Knoten und quadratische Formen.

Von

Lebrecht Goeritz in Königsberg.

Im folgenden werden einige Ergebnisse der Arbeit von Herrn Bankwitz, Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten[1]), unter Vermeidung der Knotengruppe neu hergeleitet und erweitert. Die Exponentenmatrix aus B. wird hier dem Knoten geometrisch zugeordnet, und es werden dann ihre Abänderungen bei Knotendeformationen direkt studiert. Dabei ergeben sich neben der bekannten Invarianz der Elementarteiler dieser Matrix neue Knoteninvarianten. Diese Resultate entsprechen Anregungen von Herrn Reidemeister aus dem Seminar des S.-S. 1930.

1.

Es sei eine normierte reguläre Knotenprojektion[2]) vorgelegt. Die Gebiete der durch die Knotenprojektion zerlegten Ebene teilen wir wie in B. in zwei Klassen, in schwarze und weiße, indem wir das Gebiet G_0 mit dem Unendlichfernen der Projektionsebene schwarz und die längs einer Strecke aneinanderstoßenden Gebiete verschieden färben. Dann liegen sich in einem Doppelpunkt immer Gebiete gleicher Färbung gegenüber. Den schwarzen Gebieten geben wir Namen $G_0, G_1, \ldots, G_n$, wobei G_0 das oben so bezeichnete Gebiet sein soll.

Einem Doppelpunkt, der Randpunkt von G_i und G_k $(i \neq k)$ ist, ordnen wir als Inzidenzzahl $+1$ für G_i zu, wenn nach Orientierung der Projektionsebene der überkreuzende Streckenzug im mathematisch positiven Sinne über ein schwarzes Gebiet in den unterkreuzenden zu drehen ist. Kann diese Drehung im positiven Sinne nur über ein weißes Gebiet ausgeführt werden, so ordnen wir entsprechend -1 zu. Stößt in einem Doppelpunkt G_i an sich an, so soll der Punkt die Inzidenzzahl 0 erhalten. Man

---

[1]) Math. Annalen **103** (1930), S. 145, zitiert mit B.

[2]) K. Reidemeister, Elementare Begründung der Knotentheorie, Hamburger Abhandl. **5** (1926), S. 24.

sieht, daß ein Doppelpunkt, der mit G_i und G_k inzidiert, für beide Gebiete die gleiche Inzidenzzahl erhält. Jedem Doppelpunkt der Knotenprojektion ist also eindeutig eine der Zahlen $+1$, -1, 0 zugeordnet.

Es wird nun folgende quadratische Matrix (a_{ik}) von n Zeilen gebildet: In der i-ten Zeile $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soll a_{ii} die Summe aller Inzidenzzahlen des Gebietes G_i und a_{ik} für ($k \neq i$ von 1 bis n), die negative Summe der Inzidenzzahlen, die gleichzeitig zu G_i und G_k gehören, sein[3]). Aus dieser Erklärung folgt sofort, daß

$$a_{ik} = a_{ki}$$

und

$$a_{ii} = A_i - \sum_k a_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$

ist, wobei A_i die Summe der Inzidenzzahlen ist, die gleichzeitig zu G_i und G_0 gehören. Das Gebiet G_0 spielt also bei der Erklärung der Knotenmatrix eine ausgezeichnete Rolle.

2.

Wir untersuchen nun die Änderungen der Matrix (a_{ik}) bei Knotendeformationen[4]). Die drei Operationen zerfallen bei dieser speziellen Betrachtung in zwei Klassen, je nachdem die Zahl der weißen oder schwarzen Gebiete geändert wird. Die Auszeichnung von G_0 spielt dabei eine besondere Rolle.


Fig. 1.

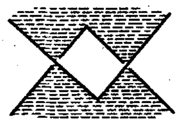
Fig. 2.

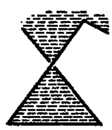
Fig. 3.

Ia. In einen doppelpunktfreien Streckenzug legt sich eine Schleife, die ein neues weißes Gebiet schafft. Dann stößt in dem neuen Doppelpunkt ein schwarzes Gebiet an sich an (Fig. 1), so daß die Matrix sich bei dieser und der inversen Operation nicht ändert.

Ib. Zwei Streckenzüge schieben sich in erlaubter Weise übereinander, so daß zwei neue weiße Gebiete entstehen (Fig. 2). Von den neuen Doppelpunkten erhält der eine die Inzidenzzahl $+1$ und der andere -1, so daß die Knotenmatrix sich auch bei dieser und ihrer inversen Operation nicht ändert.

IIa. Die neue Schleife der Projektion umschließe ein schwarzes Gebiet G_{n+1} (Fig. 3). Die neue Matrix $(\alpha_{\lambda\varkappa})$ besitzt eine Zeile und Spalte mehr als (a_{ik}). Es ist, falls G_{n+1} in dem neuen Doppelpunkt G_0 gegenüberliegt

$$\alpha_{n+1\, n+1} = \pm 1,$$

[3]) Vgl. B., a. a. O. S. 154—155.

[4]) K. Reidemeister, a. a. O., S. 26—27.

je nachdem der Doppelpunkt $+1$ oder -1 als Inzidenzzahl besitzt, ferner

$$\alpha_{n+1\,k} = \alpha_{k\,n+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und sonst

$$\alpha_{ik} = a_{ik}.$$

Liegt G_{n+1} ein Gebiet G_k $(k \neq 0)$ gegenüber, so können wir ohne Einschränkung $G_k = G_n$ annehmen. Für die dazugehörige Matrix $(\alpha'_{\lambda\varkappa})$ gilt:

$$\alpha'_{n+1\,n+1} = \pm 1$$

unter gleichen Bedingungen wie bei $\alpha_{n+1\,n+1}$ und

$$\alpha'_{nn} = a_{nn} \pm 1; \quad \alpha'_{n+1\,n} = \alpha'_{n\,n+1} = \mp 1, \quad \alpha'_{n+1\,k} = \alpha'_{k\,n+1} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und sonst

$$\alpha'_{ik} = a_{ik}.$$

Daraus erkennt man, daß die $(\alpha'_{\lambda\varkappa})$ zugeordnete quadratische Form φ'

$$\varphi' = \varphi'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$$

in die $(\alpha_{\lambda\varkappa})$ zugeordnete φ

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

durch die unimodulare Substitution

$$x'_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$x'_{n+1} = x_n + x_{n+1}$$

übergeführt wird. Bezeichnen wir mit f

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

die (a_{ik}) zugeordnete Form, so ist

$$\varphi = f \pm x^2_{n+1}.$$

IIb. Durch Übereinanderschieben zweier Streckenzüge mögen zwei neue schwarze Gebiete entstehen (Fig. 4). Falls das zerteilbare Gebiet nicht G_0 ist, können wir es durch Zeilen- und Spaltenvertauschung zu G_n machen. Es werde also G_n in G'_n, G_{n+1} und G_{n+2} zerlegt, wobei G_{n+2} das Gebiet sei, das die beiden neuen Doppelpunkte zu Randpunkten hat. Die neue Knotenmatrix $(\beta_{\mu\nu})$ ist mit (a_{ik}) durch die folgenden Gleichungen verknüpft:

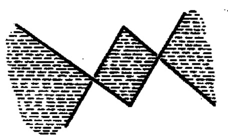

Fig. 4.

$$\beta_{ik} = a_{ik} \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$a_{nk} = \beta_{nk} + \beta_{n+1\,k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$a_{nn} = \beta_{nn} + \beta_{n+1\,n+1} + 2\beta_{n+1\,n},$$
$$\beta_{n+2\,k} = \beta_{k\,n+2} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1, n+2).$$

Ohne Einschränkung kann man noch

$$\beta_{n+2\,n} = 1, \quad \beta_{n+2\,n+1} = -1$$

setzen.

Ist die $(\beta_{\mu\nu})$ zugeordnete quadratische Form ψ'

$$\psi' = \psi'(x_1', x_2', \ldots, x_{n+2}')$$

und ist

$$\psi = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_{n+1}, x_{n+2})$$

die Form, in der $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu (a_{ik}) gehört und

$$g = \beta_{n+1\,n+1}\, x_{n+1}^2 - 2\, x_{n+1}\, x_{n+2}$$

ist, so geht ψ' durch die Substitution

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n),\\ x_{n+1}' &= x_n + x_{n+1},\\ x_{n+2}' &= \beta_{n+1\,1}\, x_1 + \beta_{n+1\,2}\, x_2 + \cdots + \beta_{n+1\,n-1}\, x_{n-1}\\ &\quad + (\beta_{n+1\,n} + \beta_{n+1\,n+1})\, x_n + x_{n+2} \end{aligned}$$

in $\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ über.

Ist das zerteilte Gebiet G_0, so steht die Knotenmatrix $(\beta_{\mu\nu}')$ in dem folgenden Zusammenhang mit der Matrix (a_{ik}):

$$\begin{aligned} \beta_{ik}' &= a_{ik} \qquad\qquad (i, k \text{ wie oben}),\\ \beta_{n+2\,k}' &= 0 \qquad\qquad (k \neq n+1),\\ \beta_{n+2\,n+1}' &= \pm 1. \end{aligned}$$

Die Werte der übrigen $\beta_{n+1\,k}'$ spielen keine Rolle, und man sieht leicht, daß auch die $(\beta_{\mu\nu}')$ zugeordnete Form der Form ψ äquivalent ist.

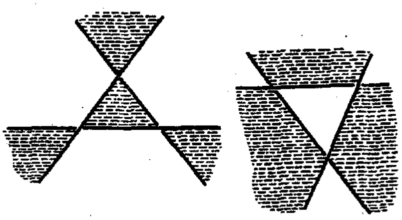

Fig. 5.

III. Es bleibt schließlich nur die Dreieckstransformation zu behandeln. Dabei geht ein schwarzes Gebiet in ein weißes oder umgekehrt über (Fig. 5). Es sei zunächst keines der an das Dreieck grenzenden Gebiete das Gebiet G_0. Das Dreiecksinnere sei weiß, die angrenzenden schwarzen Gebiete numerieren wir mit G_{n-2}, G_{n-1}, G_n, nnd die Knotenmatrix nennen wir wieder (a_{ik}). Bei der Deformation entstehe das Gebiet G_{n+1}, und die neue Matrix sei $(\gamma_{\lambda\varkappa})$, dann ist

$$\gamma_{ik} = a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-3;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

und mit entsprechenden $\pm$-Zeichen (ohne wesentliche Einschränkung)

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1\,k} &= 0 && (k=1,2,\ldots,n-3),\\
\gamma_{n+1\,n-2} &= \gamma_{n+1\,n-1} = \mp 1, &&\\
\gamma_{n+1\,n} &= \pm 1, &&\\
&\left.\begin{aligned}
\gamma_{n-2\,k} &= a_{n-2\,k} + \gamma_{n+1\,k}\\
\gamma_{n-1\,k} &= a_{n-1\,k} + \gamma_{n+1\,k}\\
\gamma_{n\,k} &= a_{n\,k} \;\;\, - \gamma_{n+1\,k}
\end{aligned}\right\} && (k=1,2,\ldots,n,n+2).
\end{aligned}$$

Die $(\gamma_{\lambda\varkappa})$ zugeordnete quadratische Form φ'

$$\varphi' = \varphi'(x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}')$$

geht demnach durch die unimodulare Substitution

$$\begin{aligned}
x_i' &= x_i && (i=1,2,\ldots,n),\\
x_{n+1}' &= \pm x_{n-2} \pm x_{n-1} \mp x_n \pm x_{n+1} &&
\end{aligned}$$

in die Form

$$\varphi = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \pm x_{n+1}^2$$

über, wobei f die (a_{ik}) zugeordnete Form ist.

Für den Fall, daß eines der Gebiete G_ν, die das Dreieck begrenzen, G_0 ist, genügt die Bemerkung, daß bei Deformation nur die $(n-1)$-te und die n-te Zelle geändert werden. Die zugeordnete Form ist gleichfalls der Form φ äquivalent.

3.

Aus der speziellen Art der Umsetzung der Knotenmatrix bei Deformationen erkennt man, daß der Betrag der Determinante eine Knoteninvariante ist. Für alternierende Knoten erhalten alle Doppelpunkte, die irgend zwei verschiedene Gebiete G_i und G_k $(i \neq k)$ beranden, gleiche Inzidenzzahlen.

Dann kann der Betrag der Determinante als die folgende bekannte Determinante[5]) geschrieben werden:

$$\varDelta = \begin{vmatrix}
\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{1\nu} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n}\\
-a_{21} & \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{2\nu} & \ldots & -a_{2n}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{n\nu}
\end{vmatrix}.$$

[5]) Vgl. B., a. a. O., S. 160.

Darin bedeutet a_{ii} die Anzahl der Doppelpunkte, die zu G_i und G_0 gehören, und a_{ik} $(i \neq k)$ die Anzahl der Doppelpunkte, die zu G_i und G_k gehören, für

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus der Abschätzung der Determinante in B. auf S. 159 folgt, daß Δ größer höchstens gleich der Minimalanzahl der Überkreuzungen bei solchen Knoten ist.

Für beliebige Knoten gilt: *Die Determinante der Knotenmatrix ist eine ungerade Zahl.*

Macht man nämlich in einem zu G_i und G_k $(i \neq k)$ gehörigen Doppelpunkt den überkreuzenden Streckenzug zum unterkreuzenden, so geht für $(k = 0)$ a_{ii} in $a_{ii} \pm 2$ und für $(k \neq 0)$ auch a_{ik}, a_{ki} in $a_{ik} \mp 2$ über, d. h. die Determinante der neuen Knotenmatrix ist gerade oder ungerade, je nachdem die ursprüngliche es ist. Durch geeignete derartige Abänderungen kann man jeden Knoten in einen Kreis verwandeln. Die Determinante der Matrix einer Kreisprojektion ist aber $+1$ oder -1.

Es ist demnach auch die Determinante einer Knotenmatrix stets ungleich Null.

Man gewinnt neue Knoteninvarianten aus der Bemerkung, daß diejenigen Eigenschaften von quadratischen Formen, die den obigen Formen f, φ und ψ gleichzeitig zukommen, invariant mit dem Knoten verknüpft sind. Wir beschränken uns dabei auf Invarianten von quadratischen Formen f, φ und ψ bei rationalen Transformationen. Es gilt dann:

In der zu einer Knotenmatrix (a_{ik}) gehörigen quadratischen Form sind die Minkowskischen Einheiten C_p [6]) *für ungerade Primzahlen p Knoteninvarianten* [7]).

Für ungerade Primzahlen p, die in der Determinante nicht aufgehen, sind alle $C_p = 1$ nach Definition. Es kommen also nur ungerade Primzahlen in Betracht, die in der Determinante aufgehen. Die quadratische Form h

$$h = h(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$$

möge in eine Summe von zwei quadratischen Formen mit verschiedenen Variablen

$$h = h_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) + h_2(x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$$

zerfallen. Es bedeute p^{∂_1} die höchste in der Determinante der Form h_1 und p^{∂_2} die höchste in der Determinante der Form h_2 aufgehende Potenz

[6]) H. Minkowski, Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalem Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können. Ges. Abhandl., Teubner 1911, S. 219 f., zitiert mit M.

[7]) Eine Berechnungsvorschrift der C_p folgt auf S. 653.

einer ungeraden Primzahl. C_{1p} und C_{2p} seien die zu den Formen h_1 bzw. h_2 gehörigen Einheiten, dann findet man nach M., S. 230 die zu h gehörige Einheit C_p

$$C_p = (-1)^{\frac{p^{\partial_1}-1}{2}\cdot\frac{p^{\partial_2}-1}{2}} C_{1p}\, C_{2q}\,.$$

Die Einheiten der zerfallenen Formen φ und ψ

$$\varphi = f \pm x_{n+1}^2, \qquad \psi = f + g$$

sind gleich den Einheiten der Form f, da die Zusatzformen $\pm x_{n+1}^2$ und g die Determinante ± 1 besitzen, also stets $C_{2p} = 1$ und $\partial_2 = 0$ ist.

Die Berechnung einer Einheit C_p gelingt einfach, wenn man die zum Knoten gehörende Form f [8]) rational in eine Normalform h transformiert, so daß in h

$$h \equiv a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n-m} x_{n-m}^2 + p(a_{n-m+1} x_{n-m+1}^2 + \ldots + a_n x_n^2) \pmod{p^2}$$

alle a_i ganz und relativ prim zu p sind. Dann ist

$$C_p = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_{n-m+1}\cdot a_{n-m+2} \cdots a_n}{p}\right) = \left(\frac{L}{p}\right), \tag{1}$$

wobei $\left(\frac{L}{p}\right)$ das Legendresche Symbol und die eckige Klammer $[\alpha]$ „größte ganze Zahl in" bedeutet.

Die Einheit C_2 in der Minkowskischen Darstellung ist nicht invariant, da sie von der bei Knotendeformationen sich ändernden Variablenzahl abhängt. Transformiert man nämlich analog die obige Form f in eine Form l

$$l \equiv b_1 x_1^2 + \ldots + b_{n-k} x_{n-k}^2 + 2(b_{n-k+1} x_{n-k+1}^2 + \ldots + b_n x_n^2) \pmod{16}$$

mit b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ungerade, so wird

$$C_2 = (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + \sum_{i,j} \frac{b_i - 1}{2}\cdot\frac{b_j - 1}{2}} \left(\frac{2}{b_{n-k+1}\cdot b_{n-k+2} \cdots b_n}\right)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, i-1),$$

wobei $\left(\frac{2}{b_{n-k+1} \cdots b_n}\right)$ das Legendresche Symbol bedeutet.

4.

Die gewonnenen Knoteninvarianten wollen wir für einige Knoten auswerten.

Es seien in der orientierten Ebene die Projektionen der beiden Kleeblattschlingen vorgelegt (Fig. 6). Die zugehörigen Formen sind

$$f_a = 3x^2 \quad \text{und} \quad f_b = -3x^2,$$

---

[8]) Eine solche Transformation ist nach M., S. 231 und 235 stets möglich.

die beide für $p = 3$ Normalformen sind. Es ist

$$C_{a_3} = \left(\frac{1}{3}\right) = 1 \quad \text{und} \quad C_{b_3} = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1.$$

Das ist ein einfacher Beweis für die Verschiedenheit der Kleeblattschlingen.

Allgemein gilt: *Ein Knoten ist von seinem Spiegelbild topologisch verschieden, wenn in der Determinante der Knotenmatrix eine Primzahl von der Form* $(4l + 3)$ *in ungerader höchster Potenz aufgeht*[9]).

Ist nach einer solchen Primzahl die quadratische Form h eine zur Knotenmatrix gehörige Normalform, so ist $-h$ eine zum Spiegelbild gehörige Normalform. Die Zahl m in (1) ist für eine in ungerader Potenz in der Determinante aufgehende Primzahl ungerade, und es wird daher die zum Spiegelbild gehörige Einheit C'_p

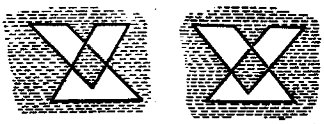

Fig. 6.

$$C'_p = \left(\frac{-1}{p}\right) C_p,$$

das heißt

$$C'_p = -C_p,$$

wenn p von der Form $(4l + 3)$ ist.

Die gefundene notwendige Eigenschaft amphicheiraler Knoten (das sind Knoten, die sich in ihr Spiegelbild deformieren lassen), keine Primzahl von der Form $(4l + 3)$ in ungerader höchster Potenz in der Determinante der Knotenmatrix zu enthalten, ist nicht hinreichend. Nach einem bekannten Resultat von Dehn und Schreier[10]) sind alle Torusknoten nicht amphicheiral.

---

[9]) Die Determinante der Knotenmatrix ist gleich dem Produkt der Torsionszahlen des zweifachen Überlagerungsraumes.

[10]) O. Schreier, Über die Gruppen $A^a B^b = 1$, Hamburger Abhandl. **3** (1924), S. 167.

(Eingegangen am 18. Dezember 1930.)