A la Recherche de la Topologie Perdue
Progress in Mathematics, Volume 62

UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE ROHLIN SUR LA SIGNATURE

Lucien GUILLOU et Alexis MARIN

INTRODUCTION.

C'est un problème fondamental et non résolu que de savoir quelles formes quadratiques peuvent être réalisées comme formes d'intersection $H_2(M;\mathbb{Z}) \times H_2(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ d'une variété orientée fermée lisse M^4 de dimension quatre. Récemment, M. Freedmann [Fr] a montré que toute forme quadratique peut être ainsi réalisée par une variété topologique et dans le cas lisse, Donaldson [D] a montré que, parmi les formes définies positives, seule la forme triviale est représentable. En général, si M^4 est une variété fermée orientée de dimension quatre et si F^2 est une surface fermée orientable dans M^4 représentant dans $H_2(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un élément dual à la deuxième classe de Stiefel-Whitney $w_2(M)$, l'algèbre nous dit que $\sigma(M) - F.F = 0 \bmod 8$ [MH, II §5] où $F.F$ représente l'autointersection de la classe d'homologie de F et $\sigma(M)$ la signature de la forme d'intersection sur $H_2(M;\mathbb{R})$. Dans le cas où M est lisse, Rohlin [R2] a donné une formule explicite calculant $\sigma(M) - F.F \bmod 16$ en fonction de l'invariant d'Arf d'une certaine forme quadratique $q : H_2(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ceci généralisait son vieux résultat de 1952 [R1] disant que $\sigma(M) = 0 \bmod 16$ si $F = \emptyset$ (résultat qui disait déjà que certaines formes quadratiques ne sont pas représentables comme ci-dessus par des variétés lisses, par exemple E_8, cf. [MH, II §6]).

Nous donnons ici une formule semblable dans le cas où F n'est pas nécessairement orientable. Ces surfaces caractéristiques non orientables se rencontrent naturellement dans l'étude du 16e problème de Hilbert ([Mar1] [A']). D'ailleurs, le papier [R2] de Rohlin est consacré à ce problème.

Notre but principal ici est d'énoncer et de prouver notre généralisation d'une manière simple et directe, sinon la plus élégante, à la suite de nos commentaires aux travaux de Rohlin [GM3]. Nous renvoyons à l'article de Matsumoto [Mat] pour un point de vue et une preuve un peu différents. Le papier de Freedman et Kirby [FK] qui donne une preuve de la formule de Rohlin contient aussi des motivations et commentaires que nous ne répétons pas. (†)

Signalons enfin que les articles récents de T. Fiedler [Fi] et Turaev [T] traitent de questions voisines.

(†) Notre formule a été annoncée en 1977 [GM1] et nous avons donné une première version du présent texte en 1980 [GM2] (elle contient malheureusement quelques bêtises)

I. - ENONCE DU RESULTAT.

Nous travaillons dans la catégorie des variétés lisses compactes. Soit M^n une variété de dimension n et soit V^{n-2} une sous-variété de codimension 2 . On dit que V^{n-2} est caractéristique si il existe une trivialisation du fibré tangent à $M - V$ au-dessus du 2-squelette de M qui ne s'étend à aucun 2-disque transverse à F pour une triangulation du couple (M,V) , cf. [GM3, I appendice C] . On note $i : V \hookrightarrow M$ l'inclusion de V dans M .

Soit M^4 une variété fermée, orientée de dimension 4 et soit F^2 une surface fermée caractéristique (non nécessairement orientable) dans M telle que $i_*(H_1(F^2;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) = \{0\} \subset H_1(M;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Alors, on peut définir une forme quadratique naturelle $q : H_1(F;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, associée à la forme d'intersection homologique sur F , telle que la généralisation suivante de la formule de Rohlin [R2] ait lieu :

THEOREME. On a : $\sigma(M) - F.F = 2\alpha(M,F) \bmod 16$ où $\sigma(M)$ désigne la signature de la variété orientée M , $F.F$ l'auto-intersection de F dans M (cf. [W]) et $\alpha(M,F)$ l'invariant de Brown de la forme quadratique q associée au couple (M,F) (cf. [B] et le paragraphe suivant).

Rappelons que $F.F$ peut être commodément défini comme suit : Soit s une section, n'ayant que des zéros simples, du fibré normal à F dans M ; on pousse légèrement F selon s pour obtenir une surface F' et un difféomorphisme $\varphi : F \to F'$. Maintenant $F \cap F' = \{x \in F \mid \varphi(x) = x\}$ est fini. Etant donné $a \in F \cap F'$, on choisit une orientation locale $\circledcirc$ près de a pour F , ce qui définit une orientation locale $\varphi(\circledcirc)$ près de a pour F' . Si l'orientation $\circledcirc \oplus \varphi(\circledcirc)$ près de a pour M coïncide avec l'orientation donnée de M , nous donnons le signe $\varepsilon(a) = +1$ à a et le signe -1 dans le cas contraire. Clairement, $\varepsilon(a)$ ne dépend pas du choix de $\circledcirc$ près de a . Alors, $F.F = \sum_{a \in F \cap F'} \varepsilon(a)$.

Remarque. Si la surface F est orientable, la forme quadratique q prend ses valeurs dans $2.\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\alpha(M,F)$ qui vaut alors 0 ou 4 s'identifie au quadruple de l'invariant de Arf de q : on retrouve la formule connue de Rohlin [R2] . Rappelons que le cas $F = \emptyset$ est très célèbre, il date de 1952 et est aussi dû à Rohlin [R1] .

II. - LES FORMES QUADRATIQUES SUR LES $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-ESPACES ET L'INVARIANT DE BROWN

(cf. [B], [BLLV, appendices])

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de dimension finie n, muni d'une forme bilinéaire $(x,y) \to x.y$ symétrique, non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

DEFINITION 1. Une forme quadratique sur V à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est une application $q : V \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + 2x.y ,$$

où $2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est l'unique homomorphisme non nul.

Remarques et exemples.

1) On a $q(0) = q(0+0) = q(0) + q(0) + 2\,0.0 = q(0) + q(0)$, d'où $q(0) = 0$.

2) Sur $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il n'y a qu'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée : le produit du corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Et on a :

$$0 = q(1+1) = q(1) + q(1) + 2\,1.1 = 2q(1) + 2 , \quad \text{donc } q(1) = \pm 1 .$$

Il y a donc deux formes quadratiques, q_+ et q_-, sur un espace de dimension un

3) Si $\bar{q} : V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une forme quadratique ordinaire sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf. [MH, Appendix 1]), alors $q = 2\bar{q}$ est une forme quadratique sur V à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

DEFINITION 2. Une forme quadratique $q : V \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est neutre s'il existe un sous-espace $H \subset V$ de dimension moitié sur lequel q est nulle (et alors H est égal à son orthogonal pour la forme bilinéaire).

On définit de la manière usuelle la somme orthogonale de deux formes quadratiques ; remarquons que si $V = V_1 \oplus V_2$ est une décomposition orthogonale pour la forme bilinéaire, alors $q = q|_{V_1} \oplus q|_{V_2}$.

En quotientant le semi-groupe des formes quadratiques ainsi obtenu par le semi-groupe des formes neutres, on obtient le groupe de Witt $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ des formes quadratiques sur les $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espaces vectoriels à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (cf. [BLLV, appendices]).

Si $q : V \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est une forme quadratique et si $x \in V$, on pose $\psi(x) = \exp(\frac{i\pi}{2} q(x)) = i^{q(x)}$.

DEFINITION 3. L'invariant multiplicatif de Brown de la forme quadratique q est le nombre complexe :

$$\gamma(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{x\in V} \psi(x) \qquad (\text{où } n = \dim V) \quad .$$

PROPOSITION. L'application γ établit un isomorphisme entre le groupe de Witt $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et le groupe des racines huitièmes de l'unité.

En notations additives, on écrira :

$$\alpha : WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \quad , \qquad \text{où } \gamma = \epsilon \circ \alpha \quad ,$$

avec $\epsilon : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \{\text{racines huitièmes de l'unité}\}$ donné par $\epsilon(1) = \exp(\frac{i\pi}{4}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Remarque. Si la forme bilinéaire est isotrope, i.e. vérifie $x.x = 0$ pour tout x de V la forme quadratique q ne prend que des valeurs paires : $0 = q(2x) = q(x) + q(x)$; de sorte que $q = 2\bar{q}$, où $\bar{q} : V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une forme quadratique ordinaire, ψ ne prend que les valeurs $+1$ et -1 et l'invariant de Brown γ de q est le classique invariant d'Arf de $\bar{q}$ qui vaut $+1$ si la forme représente plus souvent 0 que 1 , et -1 dans le cas contraire.

Démonstration de la proposition.

LEMME 1. $\gamma(q_1 \oplus q_2) = \gamma(q_1)\gamma(q_2)$.

Preuve. $$\gamma(q_1 \oplus q_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_1+n_2} \sum_{x\in V_1, y\in V_2} i^{q_1(x)} i^{q_2(y)} =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_1} \sum_{x\in V_1} i^{q_1(x)}\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_2} \sum_{y\in V_2} i^{q_2(y)}\right] = \gamma(q_1)\gamma(q_2) \quad .$$

LEMME 2. Si la forme quadratique q est neutre, $\gamma(q) = 1$.

Preuve. Soit $H \subset V$ un sous-espace de dimension moitié sur lequel q s'annule. Soit $V = H \oplus L$ une décomposition en somme directe. Alors, si $n = \dim V$:

$$\gamma(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{h\in H, \ell\in L} \psi(h+\ell) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{h\in H, \ell\in L} \psi(\ell)(-1)^{\ell . h}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left[\sum_{\ell\in L-\{0\}} \left(\sum_{h\in H} (-1)^{\ell . h} \psi(\ell)\right) + \operatorname{card}(H) \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \operatorname{card}(H) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (2^{n/2}) = 1 \quad .$$

La quatrième égalité suit de ce que la forme bilinéaire étant non dégénérée, pour $\ell \neq 0$, la forme linéaire φ sur H donnée par $\varphi(h) = \ell . h$ est non nulle (H est égal à son orthogonal) et donc prend la valeur 0 autant de fois que la valeur 1 ($\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = \dim H - 1$) .

LEMME 3. Si la forme bilinéaire n'est pas isotrope, V se décompose en une somme orthogonale d'espaces de dimension un.

Preuve. Puisque l'application $x \to x.x$ est linéaire, la non dégénérescence fournit $c \in V-\{0\}$ tel que pour tout $x \in V$, $c.x = x.x$. Si $\dim V \geq 2$, il existe y distinct de c tel que $y.y = 1$ (si $c.c = 1$ et $y.y = 0$, alors $(c+y).(c+y) = 1$) et V se décompose en $(y) \oplus (y)^{\perp}$. Puisque y est distinct de c, la restriction de la forme bilinéaire à $(y)^{\perp}$ est non isotrope (si $z.z = c.z = 0$ pour tout $z \in (y)^{\perp}$, alors $c \in ((y)^{\perp})^{\perp} = (y))$. On termine par induction sur $\dim V$.

LEMME 4. Si q est une forme quadratique à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, alors $4(\oplus q) = q \oplus q \oplus q \oplus q$ est isométrique à $4(\oplus(-q))$. Et donc $8(\oplus q)$ est neutre.

Preuve. Soit $W = V \oplus V \oplus V \oplus V$ et soient $\varphi_i : V \to W$, $i = 1,2,3,4$, les applications $\varphi_1(x) = (0,x,x,x)$; $\varphi_2(x) = (x,0,x,x)$; $\varphi_3(x) = (x,x,0,x)$; $\varphi_4(x) = (x,x,x,0)$. On a $4(\oplus q)(\varphi_i(x)) = 3q(x) \underset{4}{=} -q(x)$, et $\varphi_i(V)$ orthogonal à $\varphi_j(V)$ pour $i \neq j$. L'isomorphisme cherché est $\underset{i=1}{\oplus} \varphi_i : V \oplus V \oplus V \oplus V \to W$.

Pour conclure la preuve de la proposition, on note que puisque $q_+ \oplus q_-$ est neutre, le lemme 3 appliqué à $q \oplus q_+ \oplus q_-$ montre que $WQ(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ est cyclique, engendré par la classe de q_+ (exemple 2) et d'ordre un diviseur de huit par le lemme 4. Les lemmes 1 et 2 assurent que γ est un homomorphisme. Finalement, on vérifie que $\gamma(q_+) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ est une racine huitième primitive de l'unité. □

Remarque. Il est maintenant facile d'établir que l'invariant de Brown d'une forme quadratique, son rang et l'isotropie ou l'anisotropie de la forme bilinéaire associée déterminent sa classe d'isométrie.

III. - DEFINITION GEOMETRIQUE DE LA FORME QUADRATIQUE
$q : H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

On se place maintenant dans la situation du paragraphe I.

DEFINITION 4. Une membrane P^2 pour la surface caractéristique F est une surface compacte (non nécessairement orientable) immergée dans M, plongée et normale à F près de son bord $\partial P \subset F$, et dont l'intérieur est transverse à F.

Soit f une immersion générique $P^2 \looparrowright M$ dont l'image $f(P)$ est une membrane. Le bord de $f(P)$ consiste en des courbes simples fermées de F ; notons $\mathscr{O}$

l'obstruction à étendre le fibré normal en droites à ces courbes dans F en un sous-fibré de rang un du fibré normal $\nu(f)$ de l'immersion. Rappelons que $\nu(f)$ est défini par la suite exacte $0 \to \tau(P) \to f^*(\tau(M)) \to \nu(f) \to 0$, où $f^*(\tau(M))$ est le retiré du fibré tangent à M au-dessus de P par f . On vérifie aisément que deux immersions de même image donnent lieu à des fibrés normaux isomorphes et donc que l'obstruction σ ne dépend pas du choix de f . Cette obstruction habite $H^2(P,\partial P;\pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$, les coefficents étant tordus par la première classe de Stiefel-Whitney $w_1(\nu(f))$. Son évaluation sur la classe fondamentale $[P,\partial P] \in H^2(P,\partial P;\pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$ est un entier encore noté σ . On pose alors : $q'(P^2) = \sigma + 2P.F \bmod 4$, où P.F désigne le nombre de points d'intersection transverse de l'intérieur de P (i.e. de f(P)) avec F .

<u>Remarque 1</u>. Une définition plus géométrique, et souvent plus efficace dans les applications, de l'obstruction σ est la suivante :

Soit $\tilde{P}$ une surface compacte et $j : \tilde{P} \hookrightarrow \nu(f)$ une immersion telle que :

(i) $p \circ j : \tilde{P} \to P$ est un revêtement ramifié à deux feuillets où p désigne la projection de l'espace total du fibré $\nu(f)$ sur sa section nulle P .

(ii) j est transverse à P (vu comme la section nulle de $\nu(f)$) , et $j(\tilde{P}) \cap P$ ne contient aucun des points doubles de $j(\tilde{P})$ ou de P .

(iii) $f(\partial\tilde{P})$ est le bord d'un tube autour de ∂P dans F .

Pour chaque point a de l'intersection $P \cap j(\tilde{P})$, une orientation locale $\mathfrak{G}$ de P induit (via le revêtement $p \circ j$) une orientation locale $\mathfrak{G}'$ de $j(\tilde{P})$. Si l'orientation $\mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}'$ coincide avec celle de l'espace total du fibré $\nu(f)$, on attache le signe $\varepsilon(a) = +1$ à a et le signe -1 dans le cas contraire. Clairement, $\varepsilon(a)$ ne dépend pas du choix de l'orientation $\mathfrak{G}$ près de a .

$$\text{Alors, l'obstruction } \sigma = \sum_{a \in P \cap j(\tilde{P})} \varepsilon(a) \quad .$$

L'existence d'une telle immersion j peut s'obtenir en désingularisant l'image de deux sections de $\nu(f)$ en position générale l'une par rapport à l'autre et par rapport à la section nulle de $\nu(f)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la somme ci-dessus ne dépend pas des choix de $\tilde{P}$ et j (soit directement, soit en montrant l'égalité ci-dessus !).

<u>Remarque 2.</u> Si P n'a pas de composantes fermées, la membrane P est homotopiquement équivalente à un bouquet de cercles, donc, par stabilité, on peut écrire $\nu(f)$ comme une somme directe avec un sous-fibré trivial de rang un. Maintenant deux tels sous-fibrés triviaux de $\nu(f)$ induisent deux sous-fibrés homotopes de $\nu(f)|\partial P$ qui est

un fibré trivial. En effet, si nous décrivons nos deux sous-fibrés triviaux de $\nu(f)$ par des sections sans zéros s et s' et si $d(s|\partial P, s'|\partial P)$ est la différence primaire dans $H^1(\partial P;\pi_1(\mathbb{R}P^1)^t) \cong \mathbb{Z}$ (†), on a ([S, §36]) $\delta(d(s|\partial P, s'|\partial P)) = \sigma(s|\partial P) - \sigma(s'|\partial P)$ où δ est le cobord $H^1(\partial P;\pi_1(\mathbb{R}P^1)^t) \xrightarrow{\cong} H^2(P,\partial P;\pi_1(\mathbb{R}P^1)^t)$ et $\sigma(s|\partial P)$ est l'obstruction primaire à étendre $s|\partial P$. Donc $d(s|\partial P, s'|\partial P) = 0$, ce qui prouve que $s|\partial P$ et $s'|\partial P$ sont homotopes.

Soient s_0 la restriction à ∂P d'une section sans zéros d'un sous-fibré trivial de rang un de $\nu(f)$ et s_1 la section sans zéros au-dessus de ∂P donnée par le fibré normal en droite à ∂P dans F. On a $\delta d(s_1, s_0) = \sigma(s_1) - \sigma(s_0) = \sigma(s_1)$. Puisque δ est un isomorphisme, on peut identifier notre obstruction σ à $d(s_1, s_0)$. Ceci explique la relation entre notre définition de la forme quadratique q' et celle de Y. Matsumoto [Mat].

Remarque 3. Les explications de la remarque 1 (ou les calculs de la remarque 2) montrent que si ∂P est connexe, l'obstruction σ est paire si et seulement si ∂P admet un voisinage annulaire dans F. En général, si toutes les composantes connexes de ∂P ont des voisinages annulaires dans F, alors $\sigma = 2\sigma(v)$, où $\sigma(v)$ est l'obstruction à étendre un champ de vecteurs normal à ∂P^2 dans F en un champ de vecteurs (sans zéros) normal à P^2 dans $\nu(f)$ (le facteur 2 vient de ce que la flèche naturelle $S^1 \to \mathbb{R}P^1$ est de degré 2).

En particulier, si la surface caractéristique F est orientable, on obtient $q'(P^2) = 2(\sigma(v) + P.F) \bmod 4$. On retrouve la définition de Rohlin [R2].

PROPOSITION 1. $q'(P^2)$ ne dépend que de la classe d'homologie modulo 2 de ∂P^2 dans F. Ceci permet de définir une application $q : H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

LEMME. Supposons que (M^4, F^2) soit bord de (V^5, G^3) où V^5 est une variété orientée compacte de dimension 5 et G^3 une sous-variété caractéristique (non nécessairement orientable). Soit $\Delta^2 \subset G^3$ une surface (non nécessairement orientable) telle que $\Delta \cap F = \partial\Delta$, et soit P une membrane pour F (dans M) de bord $\partial P = \partial\Delta$. Alors, $q'(P) = 0$.

Preuve de la proposition 1 (à partir du lemme).

Si P_0 et P_1 sont deux membranes dont les bords représentent la même classe d'homologie modulo 2, on applique le lemme à l'union disjointe $(M \times \{0\}, F \times \{0\}) \amalg (M \times \{1\}, F \times \{1\})$ de deux copies de (M,F) avec $V^5 = M \times [0,1]$, $G^3 = F \times [0,1]$ et Δ^2 une désingularisation d'un cycle modulo 2 qui réalise une homologie dans $F \times [0,1]$ entre $\partial P_0 \subset F \times \{0\}$ et $\partial P_1 \subset F \times \{1\}$

(†) Dans le cas où ∂P est connexe ; l'extension facile au cas général est laissée au lecteur.

(l'existence de Δ^2 s'obtient facilement par les méthodes de Kneser, cf. [GM3, II.2]). On obtient alors dans ∂V : $q(P_0\times\{0\} \cup P_1\times\{1\}) = 0 = q(P_1) - q(P_0)$ puisque, avec l'orientation de ∂V , $M \times 0$ hérite l'orientation opposée à celle de M . Ceci prouve la première assertion. Pour la seconde, tout 1-cycle z de F peut être représenté par une famille de courbes simples fermées disjointes, et puisque $i_*(H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ toute telle famille borde une 2-chaîne dans M^4 qui peut être désingularisée comme ci-dessus pour donner une membrane dont le bord représente le cycle z .

<u>Preuve du lemme</u> (cf. la figure).

Supposons d'abord que le bord de Δ^2 soit connexe. L'auto-intersection de $\partial\Delta$ dans F est bord de l'auto-intersection de Δ dans G donc nulle modulo 2 . Par suite (puisque $\partial\Delta^2$ est connexe), $\partial\Delta^2$ admet un voisinage annulaire dans F et, comme dans la remarque 3 ci-dessus, si $\mathcal{O}(v)$ est l'obstruction à étendre un champ de vecteurs normal v à $\partial P = \partial\Delta$ dans F en un champ de vecteurs normal (sans zéros) à P dans $\nu(f)$, il suffit de vérifier que $\mathcal{O}(v) + P.F = 0 \bmod 2$. Désignons par ν et μ les fibrés normaux à G^3 dans V^5 et à Δ^2 dans G^3 , et par $E(\nu)$ et $E(\mu)$ les espaces totaux des fibrés en disques associés. Alors, $(W,U) = (E(\nu|_{\Delta^2}\oplus\mu), E(\mu))$ est un voisinage tubulaire de Δ^2 dans (V^5,G^3) . Soient N^4 le bord de la variété $V - \mathring{W}$ et $H^2 = (F-\mathring{W}) \cup \mathrm{Fr}\, U = N \cap G$. Clairement, H^2 est une surface caractéristique pour la variété orientable fermée N^4 .

Soient s et s' deux sections de $\nu|\Delta^2$ avec $s(\Delta^2)$ et $s'(\Delta^2)$ transverses entre elles aussi bien qu'avec Δ^2 . Soit t une section de μ identique au champ de vecteurs v sur $\partial\Delta^2 = \partial P$ et sans zéros près de $\Delta^2 \cap (s(\Delta^2) \cup s'(\Delta^2))$. Soit enfin $\rho : \Delta^2 \to [0,1]$ une fonction lisse nulle sur $\partial\Delta^2$ et telle que $\rho^{-1}(\frac{1}{2})$ soit un voisinage des zéros de s et t et des points communs à s et s' .

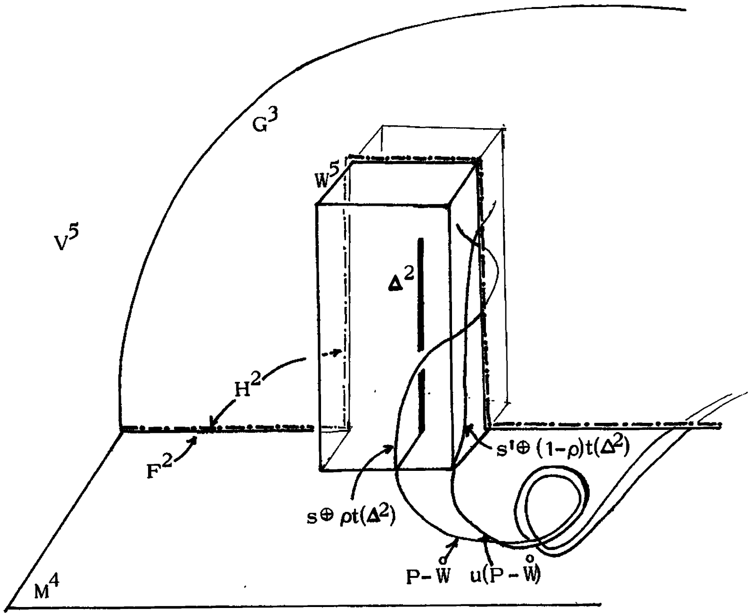
Alors, on peut pousser Δ^2 dans ∂W et former le 2-cycle de N^4 :

$$\Sigma^2 = (P - \mathring{W}) \cup s\oplus \rho\, t(\Delta^2) \quad ,$$

La formule de Wu (cf. [GM^3, I appendice C]) dit :

$$\Sigma^2.\Sigma^2 + \Sigma^2.H^2 = 0 \bmod 2 \quad .$$

Soit u une section du fibré normal $\nu(f)$ d'une immersion $f : P \looparrowright M$ dont les zéros soient distincts des préimages des points doubles de f et qui coïncide avec v sur $\partial P = \partial\Delta$. L'immersion f s'étend en un plongement local $\bar{f}$ de l'espace total de $\nu(f)$ dans M^4 tel que $\bar{f}(u(P))$ soit une copie difféomorphe de $f(P)$ transverse à $f(P)$. Nous maintenons notre notation P pour $f(P)$ et notons $u(P)$ au lieu de $\bar{f}(u(P))$.



Figure

On observe alors que le nombre d'intersection homologique modulo 2 $P.u(P)$ (bien défini puisque $\partial P \cap \partial u(P) = \emptyset$) est la réduction modulo 2 du nombre d'obstruction $\mathcal{O}(v)$ (plus deux fois le nombre d'auto-intersection de la surface immergée P, ce qui est zéro modulo 2). Ainsi :

$$\Sigma.\Sigma = [(P-\mathring{W}) \cup (s \oplus \rho t)(\Delta^2)] . [u(P-\mathring{W}) \cup s' \oplus (1-\rho)t(\Delta^2)]$$

$$= P.u(P) + s(\Delta^2).s'(\Delta^2) = \mathcal{O}(v) + s(\Delta^2).s'(\Delta^2) \bmod 2$$

$$\Sigma.H = [(P-\mathring{W}) \cup (s \oplus \rho t)(\Delta^2)] . [(F-\mathring{W}) \cup \mathrm{Fr}\, U] = P.F + s(\Delta^2).\Delta^2 \bmod 2 .$$

Or, $s(\Delta^2).\Delta^2 = s(\Delta^2).s'(\Delta^2)$ par l'invariance homotopique des nombres d'intersection, d'où :

$$0 = \Sigma.\Sigma + \Sigma.H = \mathcal{O}(v) + P.F \bmod 2 .$$

Pour se ramener au cas $\partial\Delta^2$ connexe, nous énonçons d'abord le

<u>SOUS-LEMME</u>. <u>Soit</u> (V,G) <u>une paire propre de variétés</u> $(G \cap \partial V = \partial G)$ <u>avec</u> ∂V <u>connexe</u>. <u>Alors, il existe une sous-variété propre</u> G' <u>de</u> V <u>dont le bord est la somme connexe plongée des composantes de</u> ∂G .

<u>De plus, on peut choisir</u> G' <u>coïncidant avec</u> G <u>excepté dans le voisinage d'arcs plongés dans</u> ∂V <u>connectant les composantes de</u> ∂G (<u>de sorte que</u> G <u>et</u> G' <u>représentent la même classe d'homologie modulo</u> 2).

La preuve du sous-lemme, qui consiste à creuser des tunnels le long des arcs de l'énoncé, est laissée au lecteur.

Ensuite (on peut bien sûr supposer V connexe), on se ramène au cas ∂V connexe en creusant des tunnels le long d'arcs disjoints de G^3 et connectant les composantes de ∂V . On peut alors appliquer le sous-lemme et obtenir un nouveau G à bord connexe, toujours contenant Δ^2 . Une nouvelle application du sous-lemme au couple (G,Δ^2) achève de nous ramener au cas $\partial\Delta^2$ connexe.

Il reste à appliquer encore une fois le sous-lemme pour obtenir une membrane pour ce nouveau Δ^2 qui ne diffère de l'ancienne que dans le voisinage d'un arc et a même fonction q' . Il n'y a pas de difficultés.

PROPOSITION 2. L'application $q : H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est quadratique pour la forme bilinéaire d'intersection de la surface F :

$$q(\alpha+\beta) = q(\alpha) + q(\beta) + 2\alpha.\beta \quad .$$

Preuve. En considérant, si nécessaire, (M,F) union disjointe avec $(S^4, \mathbb{R}P^2)$ on peut toujours supposer que $H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ se décompose en une somme directe de sous-espaces de dimension un (cf. §II, lemme 3).

On a donc seulement à montrer :

1) $q(\alpha+\beta) = q(\alpha) + q(\beta)$ si $\alpha.\beta = 0$
2) $q(\alpha) = 1 \bmod 2$ si $\alpha.\alpha = 1$.

En effet, donné 1) la décomposition de $H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induit une décomposition de q , et donné 2) q est quadratique sur chaque facteur.

Pour prouver 1), remarquons d'abord que par le sous-lemme précédent on peut supposer F connexe; dans ce cas, si $\alpha.\beta = 0$, on peut représenter α et β par deux familles disjointes de courbes fermées simples. Alors, si P et Q sont des membranes dont les bords représentent α et β , on rend P transverse à Q pour obtenir une membrane $R = P \cup Q$ dont le bord représente $\alpha+\beta$. Clairement, $\bar{q}(R) = \bar{q}(P) + \bar{q}(Q)$.

Pour prouver 2), on représente α par une famille de courbes simples disjointes α_i . Le point 1) donne $q(\alpha) = \Sigma\, q(\alpha_i)$ et la remarque 3 du §I nous dit $q(\alpha_i) \equiv \alpha_i . \alpha_i \bmod 2$.

Remarque. Nous suggérons au lecteur de se construire une preuve directe de la proposition 2 en fabriquant une membrane pour la réunion de deux courbes se coupant transversalement à partir d'une membrane pour chacune des courbes (cf. notre première version [GM2]) .

IV. - PREUVE DU THEOREME.

LES EXEMPLES FONDAMENTAUX.

Exemple A. La droite $\mathbb{C}P^1$ est caractéristique dans le plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$; les invariants sont $\sigma(\mathbb{C}P^2) = 1$, $\mathbb{C}P^1 . \mathbb{C}P^1 = 1$, $\alpha(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) = 0$.

Exemple B. Soit $c : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ la conjugaison complexe. C'est une involution préservant l'orientation dont l'ensemble de points fixes $\mathbb{R}P^2$ est de codimension deux, et donc $\Sigma^4 = \mathbb{C}P^2/c$ est une variété lisse fermée orientable. L'exemple B est $(\Sigma^4, \mathbb{R}P^2)$. Nous montrons :

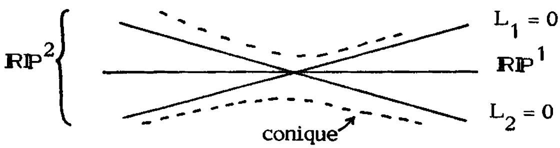
(i) Σ^4 est une sphère d'homotopie : si $p \in \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{C}P^2$, tout élément de $\pi_1(\Sigma^4, c(p))$ se représente par un lacet intersectant $\mathbb{R}P^2$ ($\subset \Sigma^4$) transversalement au seul point $c(p)$. Un tel lacet se relève à $\mathbb{C}P^2$ de sorte que $c_* : \pi_1(\mathbb{C}P^2, p) \to \pi_1(\Sigma^4, c(p))$ est surjective et $\pi_1(\Sigma^4) = 0$. On conclut en calculant la caractéristique d'Euler $\chi(\Sigma^4) = \frac{1}{2}(\chi(\mathbb{C}P^2) + \chi(\mathbb{R}P^2)) = \frac{1}{2}(3+1) = 2$.

Remarque. Kuiper et Massey ([K], [Mas2]) ont montré (indépendamment) que Σ^4 est PL isomorphe à S^4 et donc difféomorphe à S^4 selon le difficile "$\Gamma_4 = 0$" de Cerf. Récemment, A. Marin a obtenu une preuve directe et élémentaire de ce dernier résultat [Mar]. Rappelons qu'il y a de nombreuses manières de voir que Σ^4 est homéomorphe à S^4 ; par exemple, la fonction de Morse usuelle $f : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}$, $f([x,y,z]) = \dfrac{|x|^2 + 2|y|^2}{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}$ induit une fonction de Morse sur Σ^4 avec deux points critiques.

(ii) Bien sûr, $\mathbb{R}P^2 \subset \Sigma^4$ est caractéristique et $\sigma(\Sigma^4) = 0$.

(iii) L'auto-intersection $\mathbb{R}P^2 . \mathbb{R}P^2$ dans Σ^4 est deux fois l'auto-intersection $\mathbb{R}P^2 . \mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{C}P^2$ par naturalité de la classe d'Euler (cf. [Mas1, lemma 1]). Ce dernier nombre est $-\chi(\mathbb{R}P^2)$ puisqu'on peut le calculer en multipliant par i un champ de vecteurs tangents à $\mathbb{R}P^2$ avec des points singuliers simples (cf. [A, lemma 6]). Donc, $\mathbb{R}P^2 . \mathbb{R}P^2$ dans Σ^4 vaut -2.

(iv) $\alpha(\Sigma^4, \mathbb{R}P^1) = 1$: puisque $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$, on choisit comme membrane un des disques bordé par $\mathbb{R}P^1$ dans $\mathbb{C}P^1$. Cette membrane ne rencontre $\mathbb{R}P^2$ que le long de $\mathbb{R}P^1$ et son nombre d'obstruction vaut $+1$; en effet, considérons deux droites L_1 et L_2 à coefficients réels proches de $\mathbb{C}P^1$ se coupant en un point de $\mathbb{R}P^1$; une petite variation des coefficients du produit $L_1 . L_2$ donne une conique non singulière qui rencontre $\mathbb{R}P^2$ selon le bord d'un voisinage tubulaire de $\mathbb{R}P^1$ dans $\mathbb{R}P^2$ et qui rencontre la droite $\mathbb{C}P^1$ transversalement en deux points chacun de signe $+1$ (comme courbes complexes). Par conséquent, cette conique fournit un revêtement double de la membrane pour $\mathbb{R}P^1$, comme dans la remarque 1, § III, d'où nous concluons $q(\mathbb{R}P^2) = 1$.



Considérons alors un couple (M,F) comme dans l'énoncé du théorème et remarquons d'abord que $\sigma(M) \equiv F.F \bmod 2$ (en effet, toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se décompose en une somme directe dont chaque facteur est soit (1), soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'élément caractéristique respectivement 1 et 0 ; donc $F.F \equiv \dim H_2(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \equiv \sigma(M) \bmod 2$). Remarquons aussi que les trois termes de la formule à démontrer sont additifs sous la somme disjointe. L'exemple A permet alors de supposer $\sigma(M) = 0$, et donc $F.F$ pair. L'exemple B permet ensuite de supposer $\sigma(M) = 0 = F.F$. Reste alors à montrer $\alpha(M,F) = 0$; pour cela, on s'appuie sur

LEMME. Soient M une variété close orientée de dimension quatre et $F \subset M$ une surface close caractéristique. Si $\sigma(M) = 0 = F.F$, alors $(M,F) = \partial(V,G)$; où V est une variété orientée compacte de dimension cinq et G une sous-variété caractéristique de dimension trois.

Donné le lemme, on conclut aisément que $\alpha(M,F) = 0$; en effet, il faut voir que la forme quadratique q associée à (M,F) est neutre. Le lemme du § III dit que le noyau de l'application $H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induite par inclusion est isotrope. D'autre part, la dualité de Lefschetz montre que ce noyau a une dimension moitié de celle de $H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; donc q est neutre.

Preuve du lemme. Puisque la signature réalise un isomorphisme du groupe de cobordisme des variétés fermées lisses orientées de dimension quatre vers $\mathbb{Z}$, $M = \partial V^5$ où V^5 est une variété compacte orientée lisse de dimension cinq. Et, par la théorie des obstructions, il y a, à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, un 3-cycle relatif $\bar{G}$ dans (V,M), caractéristique et vérifiant $\partial\bar{G} = \bar{G} \cap M = F$. Nous sommes réduits au

SOUS-LEMME. Soit V une variété lisse orientable de dimension cinq à bord ; soit $\bar{G} \subset V$ un 3-cycle relatif modulo 2 dont $\partial\bar{G} = \bar{G} \cap \partial V$ est une surface d'auto-intersection nulle dans V. Alors, $\bar{G}$ est homologue modulo $\partial\bar{G}$ (et modulo 2) à une sous-variété G dans V.

Preuve. Nous utilisons les méthodes expliquées en détails dans [GM3, II.2] dues à Kneser et Rohlin. On peut supposer $\bar{G}$ triangulé et (par un argument de collier) une variété près de son bord $F = \partial\bar{G}$. De plus, $\bar{G}$ est certainement une variété hors de son 2-squelette. En utilisant les méthodes les plus simples de [GM3, II.2], on peut facilement se ramener au cas où $\bar{G}$ est une variété hors de son 0-squelette. On réunit les sommets où $\bar{G}$ n'est pas une variété par un sous-arbre du 1-squelette de $\bar{G}$. Le ste (= "star") de cet arbre dans V est une boule B^5 de bord S^4 = la lice (= link) de cet arbre dans V. La lice de l'arbre dans $\bar{G}$ est une surface L cobordante, par $\bar{G} - \mathring{B}^5$, à F. En appliquant le sous-lemme du § III au couple $(\mathring{V} - \mathring{B}^5, \mathring{\bar{G}} - \mathring{B}^5)$, on peut supposer L connexe. Par conséquent, puisque le nombre d'auto-intersection $L.L = 0$ dans S^4 (par cobordisme et parce que V est orientable), le fibré en disques E normal à L dans S^4 admet une section sans zéros s. On montre alors, comme dans [GM3, III §3], que $s(L)$ borde dans $S^4 - \mathring{E}$ (au besoin en "enroulant" d'abord la section s) et donc que L est bord d'une sous-variété de S^4. On peut alors utiliser à nouveau les méthodes de [GM3, II.2] pour rendre $\bar{G}$ lisse dans sa classe d'homologie modulo 2. Ceci termine la preuve du sous-lemme, donc de la proposition 2 et du théorème.

Remarques. La fin de la preuve du sous-lemme ci-dessus montre en fait le résultat suivant :

Soit F^2 une surface d'auto-intersection $F.F = 0$ dans une variété orientable M^4 de dimension quatre et qui représente zéro dans $H_2(M^4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors, il y a une variété G^3 dans M^4 de bord F^2.

Ceci, joint à l'exemple B, donne le

THEOREME. Soient M^4 une variété spin de dimension quatre et F^2 une surface caractéristique telle que $i_*(H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, alors :

$$F.F \equiv -2\alpha(M,F) \bmod 16 ,$$

où $\alpha(M,F)$ est l'invariant de Brown du couple (M,F).

Ceci est une généralisation d'un vieux théorème de Whitney [W] (1941).

THEOREME [Whitney]. Soit F^2 une surface dans la sphère S^4, alors :

$$F.F \equiv -2\chi(F) \bmod 4 .$$

En effet, $\alpha(M,F) \equiv \dim H_2(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \equiv \chi(F) \bmod 2$.

L'ingrédient nécessaire pour attraper la partie signature du théorème est le résultat de Rohlin : une variété orientée fermée de dimension quatre M^4 borde une variété orientée de dimension cinq si $\sigma(M^4) = 0$.

Ainsi, on aurait pu monter la preuve du théorème principal en deux étapes :

1) Prouver le théorème ci-dessus (M^4 spin, en fait $M^4 = S^4$ suffit).

2) Prouver, comme dans le lemme et le début du sous-lemme ci-dessus, que $(M,F) \amalg -\sigma(M)(CP^2,CP^1) \amalg (S^4,F')$ est bord de (V,G) avec V variété orientée compacte de dimension cinq et G sous-variété caractéristique de dimension trois pour une certaine surface F' dans S^4.

V. - CHIRURGIE ET COBORDISME CARACTERISTIQUES.

On considère maintenant des triplet $(M,F,\mathfrak{F})$ où M est une variété fermée orientée de dimension quatre, F une surface fermée caractéristique et $\mathfrak{F}$ le choix d'une trivialisation du fibré tangent à M au-dessus du 2-squelette de $M-F$ qui ne s'étend à aucun disque méridien de F (laquelle existe puisque F est caractéristique).

DEFINITION 5. Deux triplets $(M,F,\mathfrak{F})$ et $(M',F',\mathfrak{F}')$ sont dits caractéristiquement cobordants s'il y a un triplet $(V,G,\mathfrak{G})$ avec V variété orientée compacte de dimension cinq, G sous-variété caractéristique de dimension trois et $\mathfrak{G}$ une trivialisation du fibré tangent à V au-dessus du 2-squelette de $V-G$ qui vérifient $\partial V = M \amalg (-M')$, $\partial G = F \cup F'$ et $\mathfrak{G}$ étend $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$. Le groupe de cobordisme ainsi obtenu est le groupe de <u>cobordisme caractéristique</u> noté Ω^4_c.

<u>Remarque 1</u>. Si on néglige les trivialisations dans la définition précédente, la relation obtenue n'est pas transitive ([GM1, GM2] sont fautifs à ce point-là). On peut négliger les trivialisations si l'on se restreint aux couples (M,F) comme dans la définition avec $H_1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, car alors il existe une unique trivialisation (à homotopie près) du fibré tangent à M au-dessus du 2-squelette de $M-F$ qui ne s'étend à aucun disque méridien de F.

Soit un couple (M,F) avec M variété fermée orientée de dimension quatre et F surface caractéristique tel que $i_*(H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \{0\} \subset H_1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Et soit aussi c une courbe simple fermée de F.

<u>LEMME</u>. <u>Le résultat</u> (M',F') <u>d'une chirurgie de paire sur</u> (M,F) <u>le long de la courbe</u> c <u>a la propriété que</u> F' <u>est caractéristique dans</u> M' <u>si et seulement si</u> $q(c) = 0$.

<u>Preuve</u>. Soit P une membrane pour c dans M et soit D le 2-disque âme de la chirurgie dans M'. Alors, $\Sigma = P \cup D$ est un 2-cycle de M' et $2(\Sigma.\Sigma + \Sigma.F') = 2(\sigma(v) + P.F) \equiv q(c) \bmod 4$, où $\sigma(v)$ est l'obstruction à étendre à P un champ de vecteurs normal à ∂P dans F (cf. la remarque 3 du § III ; bien sûr $c.c = 0 \bmod 2$ puisque la chirurgie sur c est possible). Donc, si F' est caractéristique, la formule de Wu donne $q(c) = 0$.

Réciproquement, soit Σ un 2-cycle de M' que l'on peut supposer coupant transversalement en n points la co-âme de la chirurgie sur M'. Alors, Σ peut se voir (après isotopie) comme l'union de n translatés disjoints de l'âme de la chirurgie et d'une membrane P pour nc dans M ; donc
$2(\Sigma.\Sigma + \Sigma.F') = 2(\sigma(v) + P.F) \equiv q(nc) = nq(c) = 0 \bmod 4$, et F' est caractéristique dans M'.

Remarque 2. Si c est une courbe simple fermée dans F telle que $q(c) = 0$, alors (cf. la remarque 3 du § III), $c.c = 0$ et la chirurgie sur c est possible.

Soit $(M,F,\mathfrak{F})$ un élément de Ω_c^4 , et soit M_1 une variété simplement connexe obtenue à partir de M par des chirurgies d'indices 2 sur des cercles disjoints de F telle que la trace de la chirurgie réalise un cobordisme caractéristique entre $(M,F,\mathfrak{F})$ et le résultat $(M_1,F,\mathfrak{F}_1)$ de la chirurgie (†)

PROPOSITION-DEFINITION. Dans cette situation, si c est une courbe fermée simple de F , $q_{M_1}(c)$ (‡) ne dépend pas du choix de M_1 . De cette manière, on définit une forme quadratique q (et un invariant de Brown $\alpha(M,F,\mathfrak{F})$) pour le triplet $(M,F,\mathfrak{F})$.

Et alors $q(c) = 0$ si et seulement si la trace d'une chirurgie de paire sur $(M,F,\mathfrak{F})$ le long de c est un cobordisme caractéristique.

Preuve. Soient M_1 et M_2 deux choix possibles ; on peut supposer tous les cercles de chirurgie en vue disjoints. Soit $\widetilde{M}$ la variété obtenue en faisant toutes les chirurgies nécessaires pour fabriquer M_1 et M_2 . Alors, $\widetilde{M}$ est simplement connexe, la trace de la chirurgie de (M,F) à $(\widetilde{M},F)$ réalise un cobordisme caractéristique entre $(M,F,\mathfrak{F})$ et le résultat $(\widetilde{M},F,\widetilde{\mathfrak{F}})$ de la chirurgie, et clairement $q_{M_1}(c) = q_{\widetilde{M}}(c) = q_{M_2}(c)$.

Supposons maintenant que la trace d'une chirurgie de paire sur $(M,F,\mathfrak{F})$ le long de c soit un cobordisme caractéristique, alors $q(c) = 0$ par le lemme du § III. Inversement, d'après le lemme ci-dessus, si $q(c) = 0$, le résultat (M',F') de la chirurgie sur (M_1,F) le long de c admet F' comme surface caractéristique dans M'. Soit (W,N) le complémentaire dans (M_1,F) d'un voisinage de c , c'est aussi le complémentaire dans (M',F') d'un voisinage de la sphère duale à la sphère d'attachement de l'anse de chirurgie. Comme W est simplement connexe, $H_1(W-N;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est engendré par les méridiens de $F\cap N$ et deux trivialisations du fibré tangent de $W-N$ au-dessus du 2-squelette de $W-N$ provenant de trivialisations des fibrés tangents à M_1-F et $M'-F'$ au-dessus de leurs 2-squelettes sont homotopes (leur différence $x \in H^1(W-N;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ s'annule sur tout méridien de $F\cap N = F'\cap N$) . Donc la trace de la chirurgie liant (M_1,F) à (M',F') réalise un cobordisme caractéristique par définition, il en est de même pour celle liant (M,F) à (M',F') ; on conclut par transitivité.

(†) On sait bien qu'une telle variété M_1 existe toujours et qu'elle dépend de la trivialisation $\mathfrak{F}$ donnée.

(‡) q_{M_1} désigne la forme quadratique associée, au § III, à (M_1,F) .

On se propose maintenant de calculer le groupe Ω^4_c .

THEOREME. La suite $0 \to \Omega^4_c \xrightarrow{\varkappa} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \to 0$ est exacte avec $\varkappa(M,F,\mathfrak{F}) = (\sigma(M), F.F, \alpha(M,F,\mathfrak{F}))$ et $\pi(x,y;z) = x - (y+2z)$. Autrement dit, $(M,F,\mathfrak{F}) \mapsto (\sigma(M), F.F)$ réalise un isomorphisme de Ω^4_c sur le sous-groupe d'indice 2 de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ défini par $x-y$ pair, $(x,y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Preuve. (a) Si $(x,y,z) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ vérifie $x = y + 2z \bmod 16$, on veut trouver $(M,F,\mathfrak{F}) \in \Omega^4_c$ tel que $x = \sigma(M)$, $y = F.F$ et $z = \alpha(M,F,\mathfrak{F})$. Mais, l'exemple A du § IV nous réduit à réaliser les éléments $(0,y,z)$ avec $y = -2z \bmod 16$ ce que l'on peut faire avec une union disjointe de z exemples B.

(b)(1) Soit $(M,F,\mathfrak{F}) \in \Omega^4_c$, alors $\alpha(M,F,\mathfrak{F}) = 0$ si et seulement si $(M,F,\mathfrak{F})$ est caractéristiquement cobordant à un triplé $(N,S^2,\varsigma) \in \Omega^4_c$.

En effet, si $\alpha(M,F,\mathfrak{F}) = 0$, la forme quadratique q sur $H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ associée à $(M,F,\mathfrak{F})$ admet un sous-espace isotrope de dimension moitié dont une base peut être représentée par des courbes simples fermées disjointes de F . La proposition précédente assure que la trace de la chirurgie sur (M,F) le long de ces courbes sera un cobordisme caractéristique et la surface F' obtenue vérifie $H_1(F';\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, donc $F' = S^2$. La réciproque découle aussi de la proposition.

(2) Soit $(M,F,\mathfrak{F}) \in \Omega^4_c$, alors $\alpha(M,F,\mathfrak{F}) = 0 = F.F$ si et seulement si $(M,F,\mathfrak{F})$ est caractéristiquement cobordant à un triplé $(N,\emptyset,\varsigma) \in \Omega^4_c$. Cela suit de (1) et du fait que si une sphère S^2 vérifie $S^2.S^2 = 0$, on peut ajouter une 3-anse dessus sans changer le caractère caractéristique.

(3) Enfin, $(M,F,\mathfrak{F}) \in \Omega^4_c$ est nul si et seulement si $\sigma(M) = F.F = 0 = \alpha(M,F)$. Cela suit du point (2), du calcul du groupe de cobordisme ordinaire Ω^4 et de l'injectivité de l'inclusion canonique $\Omega^4_{\mathrm{Spin}} \to \Omega^4$ (cf. [GM3, III, exercices]).

Remarque. La démonstration précédente a été écrite pour dégager le point de vue de la chirurgie caractéristique ; en fait, on a seulement besoin du théorème qui assure $\pi \circ \varkappa = 0$, du point (a) pour avoir $\ker \pi \subset \mathrm{Im}(\varkappa)$; enfin, l'injectivité de $\varkappa$ démontrée au point (b) a déjà été établie : c'est le lemme du § IV (dont la preuve commence par étendre la structure spin donnée). Le lecteur en déduira comme en [GM3, III, exercice III d)] une preuve de l'injectivité de l'inclusion canonique $\Omega^4_{\mathrm{Spin}} \to \Omega_4$.

APPENDICE

Dans cet appendice, nous esquissons une définition de $\alpha(M,F)$ qui passe par une immersion de F dans $\mathbb{R}^3$. Ce point de vue nous a été expliqué par L. Siebenmann et ce sont ses explications que nous rapportons.

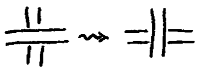
1. La forme quadratique attachée à une surface immergée dans $\mathbb{R}^3$.

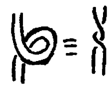
Une bande sera pour nous une union disjointe d'anneaux et de bandes de Moëbius.

. Pour une bande Q plongée dans $\mathbb{R}^3$, supposons l'âme C de la bande et son bord ∂Q orienté de manière cohérente. Alors, le nombre d'enlacement de C et de ∂Q donne un entier bien défini $\tau(Q) \in \mathbb{Z}$, indépendant du choix cohérent d'orientation.

. $\tau(Q)$ est un invariant de la classe d'isotopie, et même de concordance, de Q (calculer $\tau(Q)$ en utilisant l'intersection de deux surfaces dans B^4 bordant C et ∂Q).

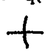
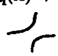
. Définissons $q(Q) = \tau(Q) \bmod 4$. Alors, $q(Q)$ est un invariant de la classe d'homotopie régulière de Q.

(On utilise une surface de Seifert pour C dans $\mathbb{R}^3$ pour calculer τ.
Il faut vérifier que  modifie $\tau(Q)$ par un multiple de 4.
On se ramène au cas  où $\tau(Q)$ vaut respectivement -2 et $+2$.)

. Similairement on vérifie que q réalise un homomorphisme de l'ensemble des classes d'homotopie régulière de bandes munies de l'opération somme disjointe sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. D'ailleurs, si l'on se restreint aux bandes connexes, on obtient un isomorphisme.
(Par homotopie régulière, on peut dénouer C dans $\mathbb{R}^3$, ensuite utiliser )

. La forme quadratique $q : H_1(F^2;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

F est une surface fermée, non nécessairement orientable, immergée dans $\mathbb{R}^3$. Si $x \in H_1(F,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, on représente x par une bande $Q \subset F$. Après perturbation de l'immersion de F dans $\mathbb{R}^3$, on peut supposer Q plongée. La classe d'homotopie régulière de ce plongement est bien définie et on pose $q(x) = q(Q)$. On vérifie aisément que $q(x)$ est bien défini.

On remarque que q ne dépend que de la classe d'homotopie régulière de l'immersion de F dans $\mathbb{R}^3$ (car il en est de même de $q(Q)$ pour une bande $Q \subset \mathbb{R}^3$).
La forme q est quadratique : $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2x.y \bmod 4$.
(En effet, la différence entre  et  est q() $= \pm 2$.)

. Exemple [B, example 1.28]. A une surface fermée orientée M^2 stablement parallélisée est associée une unique parallélisation de $M^2 \times \mathbb{R}$ et donc une immersion de M^2 dans $\mathbb{R}^3$. Comme M^2 est orientable, l'invariant de Brown de q se trouve dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. On a ainsi une flèche de l'ensemble π_2 des classes d'homotopie régulière des surfaces orientées immergées dans $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est un isomorphisme et l'élément non nul de π_2 peut se représenter par  union un disque.

2. L'immersion associée à une surface caractéristique.

Soit M^4 une variété fermée orientée de dimension 4 et soit F^2 une surface fermée caractéristique (non nécessairement orientable). On suppose $H_1(M^4;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ (†). Puisque F est caractéristique, il existe une structure spin sur $M-F$ et donc une trivialisation $\mathcal{F}_0$ du fibré tangent à M^4 au-dessus du 2-squelette de M^4-F (ce qui équivaut à une trivialisation du fibré tangent à M^4 au-dessus de (M^4-F) sauf un point) qui ne s'étend à aucun 2-disque transverse à F.

. Puisque $H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, deux telles structures spin coïncident (leur différence est un $x \in H^1(M-F\,;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dont la restriction à tout méridien de F est nulle. Donc x s'étend à $\bar{x} \in H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et $x = 0$).

. Soit $F_0 = F$ - quelques points, une partie de F sur laquelle existe un champ de vecteurs normal dans M.

PROPOSITION. Il y a une classe d'homotopie régulière d'immersions de F_0 dans $\mathbb{R}^3$ bien définie par le procédé suivant :

Fixons un champ de vecteurs normal ξ à F_0 et soit η son complément : $\xi \oplus \eta = \nu(F_0,M)$ le fibré normal à F_0 dans M. Alors, l'espace total du fibré en disques associé à η, $E(\eta)$, est un épaississement à trois dimensions de F_0. A isotopie près, il y a une unique façon de faire coïncider le premier champ de vecteurs de la structure spin $\mathcal{F}_0$ sur $M-F$ avec ξ le long de F_0 poussée par ξ. Alors, on projette le champ $\mathcal{F}_0$ sur $E(\eta)$ parallèlement au premier champ de vecteurs de $\mathcal{F}_0$ pour obtenir une trivialisation $\mathcal{G}$ du fibré tangent à $E(\eta) \supset F_0$, et par suite une immersion $g : E(\eta) \to \mathbb{R}^3$.

(†) Si $H_1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est non nul, mais si (M,F) est équipé d'une trivialisation du fibré tangent à M au-dessus du 2-squelette de $M-F$ qui ne s'étend à aucun méridien de F, alors q est défini puisque F_0 poussé par ξ récupère cette trivialisation (cf. la proposition). Comparer au § V.

Pour montrer la proposition, supposons que ξ' , η' , $\mathcal{G}'$ et g' proviennent d'une autre construction. Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme de fibrés $\alpha: \nu(F_0,M) \to \nu(F_0,M)$ qui envoie ξ sur ξ' , η sur η' et $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}'$ à homotopie près. Il s'ensuivra que $g|F_0$ est régulièrement homotope à $g'|F_0$.

Le complément η' de ξ' est isomorphe à η puisque tous les deux sont déterminés par $w_1(\nu)$. Donc ξ' , η' et $\alpha\mathfrak{F}_0$ conduisent comme précédemment à une trivialisation $\alpha\mathcal{G}$ du fibré tangent à $E(\eta')$. Si on peut montrer que $\alpha\mathfrak{F}_0$ est une trivialisation homotope à $\mathfrak{F}_0$, il s'en suivra que $\alpha\mathcal{G}$ est homotope à $\mathcal{G}'$. Pour montrer cela, on regarde chaque composante de F_0 comme une anse d'indice 0 avec quelques anses d'indice 1 attachées. Par une homotopie de fibré, on peut supposer que α est l'identité sauf sur les anses d'indices 1 où ν est trivialisé et où α s'exprime comme une torsion lorsque l'on se déplace le long de l'âme d'une anse typique H . Comme H est contractile, on peut assurer que près de H dans $M_0 - F_0$ ($M_0 = M -$ les points ôtés à F), la trivialisation $\mathfrak{F}_0$ est un produit de la trivialisation de $\mathbb{R}^2 - 0 = S^1 \times \mathbb{R}$ et de la trivialisation standard de $H = I \times I$. Il est alors clair que α envoie $\mathfrak{F}_0$ sur elle-même (ce serait faux si $\mathbb{R}^2 - 0$ avait la trivialisation induite de celle de $\mathbb{R}^2$) .

. La classe d'homotopie régulière d'immersion $g : F_0 \to \mathbb{R}^3$ obtenue ci-dessus détermine une unique classe d'homotopie régulière d'immersion $g : F \to \mathbb{R}^3$ (cela suit de la classification des immersions de S^2 dans $\mathbb{R}^3$ à homotopie régulière près) (+).

D'après le point 1 , à l'immersion g est associée une forme quadratique sur $H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et donc finalement un invariant de Brown $\alpha(M,F) \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

. Nous laisserons maintenant le lecteur se convaincre de la cohérence de cette définition avec la nôtre. Bien entendu, il est aussi possible de continuer la preuve du théorème dans le langage de cet appendice. Nous allons seulement esquisser la preuve du lemme clé du § III dont nous rappelons l'énoncé.

Supposons que (M^4,F^2) soit bord de (V^5,G^3) , où V^5 est une variété orientée compacte de dimension 5 et G^3 une sous-variété caractéristique. Soit $\Delta^2 \subset G^3$ une surface (non nécessairement orientable) telle que $\Delta \cap F = \partial\Delta = C$ une courbe de F. Alors, $q([C]) = 0$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si $[C] \in H_1(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est représenté par C .

(+) Remarquons que l'on n'utilise pas vraiment $g : F \to \mathbb{R}^3$, mais seulement $g_0 : F_0 \to \mathbb{R}^3$ dont l'existence est élémentaire.

En effet, puisque G est caractéristique, il existe une trivialisation du fibré tangent à V au-dessus du 3-squelette de $V-G$. Puisque Δ^2 a le type d'homotopie d'un 1-complexe, il existe un champ de vecteurs normal à G^3 défini sur un voisinage de Δ^2. Appelons ce voisinage G^3_Δ. Soit η le complément de ξ, $\xi \oplus \eta = \nu(G^3_\Delta, V)$. Le long d'une copie de G^3_Δ translatée par ξ, on peut supposer que le premier vecteur de la trivialisation coïncide avec ξ et aussi que le dernier vecteur de la trivialisation est normal rentrant le long de ∂V^5. Alors, par projection parallèlement à ξ, on obtient une trivialisation du fibré tangent à $E(\eta|G_\Delta)$. Par restriction au bord, on obtient une trivialisation du fibré tangent à $E(\eta|F_c)$ où F_c est un voisinage de C dans F^2 qui est certainement celle utilisée dans la définition de $q([C])$.

De là, on déduit une immersion $g : (G^3_\Delta, F^2_c) \to (\mathbb{R}^4_+, \mathbb{R}^3)$. On remarque alors que le nombre d'enlacement de C et ∂F_C est égal au nombre d'intersection $g(\partial G^3_\Delta).g(\Delta^2)$ qui est certainement nul puisque $g(\partial G_\Delta)$ et $g(\Delta)$ sont disjoints.

On remarquera que cette preuve, contrairement à celle donnée au § III n'utilise pas la formule de Wu, i.e. l'équivalence des définitions algébrique et homotopique du mot caractéristique.

REFERENCES

[A'] N. A'CAMPO, Sur la première partie du 16e problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, n° 537 (1979).

[A] V.I. ARNOLD, The arrangement of the ovals of real plane algebraic curves, involutions of four dimensional manifolds and the arithmetic of integral quadratic forms, Funkt. Analiz. i ego Pril. 5.3 (1971), 1-9 ; translation : Funct. Anal. Appl. 5 (1971), 169-176.

[BLLV] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ-sphères, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 7, fasc. 4 (1974), 463-506.

[B] E.H. BROWN Jr., Generalizations of the Kervaire invariant, Ann. of Math. 95 (1972), 368-384.

[D] S.K. DONALDSON, An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Diff. Geom. 18 (1983), 279-315.

[Fi] T. FIEDLER, Eine kongruenz für gitter und ihre anwendung auf 2k-mannigfaltigkeiten in 4k-mannigfaltigkeiten, Manuscripta Math. 46 (1984), 215-227.

[Fr] M. FREEDMAN, The topology of four dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1983), 357-454.

[FK] M. FREEDMAN and R. KIRBY, Geometric proof of Rohlin's theorem, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 32, A.M.S. (1978), 85-97.

[GM1] L. GUILLOU et A. MARIN, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B 285 (1977), A95-A98.

[GM2] L. GUILLOU et A. MARIN, Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature, Publ. Math. Univ. Paris VII, 9 (1980), 69-80.

[GM3] L. GUILLOU et A. MARIN, Commentaires sur les articles de Rohlin, ce volume.

[K] N. KUIPER, The quotient space of $\mathbb{C}P(2)$ by complex conjugation is the 4-sphere, Math. Ann. 208 (1974), 175-177.

[Mar1] A. MARIN, Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles, Publ. Math. Univ. Paris VII, 9 (1980), 51-68.

[Mar2] A. MARIN, $\mathbb{C}P^2/\sigma$ ou Kuiper et Massey au pays des coniques, ce volume.

[Mas1] W. MASSEY, Proof of a conjecture of Whitney, Pacific J. Math 31 (1969), 143-156.

[Mas2] W. MASSEY, The quotient space of the complex projective plane under conjugation is a 4-sphere, Geom. Dedicata 2 (1973), 371-374.

[Mat] Y. MATSUMOTO, An elementary proof of Rohlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin, ce volume.

[MH] J. MILNOR and D. HUSEMOLLER, Symmetric bilinear forms, Springer-Verlag, New-York (1973).

[R1] V.A. ROHLIN, New results in the theory of 4-dimensional manifolds, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 84 (1952), 221-224 ; traduction dans ce volume.

[R2] V.A. ROHLIN, Proof of a conjecture of Gudkov, Funkt. Analiz. i ego Pril. 6.2 (1972), 62-64 ; translation : Funct. Anal. Appl. 6 (1972), 136-138

[S] N.E. STEENROD, Topology of fiber bundles, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1951).

[T] V.G. TURAEV, Cohomology rings, linking forms and invariants of spin structures of three dimensional manifolds, Math. Sbornik Tom. 120 (162), 1983, n° 1, 68-83 ; translation : Math. USSR Sbornik, vol. 48 (1984), n° 1, 65-79.

[W] H. WHITNEY, On the topology of differentiable manifolds, in Lectures on topology, Univ. of Michigan Press (1941), 101-141.