DIE BETTI'SCHEN ZAHLEN DER ZYKLISCHEN ÜBERLAGERUNGSRÄUME DER KNOTENAUSSENRÄUME.

Von LEBRECHT GOERITZ.

Einleitung. Überlagert man den Knotenaussenraum eines Knotens im Euklideschen Raum h-blättrig zyklisch, so dass nur der Knoten als Verzweigungslinie auftritt und man beim einmaligen positiven Umlauf um die orientierte Knotenlinie vom i-ten Blatt zum $i+1$-ten $(i=1,2,\cdots,h-1)$ und vom h-ten zum 1-ten gelangt, so erhält man durch Hinzunahme der Punkte des Knotens zum Raum eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_h$. Durch Untersuchung dieser Mannigfaltigkeiten bei den Schlauchknoten † erhält Herr O. Zariski in seiner Arbeit "On the topology of algebroid singularities" ‡ (neben der erneuten Kennzeichnung der Singularitäten algebraischer Kurven § durch Klassifikation der Schlauchknoten) das folgende Resultat:

Für einen Schlauchknoten ist die erste Betti'sche Zahl b_h von $\mathfrak{M}_h$ gleich der Anzahl der Wurzeln des Knotenpolynoms ¶ (L-Polynoms †) $f(x)$, die gleichzeitig Wurzeln der Gleichung $x^h-1=0$ sind.

Die von Herrn Zariski aufgeworfene Frage, ob dieser Satz für alle Knoten gilt, wird im folgenden beantwortet, und zwar zeigt sich, dass nur der schwächere Satz 2 allgemein richtig ist. Die mit Hilfe dieses Satzes aus $f(x)$ und h allein berechenbaren Schranken für b_h (Satz 3) werden in nicht trivialen Fällen (obere Schranke verschieden von der unteren) angenommen.

1. *Einige bekannte Bemerkungen.* Ist S ein die Knotenlinie einmal umschlingender Weg, K ein Element der Kommutatorgruppe der Knotengruppe, so führe man durch die Festsetzung $SKS^{-1}=K^x$ den Operator x in die Kommutatorgruppe ein. Dann sei $M(x)$ eine Polynommatrix, deren Zeilen den definierenden Relationen der kommutativen Kommutatorgruppe

† K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Springer, Berlin 1933. Diese Note schliesst sich in der Bezeichnung an dieses Buch an. Es wird im folgenden mit "Knotentheorie" zitiert.

‡ *American Journal of Mathematics*, vol. 54 (1932), p. 453.

§ Vergl. auch Burau: *Kennzeichnung der Schlauchknoten*, Hamburger Abhandlungen 9 (1932), S. 125.

¶ J. W. Alexander, "Topological invariants of knots and links," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 30 (1928), p. 275.

mit Operator $\mathfrak{K}(x)$ entsprechen und deren Spalten den Erzeugenden dieser Gruppe zugeordnet sind. Das Polynom $m_{ik}(x)$ in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von $M(x)$ sei der Exponent der k-ten Erzeugenden in der i-ten Relation. Aus der Menge der Exponentenmatrizen sei $M(x)$ als quadratische Matrix so gewählt, dass die Determinante das Knotenpolynom $f(x)$ liefert.†

Eine Exponentenmatrix der definierenden Relationen der kommutativen Fundamentalgruppe der in der Einleitung erklärten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_h$ sei M_h. Man erhält eine solche Matrix aus unserer Polynommatrix $M(x)$ (vergl. *Knotentheorie*, III, § 7), indem man jedes Polynom $m_{ik}(x) = \sum_{\nu=0}^{l} a_\nu x^\nu$ durch die folgende Matrix von h zeilen und Spalten ersetzt: E_0 sei die h-reihige Einheitsmatrix, E_1 entstehe aus E_0 durch zyklische Umordnung der Spalten, und zwar gehe die l-te Spalte in die $l+1$-te über $(l = 1, 2, 3, \cdots, h-1)$ und die h-te in die 1-te, E_ν ($\nu \geqq 0$, eine natürliche Zahl) entstehe durch ν-malige Anwendung dieses Schrittes. Ferner bedeute das Produkt einer Zahl mit einer Matrix, etwa $a \cdot M$ die Multiplikation jedes der Elemente von M mit der Zahl a und die Summe zweier Matrizen gleicher Zeilenzahl und Spaltenzahl die Matrix, in der ein Element der ursprünglichen Matrizen durch die Summe der entsprechenden Elemente beider Matrizen ersetzt ist. Dann werde $\sum_{\nu=0}^{l} a_\nu x^\nu$ durch $\sum_{\nu=0}^{l} a_\nu E_\nu$ ersetzt.

Die erste Betti'sche Zahl b_h von $\mathfrak{M}_h$ erhält man demnach, indem man die Zeilenzahl $h \cdot r$ der so erhaltenen Matrix M_h um ihren Rang ρ vermindert. Diese Zahl

$$b_h = h \cdot r - \rho$$

soll aus der Matrix $M(x)$ bestimmt werden.

2. *Reduktion des Problems.* Den Koeffizientenbereich der Elemente von $M(x)$ erweitern wir auf den Körper der rationalen Zahlen R und erlauben die folgenden Abänderungen von $M(x)$:

a) Multiplikation einer Zeile oder Spalte von $M(x)$ mit λ, wenn λ aus R und $\lambda \neq 0$ ist.

b) Vertauschung zweier Zeilen oder zweier Spalten von $M(x)$.

c) Addition des x^ν-fachen (ν sei eine ganze rationale Zahl) der zweiten Zeile von $M(x)$ zur ersten oder der zweiten Spalte zur ersten.

d) Eine beliebige Folge der Operationen *a*, *b*, *c*.

Mittels dieser Operationen kann man bekanntlich $M(x)$ auf die Diagonalform

† Über die Möglichkeit dieser Wahl vergleiche die in der Einleitung zitierte Arbeit von J. W. Alexander oder *Knotentheorie*, S. 49 u. 50.

$$M^*(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & f_3(x) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_r(x) \end{bmatrix}$$

bringen, bei der $f_i(x) = \sum_{\nu=0}^{l^{(i)}} a_\nu^{(i)} x^\nu$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ Polynome von x mit rationalen Koeffizienten sind. Dabei ist keines der Polynome $f_i(x)$ identisch Null, da die Determinante von $M(x)$ von Null verschieden ist.

Man erklärt nun analog zum Obigen diejenigen Matrizen zu M_h äquivalent, die aus M_h durch die folgenden Operationen hervorgehen:

a') Multiplikation einer Zeile oder Spalte von M_h mit λ, wenn λ aus R und $\lambda \neq 0$ ist.

b') Vertauschung zweier Zeilen oder zweier Spalten von M_h.

c') Addition der zweiten Zeile von M_h zur ersten oder der zweiten Spalte zur ersten.

d') Eine beliebige Folge der Operationen a', b', c'.

Dann erkennt man, dass man eine zu M_h äquivalente Matrix M^*_h erhält, wenn man in $M^*(x)$ die x-Potenzen in der in 1. angegebenen Weise ersetzt. Die Operationen a, b, c, d für $M(x)$ übertragen sich nämlich auf die entsprechenden Operationen a', b', c', d' für M_h, jeweils angewandt auf die h aus einer Zeile oder Spalte von $M(x)$ und deren äquivalenten Matrizen entspringenden Zeilen oder Spalten von M_h und deren äquivalenten Matrizen. Dabei ist zu beachten, dass die Multiplikation einer Zeile oder Spalte der Polynommatrix mit x^ν nur eine zyklische Umordnung der h daraus entspringenden Zeilen oder Spalten der Zahlmatrix bewirkt.

Da bei Anwendung der Operationen a', b', c', d' der Rang von M_h sich nicht ändert, genügt es zur Bestimmung von b_h den Rang der Matrix M^*_h zu bestimmen. Das gelingt nun sehr einfach.

3. *Rangbestimmung.* Den Rang von M^*_h berechnet man, indem man den Rang jedes der $f_i(x)$ von $M^*(x)$ in M^*_h entsprechenden zyklischen h-reihigen Bestandteils M^*_{hi} von M^*_h bestimmt. Und zwar gilt:

SATZ 1. *Die Matrix M^*_{hi} hat den Rang $h - \alpha_i$, wo α_i die Anzahl der verschiedenen Wurzeln von $f_i(x) = 0$ ist, die gleichzeitig auch Wurzeln von $x^h - 1 = 0$, also h-te Einheitswurzeln sind.*

Den einfachen Beweis dieser Tatsache geben wir an: Sei

$$f_i(x) = \sum_{\nu=0}^{l^{(i)}} a_\nu^{(i)} x^\nu, \quad \text{so wird} \quad M^*_{hi} = \sum_{\nu=0}^{l^{(i)}} a_\nu^{(i)} E_\nu$$

eine zyklische Matrix der Form

$$M^*_{hi} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{h-1} \\ a_{h-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{h-2} \\ a_{h-2} & a_{h-1} & a_0 & \cdots & a_{h-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

wobei

(1) $$a_k = \sum_{l=0,1,\ldots} a^{(i)}_{k+lh}$$

ist; falls dabei $h - 1 > l^{(i)}$, so sei $a^{(i)}_{l+1} = a^{(i)}_{l+2} = \cdots = a_{h-1} = 0$ gesetzt. Ferner seien $1, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{h-1}$ die h-ten Einheitswurzeln, dann hat die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{h-1} \\ 1 & \xi_1^2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi^2_{h-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_1^{h-1} & \xi_2^{h-1} & \cdots & \xi^{h-1}_{h-1} \end{pmatrix}$$

eine von Null verschiedene Determinante (als Vandermondesche Determinante). Die Produktmatrix $M^*_{hi} \cdot W$ hat also den gleichen Rang wie M^*_{hi}. Nun ist

$$M^*_{hi} \cdot W = \begin{pmatrix} \Sigma a_k & \Sigma a_k \xi_1^k & \Sigma a_k \xi_2^k & \cdots & \Sigma a_k \xi^k_{h-1} \\ \Sigma a_k & \xi_1^{h-1} \cdot \Sigma a_k \xi_1^k & \xi_2^{h-1} \Sigma a_k \xi_2^k & \cdots & \xi^{h-1}_{h-1} \Sigma a_k \xi^k_{h-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_k & \xi_1 \Sigma a_k \xi_1^k & \xi_2 \Sigma a_k \xi_2^k & \cdots & \xi_{h-1} \Sigma a_k \xi^k_{h-1} \end{pmatrix},$$

wobei die Summe immer von $k = 0$ bis $k = h - 1$ zu erstrecken ist. Die neue Matrix hat soviel Spalten aus lauter Nullen als es Wurzeln ξ_i gibt, die gleichzeitig Wurzeln von $\sum_{k=0}^{h-1} a_k x^k = 0$ und wegen der Erklärung von a_k in (1) Wurzeln der Gleichung $\sum_{\nu=0}^{l^{(i)}} a_\nu{}^{(i)} x^\nu = 0$ sind. Die restlichen l Spalten sind die mit von Null verschiedenen Faktoren multiplizierten Spalten einer Vandermondeschen Matrix. Es gibt also darin nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz für Determinaten eine Unterdeterminante vom Grade l, die von Null verschieden ist. Damit ist Satz 1 aber bewiesen.

Daraus folgt unmittelbar, dass der Rang von M^*_h gerade $r \cdot h - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ und also $b_h = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ ist. Demnach gilt das folgende Endresultat:

SATZ 2. *Ist α_i die Anzahl der verschiedene h-ten Einheitswurzeln, die* *gleichzeitig Wurzeln des in 2. erkläten i-ten Elementarteilers von $M(x)$ sind, so ist die erste Betti'sche Zahl von $\mathfrak{M}_h$*

$$b_h = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i.$$

4. *Einige Folgerungen und Beispiele.* Aus dem letzten Satz des vorigen Abschnittes erschliesst man

SATZ 3. *Die erste Betti'sche Zahl b_h von $\mathfrak{M}_h$ ist kleiner oder gleich der Anzahl der Wurzeln, die das Knotenpolynom $f(x)$ mit $x^h - 1 = 0$ gemeinsam hat, mit ihrer zu $f(x)$ gehörigen Vielfachheit gezählt, und grösser oder gleich jener Anzahl bei Zählung der verschiedenen Wurzeln.*

Dass das Gleichheitszeichen in beiden Fällen angenommen werden kann, sieht man für den ersten Fall an den Schlauchknoten, da das Polynom $f(x)$ dieser Knoten nur einfache Wurzeln hat, besser an den Knoten deren l Bestandteile gleiche Schlauchknoten sind. In diesem Falle hat $M(x)$ die Gestalt

$$M(x) = \begin{pmatrix} M_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_1(x) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & M_1(x) \end{pmatrix},$$

und es ist die Determinante dieser Matrix $f(x) = | M_1(x) |^l$, wo $m_1(x)$ die Matrix eines Bestandteiles ist. Ist α_1 die Zahl der $| M_1(x) | = f_1(x) = 0$ und $x^h - 1 = 0$ gleichzeitig angehörenden Wurzeln, so ist $b_h = l \cdot \alpha_1$ also gleich der Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Wurzeln von $f(x) = 0$, die gleichzeitig Wurzeln von $x^h - 1 = 0$ sind.

2. Für den zweiten Fall an speziellen Knoten, von denen wir ein Beispiel herausgreifen: Der Knoten 8, 10a der Knotentabelle bei Alexander und Briggs † hat als Polynom

$$f(x) = (1 - x + x^2)^3$$

und $f(x)$ als einzigen Elementarteiler. Demnach wird die Betti'sche Zahl $b_6 = 2$.

ROSTOCK, D. 4. XI. 1933.

† J. W. Alexander und G. B. Briggs, "On types of knoted curves," *Annals of Mathematics*, vol. 28 (1926-27), p. 562.