymbol{F.G}$ (chap. IV, § 4). Il revient au même de dire qu'un idéal à droite $\mathfrak{m}$ appartient à $F.G$ si, pour tout $a \in A$, il existe un élément $\mathfrak{l}$ de F tel que $(a.\mathfrak{l} + \mathfrak{m})/\mathfrak{m}$ soit G-négligeable. En particulier, si $\mathfrak{p}$ est un élément de F et $\mathfrak{q}$ un élément de G, alors $\mathfrak{p}.\mathfrak{q}$ appartient à $F.G$. Avec ces conventions, la sous-catégorie fermée $\boldsymbol{F}$ est localisante si et seulement si $F.F$ est égal à F. *Les sous-catégories localisantes de* mod A *correspondent donc biunivoquement aux ensembles d'idéaux à droite qui sont topologisants et idempotents.*

Soit maintenant F un ensemble d'idéaux à droite, topologisant et idempotent. Pour tout A-module M, nous choisissons une $\boldsymbol{F}$-enveloppe que nous notons $u_M : M \to M_F$ (*cf.* chap. III). Comme M_F est un A-module, tout élément m de M_F définit une application A-linéaire de A_d dans $M_F : a \rightsquigarrow m.a$. Cette application se prolonge d'une manière et d'une seule en une application A-linéaire de $A_F = (A_d)_F$ dans M_F; on définit ainsi une application bilinéaire

$$M_F \times A_F \to M_F.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, si M est égal à A_d, cette application bilinéaire fait de A_F un anneau. Si M est arbitraire, cette application fait de M_F un A_F-module. En particulier, si $\mathfrak{l}$ est un idéal à droite de A, nous pouvons supposer qu'on a choisi pour $\mathfrak{l}_F$ un idéal à droite de A_F.

Dans la suite, nous munissons toujours A_F et M_F des structures que nous venons d'expliciter. Nous employons aussi les notations suivantes : T est le foncteur canonique de mod A dans mod $A/\boldsymbol{F}$; S' est le foncteur de mod $A/\boldsymbol{F}$ dans mod A_F qui est induit par le foncteur localisation; ρ est le foncteur qui associe à tout A_F-module N le A-module sous-jacent (pour la structure de A-module définie par u_A). Avec ces notations, $\rho \circ S'$ est un foncteur adjoint à T.

LEMME 2. — *Soient M un A-module, N un A_F-module. L'application $\rho(N, M_F)$ de* $\mathrm{Hom}_{A_F}(N, M_F)$ *dans* $\mathrm{Hom}_A(\rho N, \rho M_F)$ *est bijective.*

Il est clair en effet que $\rho(N, M_F)$ est une injection. Soit donc f une application A-linéaire de N dans M_F. Si n est un élément de N, nous voulons montrer qu'on a $f(n.a) = f(n).a$ pour tout a de A_F. Or les applications

$g : a \rightsquigarrow f(n.a)$ et $h : a \rightsquigarrow f(n).a$ sont A-linéaires, et on a l'égalité $g \circ u_A = h \circ u_A$. On en tire l'égalité de g et de h (définition des objets $\boldsymbol{F}$-fermés, lemme 1, § 2, chap. III),

C.Q.F.D.

Soit F' l'ensemble des idéaux à droite I de A_F tels que $\rho(A_F/\mathrm{I})$ soit F-négligeable. Il est clair que F' est topologisant et idempotent, et qu'un A_F-module N est F'-négligeable si et seulement si ρN est F-négligeable. Nous pouvons donc parler du foncteur canonique T' de mod A_F dans la catégorie quotient mod $A_F/\boldsymbol{F}'$.

PROPOSITION 3. — *Soient A un anneau et F un ensemble d'idéaux à droite, topologisant et idempotent. Avec les notations ci-dessus, le foncteur $T \circ \rho$ définit par passage au quotient une équivalence entre* mod $A_F/\boldsymbol{F}'$ *et* mod $A/\boldsymbol{F}$.

Soit en effet $\boldsymbol{B}$ la catégorie quotient mod $A/\boldsymbol{F}$; montrons que le foncteur S' est adjoint à $T \circ \rho$: si M est un objet de $\boldsymbol{B}$, N un objet de mod A_F, le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(T\rho N, M)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_A(\rho N, \rho S'M)$, car $\rho \circ S'$ est adjoint à T. D'après le lemme 2, $\mathrm{Hom}_A(\rho N, \rho S'M)$ « s'identifie » à $\mathrm{Hom}_{A_F}(N, S'M)$. Ceci prouve que S' est adjoint à $T \circ \rho$. La proposition résulte donc de la proposition 5 (chap. III).

COROLLAIRE. — *Un A_F-module N est $\boldsymbol{F}'$-fermé (resp. $\boldsymbol{F}'$-fermé et injectif) si et seulement si ρN est $\boldsymbol{F}$-fermé (resp. $\boldsymbol{F}$-fermé et injectif).*

Ce corollaire résulte de la proposition précédente et du corollaire de la proposition 3 (chap. III).

Si M est un A-module, nous désignons par FM le plus grand sous-module F-négligeable de M. Le groupe abélien sous-jacent à M_F s'identifie à $\mathrm{Hom}_A(A_d, M_F)$; ce dernier groupe est lui-même isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}\, A/\boldsymbol{F}}(A_d, M)$, c'est-à-dire à la limite inductive $\varinjlim_{\mathrm{I} \in F} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, M/FM)$.

Il est aisé de munir cette limite inductive d'une structure de A-module telle que l'isomorphisme précédent de M_F sur $\varinjlim \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, M/FM)$ soit un isomorphisme de A-modules. La proposition qui suit en résulte :

PROPOSITION 4. — *Soient A un anneau et F un ensemble d'idéaux à droite, topologisant et idempotent. Le foncteur localisation défini par F est isomorphe au foncteur $M \rightsquigarrow \varinjlim_{\mathrm{I} \in F} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, M/FM)$.*

COROLLAIRE 1. — *Les hypothèses sont celles de la proposition. On suppose en outre que l'enveloppe injective d'un objet de $\boldsymbol{F}$ appartient à $\boldsymbol{F}$. Le foncteur localisation défini par F est alors isomorphe au foncteur $M \rightsquigarrow \varinjlim_{\mathrm{I} \in F} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, M)$.*

Considérons en effet la suite exacte qui suit :

$$0 \to \varinjlim \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, FM) \xrightarrow{i} \varinjlim \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, M) \xrightarrow{p} \varinjlim \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, M/FM) \xrightarrow{d} \varinjlim \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{I}, FM).$$

On vérifie tout de suite que $\varinjlim \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, N)$ est nul si N est F-négligeable. Il en résulte que p est une injection. D'autre part, le foncteur $N \rightsquigarrow \varinjlim \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{I}, N)$ est le satellite du foncteur $N \rightsquigarrow \varinjlim \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, N)$. Si N est F-négligeable, il existe une suite exacte

$$0 \to N \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} N' \to 0,$$

où I est un A-module injectif F-négligeable. On en tire que $\varinjlim \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{I}, N)$ est nul si N est F-négligeable. En particulier, l'application d est surjective.

Corollaire 2. — *Soient A un anneau et F un ensemble d'idéaux à droite, topologisant et idempotent. Supposons qu'il existe un sous-ensemble G de F, cofinal et formé d'idéaux à droite de type fini. Si le foncteur localisation défini par F est exact, ce foncteur est isomorphe au foncteur $M \rightsquigarrow M \otimes_A A_F$; de plus, les catégories* mod A/F *et* mod A_F *sont alors équivalentes.*

Montrons d'abord que le foncteur $M \rightsquigarrow \varinjlim_{\mathrm{I} \in G} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, M/FM)$ commute avec les sommes directes. Cela est évidemment vrai pour les foncteurs $M \rightsquigarrow FM$ et $M \rightsquigarrow M/FM$; si N est un A-module de type fini, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(N, .)$ commute avec les sommes directes. Il s'ensuit que le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{I}, M/FM)$ commute avec les sommes directes si I est un élément de G. La première assertion du corollaire en résulte (*voir* la proposition 1 *bis* et la remarque qui la précède).

Soit d'autre part $\boldsymbol{B}$ la catégorie quotient mod A/F, soit T le foncteur canonique de mod A dans $\boldsymbol{B}$ et soit S un foncteur adjoint à T. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(A_F, .)$ est isomorphe au foncteur $\mathrm{Hom}_A(A, S.)$; comme S est exact, A_F est un objet projectif de $\boldsymbol{B}$; comme S commute avec les sommes directes, il en va de même pour $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}}(A_F, .)$. La dernière assertion résulte donc du corollaire 1 de la proposition 1.

Voici une application du corollaire 2 : Soit S une *partie multiplicative* de A (sous-ensemble de A tel que $a.b \in S$ si $a \in S$ et $b \in S$). La donnée de S permet de définir un ensemble d'idéaux à droite F_S, topologisant et idempotent : un idéal à droite I appartient à F_S si, pour tout $a \in A$, il existe un $s \in S$ tel que $a.s$ appartienne à I. Il revient au même de dire qu'un A-module M est F_S-négligeable si tout élément m de M est annulé par un élément s de S.

Tout idéal appartenant à F_S rencontre évidemment S; la réciproque est vraie si l'on a $\forall s \in S$, $\forall a \in A$, $\exists t \in S$, $\exists b \in A$ tels qu'on ait $a.t = s.b$. Nous allons retrouver cette condition; pour cela, nous notons M_S au lieu de M_{F_S} :

DÉFINITION. — *Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux avec élément unité et S une partie multiplicative de A. On dit que (B, φ) est un anneau de fractions à droite de A pour S si l'on a :*

a. Ker φ *est F_S-négligeable; autrement dit, si $\varphi(a)$ est nul, il existe $s \in S$ tel qu'on ait $a.s = 0$.*

b. L'image par φ de tout élément de S est inversible (à gauche et à droite).

c. Tout élément b de B est de la forme $b = \varphi(a).\varphi(s)^{-1}$, $a \in A$, $s \in S$.

PROPOSITION 5. — *Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Il existe un anneau de fractions à droite de A pour S.

b. S satisfait aux conditons suivantes :

($\bigstar$) $\forall s \in S$, $\forall a \in A$, $\exists t \in S$, $\exists b \in A$ *tels qu'on ait* $a.t = s.b$.

($\bigstar\bigstar$) si $a \in A$, si $s \in S$ et si $s.a = 0$, *il existe $t \in S$ tel que* $a.t = 0$.

c. L'image d'un élément de S par l'application $u_A : A \to A_S$ est inversible.

Si ces conditions sont remplies et si (B, φ) est un anneau de fractions à droite de A pour S, il existe un et un seul isomorphisme ψ de B sur A_F tel qu'on ait $\psi \circ \varphi = u_A$. Le foncteur $M \rightsquigarrow M_S$ est alors exact et il est isomorphe au foncteur $M \rightsquigarrow M \otimes_A A_S$.

$(a) \Rightarrow (b)$: L'assertion ($\bigstar\bigstar$) est claire car $\varphi(a)$ est nul si a est nul. D'autre part, $\varphi(s)^{-1}.\varphi(a)$ est un élément de B, et est donc de la forme

$$\varphi(s)^{-1}.\varphi(a) = \varphi(c).\varphi(r)^{-1}, \qquad r \in S, \qquad c \in A.$$

On en tire l'égalité $\varphi(a).\varphi(r) = \varphi(s).\varphi(c)$. Autrement dit, $a.r - s.c$ appartient à Ker φ; il existe par conséquent un $u \in S$ tel qu'on ait $a.r.u - s.c.u = 0$. On posera $t = r.u$ et $b = c.u$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Nous montrons d'abord que les conditions ($\bigstar$) et ($\bigstar\bigstar$) entraînent *l'exactitude du foncteur $M \rightsquigarrow M_S$*. Donnons-nous un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{I} & & \\ & & \downarrow u & & \\ M & \xrightarrow{p} & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

où I appartient à F_S et où M et Ker p sont F_S-fermés. Il suffit de montrer que I contient un idéal $\mathfrak{m} \in F_S$ tel que la restriction de u à $\mathfrak{m}$ soit de la forme $p \circ v$, où $v : \mathfrak{m} \to M$ [proposition 7 (b), chap. III].

Si s appartient à $\mathfrak{l} \cap S$, $u(s)$ est de la forme $p(m)$, où $m \in M$; de plus, $m.a$ est nul si $s.a$ est nul. On posera donc $\mathfrak{m} = s.A$ et $v(s.a) = m.a$.

L'exactitude du foncteur $M \rightsquigarrow M_S$ entraîne que $u_A(s)$ est inversible à droite pour tout $s \in S$ (soit en effet g_s l'application $a \rightsquigarrow s.a$; comme Coker g_s est F_S-négligeable, g_s induit un épimorphisme de A_S sur A_S). Il en résulte que $u_A(s).(s'.u_A(s) - 1)$ est nul si s' est tel qu'on ait $u_A(s).s' = 1$. Comme $u_A(s)$ est un élément régulier à droite et à gauche [condition (★★)], on a $s'.u_A(s) = 1$.

$(c) \Rightarrow (a)$: C'est clair, de même que l'unicité de l'anneau des fractions.

La dernière assertion résulte du corollaire 2 de la proposition 4.

Remarque 1. — Les conditions (★) et (★★) sont toujours vérifiées lorsque S est contenu dans le centre de A. On retrouve alors la localisation par rapport au centre (chap. III, § 5).

Remarque 2. — Si les conditions (★) et (★★) de la proposition 5 sont satisfaites, on peut exhiber une construction de M_S plus proche des traditions établies : pour cela, on convient de dire que deux éléments (m, s) et (n, t) de $M \times S$ sont équivalents s'il existe deux éléments u et v de A tels qu'on ait $s.u = t.v \in S$ et $m.u = n.v$. L'ensemble sous-jacent à M_S est alors choisi égal au quotient de $M \times S$ pour la relation d'équivalence que nous venons de définir. La définition des lois d'addition et de multiplication est aisée.

Remarque 3. — Nous laissons au lecteur le soin de prouver que, si A est commutatif, A_F est commutatif pour tout ensemble d'idéaux topologisant et idempotent F; de plus, l'application $\mathfrak{p} \rightsquigarrow \mathfrak{p}_F$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de A n'appartenant pas à F sur l'ensemble des idéaux premiers de A_F n'appartenant pas à F'.

3. **Le théorème de Goldie** ([9], [15]). — Ce paragraphe est consacré à un théorème de Goldie que nous prouverons par nos méthodes. Soit A un anneau et soit F l'ensemble des idéaux à droite de A dont A_d est extension essentielle. Pour qu'un idéal à droite $\mathfrak{l}$ appartienne à F, il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée : pout tout élément non nul a de A, il existe $b \in A$ tel que $a.b$ ne soit pas nul et appartienne à $\mathfrak{l}$. Il résulte facilement de cette condition que l'ensemble F est topologisant. Nous pouvons donc parler du plus grand idéal à droite F-négligeable; cet idéal est un sous-module caractéristique de A_d, c'est-à-dire un idéal bilatère de A. Dans ce paragraphe, nous supposons que cet idéal bilatère est nul; autrement dit, nous supposons que l'assertion suivante est vraie :

(★) *Si A est extension essentielle de l'idéal à droite $\mathfrak{l}$ et si $x.\mathfrak{l}$ est nul, $x \in A$, alors x est nul.*

Lemme 1. — *Si la condition (★) est vérifiée, l'ensemble F des idéaux à droite dont A_d est extension essentielle, est topologisant et idempotent.*

Montrons que F est idempotent : Soient $\mathfrak{m}$ un élément de $F.F$ et a un élément non nul de A ; il existe un élément $\mathfrak{l}$ de F tel que $(a.\mathfrak{l}+\mathfrak{m})/\mathfrak{m}$ soit F-négligeable (*cf.* § 2). D'après (★), le produit $a.\mathfrak{l}$ n'est pas nul. Il existe donc un $l\in\mathfrak{l}$ tel que $a.l$ ne soit pas nul et tel que $a.l.\mathfrak{n}$ soit contenu dans $\mathfrak{m}$ pour au moins un $\mathfrak{n}\in F$. Ceci montre que $\mathfrak{m}$ appartient déjà à F.

L'ensemble F définit donc une localisation. La condition (★) entraîne que l'application canonique de A dans A_F est injective. De plus, on a le lemme :

LEMME 2. — *A_F est un A-module injectif.*

Soit en effet $f : \mathfrak{l}\to A_F$ une application A-linéaire d'un idéal à droite de A dans A_F. Si $\mathfrak{l}$ est un élément de F, f se prolonge évidemment à A (chap. III, § 2). Si $\mathfrak{l}$ est un idéal à droite quelconque, soit $\mathfrak{m}$ un complément de $\mathfrak{l}$ dans A_d (chap. II, § 5) ; alors $\mathfrak{l}+\mathfrak{m}$ est isomorphe à la somme directe $\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ et f se prolonge en une application A-linéaire $g : \mathfrak{l}+\mathfrak{m}\to A_F$. Comme A est extension essentielle de $\mathfrak{l}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{l}+\mathfrak{m}$ appartient à F et g se prolonge à A.

LEMME 3. — *Tout A-module F-fermé M contenu dans A_F est un facteur direct de A_F.*

Identifions A à son image dans A_F et soit N un complément de $M\cap A$ dans A. Le module A_d est alors extension essentielle de $M\cap A+N$, et le quotient $A_F/(M+N)$ est F-négligeable. Il en résulte que l'injection canonique de $M+N$ dans A_F est une F-enveloppe. Le lemme résulte donc de la formule

$$A_F=(M\oplus N)_F=M_F\oplus N_F=M\oplus N_F.$$

LEMME 4. — *L'anneau A_F est régulier au sens de von* NEUMANN ([4], § 6, exercice 15) (on dit aussi « absolument plat » au lieu de régulier, [5], chap. I, § 2, exercices).

Nous voulons montrer que tout idéal monogène $a.A_F$ est engendré par un idempotent. Pour cela, nous désignons par f_a l'endomorphisme $b\rightsquigarrow a.b$ de A_F. L'application $a\rightsquigarrow f_a$ est un isomorphisme de l'anneau A_F sur l'anneau des endomorphismes du A-module A_F. Comme A_F est F-fermé, $\operatorname{Ker} f_a$ est F-fermé et est un facteur direct de A_F (lemme 3). Si M est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f_a$, M est injectif (lemme 2) et f_a induit un isomorphisme de M sur un facteur direct de A_F. Le lemme 4 résulte donc du lemme 5 :

LEMME 5. — *Soient A un anneau, M un A-module, B l'anneau des endomorphismes de M. Si b est un élément de B, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. L'idéal à droite $b.B$ est un facteur direct de B_d.

b. L'idéal à gauche $B.b$ est un facteur direct de ${}_sB$.

c. Ker *b et* Im *b sont des facteurs directs de M.*

La preuve de ce lemme est évidemment laissée au lecteur.

Le corollaire de la proposition 3 montre que A_F est aussi un A_F-module injectif. On remarquera d'ailleurs qu'avec les notations du paragraphe 2, F' n'est autre que l'ensemble des idéaux à droite de A_F dont A_F est extension essentielle. De plus, l'anneau A_F satisfait aussi à (★).

Nous résumons les lemmes précédents dans le

THÉORÈME 1. — *Si l'anneau A satisfait à la condition (★) l'ensemble des idéaux à droite dont A_d est extension essentielle est topologisant et idempotent. L'anneau A_F est régulier et le A_F-module à droite sous-jacent à A_F est injectif. Comme A-module, A_F est l'enveloppe injective de A_d.*

Citons deux ensembles d'applications du théorème 1 :

a. Soit A un anneau dont tout idéal à droite non nul contient un idempotent non nul. Il revient au même de dire que pour tout élément non nul a de A, il existe un élément non nul $x \in A$ tel qu'on ait $x.a.x = x$ (ceci a lieu si A est un anneau régulier au sens de von NEUMANN). Si I est un idéal à droite de A et si $x.\mathrm{I}$ est nul, I annule tout idéal à gauche de la forme $A.e$, où e parcourt les idempotents contenus dans $A.x$. Si x n'est pas nul, on peut choisir e différent de O. Alors I est contenu dans $(1-e).A$ et A_d ne peut être extension essentielle de I. Ceci prouve la condition (★).

On voit en particulier que tout anneau régulier au sens de von NEUMANN se plonge dans un anneau régulier « injectif à droite ».

b. Tout anneau intègre et tout anneau quasi simple (il n'y a pas d'idéal bilatère propre non nul) se plongent dans un anneau régulier. Nous allons voir que, sous des conditions nœthériennes, cet anneau régulier est un anneau simple.

LEMME 6. — *Si l'anneau A satisfait à la condition (★), les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. L'anneau A_F est semi-simple.

b. Il n'existe pas de famille infinie formée d'idéaux à droite de A dont la somme est directe.

$(a) \Rightarrow (b)$: Soit en effet n la longueur du A_F-module sous-jacent à A_F. Soit $(\mathrm{I}_i)_{i \in I}$ une famille d'idéaux à droite de A dont la somme est directe. La formule

$$\left(\sum_{i \in I} \mathrm{I}_i\right)_F = \sum_{i \in I} (\mathrm{I}_i)_F$$

montre que le nombre d'éléments de I est inférieur à n.

$(b) \Rightarrow (a)$: Si l'assertion (b) est vraie, un argument classique prouve l'existence d'une famille finie $(\mathrm{I}_i)_{i \in I}$, formée d'idéaux à droite de A et satisfaisant aux conditions suivantes : la somme des I_i est directe et A_d est extension

essentielle de cette somme; de plus, I_i est un A-module coirréductible (*cf.* chap. II, § 5; d'une façon générale, il est équivalent de dire que l'enveloppe injective d'un A-module M est somme directe d'une famille finie d'injectifs indécomposables ou de dire qu'il n'existe pas de famille infinie de sous-modules de M dont la somme est directe). Il s'ensuit que les idéaux à droite $(I_i)_F$ sont indécomposables et que leur somme est directe et égale à A_F; l'anneau régulier A_F est donc somme directe d'une famille finie d'idéaux indécomposables. Ceci prouve (a).

LEMME 7. — *Soit A un anneau satisfaisant aux conditions suivantes :*

a. Tout idéal nilpotent de A est nul.

b. Les idéaux à droite de la forme $(o : a) = \{ x \mid x \in A,\ a.x = o \}$ satisfont à la condition des chaînes ascendantes.

L'anneau A satisfait alors à la condition $(\bigstar)$.

Soit a un élément non nul de A et prouvons que A_d n'est pas extension essentielle de $(o : a)$. Pour cela, nous choisissons un élément $c \in a.A$ tel que $(o : c)$ soit maximal parmi les idéaux de la forme $(o : x)$, où $x \in a.A$ et $x \neq o$. Comme $c.A$ n'est pas nilpotent, il existe un élément $d \in A$ tel que $a.d.c$ soit différent de o. Il résulte alors des inclusions

$$(o : c) \subset (o : d.c) \subset (o : a.d.c)$$

et du caractère maximal de $(o : c)$ que $(o : d.c)$ est égal à $(o : a.d.c)$. Autrement dit, l'égalité $a.d.c.x = o$ entraîne l'égalité $d.c.x = o$. Ceci démontre que l'intersection $d.c.A \cap (o : a)$ est nulle et que A_d n'est pas extension essentielle de $(o : a)$.

THÉORÈME 2 (GOLDIE). — *Soit A un anneau satisfaisant aux conditions suivantes :*

a. Tout idéal nilpotent de A est nul.

b. Les idéaux à droite de la forme $(o : a) = \{ x \mid x \in A,\ a.x = o \}$ satisfont à la condition des chaînes ascendantes.

c. Il n'existe pas de famille infinie formée d'idéaux à droite dont la somme est directe.

L'anneau A satisfait à la condition $(\bigstar)$ et le localisé A_F de A est un anneau semi-simple. Si S est la partie multiplicative formée des éléments réguliers de A, le couple (A_F, u_A) est un anneau de fractions à droite de A pour S.

Il reste à démontrer la dernière assertion : si $s \in A$ est régulier à gauche (i. e. $s.x = o$ entraîne $x = o$), l'homothétie $x \rightsquigarrow s.x$ définit des endomorphismes injectifs de A et de A_F. Cette homothétie est donc un automorphisme de A_F et s est inversible dans A_F; en particulier, s est régulier à droite dans A. La partie multiplicative S est donc formée des éléments réguliers à

gauche de A. Pour que la démonstration soit complète, il suffit de montrer qu'avec les notations du paragraphe 2, F est égal à F_S [proposition 5, (c)]. Pour cela, nous prouvons qu'un idéal à droite I appartient à F si et seulement si I contient un $s \in S$:

Si s est un élément régulier de A, l'idéal $s.A_F$ est égal à A_F. Il en résulte que $s.A$ appartient à F.

Réciproquement, soit I un élément de F. Nous allons construire deux suites $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(a_1, \ldots, a_n)$, formées d'éléments de A_F et satisfaisant aux conditions suivantes : pour tout i, e_i est un idempotent primitif de A_F; A_F est la somme directe des idéaux indécomposables $e_i.A_F$; pour tout i, $e_i.a_i$ n'est pas nul et appartient à I; si f_i désigne l'homothétie $x \rightsquigarrow e_i.a_i.x$, on a l'égalité $\mathrm{Ker}f_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}f_n = 0$. Si nous posons $s = e_1.a_1 + \ldots + e_n.a_n$, il résultera de ces conditions que l'image de A_F par l'homothétie $x \rightsquigarrow s.x$ rencontrera tous les idéaux $e_i.A_F$ (car $s.x$ appartient à $e_i.A_F$ si x appartient à l'intersection de $\mathrm{Ker}f_j$ pour $j \neq i$); cette image étant F-fermée, elle coïncidera avec A_F et l'homothétie sera bijective. L'élément s sera donc régulier et appartiendra à I.

Prenons pour e_1 uu idempotent primitif quelconque de A_F. Soit $\mathfrak{m}_1$ un élément de F tel que $e_1.\mathfrak{m}_1$ soit contenu dans I. Comme $e_1.\mathfrak{m}_1$ n'est pas nilpotent, il existe $a_1 \in \mathfrak{m}_1$ tel que $e_1.a_1.e_1$ ne soit pas nul. On tire de là la formule

$$A_F = e_1.A_F \oplus \mathrm{Ker}f_1.$$

Prenons pour e_2 un idempotent primitif appartenant à $\mathrm{Ker}f_1$. Soit $\mathfrak{m}_2$ un élément de F tel que $e_2.\mathfrak{m}_2$ soit contenu dans I. Comme $e_2.\mathfrak{m}_2$ n'est pas nilpotent, il existe $a_2 \in \mathfrak{m}_2$ tel que $e_2.a_2.e_2$ ne soit pas nul. On tire de là la formule

$$A_F = e_1.A_F \oplus e_2.A_F \oplus \mathrm{Ker}f_1 \cap \mathrm{Ker}f_2.$$

Prenons pour e_3 un idempotent primitif appartenant à $\mathrm{Ker}f_1 \cap \mathrm{Ker}f_2$, ... La construction s'arrête lorsque n est égal à la longueur du A_I-module à droite sous-jacent à A_F. On a alors les formules

$$A_F = e_1.A_F + \ldots + e_n.A_F \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}f_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}f_n = 0.$$

Corollaire 1. — *Soit A un anneau satisfaisant aux conditions (b) et (c) du théorème 2 et dont* O *est un idéal bilatère premier* (i. e. *si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont deux idéaux bilatères non nuls de A, le produit* $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$ *n'est pas nul*). *Si S est la partie multiplicative formée des éléments réguliers de A, il existe un anneau de fractions à droite de A pour S. Cet anneau de fractions est simple.*

La condition (a) du théorème 2 est en effet satisfaite. Si A_F n'était pas simple, A_F contiendrait des idéaux bilatères non nuls $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ dont le produit serait nul. Les intersections $\mathfrak{a} \cap A$ et $\mathfrak{b} \cap A$ seraient alors des idéaux bilatères de A et le produit de ces idéaux serait nul. Ceci est absurde.

COROLLAIRE 2. — *Soit A un anneau intègre nœthérien à droite. Si S est la partie multiplicative formée des éléments non nuls de A, il existe un anneau de fractions à droite de A pour S. Cet anneau est un corps.*

L'existence de l'anneau de fractions A_S résulte du théorème 2. Si A_S n'est pas un corps, A_S contient un idempotent e distinct de 1. Il existe donc un $s \in S$ tel que $e.s$ appartienne à A. Comme $e.s$ n'est pas inversible dans A_S, les $x \in A_S$ tels que $e.s.x$ soit nul forment un idéal à droite I. Il en résulte que $A \cap \mathrm{I}$ n'est pas nul et est annulé par $e.s$: ceci est absurde.

4. **Injectifs indécomposables et idéaux bilatères premiers.** — Soit A un anneau *nœthérien à droite*. Si M est un A-module, $\mathrm{Ann}M$ désignera l'idéal bilatère formé des a tels qu'on ait $M.a = 0$. De même, si m est un élément de M, $\mathrm{Ann}m$ désignera l'idéal à droite formé des a tels qu'on ait $m.a = 0$.

Soit I un A-module injectif indécomposable. Si M et N sont deux sous-modules non nuls de I, $M \cap N$ n'est pas nul et l'on a

$$\mathrm{Ann}(M \cap N) \supset \mathrm{Ann}M + \mathrm{Ann}N.$$

Les annulateurs de sous-modules non nuls de I forment donc une famille filtrante croissante d'idéaux bilatères de A. Cette famille a un élément maximal qu'on notera $A(I)$.

On voit d'abord que $A(I)$ est un idéal bilatère premier; autrement dit, $A(I)$ n'est pas égal à A et l'on a $a.A.b \subset A(I) \Rightarrow a \in A(I)$ ou $b \in A(I)$. Ceci résulte du lemme suivant dont la preuve est laissée au lecteur :

LEMME 1. — *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère d'un anneau A, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère premier.

b. Il existe un A-module non nul M tel qu'on ait $\mathrm{Ann}N = \mathfrak{a}$ pour tout sous-module non nul N de M.

Je dis aussi que tout idéal bilatère premier $\mathfrak{p}$ est du type $A(I)$, où I est un A-module injectif indécomposable : en effet, soit $\bigoplus_k I_k$ une décomposition de l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$ en injectifs indécomposables; soit M_k un sous-module de I_k dont l'annulateur est $A(I_k)$. Alors $M_k \cap A/\mathfrak{p}$ est différent de O et a pour annulateur à la fois $\mathfrak{p}$ et $A(I_k)$; d'où $\mathfrak{p} = A(I_k)$ pour tout k, et le résultat.

Il est facile de voir que $A/\mathfrak{p}$ est en réalité un A-module isotypique (chap. IV, § 2), c'est-à-dire que les injectifs I_k sont tous isomorphes. En effet, le corollaire 1 du théorème 2 s'applique à l'anneau $A/\mathfrak{p}$. Cet anneau est donc contenu dans un anneau simple B qui est l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$ comme $(A/\mathfrak{p})$-module à droite. L'enveloppe injective I de $A/\mathfrak{p}$ considéré comme A-module contient B, et B coïncide avec l'ensemble des éléments de I qui sont annulés par $\mathfrak{p}$. L'assertion résulte donc de ce que B

est somme directe d'idéaux à droite simples qui sont des A-modules coirréductibles isomorphes.

Soit maintenant M un A-module quelconque, soit I l'enveloppe injective de M et soit $I=\sum_k I_k$ une décomposition de I comme somme directe de modules injectifs indécomposables. On dira que l'*idéal bilatère premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *est associé à* M s'il existe un k tel qu'on ait $\mathfrak{p}=A(I_k)$. On peut alors grouper par paquets $J_{\mathfrak{p}}=\sum_{A(I_k)=\mathfrak{p}} I_k$ les injectifs indécomposables associés au même idéal bilatère premier. On obtient ainsi une décomposition de I, unique à un automorphisme près, du type $I=\sum_{\mathfrak{p}} J_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers associés à M.

En particulier, si $M_{\mathfrak{p}}$ est égal à l'intersection $M\cap\left(\sum_{\mathfrak{q}\ \mathfrak{p}} J_{\mathfrak{q}}\right)$, on a l'égalité $0=\bigcap_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers associés à M. En outre, la décomposition est irrédondante et $M/M_{\mathfrak{p}}$ a $\mathfrak{p}$ pour seul idéal bilatère premier associé. La proposition suivante résulte du lemme 1 :

PROPOSITION 6. — *L'idéal bilatère premier* $\mathfrak{p}$ *est associé à* M *si et seulement si* M *possède un sous-module* N *tel que* $\mathfrak{p}$ *soit l'annulateur de* N *et de tous les sous-modules non nuls de* N.

On retrouve donc par un procédé différent les résultats de LESIEUR-CROISOT sur la décomposition « tertiaire » [16].

Nous nous proposons maintenant de voir sous quelles conditions la théorie obtenue n'est pas plus fine que la théorie de LESIEUR-CROISOT, c'est-à-dire quand la correspondance établie entre injectifs indécomposables et idéaux bilatères premiers est bijective. Pour cela, nous supposerons l'hypothèse (H) satisfaite :

(H) *Si* $\mathfrak{l}$ *est un idéal à droite de* A *et si* $\mathfrak{p}$ *est l'annulateur de* $A/\mathfrak{l}$, *il existe un nombre fini d'éléments* $x_1, \ldots, x_r$ *de* $A/\mathfrak{l}$ *tels qu'on ait*

$$\mathfrak{p}=\bigcap_{1\leq i\leq r} \operatorname{Ann} x_i.$$

Si la condition (H) est satisfaite, je dis que, pour tout injectif indécomposable I, l'enveloppe injective de $A/A(I)$ est somme directe d'un nombre fini de modules isomorphes à I : Soit en effet M un sous-module de I dont l'annulateur est $A(I)$. On a manifestement

$$A(I)=\bigcap_{\substack{x\neq 0\\ x\in M}} \operatorname{Ann} x.$$

Mais il résulte de (H) que $A(I)$ est intersection d'un nombre fini de $\mathrm{Ann}\, x$, soit $\mathrm{Ann}\, x_1, \ldots, \mathrm{Ann}\, x_r$; il existe donc un monomorphisme de $A/A(I)$ dans la somme directe finie $\bigoplus_{i=1}^{i=r} x_i.A$. L'enveloppe injective de cette somme est isotypique; d'où le résultat :

LEMME 2. — *Si la condition* (H) *est satisfaite, la correspondance* $I \rightsquigarrow A(I)$ *entre types d'injectifs indécomposables et idéaux bilatères premiers est bijective.*

Il reste à donner des exemples où la condition (H) est vérifiée :

a. Tous les idéaux à droite de A sont bilatères.

b. L'anneau A est artinien à droite. Le radical $\mathfrak{r}(A)$ de A est alors nilpotent et tout idéal bilatère premier contient $\mathfrak{r}(A)$. Les idéaux bilatères premiers de A correspondent donc biunivoquement à ceux de l'anneau semi-simple $A/\mathfrak{r}(A)$, c'est-à-dire aux représentations irréductibles de A.

c. Le centre $Z(A)$ de A est un anneau nœthérien et A est un $Z(A)$-module de type fini : Soient M un A-module de type fini, x et y deux éléments de M. Si x' et y' désignent les ensembles formés des éléments de M qui sont annulés par $\mathrm{Ann}\, x$ et $\mathrm{Ann}\, y$, on voit que x' et y' sont des modules de type fini sur $Z(A)$. En outre, on a l'égalité

$$\mathrm{Ann}(x'+y') = \mathrm{Ann}\, x \cap \mathrm{Ann}\, y.$$

Comme M est un $Z(A)$-module nœthérien, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_r$ de M tels qu'on ait

$$x'_1 + \ldots + x'_r = M.$$

La condition (H) est donc satisfaite.

d. Un contre-exemple : Soient k un corps commutatif de caractéristique O et $k(X)$ le corps des fractions rationnelles en une indéterminée X sur k. Soient d la k-dérivation $P(X) \to P'(X)$ de $k(X)$ et A l'anneau des opérateurs engendré par d et les homothéties de $k(X)$. L'anneau A est intègre, tout idéal à droite est monogène et il n'y a pas d'idéal bilatère distinct de O ou de A ([4], § 5, exerc. 13). En particulier, les idéaux bilatères premiers associés à un A-module simple et à A_d sont nuls. Comme ces modules n'ont pas même enveloppe injective, on voit que la correspondance $I \rightsquigarrow A(I)$ n'est pas bijective.

L'ensemble des idéaux bilatères premiers de A sera appelé dorénavant le *spectre premier de* A [notation : Spec (A)]. Nous savons qu'il est possible d'associer à tout idéal bilatère premier $\mathfrak{p}$ un A-module injectif indécomposable $I_\mathfrak{p}$ qui satisfait à la condition suivante : l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$ est somme directe finie de modules isomorphes à $I_\mathfrak{p}$. L'application $\mathfrak{p} \rightsquigarrow I_\mathfrak{p}$

définit une injection de $\mathrm{Spec}(A)$ dans le spectre de la catégorie $\mathrm{mod}A$. Nous identifierons toujours $\mathrm{Spec}(A)$ à l'image de cette injection.

PROPOSITION 7. — *Soient A un anneau nœthérien à droite et $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie localisante de* $\mathrm{mod}A$. *Un idéal bilatère premier* $\mathfrak{p}$ *appartient à* $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$ (chap. IV, § 1) *si et seulement si* $A/\mathfrak{p}$ *est un objet de* $\boldsymbol{C}$.

Il est clair que $\mathfrak{p}$ appartient à $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$ si $A/\mathfrak{p}$ est un objet de $\boldsymbol{C}$. Supposons réciproquement que $\mathfrak{p}$ appartienne à $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$. Cela signifie que $I_{\mathfrak{p}}$ contient un sous-module non nul appartenant à $\boldsymbol{C}$. Il en résulte que $A/\mathfrak{p}$ contient un sous-module non nul N appartenant à $\boldsymbol{C}$. Nous désignons par S la partie multiplicative formée des éléments réguliers de $A/\mathfrak{p}$ (*cf.* § 3). Si P est un sous-groupe de N, l'idéal à droite $\mathrm{Ann}P$ de $A/\mathfrak{p}$ qui est formé des a tels que $P.a$ soit nul, est l'intersection de $A/\mathfrak{p}$ avec un idéal à droite de l'anneau simple $(A/\mathfrak{p})_S$. Il s'ensuit que les idéaux à droite de A de la forme $\mathrm{Ann}P$ satisfont à la condition des chaînes descendantes. En particulier, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_r$ de N tels qu'on ait

$$0 = \bigcap_{i=1}^{i=r} \mathrm{Ann}\, x_i.$$

Il existe donc une application A-linéaire de $A/\mathfrak{p}$ dans la somme directe des modules $x_i.A$. Il en résulte que $A/\mathfrak{p}$ appartient à $\boldsymbol{C}$. C. Q. F. D.

Si s est un élément de $\mathrm{Sp}(\mathrm{mod}A)$, et si I_s est un A-module injectif indécomposable de type s, l'idéal bilatère $A(I_s)$ appartient à $\mathrm{Spec}(A)$. Nous dirons que l'application $s \rightsquigarrow A(I_s)$ est la projection canonique de $\mathrm{Sp}(\mathrm{mod}A)$ sur $\mathrm{Spec}(A)$. Cette projection est l'identité sur $\mathrm{Spec}(A)$; elle est donc surjective. Lorsqu'elle est bijective, nous disons que l'*anneau A possède assez d'idéaux bilatères.*

Soit A un anneau, nœthérien à droite et possédant assez d'idéaux bilatères. Si F est un ensemble d'idéaux à droite topologisant et idempotent, nous avons vu que le produit $\mathfrak{I}.\mathfrak{m}$ de deux idéaux à droite $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{m}$ appartient à F pourvu que $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{m}$ appartiennent à F. La loi multiplicative de A munit donc l'ensemble F d'une structure de monoïde. Je dis que le sous-monoïde de F qui est engendré par les idéaux bilatères premiers appartenant à F, est cofinal : la sous-catégorie $\boldsymbol{F}$ est en effet engendrée par les modules $A/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux bilatères premiers appartenant à F (proposition 7 et corollaire 2 de la proposition 2, chap. IV). Tout module nœthérien M appartenant à $\boldsymbol{F}$ possède par conséquent une suite de composition

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r \subset M_{r+1} = M,$$

dont les quotients M_{i+1}/M_i sont annulés par un idéal bilatère premier $\mathfrak{p}_i \in F$. On tire de là que le produit $\mathfrak{p}_r.\mathfrak{p}_{r-1}\ldots\mathfrak{p}_0$ annule M. Si M est le quotient

de A par un élément I de F, il s'ensuit que I contient le produit $\mathfrak{p}_r.\mathfrak{p}_{r-1}\ldots\mathfrak{p}_0$. La proposition 7 entraîne donc le

COROLLAIRE 1. — *Soient A un anneau nœthérien à droite ayant assez d'idéaux bilatères et E un ensemble d'idéaux bilatères premiers de A. L'ensemble F des idéaux à droite qui contiennent un produit de la forme $\mathfrak{p}_r.\mathfrak{p}_{r-1}\ldots\mathfrak{p}_0$, où $\mathfrak{p}_i \in E$, est topologisant et idempotent. Réciproquement, tout ensemble d'idéaux à droite topologisant et idempotent est de ce type.*

Si l'anneau A possède assez d'idéaux bilatères, le spectre premier de A coïncide avec le spectre de la catégorie $\mathrm{mod}\,A$. Ce dernier se trouve donc muni d'une structure d'ensemble ordonné nœthérien. De plus, pour toute sous-catégorie localisante $\boldsymbol{C}$ de $\mathrm{mod}\,A$, $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$ coïncide avec l'ensemble des idéaux bilatères premiers $\mathfrak{p}$ tels que $A/\mathfrak{p}$ appartienne à $\boldsymbol{C}$. Si α est un ordinal, nous désignons en particulier par E_α l'ensemble des idéaux premiers tels qu'on ait $\mathrm{Kdim}\,A/\mathfrak{p} \leqq \alpha$ (voir chap. 4, § 1). On a alors le

COROLLAIRE 2. — *Soit A un anneau nœthérien à droite ayant assez d'idéaux bilatères. Avec les notations ci-dessus, les ensembles E_α peuvent être définis de la façon suivante :*

— *E_{-1} est vide.*

— *Si l'ordinal α a un prédécesseur β, E_α est formé des idéaux bilatères premiers $\mathfrak{p}$ tels que tout idéal bilatère premier contenant $\mathfrak{p}$ et distinct de $\mathfrak{p}$ appartienne à E_β.*

— *Si α est un ordinal limite, E_α est la réunion des E_β pour $\beta < \alpha$.*

Il est clair que E_{-1} est vide. Soit donc γ un ordinal quelconque et supposons que les énoncés du corollaire 2 sont vérifiés pour tout ordinal $\alpha < \gamma$. Si γ est un ordinal limite, ces énoncés restent manifestement vérifiés lorsque α est égal à γ. Examinons le cas où γ a un prédécesseur β et soit T_β le foncteur canonique de $\mathrm{mod}\,A = \boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\beta$ (les notations sont celles du chapitre IV) :

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal bilatère premier tel qu'on ait $\mathrm{Kdim}\,A/\mathfrak{p} = \gamma$. D'autre part, soit $\mathfrak{q}$ un idéal bilatère premier contenant $\mathfrak{p}$ et distinct de $\mathfrak{p}$. Il est clair que $\mathrm{Kdim}\,A/\mathfrak{q}$ est inférieur ou égal à $\mathrm{Kdim}\,A/\mathfrak{p}$; si l'égalité avait lieu, les quotients de Jordan-Hölder de $T_\beta(A/\mathfrak{p})$ ne seraient pas tous isomorphes. Il en résulterait l'existence d'un sous-module non nul N de $A/\mathfrak{p}$ qui n'engendrerait pas la même sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\,A$ que $A/\mathfrak{p}$. Comme il existe une injection A-linéaire de $A/\mathfrak{p}$ dans une somme directe de modules isomorphes à N (*cf.* la preuve de la proposition 7), cela est impossible. On a donc l'inégalité $\mathrm{Kdim}\,A/\mathfrak{q} < \mathrm{Kdim}\,A/\mathfrak{p}$.

Réciproquement, supposons que $A/\mathfrak{q}$ appartienne à $\boldsymbol{A}_\beta$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ contenant $\mathfrak{p}$ et distinct de $\mathfrak{p}$. Soit I un idéal à droite de $A/\mathfrak{p}$ qui est maximal parmi les idéaux à droite $\mathfrak{m}$ tels que $A/\mathfrak{m}$ n'appartienne pas à $\boldsymbol{A}_\beta$. Alors $T_\beta(A/\mathrm{I})$ est un objet simple; il s'ensuit qu'il existe un idéal

bilatère premier associé à $A/\mathfrak{I}$. Cet idéal premier contient $\mathfrak{p}$, et l'hypothèse que nous avons faite montre qu'il coïncide avec $\mathfrak{p}$. Comme $A/\mathfrak{I}$ appartient à $\boldsymbol{A}_\gamma$, $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}_\gamma)$ contient $\mathfrak{p}$. Il en résulte que $A/\mathfrak{p}$ appartient à $\boldsymbol{A}_\gamma$ (proposition 7).

COROLLAIRE 3. — *Soient A un anneau nœthérien à droite ayant assez d'idéaux bilatères, $\mathfrak{p}$ un idéal bilatère premier de A et η un ordinal fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. $\mathrm{Kdim}\, A/\mathfrak{p} \leq \eta$.

b. Toute chaîne d'idéaux bilatères premiers contenant $\mathfrak{p}$ a au plus $\eta + 1$ éléments.

Le corollaire 3 résulte directement du corollaire 2. Si A est un anneau commutatif nœthérien, il montre que la notion de dimension de Krull que nous avons introduite dans $\mathrm{mod}\, A$ coïncide avec la notion classique.

Pour terminer ce paragraphe, nous rappelons les exemples que nous avons donnés :

PROPOSITION 8. — *Un anneau nœthérien à droite A possède assez d'idéaux bilatères si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

a. A est artinien à droite.

b. Tout idéal à droite est bilatère.

c. Le centre $Z(A)$ de A est un anneau nœthérien et A est un $Z(A)$-module de type fini.

5. **Stabilité par enveloppes injectives.** — Soient A un anneau et $\boldsymbol{C}$ une sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}\, A$ satisfaisant aux conditions suivantes :

($\bigstar$) Si M est un A-module appartenant à $\boldsymbol{C}$, tout sous-module de M appartient à $\boldsymbol{C}$.

($\bigstar\bigstar$) Si M et N sont deux A-modules appartenant à $\boldsymbol{C}$, la somme directe $M \oplus N$ appartient à $\boldsymbol{C}$.

Désignons maintenant par M un A-module quelconque. Si M' et M'' sont deux sous-modules de M tels que M/M' et M/M'' appartiennent à $\boldsymbol{C}$, alors $M/M' \cap M''$ appartient à $\boldsymbol{C}$; ce module est en effet isomorphe à un sous-module de $M/M' \oplus M/M''$. Les sous-modules M' de M tels que M/M' appartienne à $\boldsymbol{C}$, forment donc une base de voisinages de O pour une topologie $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}}M$ qui fait de M un groupe topologique. Le lecteur vérifiera que la topologie $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}}A_d$ fait de A un anneau topologique. Si l'on munit A de cette topologie, la topologie $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}}M$ fait de M un A-module topologique. De plus, toute application A-linéaire $f : M \to N$ est continue quand on munit M et N des topologies $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}}M$ et $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{C}}N$. On peut résumer la situation en disant que la donnée de $\boldsymbol{C}$ définit d'une part une structure d'anneau topologique sur A; elle définit d'autre part un foncteur de $\mathrm{mod}\, A$ dans la catégorie des A-modules topologiques.

PROPOSITION 9. — *Soient A un anneau et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de* mod A *satisfaisant aux conditions* ($\star$) *et* ($\star\star$). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. Pour tout A-module M et pour tout sous-module N de M, la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}N$ coïncide avec la restriction à N de la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}M$.

b. Pour tout A-module M appartenant à $\mathcal{C}$, l'enveloppe injective de M appartient à $\mathcal{C}$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Il revient en effet au même de dire que M appartient à $\mathcal{C}$ ou de dire que la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}M$ est discrète. Si M appartient à $\mathcal{C}$ et est contenu dans un A-module I, l'assertion (a) entraîne qu'il existe un sous-module Q de I tel que I/Q appartienne à $\mathcal{C}$ et qu'on ait $Q \cap M = 0$. Si I est l'enveloppe injective de M, Q est nécessairement nul. D'où l'assertion (b).

$(b) \Rightarrow (a)$: Soit en effet N' un sous-module de N tel que N/N' appartienne à $\mathcal{C}$. Il s'agit de montrer qu'il existe un sous-module M' de M tel que M/M' appartienne à $\mathcal{C}$ et que $N \cap M'$ soit contenu dans N'. Nous choisirons pour M' un sous-module de M qui est maximal pour l'égalité $N \cap M' = N'$. Alors M/M' est extension essentielle de N/N' et (a) résulte de (b).

COROLLAIRE 1. — *Soient A un anneau et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de* mod A *satisfaisant aux conditions* ($\star$), ($\star\star$) *et aux conditions* (a) *et* (b) *de la proposition* 9. *Soit M un A-module et soit N l'intersection des sous-modules M' de M tels que M/M' appartienne à $\mathcal{C}$. Il n'existe alors aucun sous-module N' de N, distinct de N et tel que N/N' appartienne à $\mathcal{C}$.*

En effet, la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}N$ coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}M$. Cette dernière topologie est grossière.

Nous supposons à partir de maintenant que *A est nœthérien à droite.* La proposition 9 et le corollaire 1 sont alors souvent utilisés de la façon suivante : soit $\mathfrak{i}$ un idéal bilatère de A et soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie localisante de mod A dont les objets nœthériens sont les A-modules annulés par une puissance de $\mathfrak{i}$. Si $\mathcal{C}$ est stable par enveloppes injectives [c'est-à-dire si $\mathcal{C}$ satisfait à l'assertion (b) de la proposition 9], la proposition 11 et le corollaire 1 peuvent être formulés comme suit : si N est un sous-module d'un A-module nœthérien M, la topologie $\mathfrak{i}$-adique de N (i. e. $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}N$) est la restriction à N de la topologie $\mathfrak{i}$-adique de M; de plus, si R est l'intersection des sous-modules $M.\mathfrak{i}^n$ de M, $R.\mathfrak{i}$ est égal à R. Ces propositions évoquent des résultats bien connus d'ARTIN-REES et de KRULL.

Dans le paragraphe 6, nous utilisons la proposition 9 d'une manière un peu différente : si A est un anneau nœthérien à droite, nous prenons pour $\mathcal{C}$ la sous-catégorie localisante $(\text{mod } A)_0$ dont les objets sont les A-modules de dimension de Krull $\leqq 0$. Si M est un A-module, nous notons alors $\hat{M}$ le

complété de M pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}M$; ce complété $\hat{M}$ est la limite projective des modules M/M', quand M' parcourt les sous-modules de M tels qu'on ait $\operatorname{Kdim} M/M' \leq o$. Si M est nœthérien, les quotients M/M' sont de longueur finie. En particulier, $\hat{A}$ est un anneau pseudo-compact à droite; si M est nœthérien, $\hat{M}$ est un module pseudo-compact à droite sur $\hat{A}$.

Il est clair que $(\operatorname{mod} A)_0$ s'identifie à la catégorie des $\hat{A}$-modules à droite topologiques et discrets. De plus, on a le

COROLLAIRE 2. — *Soit A un anneau nœthérien à droite. Le foncteur qui associe à tout A-module nœthérien à droite M le A-module à droite pseudo-compact $\hat{M}$, est exact à droite. Ce foncteur est exact si l'enveloppe injective d'un A-module de dimension de Krull nulle a une dimension de Krull nulle.*

Ce corollaire résulte facilement de la proposition 11 et du lemme 1, § 3, chap. IV.

PROPOSITION 10. — *Si A est un anneau commutatif nœthérien, toute sous-catégorie localisante de* mod A *est stable par enveloppes injectives.*

Soit en effet $\mathcal{C}$ une telle sous-catégorie localisante et soit M un A-module appartenant à $\mathcal{C}$. Si l'idéal premier $\mathfrak{p}$ est associé à M, le module $A/\mathfrak{p}$ appartient à $\mathcal{C}$ (proposition 7). Nous allons montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$ appartient à la sous-catégorie localisante engendrée par $A/\mathfrak{p}$; si M est un A-module et si a est un élément de A, nous désignons par a_M l'homothétie $x \to x.a$ de M. Nous disons que a_M est *presque-nilpotent* si tout sous-module nœthérien de M est annulé par une puissance de a_M.

LEMME 1. — *Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau commutatif nœthérien A et M un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. M appartient à la sous-catégorie localisante de mod A *qui est engendrée par $A/\mathfrak{p}$.*

b. Pour tout élément a de $\mathfrak{p}$, a_M est presque-nilpotent.

Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de A, le quotient $A/\mathfrak{I}$ appartient en effet à la sous-catégorie localisante engendrée par $A/\mathfrak{p}$ si et seulement si $\mathfrak{I}$ contient une puissance de $\mathfrak{p}$ (corollaire 1 de la proposition 7). Il s'ensuit que M appartient à la sous-catégorie localisante engendrée par $A/\mathfrak{p}$ si et seulement si tout élément de M est annulé par une puissance de $\mathfrak{p}$.

LEMME 2. — *Soient A un anneau commutatif nœthérien et I un A-module injectif indécomposable. Pour tout élément a de A, l'homothétie a_I est soit bijective, soit presque-nilpotente.*

Soit en effet M un sous-module nœthérien non nul de I. Comme M est nœthérien, l'égalité suivante est vraie pour n assez grand :

$$\operatorname{Ker} a_M^n \cap \operatorname{Im} a_M^n = o.$$

Comme l'intersection de deux sous-modules non nuls de I n'est pas nulle, on a soit $a_M^n = 0$, soit $\mathrm{Ker}\, a_M^n = 0$. Dans le dernier cas, a_M est un monomorphisme de I dans I, donc un automorphisme, car I ne contient pas d'injectifs distincts de I ou de O. Dans le premier cas, tout sous-module nœthérien de I est annulé par une puissance de a.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition : si I est l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$, $\mathrm{Ker}\, a_I$ est différent de O pour tout élément a de $\mathfrak{p}$. Il s'ensuit que a_I est presque-nilpotent (lemme 2) et que I appartient à la sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\, A$ qui est engendrée par $A/\mathfrak{p}$ (lemme 1).

Le corollaire 2 de la proposition 9 s'applique donc à tout anneau commutatif nœthérien. Il en va de même des remarques qui suivent le corollaire 1 (lemmes d'ARTIN-REES et de KRULL).

6. Extensions finies d'anneaux commutatifs nœthériens. — Dans ce paragraphe, R est un anneau commutatif nœthérien. Nous désignons par A une R-algèbre unitaire, finie et fidèle (*cf.* § 1). Une telle algèbre possède assez d'idéaux bilatères. Nous nous intéressons d'une part aux relations entre le spectre premier de A et le spectre premier de R; nous étudions d'autre part la structure des A-modules injectifs indécomposables. Les résultats auxquels nous aboutissons sont ceux auxquels tout le monde s'attend; les méthodes utilisées sont celles que tout le monde utilise.

Il est loisible de supposer R contenu dans le centre $Z(A)$ de A. Nous disons alors que *A est une extension finie* de R. Pour tout idéal bilatère premier $\mathfrak{P}$ de A, $R \cap \mathfrak{P}$ est alors un idéal premier de R.

PROPOSITION 11. — *Soit A une extension finie d'un anneau R, commutatif et nœthérien. Les assertions suivantes sont vraies :*

a. L'application $\mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{P} \cap R$ est une surjection de $\mathrm{Spec}(A)$ *sur* $\mathrm{Spec}(R)$.

b. Si $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont deux idéaux bilatères premiers de A, les conditions $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{Q}$ entraînent $\mathfrak{P} \cap R \neq \mathfrak{Q} \cap R$.

c. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R et si le R-module A peut être engendré par n éléments, l'image réciproque de $\{\mathfrak{p}\}$ dans $\mathrm{Spec}(A)$ *contient au plus n éléments.*

La proposition résultera des lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soient A un anneau, S une partie multiplicative contenue dans le centre $Z(A)$ de A et φ l'application canonique de A dans A_S. Les applications $\mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{P}_S$ et $\mathfrak{Q} \rightsquigarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{Q})$ définissent une correspondance biunivoque entre les idéaux bilatères premiers de A qui ne rencontrent pas S et les idéaux bilatères premiers de A_S.*

La preuve du lemme 1 est laissée au lecteur.

LEMME 2. — *Les hypothèses et les notations sont celles de la proposition* 11. *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* R, $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$ *est une algèbre finie non nulle sur le corps commutatif* $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.R_\mathfrak{p}$. *En outre, l'application* $\mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{P}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.\mathfrak{P}_\mathfrak{p}$ *définit une bijection de l'ensemble des idéaux bilatères premiers* $\mathfrak{P}$ *de* A *satisfaisant à* $\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$, *sur l'ensemble des idéaux bilatères premiers de* $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$.

Il est clair que $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$ est une algèbre finie sur $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.R_\mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}.R_\mathfrak{p}$ est le radical de Jacobson de $R_\mathfrak{p}$ et que $A_\mathfrak{p}$ est un $R_\mathfrak{p}$-module de type fini, le quotient $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$ n'est pas nul (lemme de Nakayama).

D'autre part, les idéaux bilatères premiers de $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$ sont en correspondance biunivoque avec les idéaux bilatères premiers de $A_\mathfrak{p}$ qui contiennent $\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$, Le lemme 1 montre que ces derniers correspondent biunivoquement aux idéaux bilatères premiers $\mathfrak{P}$ tels qu'on ait $\mathfrak{P} \cap R = \mathfrak{p}$. Ceci prouve le lemme 2.

L'assertion (a) de la proposition résulte de ce que $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$ est un anneau artinien non nul; les idéaux bilatères premiers de cet anneau sont les idéaux bilatères maximaux. L'anertion (b) de la proposition résulte de ce que $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$ ne contient pas d'idéaux bilatères premiers « emboîtés » et distincts. Soient enfin $x_1, \ldots, x_n$ des générateurs du R-module sous-jacent à A; les images de ces générateurs dans $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$ engendrent le $(R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.R_\mathfrak{p})$-module sous-jacent à $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p}$; il en résulte la formule $[A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.A_\mathfrak{p} : R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.R_\mathfrak{p}] \leqq n$; ceci prouve (c).

COROLLAIRE 1. — *Les notations et les hypothèses sont celles de la proposition* 11. *Soient* $\mathfrak{p}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ *une chaine d'idéaux premiers de* R *et* $\mathfrak{P}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_i$ *une chaine d'idéaux bilatères premiers de* A *tels qu'on ait* $\mathfrak{P}_j \cap R = \mathfrak{p}_j$, $0 \leqq j \leqq i < n$. *Il existe une chaine* $\mathfrak{P}_i \subset \mathfrak{P}_{i+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_n$ *formée d'idéaux bilatères premiers de* A *tels qu'on ait* $\mathfrak{P}_k \cap R = \mathfrak{p}_k$ *pour* $i \leqq k \leqq n$.

Il résulte en effet de l'égalité $\mathfrak{P}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ que $A/\mathfrak{P}_i$ contient $R/\mathfrak{p}_i$ et en est une extension finie. D'après l'assertion (a) de la proposition 11, il existe donc un idéal bilatère premier $\mathfrak{Q}_{i+1}$ de $A/\mathfrak{P}_i$ tel qu'on ait

$$\mathfrak{Q}_{i+1} \cap (R/\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i.$$

L'image réciproque $\mathfrak{P}_{i+1}$ de $\mathfrak{Q}_{i+1}$ dans A est un idéal bilatère premier de A et satisfait à l'égalité $\mathfrak{P}_{i+1} \cap R = \mathfrak{p}_{i+1}$.

On construit $\mathfrak{P}_{i+2}$ à partir de $\mathfrak{P}_{i+1}$ comme on a construit $\mathfrak{P}_{i+1}$ à partir de $\mathfrak{P}_i$; la construction se poursuit par récurrence....

COROLLAIRE 2. — *Les notations et les hypothèses sont celles de la proposition* 11. *Si* M *est un* A*-module. nous dèsignons par* ρM *le* R*-module sous-jacent à* M. *La dimension de Krull de* M *est finie si et seulement si la dimension de Krull de* ρM *est finie. Dans ce dernier cas, ces deux dimensions sont égales.*

Soit en effet $\boldsymbol{C}$ (resp. $\boldsymbol{D}$) la sous-catégorie localisante de $\operatorname{mod} A$ (resp. de $\operatorname{mod} R$) qui est engendrée par M (resp. par ρM). On sait que $\boldsymbol{C}$ peut être engendrée par des modules $A/\mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P}$ est un idéal bilatère premier de A. De même, $\boldsymbol{D}$ peut être engendrée par les R-modules $\rho(A/\mathfrak{P})$, où $\mathfrak{P}$ parcourt les idéaux bilatères premiers de A tels qu'on ait $A/\mathfrak{P} \in \boldsymbol{C}$. On tire de là les formules suivantes :

$$\operatorname{K\,dim} M = \sup_{A/\mathfrak{P} \in \boldsymbol{C}} \operatorname{K\,dim} A/\mathfrak{P}, \qquad \operatorname{K\,dim} \rho M = \sup_{A/\mathfrak{P} \in \boldsymbol{C}} \operatorname{K\,dim} \rho(A/\mathfrak{P}).$$

Autrement dit, il suffit de démontrer le corollaire 2 lorsque M est de la forme $A/\mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P}$ est un idéal bilatère premier de A. Dans ce cas, l'annulateur du R-module nœthérien $\rho(A/\mathfrak{P})$ est $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. On sait qu'il en résulte l'égalité $\operatorname{K\,dim} \rho(A/\mathfrak{P}) = \operatorname{K\,dim} R/\mathfrak{p}$.

D'après le corollaire 3 de la proposition 7, il reste donc à prouver l'équivalence des assertions suivantes :

— Toute chaîne d'idéaux bilatères premiers de A contenant $\mathfrak{P}$ a au plus $n+1$ éléments.

— Toute chaîne d'idéaux premiers de R contenant $\mathfrak{p}$ a au plus $n+1$ éléments.

L'équivalence de ces assertions résulte du corollaire 1 et de l'assertion (b) de la proposition 11.

Nous dirons désormais que l'application $\mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{P} \cap R$ est l'application canonique de $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Sp}(\operatorname{mod} A)$ sur $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Sp}(\operatorname{mod} R)$. Si $\boldsymbol{D}$ est une sous-catégorie localisante de $\operatorname{mod} R$, nous désignons par $\rho^{-1}(\boldsymbol{D})$ la sous-catégorie localisante de $\operatorname{mod} A$ qui suit : un A-module M appartient à $\rho^{-1}(\boldsymbol{D})$ si et seulement si ρM appartient à $\boldsymbol{D}$. Le spectre de la catégorie $\rho^{-1}(\boldsymbol{D})$ est évidemment l'image réciproque de $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{D})$ pour l'application canonique de $\operatorname{Sp}(\operatorname{mod} A)$ sur $\operatorname{Sp}(\operatorname{mod} R)$. Le lecteur vérifiera la réciproque : une sous-catégorie localisante $\boldsymbol{C}$ de $\operatorname{mod} A$ est de la forme $\rho^{-1}(\boldsymbol{D})$ si et seulement si $\operatorname{Sp}(\boldsymbol{C})$ est l'image réciproque d'une partie de $\operatorname{Sp}(\operatorname{mod} R)$.

PROPOSITION 12. — *Soit A une extension finie d'un anneau R, commutatif et nœthérien. Soient $\boldsymbol{D}$ une sous-catégorie localisante de* $\operatorname{mod} R$ *et ρ le foncteur qui associe à tout A-module M le R-module sous-jacent à M. La sous-catégorie localisante* $\rho^{-1}(\boldsymbol{D})$ *de* $\operatorname{mod} A$ *est stable par enveloppes injectives.*

La preuve est analogue à celle de la proposition 10; nous n'en donnons qu'une esquisse : si $\mathfrak{P}$ est un idéal bilatère premier de A, on montre que l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{P}$ appartient à la sous-catégorie localisante engendrée par les modules $A/\mathfrak{Q}$, où $\mathfrak{Q}$ parcourt les idéaux bilatères premiers tels qu'on ait $\mathfrak{Q} \cap R = \mathfrak{P} \cap R$. Un A-module M appartient à cette sous-catégorie si et seulement si a_M est presque-nilpotent pour tout élément a de $\mathfrak{P} \cap R$. Finalement on montre que si I est un injectif indécomposable et a un

élément de R, l'homothétie a_l est soit bijective, soit presque nilpotente (*cf.* lemme 2, § 5).

COROLLAIRE — *Soit A un anneau satisfaisant aux hypothèses de la proposition* 12. *Si la dimension de Krull d'un A-module M est nulle, la dimension de Krull de son enveloppe injective est nulle.*

Le corollaire 2 de la proposition 9 s'applique donc à l'anneau A. Nous empruntons dans la suite les notations de ce corollaire. Par exemple, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R, $\hat{R}_\mathfrak{p}$ est le complété de $R_\mathfrak{p}$ pour la topologie $\mathfrak{p}.R_\mathfrak{p}$-adique.

Dans la proposition suivante, ΩR désigne l'ensemble des idéaux maximaux de R.

PROPOSITION 13. — *Soit A une extension finie d'un anneau R, commutatif et nœthérien. Lorque M parcourt les A-modules nœthériens, le foncteur $M \rightsquigarrow \hat{M}$ est isomorphe au foncteur $M \rightsquigarrow \prod_{\mathfrak{m} \in \Omega R} M \otimes_R \hat{R}_\mathfrak{m}$.*

Soit en effet M' un sous-module de M tel que M/M' soit de longueur finie. Alors $\rho(M/M')$ est un R-module nœthérien dont la dimension de Krull est nulle. Il s'ensuit que $\rho(M/M')$ est de longueur finie. Soit d'autre part $\mathfrak{a}$ un idéal de R tel que $R/\mathfrak{a}$ soit de longueur finie; alors $M/M.\mathfrak{a}$ est un A-module de longueur finie.

Il résulte de ces remarques que les A-sous-modules de M de colongueur finie définissent la même topologie que les R-sous-modules de colongueur finie. Il suffit donc de prouver que le complété de M pour cette dernière topologie est le produit $\prod_{\mathfrak{m} \in \Omega R} M \otimes_R \hat{R}_\mathfrak{m}$. Ceci est une proposition bien connue en algèbre commutative.

COROLLAIRE 1. — *Les notations et les hypothèses sont celles de la proposition* 13. *Si $Z(A)$ est le centre de A, le centre de $\hat{A}$ est l'anneau $\widehat{Z(A)}$.*

L'anneau $Z(A)$ est en effet un R-module de type fini. D'après la proposition précédente, $\widehat{Z(A)}$ est donc égal au produit $\prod_{\mathfrak{m} \in \Omega R} Z(A) \otimes_R \hat{R}_\mathfrak{m}$. Il reste à montrer que $Z(A) \otimes_R \hat{R}_\mathfrak{m}$ est le centre de $A \otimes_R \hat{R}_\mathfrak{m}$:

LEMME 3. — *Soit $u : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs avec éléments unité. Si S est R-plat* [15], *$Z(A) \otimes_R S$ est le centre de $A \otimes_R S$.*

Soient en effet $a_1, \ldots, a_r$ des générateurs de la R-algèbre A; soit $v_i : A \to A$ l'application définie par la formule $v_i(a) = a_i.a - a.a_i$, $1 \leqq i \leqq r$.

Le centre $Z(A)$ de A est l'intersection des noyaux $\operatorname{Ker} v_i$. Comme S est R-plat, il en résulte que $Z(A) \otimes_R S$ est l'intersection des noyaux des applications $v_i \otimes_R S$. Les formules $(v_i \otimes_R S)(x) = (a_i \otimes_R 1).x - x.(a_i \otimes_R 1)$ montrent que cette dernière intersection est le centre de $A \otimes_R S$.

Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $Z(A)$. Nous désignons par $(\operatorname{mod} A)_\mathfrak{p}$ la sous-catégorie localisante de $\operatorname{mod} A$ qui est définie de la façon suivante : un A-module M appartient à $(\operatorname{mod} A)_\mathfrak{p}$ si et seulement si a_M est presque-nilpotent pour tout élément a de $\mathfrak{p}$. De même, nous désignons par $(\operatorname{mod} A)_0$ la sous-catégorie localisante formée des A-modules dont la dimension de Krull est nulle.

COROLLAIRE 2. — *Les notations et les hypothèses sont celles de la proposition* 13. *L'application* $\mathfrak{m} \rightsquigarrow (\operatorname{mod} A)_\mathfrak{m}$ *est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de* $Z(A)$ *sur l'ensemble des composantes connexes de la catégorie localement finie* $(\operatorname{mod} A)_0$.

Soit en effet Z le centre de la catégorie $\boldsymbol{A} = (\operatorname{mod} A)_0$. Supposons l'anneau Z isomorphe au produit d'une famille d'anneaux $(Z_i)_{i \in I}$. Nous identifions alors Z à ce produit. Si e_i est l'élément unité de Z_i, nous désignons par $\boldsymbol{A}_i$ la sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{A}$ dont les objets sont les A-modules $M \in \boldsymbol{OA}$ tels qu'on ait $e_j(M) = 0$ pour $j \neq i$. Il est clair que la catégorie $\boldsymbol{A}$ est équivalente au produit des catégories $\boldsymbol{A}_i$. Autrement dit, il y a une correspondance biunivoque entre les décompositions de Z en produit d'anneaux et les décompositions de $\boldsymbol{A}$ en produit de catégories.

Or nous avons vu au paragraphe précédent que la catégorie $(\operatorname{mod} A)_0$ s'identifiait à la catégorie des modules à droite topologiques discrets sur l'anneau topologique $\hat{A}$. Si M est un A-module de dimension nulle, on définit en particulier une application bilinéaire $M \times \hat{A} \to M$ qui prolonge l'application bilinéaire définissant la structure de A-module de M; nous notons encore $m.a$ l'image de $(m.a) \in M \times \hat{A}$ pour cette application. Si a est un élément du centre de $\hat{A}$, nous notons a_M l'application A-linéaire $m \rightsquigarrow m.a$ de M dans M. Lorsque M varie, les applications $M \rightsquigarrow a_M$ définissent un isomorphisme du centre $\widehat{Z(A)}$ de $\hat{A}$ sur Z. Le corollaire 2 résulte de là et des remarques précédentes.

COROLLAIRE 3. — *Les notations et les hypothèses sont celles de la proposition* 13. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a. L'application $\mathfrak{P} \rightsquigarrow \mathfrak{P} \cap Z(A)$ *de* $\operatorname{Spec}(A)$ *sur* $\operatorname{Spec}(Z(A))$ *est bijective.*

b. Toute sous-catégorie localisante de $\operatorname{mod} A$ *est stable par enveloppes injectives.*

$(a) \Rightarrow (b)$: Cela résulte de la proposition 12.

$(b) \Rightarrow (a)$: Si toute sous-catégorie localisante de $\operatorname{mod} A$ est stable par enveloppes injectives, il en va de même *a fortiori* pour toute catégorie

quotient de $\mathrm{mod}\,A$. En particulier, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $Z(A)$, toute sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\,A_{\mathfrak{p}}$ est stable par enveloppes injectives.

Soit donc $\mathfrak{P}$ un idéal bilatère premier de A tel qu'on ait $\mathfrak{P} \cap Z(A) = \mathfrak{p}$; soit $\boldsymbol{C}$ la sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\,A_{\mathfrak{p}}$ qui est engendrée par $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{P}.A_{\mathfrak{p}}$; soit $\boldsymbol{D}$ la sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\,A_{\mathfrak{p}}$ qui est engendrée par les $A_{\mathfrak{p}}$-modules simples non annulés par $\mathfrak{P}$. Comme $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont stables par enveloppes injectives, la catégorie $(\mathrm{mod}\,A_{\mathfrak{p}})_0$ est équivalente au produit $\boldsymbol{C} \amalg \boldsymbol{D}$ (*cf.* la démonstration du corollaire du théorème 2, chap. IV). D'après le lemme 3, $(Z(A))_{\mathfrak{p}}$ est le centre de $A_{\mathfrak{p}}$. Il s'ensuit que la catégorie $\boldsymbol{D}$ est nulle (corollaire 2); ceci achève la preuve.

L'assertion (a) du corollaire 3 est par exemple satisfaite si la $Z(A)$-algèbre A vérifie les conditions équivalentes de la proposition 2. Elle est aussi satisfaite pour les ordres maximaux de l'arithmétique.

Nous terminons ce paragraphe par l'étude de l'anneau pseudo-compact associé à la catégorie localement finie $(\mathrm{mod}\,A)_0$. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de l'anneau commutatif R, nous désignons par $E_{\mathfrak{m}}$ l'enveloppe injective du R-module $R/\mathfrak{m}$. Nous désignons par E la somme directe des R-modules $E_{\mathfrak{m}}$ lorsque $\mathfrak{m}$ parcourt les idéaux maximaux de R.

Soient M un A-module à droite de longueur finie, a un élément de A et f une application R-linéaire de M dans E. Nous notons $a.f$ l'application R-linéaire de M dans E qui est définie par la formule suivante :

$$(a.f)(m) = f(m.a).$$

L'application $(a.f) \rightsquigarrow a.f$ définit une structure de A-module à gauche sur le groupe abélien $\mathrm{Hom}_R(M, E)$. Dans la suite, $\mathrm{Hom}_R(M, E)$ sera toujours muni de cette structure :

PROPOSITION 14. — *Soit A une extension finie d'un anneau R, commutatif et nœthérien. Soit E la somme directe des enveloppes injectives des R-modules $R/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ parcourt les idéaux maximaux de R. Le foncteur $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(M, E)$ définit une dualité entre les A-modules à droite de longueur finie et les A-modules à gauche de longueur finie.*

Soient $\boldsymbol{A}$ la catégorie des A-modules à droite de longueur finie, $\boldsymbol{B}$ la catégorie des A-modules à gauche de longueur finie. On voit comme dans la démonstration du corollaire 6 du théorème 4 (chap. IV) que $\mathrm{Hom}_R(M, E)$ est un R-module de longueur finie, *a fortiori* donc un A-module de longueur finie. Ceci montre que $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(M, E)$ est un foncteur contravariant de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$; ce foncteur sera noté T dans la suite de cette preuve.

Considérons maintenant un A-module à gauche de longueur finie N. On munit alors le grouge abélien $\mathrm{Hom}_R(N, E)$ d'une structure de A-module à droite : si a est un élément de A et g un élément de $\mathrm{Hom}_R(N, E)$, $g.a$ est défini par la formule $(g.a)(n) = g(a.n)$, On montre comme auparavant que $\mathrm{Hom}_R(N, E)$ est un A-module à droite de longueur finie; le foncteur $N \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(N, E)$ de $\boldsymbol{B}$ dans $\boldsymbol{A}$ sera noté S.

D'après la proposition 12 (chap. I), il suffit de prouver que les foncteurs $S \circ T$ et $T \circ S$ sont isomorphes respectivement aux foncteurs $I_{\boldsymbol{A}}$ et $I_{\boldsymbol{B}}$: si M est un objet de $\boldsymbol{A}$ et si m est un élément de M, nous notons m' l'application A-linéaire de $\mathrm{Hom}_R(M, E)$ dans E qui est définie par la formule

$$m'(f) = f(m).$$

Lorsque M varie, les applications $m \rightsquigarrow m'$ définissent un morphisme du foncteur identique $I_{\boldsymbol{A}}$ dans $S \circ T$. On voit comme dans la démonstration du corollaire 6 du théorème 4 (chap. IV), que l'application $m \rightsquigarrow m'$ est un isomorphisme de R-modules; comme cette application est A-linéaire, c'est aussi un isomorphisme de A-modules. Il s'ensuit que $I_{\boldsymbol{A}}$ est isomorphe à $S \circ T$. On prouverait de la même manière que $I_{\boldsymbol{B}}$ est isomorphe à $T \circ S$.

C. Q. F. D.

Il résulte de la proposition 13 que la topologie de $\hat{A}$ peut être définie par des idéaux bilatères $\mathfrak{a}$ de colongueur finie (i. e. le $\hat{A}$-module à droite et le $\hat{A}$-module à gauche sous-jacents à $\hat{A}/\mathfrak{a}$ sont de longueur finie). L'anneau topologique $\hat{A}$ est donc pseudo-compact à gauche et à droite. De plus, il est clair que la dualité que nous avons exhibée entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ se prolonge en une dualité entre $(\mathrm{mod}\, A)_0$ et la catégorie $PC(\hat{A})$ formée des $\hat{A}$-modules à gauche pseudo-compacts. D'où le

Corollaire 1. — *Les notations et les hypothèses sont celles de la proposition* 14. *L'anneau pseudo-compact associé à la catégorie des A-modules à droite de dimension de Krull nulle, est équivalent à l'anneau* $\hat{A}$. *L'anneau dual de* $\hat{A}$ *est donc équivalent à l'anneau opposé à* $\hat{A}$.

Corollaire 2. — *Les notations et les hypothèses sont celles de la proposition* 14. *Soient I un A-module à droite injectif indécomposable,* $\mathfrak{P}$ *l'idéal bilatère associé à I et* $\mathfrak{p}$ *l'intersection* $\mathfrak{P} \cap R$. *Alors I est un module à droite artinien sur l'anneau* $A_{\mathfrak{p}}$.

Soit en effet $\boldsymbol{C}$ la sous-catégorie localisante de $\mathrm{mod}\, A$ dont les objets nœthériens sont les A-modules à droite annulés par un élément de $R - \mathfrak{p}$. Comme I est $\boldsymbol{C}$-fermé, la structure de A-module de I se prolonge d'une façon et d'une seule en une structure de $A_{\mathfrak{p}}$-module à droite. Comme la catégorie quotient $\mathrm{mod}\, A/\boldsymbol{C}$ s'identifie à $\mathrm{mod}\, A_{\mathfrak{p}}$, I est un $A_{\mathfrak{p}}$-module injectif indécomposable (corollaire de la proposition 3). L'idéal bilatère premier associé à cet $A_{\mathfrak{p}}$-module injectif est $\mathfrak{P}.A_{\mathfrak{p}}$. Il en résulte que I est l'enveloppe injective d'un $A_{\mathfrak{p}}$-module simple; le corollaire de la proposition 12 montre donc que I est un $A_{\mathfrak{p}}$-module dont la dimension de Krull est nulle. Or la catégorie $(\mathrm{mod}\, A_{\mathfrak{p}})_0$ est duale de la catégorie des $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$-modules à gauche pseudo-compacts (corollaire 1). Comme $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ est un anneau nœthérien,

l'enveloppe projective d'un objet simple de $PC(\hat{A}_{\mathfrak{p}})$ est nœthérienne. Le corollaire 2 s'en déduit par dualité.

Nous laissons au lecteur le plaisir de continuer cette investigation. Il pourra en particulier rechercher les anneaux pseudo-compacts associés aux catégories $(\operatorname{mod} A)_{n+1}/(\operatorname{mod} A)_n$. Il pourra anssi en rechercher les composantes connexes.

7. **La dimension de Krull de quelques anneaux.** — Si A est un anneau nœthérien à droite, nous appelons *dimension de Krull à droite de* A la dimension de Krull de la catégorie $\operatorname{mod} A$. Si G est un anneau gradué, nous disons que G est un anneau gradué nœthérien à droite si toute suite croissante d'idéaux à droite homogènes est stationnaire; nous appelons *dimension de Krull à droite de l'anneau gradué* G la dimension de Krull de la catégorie abélienne des modules gradués sur l'anneau gradué G :

— Un objet de cette catégorie est un G-module gradué dont l'ensemble sous-jacent appartient à l'univers $\mathfrak{U}$.

— Si M et N sont deux objets de la catégorie, un morphisme de M dans N est une application G-linéaire, homogène, de degré o de M dans N.

— La composition des morphismes coïncide avec la composition usuelle des applications.

PROPOSITION 15. — *Soit A un anneau filtré par une suite décroissante de sous-groupes abéliens $A_n (n \gtrless 0)$ tels qu'on ait $A_m . A_n \subset A_{m+n}$. On suppose que A est la réunion des A_n et que A est séparé et complet pour la topologie définie par les A_n.*

a. Si l'anneau gradué associé

$$G(A) = \ldots \oplus A_{-1}/A_{-2} \oplus A_0/A_{-1} \oplus A_1/A_0 \oplus \ldots$$

est nœthérien à droite, l'anneau A est nœthérien à droite Si tout idéal à droite homogène de $G(A)$ est engendré par moins de r éléments homogènes, tout idéal à droite de A est engendré par moins de r éléments.

b. Si l'anneau gradué $G(A)$ est nœthérien à droite et a une dimension de Krull à droite inférieure à n, alors A est nœthérien à droite et a une dimension de Krull à droite inférieure à n.

Pour démontrer (a) et (b), on s'appuie sur les lemmes suivants qui sont bien connus :

LEMME 1. — *Soient M et N deux groupes abéliens filtrés par des suites décroissantes de sous-groupes M_n et $N_n (n \gtrless 0)$. On suppose que la réunion des M_n (resp. des N_n) est égale à M (resp. à N), que l'intersection des M_n (resp. des N_n) est nulle et que M_n est complet pour la topologie définie par les M_n. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de groupes filtrés. Si f induit une surjection des gradués associés, alors f est une surjection et N est*

complet pour la topologie définie par les N_n. Si f induit une injection des gradués associés, alors f est une injection.

LEMME 2. — *Supposons vérifiées les hypothèses de la proposition* 15. *Soit M un A-module muni d'une filtration par des sous-groupes abéliens $M_n (n \gtrless 0)$, tels qu'on ait $M_m . A_n \subset M_{m+n}$. On suppose que la réunion des M_n est égale à M, que leur intersection est nulle et que $G(M)$ est un $G(A)$-module gradué engendré par r éléments homogènes. Alors M est engendré par des représentants des générateurs homogènes de $G(M)$ et M est complet.*

Démontrons maintenant (a) : si I est un idéal à droite de A, nous munirons I de la filtration définie par les $\mathrm{I} \cap A_n$. Alors $G(\mathrm{I})$ est un idéal à droite homogène de $G(A)$ et il suffit d'appliquer les lemmes précédents. Nous voyons aussi que I est complet pour la filtration induite par celle de A.

Pour montrer (b), il suffit de prouver qu'on a $\mathrm{K\,dim}\, M \leqq n$ quand M est un A-module à droite de la forme A/I, où I est un idéal à droite. Il suffit donc manifestement de démontrer le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soit M un A-module à droite filtré satisfaisant aux conditions du lemme* 2. *On a alors* $\mathrm{K\,dim}\, M \leqq \mathrm{K\,dim}\, G(M)$.

Nous procéderons par récurrence sur $\mathrm{K\,dim}\, G(M)$: l'assertion est vraie si $\mathrm{K\,dim}\, G(M) = -1$. Supposons-la vraie si $\mathrm{K\,dim}\, G(M) < m$ et montrons-la si $\mathrm{K\,dim}\, G(M) = m$:

Sinon, il existerait une suite infinie de sous-modules $M \supset M^1 \supset M^2 \supset \ldots$ tels qu'on ait $\mathrm{K\,dim}\,(M^i/M^{i+1}) \geqq m$. Munissant les M^i de la filtration induite par celle de M et les M^i/M^{i+1} de la filtration quotient de celle de M^i, on en déduirait que la dimension de Krull de $G(M^i/M^{i+1}) = G(M^i)/G(M^{i+1})$ est supérieure ou égale à m. Le module gradué $G(M)$ aurait donc une suite infinie de sous-modules gradués dont les quotients successifs ont une dimension de Krull supérieure ou égale à m; ceci est contraire à l'hypothèse de récurrence et au caractère nœthérien de $G(M)$.

C. Q. F. D.

Soient maintenant A un anneau, σ un automorphisme de A et $A_\sigma[T]$ l'anneau des polynômes de Hilbert en T relativement à σ : cet anneau est formé des polynômes $a_0 + T.a_1 + T^2.a_2 + \ldots + T^r.a_r$, à coefficients dans A, avec l'addition usuelle; on impose par contre les relations de commutation $a.T = T.\sigma(a)$ si $a \in A$.

COROLLAIRE 1. — *Soit σ un automorphisme de l'anneau A. Si A est nœthérien à droite, alors $A_\sigma[T]$ est nœthérien à droite. Si A est nœthérien à droite et a une dimension de Krull à droite finie et égale à n, alors la dimension de Krull à droite de $A_\sigma[T]$ est égale à $n+1$.*

Nous munissons l'anneau $B = A_\sigma[T]$ de la filtration suivante : B_n est nul si $n > 0$; si n est un entier positif, B_{-n} est formé des polynômes de Hilbert

de degré $\leqq n$. Dans ce cas, l'anneau sous-jacent à l'anneau gradué $G(B)$ peut être identifié à B, $G_{-n}(B)$ étant identifié à l'ensemble des monômes de degré n ($n \geqq 0$). Modulo cette identification, les idéaux à droite homogènes $\mathfrak{a}$ de $G(B)$ sont de la forme

$$\mathfrak{a}_0 \oplus T.\mathfrak{a}_1 \oplus T^2.\mathfrak{a}_2 \oplus T^3.\mathfrak{a}_3 \oplus \ldots \oplus T^i.\mathfrak{a}_i,$$

où $\mathfrak{a}_i$ est un idéal à droite de A tel qu'on ait

$$\ldots \supset \sigma^{-i}(\mathfrak{a}_i) \supset \ldots \supset \sigma^{-1}(\mathfrak{a}_1) \supset \mathfrak{a}_0.$$

Si A est nœthérien à droite, il en résulte que $\sigma^{-i}(\mathfrak{a}_i)$ est égal à $\sigma^{-i-1}(\mathfrak{a}_{i+1})$ pour i assez grand. Il existe donc un entier n tel qu'on ait $\sigma(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}_{i+1}$ pour $i \geqq n$; il s'ensuit que $\mathfrak{a}$ est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes de degré inférieur ou égal à n. Par conséquent, l'anneau gradué $G(B)$ est nœthérien à droite et B est nœthérien à droite.

Supposons maintenant qu'on ait $\operatorname{Kdim} A = n$. Si M est un A-module, nous munissons le $G(B)$-module $M \otimes_A G(B)$ de la graduation évidente : les éléments de degré r de $M \otimes_A G(B)$ sont de la forme $m \otimes_A T^r$, $m \in M$. Nous prouvons d'abord le

LEMME 4. — *Soit M un A-module non nul de dimension de Krull finie n. La dimension de Krull du $G(B)$-module gradué $M \otimes_A G(B)$ est alors égale à $n+1$.*

Nous démontrons ce lemme par récurrence sur n. Comme A est supposé nœthérien à droite, il suffit d'établir la preuve lorsque M est nœthérien. Nous désignons par $\boldsymbol{A}$ la catégorie des $G(B)$-modules gradués et nous utilisons les notations du chapitre IV (§ 1) :

Si M est simple et si x est un élément non nul de M, les seuls sous-modules gradués de $M \otimes_A G(B)$ sont engendrés par les $x \otimes_A T^r$, $r \geqq 0$. Il s'ensuit que l'image de $M \otimes_A G(B)$ dans la catégorie quotient $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_0$ est un objet simple. Si M est de longueur finie, soit $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_s = M$ une suite de Jordan-Hölder de M. Les modules gradués $M_i \otimes_A G(B)$ définissent alors une suite de composition de $M \otimes_A G(B)$ dont les quotients ont 1 pour dimension de Krull. Il en résulte que $M \otimes_A G(B)$ a 1 pour dimension de Krull.

Supposons maintenant le lemme démontré lorsqu'on a $n < m$ et prouvons-le lorsque n est égal à m : pour cela nous considérons $M \otimes_A G(B)$ comme un objet de la catégorie quotient $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_{m-1}$. Si M est un objet simple de la catégorie quotient $\operatorname{mod} A/(\operatorname{mod} A)_{m-1}$, les seuls sous-objets de $M \otimes_A G(B)$ dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_{m-1}$ sont les sous-modules gradués qui sont engendrés par $M \otimes_A T^r$, $r \geqq 0$. Il en résulte que l'image de $M \otimes_A G(B)$ dans $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_m$ est simple. Enfin, si M est un A-module nœthérien tel qu'on ait $\operatorname{Kdim} M = n$, l'image de M dans $\operatorname{mod} A/(\operatorname{mod} A)_{n-1}$ est de longueur finie. En utilisant des suites de composition de M, on montre comme plus haut que la dimension de Krull de $M \otimes_A G(B)$ vaut $n+1$.

Le lemme 4 montre en particulier que la dimension de Krull de l'anneau gradué $G(B)$ est $n+1$. Il en résulte que la dimension de Krull de B est inférieure ou égale à $n+1$ (proposition 15). Comme la suite décroissante des idéaux à droite T^rB est infinie et que la dimension de Krull de $T^r.B/T^{r+1}.B$ est manifestement égale à n, on a aussi l'inégalité $\mathrm{Kdim}\ B \geqq n+1$. D'où le corollaire.

COROLLAIRE 2. — *Soient k un corps commutatif et $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie : $[\mathfrak{g} : k] < +\infty$. L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ est un anneau nœthérien (à gauche et à droite) dont la dimension de Krull (à gauche et à droite) est inférieure ou égale à $[\mathfrak{g} : k]$.*

Soit en effet U cette algèbre enveloppante et soit U_{-n} le sous-espace vectoriel de U engendré par 1 et les produits de la forme $g_1.g_2 \dots g_m$, $0 \leqq n$, $m \leqq n$, $g_i \in \mathfrak{g}$. On sait que l'anneau gradué associé à U est un anneau de polynômes en $[\mathfrak{g} : k]$ indéterminés. Le corollaire résulte de ce fait et de la proposition 15.

CHAPITRE VI.

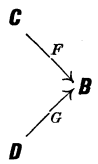
Applications à l'étude des faisceaux quasi cohérents.

Nous voulons étudier ici les faisceaux quasi cohérents injectifs sur un préschéma nœthérien [12]. Chaque fois que nous parlerons d'un préschéma $(X, \mathcal{O}_X)$, il sera sous-entendu que l'ensemble sous-jacent à X et l'espace étalé associé à $\mathcal{O}_X$ sont des éléments de l'univers $\mathfrak{U}$. Chaque fois que nous parlerons d'un $\mathcal{O}_X$-module M, il sera sous-entendu que M est quasi cohérent et que l'espace étalé associé à M est un élément de $\mathfrak{U}$. Nous désignons par $\boldsymbol{F}_X$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules ; avec nos conventions, $\boldsymbol{F}_X$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie abélienne avec limites inductives exactes.

Nous montrons dans le premier paragraphe que $\boldsymbol{F}_X$ peut être obtenue en « recollant » des catégories de modules. La suite est consacrée aux propriétés des catégories de modules qui sont conservées par « recollement ».

1. Recollement de catégories abéliennes. — Considérons le diagramme

$(*)$



où $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des *catégories abéliennes* et où F et G sont des *foncteurs exacts*. Nous appelons *recollement de $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ le long de $\boldsymbol{B}$* et nous désignons par $\boldsymbol{C} \prod_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{D}$ la catégorie suivante :

— Un objet de $\mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$ est un triplet (C, D, σ) tel que C soit un objet de $\mathbf{C}$, D un objet de $\mathbf{D}$ et σ un isomorphisme de FC sur GD. On dit parfois que (C, D, σ) est une *donnée de recollement*.

— Si (C', D', σ') et (C, D, σ) sont deux objets, un morphisme du premier dans le second est un couple (u, v) tel que u soit un morphisme de C' dans C, v un morphisme de D' dans D; on impose en outre l'égalité

$$\sigma \circ (Fu) = (Gv) \circ \sigma'.$$

— La composition des morphismes est définie par la formule

$$(u', v') \circ (u, v) = (u' \circ u, v' \circ v).$$

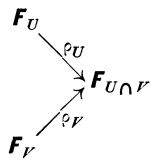
Les hypothèses que nous avons faites entraînent que $\mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$ est une catégorie abélienne et que les foncteurs $(C, D, \sigma) \rightsquigarrow C$ et $(C, D, \sigma) \rightsquigarrow D$ sont exacts. On dira que ces foncteurs sont les projections canoniques de $\mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$ sur $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$. La notation $\mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$ est justifiée par l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient $\mathbf{A}$ une catégorie, $S : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ et $T : \mathbf{A} \to \mathbf{D}$ deux foncteurs tels que $F \circ S$ soit isomorphe à $G \circ T$. Il existe alors un foncteur $R : \mathbf{A} \to \mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$, unique à isomorphisme près, tel que S et T soient isomorphes aux composés de R et des projections canoniques de $\mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$.*

Soit τ un isomorphisme fonctoriel de $F \circ S$ sur $G \circ T$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la proposition 1 est satisfaite si l'on prend pour R le foncteur $A \rightsquigarrow (FA, GA, \tau(A))$. Si l'on considère $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$ comme des objets de la catégorie $\mathbf{E}$ du chapitre I (§ 8), et si l'on remplace F et G par les classes d'isomorphisme de ces foncteurs, la proposition 1 implique que $\mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$ est le produit fibré du diagramme (★). Ceci montre en particulier que la proposition 1 détermine la catégorie $\mathbf{C}\prod_{\mathbf{B}}\mathbf{D}$ à une équivalence près.

Considérons maintenant un préschéma $(X, \mathcal{O}_X)$ et soient U et V deux ouverts recouvrant X. Si M (resp. N) est un $(\mathcal{O}_X | U)$-module [resp. un $(\mathcal{O}_X | V)$-module], alors $F | U \cap V$ (resp. $G | U \cap V$) est un $(\mathcal{O}_X | U \cap V)$-module; nous désignons par ρ_U (resp. par ρ_V) le foncteur restriction $M \rightsquigarrow M | U \cap V$ (resp. $N \rightsquigarrow N | U \cap V$). On a donc le diagramme (★★) :

(★★)



Si P est un $\mathcal{O}_X$-module, les faisceaux $(P | U) | U \cap V$, $P | U \cap V$ et $(P | V) | U \cap V$ coïncident évidemment; si σ_P est le morphisme identique de $P | U \cap V$, le triplet $(P | U, P | V, \sigma_P)$ est donc une donnée de recollement.

PROPOSITION 2. — *Soient U et V deux ouverts d'un préschéma X tels qu'on ait $U \cup V = X$. Le foncteur $P \rightsquigarrow (P | U, P | V, \sigma_P)$ définit une équivalence entre $\boldsymbol{F}_X$ et le recollement de $\boldsymbol{F}_U$ et $\boldsymbol{F}_V$ le long de $\boldsymbol{F}_{U \cap V}$.*

La proposition 2 résulte directement de la proposition 12 (chap. 1) (*cf.* aussi [12], prop. 0.3.3).

PROPOSITION 3. — *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un préschéma et U un ouvert de X tel que l'injection canonique $j : U \to X$ soit un morphisme quasi compact. Soit T le foncteur qui associe à tout $\mathcal{O}_X$-module M la restriction $M | U$ de M au préschéma $(U, \mathcal{O}_X | U)$. Le foncteur T définit par passage au quotient une équivalence entre les catégories $\boldsymbol{F}_X/\mathrm{Ker}\ T$ et $\boldsymbol{F}_U$.*

Désignons en effet par $j_*(N)$ l'image directe dans X d'un $(\mathcal{O}_X | U)$-module N. D'après la proposition 9.4.2 de [12], $j_*(N)$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi cohérent; il s'ensuit que $S : G \rightsquigarrow j_*(G)$ est un foncteur adjoint à T. L'assertion résulte donc de la proposition 5 (chap. III).

Les propositions 2 et 3 seront utilisées de la façon suivante : si X est un préschéma nœthérien, X est la réunion d'une suite finie d'ouverts affines $X_1, X_2, \ldots, X_n$. La catégorie $\boldsymbol{F}_{X_1 \cup X_2}$ est alors équivalente au recollement de $\boldsymbol{F}_{X_1}$ et $\boldsymbol{F}_{X_2}$ le long d'une même catégorie quotient $\boldsymbol{F}_{X_1 \cap X_2}$. Autrement dit, $\boldsymbol{F}_{X_1 \cap X_2}$ est équivalente au recollement de deux catégories de modules le long d'une catégorie quotient « commune ». De même, $\boldsymbol{F}_{X_1 \cup X_2 \cup X_3}$ est équivalente au recollement de $\boldsymbol{F}_{X_1 \cup X_2}$ et d'une catégorie de modules $\boldsymbol{F}_{X_3}$ le long d'une catégorie quotient « commune » $\boldsymbol{F}_{(X_1 \cup X_2) \cap X_3}$. On continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'on aboutisse à $\boldsymbol{F}_X$; cette catégorie est donc obtenue par « recollements successifs » de catégories de modules.

2. Propriétés d'un recollement de catégories abéliennes. — Nous conservons les notations du paragraphe 1.

LEMME 1. — *Soit T le foncteur $(C, D, \sigma) \rightsquigarrow D$. On suppose que* Ker F *est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{C}$ et que F définit par passage au quotient une équivalence $\mathbf{C}/\mathrm{Ker}\ F$ et $\mathbf{B}$. Le foncteur $M \rightsquigarrow (M, o, o)$ est alors un isomorphisme de* Ker F *sur* Ker T, Ker T *est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{C} \prod_{\mathbf{B}} \mathbf{D}$ et T définit par passage au quotient une équivalence entre $\mathbf{C} \prod_{\mathbf{B}} \mathbf{D}/\mathrm{Ker}\ T$ et $\mathbf{D}$.*

Soient en effet H un foncteur adjoint à F, χ un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(.,\ H.)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F.,\ .)$ et X le morphisme de $F \circ H$ sur $I_{\mathbf{B}}$ qui est associé à χ (*cf.* chap. I, § 7); on sait que X est un isomorphisme fonctoriel. Si S désigne le foncteur $D \rightsquigarrow (HGD,\ D,\ X(GD))$, $T \circ S$ est le foncteur identique de $\mathbf{D}$. Les morphismes identiques 1_D définissent donc un isomorphisme fonctoriel Φ de $T \circ S$ sur $I_{\mathbf{D}}$. Cet isomorphisme Φ fait de S un foncteur adjoint à T et le lemme résulte de la proposition 5 (chap. III).

LEMME 2. — *On suppose que* Ker F (*resp.* Ker G) *est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{C}$ (resp de $\mathbf{D}$) et que F (resp. G) définit par passage au quotient une équivalence entre $\mathbf{C}/\mathrm{Ker}\ F$ et $\mathbf{B}$ (resp. entre $\mathbf{D}/\mathrm{Ker}\ G$ et $\mathbf{B}$). Si les catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont localement nœthériennes, il en va de même pour $\mathbf{C} \prod_{\mathbf{B}} \mathbf{D}$.*

Il est en effet clair que $\mathbf{C} \prod_{\mathbf{B}} \mathbf{D}$ est une $\mathfrak{U}$-catégorie avec limites inductives exactes. Si (C', D', σ') est un sous-objet propre de (C, D, σ), montrons qu'il existe un sous-objet nœthérien de (C, D, σ) qui n'est pas contenu dans (C', D', σ'). Pour cela on peut supposer C' différent de C. Il existe alors un sous-objet nœthérien C'' de C qui n'est pas contenu dans C'. Il reste donc à « relever » FC' en un sous-objet nœthérien de $\mathbf{D}$.

Il reste à prouver qu'il existe un ensemble appartenant à $\mathfrak{U}$ et ayant même puissance que l'ensemble des types d'objets nœthériens de $\mathbf{C} \prod_{\mathbf{B}} \mathbf{D}$; cela résulte des propriétés correspondantes de $\mathbf{C}$ et de $\mathbf{D}$; nous en laissons la preuve au lecteur.

Supposons toujours vérifiées les hypothèses du lemme 2 et utilisons les notations introduites dans la preuve du lemme 1. Si I est un objet injectif

indécomposable de $\boldsymbol{D}$, SI est un objet injectif indécomposable de $\boldsymbol{C}\prod_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{D}$. L'application $I \rightsquigarrow SI$ induit une injection de $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{D})$ dans $\mathrm{Sp}\left(\boldsymbol{C}\prod_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{D}\right)$. Conformément aux conventions du chapitre IV, nous identifions $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{D})$ à l'image de cette injection. Nous identifions de même $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{B})$ et $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$ à des parties de $\mathrm{Sp}\left(\boldsymbol{C}\prod_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{D}\right)$. Le lemme 1 et les remarques du chapitre IV (§ 1) montrent que $\mathrm{Sp}\left(\boldsymbol{C}\prod_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{D}\right)$ est la réunion des parties disjointes $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{D})$ et $\mathrm{Sp}(\mathrm{Ker}\,T)$. Comme $\mathrm{Sp}(\mathrm{Ker}\,T)$ coïncide avec $\mathrm{Sp}(\mathrm{Ker}\,F)$ et est contenu dans $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$, on voit que $\mathrm{Sp}\left(\boldsymbol{C}\prod_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{D}\right)$ est la réunion de $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$ et de $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{D})$. Comme $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{D})$ est la réunion de $\mathrm{Sp}(\mathrm{Ker}\,G)$ et de $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{B})$, on voit que $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{B})$ est l'intersection de $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$ et de $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{D})$; on a donc les formules

$$(\star\star\star)\qquad \mathrm{Sp}\left(\boldsymbol{C}\prod_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{D}\right)=\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})\cup\mathrm{Sp}(\boldsymbol{D}),\qquad \mathrm{Sp}(\boldsymbol{B})=\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})\cap\mathrm{Sp}(\boldsymbol{D}).$$

THÉORÈME 1. — *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un préschéma nœthérien. On a les assertions suivantes :*

a. La catégorie $\boldsymbol{F}_X$ est localement nœthérienne.

b. Le support Supp (I) *d'un $\mathcal{O}_X$-module injectif indécomposable est une partie fermée irréductible de X. Tout $\mathcal{O}_X$-sous-module non nul de I a même support que I.*

c. L'application $I \rightsquigarrow$ supp (I) induit une bijection du spectre de la catégorie $\boldsymbol{F}_X$ sur l'ensemble des parties irréductibles fermées de X.

Lorsque X est le schéma affine associé à un anneau nœthérien, le théorème résulte de la proposition 8 et du corollaire 2 de la proposition 14 du chapitre V. D'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe 1, il suffit donc de prouver que le théorème est vrai pour X s'il est vérifié pour deux ouverts U et V de X tels que $X = U \cup V$. Dans ce cas nous identifions $\boldsymbol{F}_X$, $\boldsymbol{F}_U$, $\boldsymbol{F}_V$, $\boldsymbol{F}_{U\cap V}$, ρ_U et ρ_V respectivement à $\boldsymbol{C}\prod_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, F et G (*cf.* proposition 2). L'assertion (a) est alors une conséquence immédiate du lemme 2.

Prouvons l'assertion (b) : Si I est un $\mathcal{O}_X$-module injectif indécomposable, trois cas sont possibles :

— I appartient à $\mathrm{Sp}(\mathrm{Ker}\, T)$; autrement dit, I contient un $\mathcal{O}_X$-sous-module non nul dont le support est contenu dans $V' = X - V$. Il s'ensuit que I appartient à $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{C})$, autrement dit est isomorphe à l'image directe d'un $(\mathcal{O}_X | U)$-module injectif indécomposable J. Comme U satisfait au théorème, le support de J est une partie fermée irréductible contenue dans V'. Le support de I coïncide par conséquent avec le support de J; l'assertion (b) en découle.

— I contient un $\mathcal{O}_X$-sous-module non nul dont le support est contenu dans $U' = X - U$. Un raisonnement analogue au raisonnement précédent montre alors que le support de I est une partie fermée irréductible contenue dans U'.

— I appartient à $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{B})$; autrement dit, le support de tout $\mathcal{O}_X$-sous-module non nul de I rencontre $U \cap V$. Si j est l'injection canonique de $U \cap V$ dans X, I est alors isomorphe à l'image directe $j_*(K)$ d'un $(\mathcal{O}_X | U \cap V)$-module injectif indécomposable K. Comme l'image directe de K dans V coïncide avec $j_*(K) | V$ et est un $(\mathcal{O}_X | V)$-module injectif indécomposable, le support de $I | V$ est une partie fermée irréductible de V; de plus, tout sous-module non nul de $I | V$ a même support que $I | V$. Pour la même raison, le support de $I | U$ est fermé et irréductible et tout sous-module non nul de $I | U$ a même support que $I | U$. L'assertion (b) en résulte.

L'assertion (c) enfin résulte de la classification que nous venons de faire et du fait que toute partie fermée irréductible de X est l'adhérence d'une partie fermée irréductible de U ou de V.

Revenons-en maintenant au diagramme ($\bigstar$), et soient R et T les projections canoniques de $\boldsymbol{C} \prod_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{D}$ sur $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$. Nous supposons que les catégories $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont localement nœthériennes, que les hypothèses du lemme 2 sont vérifiées et que *les sous-catégories localisantes* $\mathrm{Ker}\, F$ *et* $\mathrm{Ker}\, G$ *sont stables par enveloppes injectives*. Il s'ensuit que les sous-catégories $\mathrm{Ker}\, T$ et $\mathrm{Ker}\, R$ de $\boldsymbol{C} \prod_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{D}$ sont stables par enveloppes injectives et qu'une donnée de recollement (I, J, σ) est un objet injectif de $\boldsymbol{C} \prod_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{D}$ si et seulement si I et J sont des objets injectifs de $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$. Nous nous proposons de rechercher les sous-catégories localisantes de $\boldsymbol{C} \prod_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{D}$; si $\boldsymbol{C}'$ (resp. $\boldsymbol{D}'$) est une sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{C}$ (resp. de $\boldsymbol{D}$), nous désignons pour cela par $F\boldsymbol{C}'$ (resp.

par $G\mathcal{D}'$) la plus petite sous-catégorie localisante de $\mathcal{B}$ qui contienne les objets FC (resp. GD), lorsque C (resp. D) parcourt les objets de $\mathcal{C}'$ (resp. de $\mathcal{D}'$).

LEMME 3. — *Soient $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}'$ des sous-catégories localisantes de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ telles que $F\mathcal{C}' = G\mathcal{D}'$. Avec les hypothèses ci-dessus, $\mathcal{C}' \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}'$ est une sous-catégorie localisante de $\mathcal{C} \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$ et toute sous-catégorie localisante est de ce type. Si $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}'$ sont stables par enveloppes injectives, il en va de même pour $\mathcal{C}' \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}'$.*

Il est clair que la catégorie $\mathcal{C}' \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}'$ est « contenue » dans $\mathcal{C} \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$. Nous nous contenterons de montrer que toute sous-catégorie localisante $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C} \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$ est de la forme $\mathcal{C}' \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}'$: pour cela, soit $K = (I, J, \tau)$ un injectif ne contenant aucun sous-objet non nul de $\mathcal{A}$; soit $E = (C, D, \sigma)$ un objet quelconque de $\mathcal{C} \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$. Nous allons d'abord montrer que l'application canonique de $\mathrm{Hom}(E, K)$ dans $\mathrm{Hom}(C, I)$ est surjective : soit en effet J' le plus grand sous-objet de J annulé par G; comme $\mathrm{Ker}\, G$ est stable par enveloppes injectives, J est la somme directe de J' et d'un objet injectif J'' tel que $GJ'' = GJ$; il s'ensuit que, pour tout $f : C \to I$, $\tau \circ Ff \circ \sigma^{-1}$ se relève en un morphisme de D dans J'', donc aussi en un morphisme g de D dans J; autrement dit, f est l'image du morphisme $(f, g) : E \to K$.

Soient donc $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}'$ les sous-catégories localisantes de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ formées des objets C et D tels que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, I) = 0$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, J) = 0$ lorsque (I, J, τ) parcourt les objets injectifs ne contenant aucun sous-objet non nul de $\mathcal{A}$. Ce qui précède implique que $\mathrm{Hom}(E, K)$ est nul si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, I)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, J)$ sont nuls.

Autrement dit, (C, D, σ) appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si C et D appartiennent à $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{D}'$, i.e. si et seulement si (C, D, σ) appartient à $\mathcal{C}' \prod_{\mathcal{B}} \mathcal{D}'$.

Ceci achève la preuve du lemme.

Soit de nouveau $(X, \mathcal{O}_X)$ un préschéma nœthérien. Si R est la réunion d'une famille de parties fermées de X, nous désignons par $\mathrm{Cat}\, R$ la sous-

catégorie pleine de $\boldsymbol{F}_X$ formée des $\mathcal{O}_X$-modules dont le support est contenu dans R.

PROPOSITION 4 :

a. Toute sous-catégorie localisante de $\boldsymbol{F}_X$ est stable par enveloppes injectives.

b. L'application $R \rightsquigarrow \mathrm{Cat}\, R$ est une bijection de l'ensemble des parties de X qui sont réunion de parties fermées sur l'ensemble des sous-catégories localisantes de $\boldsymbol{F}_X$.

Lorsque X est le schéma affine associé à un anneau nœthérien, la proposition découle de la proposition 10 et du corollaire 1 de la proposition 7 du chapitre V. D'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe 1, il suffit donc de prouver que la proposition est vraie pour X si elle est vérifiée pour deux ouverts U et V de X tels que $U \cup V = X$. Ce dernier point résulte du lemme 3.

Revenons une dernière fois au diagramme (★), et supposons vérifiées les hypothèses du lemme 2. Si φ est un élément du centre $Z[\boldsymbol{C}]$ de $\boldsymbol{C}$, il est clair qu'il existe un et un seul élément $F\varphi$ de $Z[\boldsymbol{B}]$ tel qu'on ait $(F\varphi)(FC) = F(\varphi(C))$ pour tout objet C de $\boldsymbol{C}$. L'application $\varphi \rightsquigarrow F\varphi$ est un homomorphisme d'anneaux de $Z[\boldsymbol{C}]$ dans $Z[\boldsymbol{B}]$. On définit de façon analogue un homomorphisme $\psi \rightsquigarrow G\psi$ de $Z[\boldsymbol{D}]$ dans $Z[\boldsymbol{B}]$.

Si φ et ψ sont des éléments de $Z[\boldsymbol{C}]$ et $Z[\boldsymbol{D}]$ tels que $F\varphi = G\psi$, les morphismes $(\varphi(C), \psi(D)) : (C, D, \sigma) \to (C, D, \sigma)$ définissent évidemment un élément $\varphi \coprod_{\boldsymbol{B}} \psi$ du centre de $\boldsymbol{C} \coprod_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{D}$. En outre il est clair que l'application

$(\varphi, \psi) \rightsquigarrow \varphi \coprod_{\boldsymbol{B}} \psi$ est une bijection du produit fibré $Z[\boldsymbol{C}] \coprod_{Z[\boldsymbol{B}]} Z[\boldsymbol{D}]$ sur $Z\left[\boldsymbol{C} \coprod_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{D}\right]$.

Ce qui précède et le fait que le centre d'un anneau A s'identifie au centre de la catégorie mod A entraînent « par recollement » le résultat suivant : soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un préschéma nœthérien, z une section de $\mathcal{O}_X$ sur X, M un $\mathcal{O}_X$-module et z_M l'endomorphisme de M défini par z; les applications $z \rightsquigarrow z_M$ définissent alors un isomorphisme de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ sur le centre de la catégorie $\boldsymbol{F}_X$.

3. **Préschémas et catégories abéliennes.** — Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un préschéma nœthérien. Nous allons voir que la donnée, à une équivalence près, de la catégorie $\boldsymbol{F}_X$ permet de reconstruire le préschéma $(X, \mathcal{O}_X)$; pour cela, nous dirons qu'une sous-catégorie localisante $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{F}_X$ est *finie* s'il existe un objet

nœthérien M tel que $\boldsymbol{A}$ soit la plus petite sous-catégorie localisante contenant M; il revient au même de dire que $\boldsymbol{A}$ est de la forme Cat R, où R est une partie fermée de X.

Le théorème 1 établit une correspondance biunivoque entre X et le spectre $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{F}_X)$ de $\boldsymbol{F}_X$. Dans cette correspondance, les ouverts correspondent aux spectres $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{A})$, où $\boldsymbol{A}$ parcourt les sous-catégories localisantes *finies* de $\boldsymbol{F}_X$. De façon précise, l'ouvert U correspond à $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{A}(U))$ si $\boldsymbol{A}(U)$ désigne la sous-catégorie formée des $\mathcal{O}_X$-modules dont le support ne rencontre pas U.

Les ensembles $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{A})$ définissant sur $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{F}_X)$ une structure d'espace topologique, il reste à munir cet espace topologique d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$: d'après la fin du paragraphe 2, on peut prendre $Z[\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{A}]$ comme anneau des sections de $\mathcal{O}$ sur $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{A})$. Si $\boldsymbol{A}$ est contenu dans $\boldsymbol{B}$, le foncteur canonique de $\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{B}$ induit un homomorphisme de $Z[\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{A}]$ dans $Z[\boldsymbol{F}_X/\boldsymbol{B}]$ (*cf.* § 2); c'est cet homomorphisme qui est choisi pour homomorphisme restriction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Auslander (M.) and Goldman (O.). — The Brauer group of a commutative ring, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 97, 1960, p. 367-409.

[2] Azumaya (Gorô). — Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, *Nagoya math. J.*, t. 1, 1950, p. 117-124.

[3] Azumaya (Gorô). — On maximally central algebras, *Nagoya math. J.*, t. 2, 1951, p. 119-150.

[4] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre*, Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1261; *Éléments de Mathématique*, 1).

[5] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative* (à paraître).

[6] Cartan (H.) and Eilenberg (S.). — *Homological algebra*. — Princeton, Princeton University Press, 1956 (*Princeton mathematical Series*, 19).

[7] Chevalley (C.) et Grothendieck (A.). — *Catégories et foncteurs* (à paraître).

[8] Eckmann (B.) und Schopf (A.). — Über injektive Moduln, *Archiv der Math.*, t. 4, 1953, p. 75-78.

[9] Goldie (A. W.). — Semi-prime rings with maximum condition, *Proc. London math. Soc.*, Series 3, t. 10, 1960, p. 201-220.

[10] Grothendieck (Alexander). — Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku math. J.*, Série 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[11] Grothendieck (Alexander). — Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, II : Le théorème d'existence en théorie formelle des modules, *Séminaire Bourbaki*, t. 12, 1959-1960, n° 195, 22 pages.

[12] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). — *Éléments de géométrie algébrique*, I : *Le langage des schémas*. — Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des Hautes Études Scientifiques, *Publications mathématiques*, 4).

[13] Leptin (Horst). — Linear kompakte Moduln und Ringe, I., *Math. Z.*, t. 62, 1955, p. 241-267.

[14] Leptin (Horst). — Linear kompakte Moduln und Ringe, II., *Math. Z.*, t. 66, 1956-1957, p. 289-327.

[15] Lesieur (L.) et Croisot (R.). — Structure des anneaux premiers nœthériens, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959, p. 2545-2547.

[16] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). — Théorie nœthérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatifs, II., *Math. Annalen*, t. 134, 1957-1958, p. 458-476.

[17] MATLIS (Eben). — Injective modules over nœtherian rings, *Pacific J. of Math.*, t. 8, 1958, p. 511-528.

[18] MORITA (Kiiti). — Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*, t. 6, 1958-1959, p. 83-142.

[19] SERRE (Jean-Pierre). — *Groupes proalgébriques.* — Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des Hautes Études Scientifiques, *Publications mathématiques*, 7).

[20] SHIH (Weishu). — Ensembles simpliciaux et opérations cohomologiques, *Séminaire Cartan*, t. 11, 1958-1959 : *Invariant de Hopf et opérations cohomologiques*, n° 7, 10 pages.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1961.)

Pierre GABRIEL
Résidence du Parc
Bât I. Esc. 2
10, Rue Fustel de Coulanges
Massy (S. et O.)