Ueber die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten.

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.)

Fast in allen Disciplinen der Mathematik bietet sich die Aufgabe dar, eine quadratische Form: $\sum_\varkappa \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, 3, \dots n)$ in eine Summe von Quadraten linearer Functionen der Veränderlichen $x_\varkappa$ zu verwandeln. Bekanntlich hat zu diesem Behufe *Lagrange**) eine successive Reductionsweise entwickelt, welche für praktische Rechnungen an Einfachheit und Eleganz nichts zu wünschen übrig lässt; wie die Arbeiten von *Gauss* über die Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendungen zur Genüge zeigen. (Man vgl. namentlich die „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis", Bd. VI der Gesammtausgabe, Seite 20 ff.)

Eine tiefere theoretische Erforschung der *Lagrange*schen Transformation hat *Jacobi* im 53. Bande dieses Journals S. 266 ff. gegeben und insbesondere die dabei auftretenden linearen Functionen der $x_\varkappa$ independent darstellen gelehrt, allerdings unter Voraussetzung einer derartigen Anordnung der Variabeln**), dass für mindestens eine Permutation $\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$ die Reihe der Determinanten:

$$\Delta = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{nn}), \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\alpha\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta}} \quad \dots \quad a_{\nu\nu}$$

kein verschwindendes Glied besitze.

Weniger gekannt scheint eine Darstellung der fraglichen Reduction zu sein, welche *Plücker* im 24. Bande dieses Journals S. 297 ff. angedeutet hat. Dieselbe besitzt wesentliche Vorzüge vor der *Jacobi*schen Methode, ist im gleichen Umfange wie diese giltig und lehrt in directer Weise die

*) Nach *Baltzer* zum ersten Male 1759 in Misc. Taur. 1 pag. 18.

**) Man vergleiche hierüber *Kronecker* im Berliner Monatsbericht vom April 1874: „Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen" § 1.

ursprünglichen Veränderlichen $x_\varkappa$ durch die transformirten (die oben erwähnten linearen Functionen) ausdrücken. Im Folgenden soll in weiterer Verfolgung des *Plücker*schen Grundgedankens eine *sämmtliche Besonderheiten* berücksichtigende Untersuchung des fraglichen Gegenstandes gegeben und namentlich auch auf den Fall näher eingegangen werden, in welchem zwischen den Veränderlichen $x_\varkappa$ lineare Relationen bestehen.

I. *Die Verwandlung einer quadratischen Form mit unabhängigen Veränderlichen* in eine Summe von Quadraten kann unter allen Umständen vermittelst zweier Lehnsätze geleistet werden, von denen der eine mit Einführung der Bezeichnungen:

$$A = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}), \quad A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ m)$$

folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Lemma 1.*) *Die quadratische Form* $u = \sum_i \sum_k a_{ik} y_i y_k \; (i,\ k = 1,\ 2, \ldots\ m)$ *der willkürlichen Veränderlichen* y_i *geht für* $A_{mm} \gtrless 0$ *durch die Substitutionen*

$$(1.) \qquad y_p = \eta_p + (A_{pm} : A_{mm}) y_m \quad (p = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1)$$

über in

$$(1^a.) \qquad u = \sum_p \sum_q a_{pq} \eta_p \eta_q + (A : A_{mm}) y_m^2 \quad (p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1).$$

Fügt man nämlich dem Systeme (1.) die evidente Gleichung

$$y_m = (A_{mm} : A_{mm}) \cdot y_m$$

hinzu, so ergiebt sich durch Multiplication des so erweiterten Systemes mit a_{qp}, resp. a_{qm}, und nachherige Summation über p:

$$(1^b.) \quad \begin{cases} a_{q1} y_1 + a_{q2} y_2 + \cdots + a_{qm} y_m = a_{q1} \eta_1 + a_{q2} \eta_2 + \cdots + a_{q,m-1} \eta_{m-1} \quad (q = 1, 2, \ldots m-1) \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \cdots + a_{mm} y_m = a_{m1} \eta_1 + a_{m2} \eta_2 + \cdots + a_{m,m-1} \eta_{m-1} + (A : A_{mm}) y_m. \end{cases}$$

Indem man diese m Relationen beziehungsweise mit $y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_m$ multiplicirt und hernach addirt, erhält man

$$u = \eta_1 \sum_i a_{i1} y_i + \eta_2 \sum_i a_{i2} y_i + \cdots + \eta_{m-1} \sum_i a_{i,m-1} y_i + (A : A_{mm}) y_m^2, \quad i = 1 \ldots m$$

eine Gleichung, welche in die zu erweisende $(1^a.)$ übergeht, sobald man die Summen rechter Hand durch ihre Werthe aus $(1^b.)$ ersetzt.

Der andere Lehnsatz lautet:

*) Dieses Lemma ist mutatis mutandis im Falle von fünf Veränderlichen bereits von *Plücker* l. c. ausgesprochen worden.

Lemma 2. *Ist A nicht gleich Null, verschwindet dagegen irgend eine Hauptunterdeterminante $(m-1)^{ten}$ Grades, etwa A_{mm}, so wird, $A_{m,m-1} \gtrless 0$ angenommen*), durch die Transformationen**)*

$$(2.)\qquad y_r = Y_r + (A_{mr} : A_{m,m-1})\, y_{m-1} \quad (r = 1,\ 2,\ \ldots\ m-2),$$

$$(2^a.)\quad \begin{cases} (A : A_{m,m-1})\, y_{m-1} = \tfrac{1}{2}((A : A_{m,m-1}) + a_{mm})\, Y_m + \tfrac{1}{2}((A : A_{m,m-1}) - a_{mm})\, Y_{m-1} \\ \qquad\qquad - a_{m1} Y_1 - a_{m2} Y_2 \ldots - a_{m,m-2} Y_{m-2}, \\ y_m = Y_{m-1} - Y_m \end{cases}$$

die quadratische Form u übergeführt in

$$(2^b.)\qquad u = a_{11} Y_1^2 + 2 a_{12} Y_1 Y_2 + \cdots + a_{m-2,m-2} Y_{m-2}^2 + \frac{A}{A_{m,m-1}} (Y_{m-1}^2 - Y_m^2).$$

Beweis. Erweitert man das System (2.) um die selbstverständliche Relation $y_{m-1} = (A_{m,m-1} : A_{m,m-1})\, y_{m-1}$, und multiplicirt alsdann die einzelnen Gleichungen derselben mit a_{qr} und $a_{q,m-1}$, so folgt durch Summation (wegen $A_{mm} = 0$):

$$(2^c.)\quad \begin{cases} a_{q1} y_1 + a_{q2} y_2 + \cdots + a_{q,m-1} y_{m-1} = a_{q1} Y_1 + a_{q2} Y_2 + \cdots + a_{q,m-2} Y_{m-2}; \\ \qquad (q = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1). \end{cases}$$

Indem man diese Relationen mit y_q multiplicirt und über q summirt, ergiebt sich

$$a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + \cdots + a_{m-1,m-1} y_{m-1}^2$$
$$= Y_1 . \sum_q a_{q1} y_q + Y_2 . \sum_q a_{q2} y_q + \cdots + Y_{m-2} . \sum_q a_{q,m-2} y_q \quad (q = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1),$$

d. h. unter erneuter Anwendung des Systems $(2^c.)$

$$\sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q = \sum_r \sum_s a_{rs} Y_r Y_s \quad (p,\ q = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1;\quad r,\ s = 1,\ 2,\ \ldots\ m-2).$$

Da gleichzeitig nach (2.)

$$(2^d.)\quad \begin{cases} a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \cdots + a_{m,m-1} y_{m-1} \\ = a_{m1} Y_1 + a_{m2} Y_2 + \cdots + a_{m,m-2} Y_{m-2} + \dfrac{A}{A_{m,m-1}}\, y_{m-1}, \end{cases}$$

so wird die quadratische Form:

$$u = \sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q + y_m (2 a_{m1} y_1 + \cdots + 2 a_{m,m-1} y_{m-1} + a_{mm} y_m)$$

---

*) Im Hinblick auf die Gleichung $A = a_{m1} A_{m1} + a_{m2} A_{m2} + \cdots + a_{m,m-1} A_{m,m-1} + a_{mm} A_{mm}$ ist für $A_{mm} = 0$ mindestens eine der Grössen $A_{m1}, A_{m2}, \ldots A_{m,m-1}$ von Null verschieden.

**) Die Substitution (2.) ist im Grunde identisch mit derjenigen, welche aus dem Lemma 1 vermöge Ersetzung von m durch $m-1$ hervorgeht.

vermöge des Systems (2.) übergehen in:

$$u = \sum_r\sum_s a_{rs} Y_r Y_s + y_m (2 a_{m1} Y_1 + 2 a_{m2} Y_2 + \cdots + 2 a_{m,m-2} Y_{m-2}$$
$$+ \frac{2A}{A_{m,m-1}} y_{m-1} + a_{mm} y_m),$$

oder bei Einführung der Zeichen Y_{m-1} und Y_m nach (2^b.) in:

$$u = \sum_r\sum_s a_{rs} Y_r Y_s + \frac{A}{A_{m,m-1}} (Y_{m-1} - Y_m)(Y_{m-1} + Y_m);\ \text{q. e. d.}$$

Mit Rücksicht auf das Folgende bemerken wir noch, dass eine Form u, welche den Bedingungen des Lemma 2. Genüge leistet und reelle Coefficienten a_{ik} besitzt, nie definit sein kann, d. h. dass u durch passende Bestimmung der Veränderlichen y_i Zahlenwerthe mit entgegengesetztem Vorzeichen anzunehmen vermag. Bestimmt man nämlich gemäss den Relationen (2.) und (2^a.) die y_i derart, dass $Y_1 = 0, \ldots Y_{m-2} = 0$, dagegen Y_{m-1} und Y_m das eine Mal resp. 0 und 1, das andere Mal 1 und 0 werden, so erhält u das eine Mal den Werth $A:A_{m,m-1}$, das andere Mal den Werth $-(A:A_{m,m-1})$.

Durch Combinirung der beiden Lehnsätze 1. und 2. lässt sich nunmehr eine beliebige quadratische Form

$$f = \sum_\varkappa\sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots \nu)$$

mit nicht verschwindender Determinante: $\varDelta_n = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{nn})$ in eine Summe von Quadraten, wie folgt, verwandeln. Ist irgend eine Hauptunterdeterminante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, etwa $\varDelta_{n-1} = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{n-1,n-1})$, von Null verschieden, so giebt es nach dem Lemma 1. eine Substitution

$$x_1 = x_1' + \alpha_1^{(n)} x_n; \quad \ldots \quad x_{n-1} = x_{n-1}' + \alpha_{n-1}^{(n)} x_n,$$

welche f überführt in

$$f = a_{11} x_1'^2 + 2 a_{12} x_1' x_2' + \cdots + a_{n-1,n-1} x_{n-1}'^2 + \frac{\varDelta_n}{\varDelta_{n-1}} x_n^2.$$

Wird dagegen $\varDelta_{n-1} = 0$, während etwa $\dfrac{\partial \varDelta_n}{\partial a_{n,n-1}}$ von Null verschieden, so kann man nach dem Lemma 2. lineare Functionen $x_1', x_2', \ldots x_n'$ der $x_\varkappa$ finden, derart dass:

$$f = a_{11} x_1'^2 + 2 a_{12} x_1' x_2' + \cdots + a_{n-2,n-2} x_{n-2}'^2 + (A:A_{n,n-1})(x_{n-1}'^2 - x_n'^2).$$

In beiden Fällen besitzen die von f abgetrennten quadratischen Formen

$$\sum_\mu\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\mu' x_\nu' \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n-1 \quad \text{oder} \quad = 1, 2, \ldots n-2)$$

nicht verschwindende Discriminanten

$$\Sigma \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{n-1,n-1}) \quad \text{und} \quad \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{n-2,n-2})\text{*)},$$

und können in gleicher Weise weiter reducirt werden wie f selbst.

Man erhält so schliesslich das Theorem, das von mir bereits an anderer Stelle (*Hesse*, Raumgeometrie, dritte Ausgabe, Seite 460) bewiesen worden ist:

Wählt man die Permutation $\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$ der Zahlen $1, 2, 3, \dots r$ *derart, dass keine zwei unmittelbar auf einander folgenden Glieder der Reihe*

$$(3.) \quad \Delta_n, \quad \frac{\partial \Delta_n}{\partial a_{\alpha\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 \Delta_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta}}, \quad \frac{\partial^3 \Delta_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta} \partial a_{\gamma\gamma}}, \quad \dots \quad a_{\nu\nu}, \quad 1$$

verschwinden, so enthält die Form f bei der Transformation in eine Summe von Quadraten genau so viel negative Quadrate, als die Reihe (3.) *Zeichenwechsel darbietet, wenn man bei Zählung der letzteren etwa auftretende Nullen weglässt.*

Nimmt man speciell mit *Jacobi* an, dass keine der Determinanten

$$(3^a.) \quad \Delta_n, \quad \Delta_{n-1}, \quad \dots \quad \Delta_m = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{mm}), \quad \dots \quad a_{11}, \quad 1$$

verschwinde, so kann man durch eine fortlaufende Reihe von Transformationen nach dem Lemma 1. die quadratische Form überführen in:

$$(4.) \quad f = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2 + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} x_{n-1}'^2 + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-3}} x_{n-2}''^2 + \dots + a_{11} x_1^{(n-1)} x_1^{(n-1)}.$$

Dabei wird allgemein für irgend eine ganze Zahl m zwischen 1 und n (incl. der Grenzen) die Form

$$a_{11} x_1^{(n-m)} x_1^{(n-m)} + 2 a_{12} x_1^{(n-m)} x_2^{(n-m)} + \dots + a_{mm} x_m^{(n-m)} x_m^{(n-m)}$$

verwandelt in

$$a_{11} x_1^{(n-m+1)} x_1^{(n-m+1)} + \dots + a_{m-1,m-1} x_{m-1}^{(n-m+1)} x_{m-1}^{(n-m+1)} + \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} x_m^{(n-m)} x_m^{(n-m)}$$

durch eine Substitution der Gestalt:

$$(5.) \quad x_l^{(n-m)} = x_l^{(n-m+1)} + \alpha_l^{(m)} x_n^{(n-m)} \qquad (l = 1, 2, \dots m-1),$$

wofern die Grössen $A_{ml} : A_{mm}$ in (1.) der Kürze halber mit $\alpha_l^{(m)}$ bezeichnet werden. Setzt man in der letzten Gleichung (5.) für m der Reihe nach

---

*) Für $\Delta_{n-2} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{n-2,n-2}$ folgt dies sofort aus der bekannten Identität:

$$\Delta_n \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} \frac{\partial \Delta_n}{\partial a_{n-1,n-1}} - \left(\frac{\partial \Delta_n}{\partial a_{n,n-1}} \right)^2;$$

wegen $\Delta_{n-1} = 0$ *hat daher* Δ_{n-2} *stets das entgegengesetzte Vorzeichen wie* Δ_n.

$n, n-1, \dots m$ und summirt alle so entstehenden Relationen, so ergiebt sich

(6.) $\quad x_l = x_l^{(n-m+1)} + \alpha_l^{(n)} x_n + \alpha_l^{(n-1)} x_{n-1}^{(1)} + \cdots + \alpha_l^{(m)} x_n^{(n-m)} \qquad (l = 1, 2, \dots m-1);$

somit, indem man speciell $l = m-1$ annimmt und nachträglich k an Stelle von $m-1$ substituirt:

(6^a.) $\quad x_k = x_k^{(n-k)} + \alpha_k^{(n)} x_n + \alpha_k^{(n-1)} x_{n-1}^{(1)} + \cdots + \alpha_k^{(k+1)} x_{k+1}^{(n-k-1)} \qquad (k = 1, 2, \dots n-1).$

Will man umgekehrt die Grössen $x_q^{(n-k)}$ durch die x_k ausdrücken, so erwäge man, dass nach (1^b.)

$$a_{q1} x_1^{(n-m)} + a_{q2} x_2^{(n-m)} + \cdots + a_{qm} x_m^{(n-m)} = a_{q1} x_1^{(n-m+1)} + a_{q2} x_2^{(n-m+1)} + \cdots + a_{q,m-1} x_{m-1}^{(n-m+1)},$$

und dass daher durch die successiven Annahmen $m = n, n-1, \dots k+1$ das System sich ergiebt:

(6^b.) $\quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_q} = a_{q1} x_1^{(n-k)} + a_{q2} x_2^{(n-k)} + \cdots + a_{qk} x_k^{(n-k)} \qquad (q = 1, 2, \dots k).$

Diese linearen Gleichungen für die Unbekannten $x_1^{(n-k)}, x_2^{(n-k)}, \dots x_k^{(n-k)}$ besitzen ex hypothesi eine von Null verschiedene Determinante ($\varDelta_k$) und können in bekannter Weise aufgelöst werden. Sind in der Darstellung (4.) die Coefficienten sämmtlicher Quadrate mit dem gleichen Vorzeichen versehen, so ist die Form f definit und kann für reelle $a_{\varkappa\lambda}$ und $x_\varkappa (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots n)$ keine Zahlenwerthe mit entgegengesetztem Vorzeichen annehmen. Dieser Satz gilt auch umgekehrt:

Für eine wesentlich positive oder negative Form müssen die Glieder der Reihe (3^a.) sämmtlich positiv sein oder lauter Zeichenwechsel darbieten.

Beweisen wir zunächst, ***dass keine Determinante in*** (3^a.) ***verschwinden kann.*** Wäre nämlich etwa $\varDelta_{m-1} (m = n, n-1, \dots 2)$ die erste verschwindende Determinante in der Reihe (3^a.), so geht f durch die Annahme

$$x_n = x_{n-1} = \cdots = x_{m+1} = 0$$

über in

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{mm} x_m^2,$$

d. h. in eine quadratische Form, welche den Bedingungen des Lemma 2. Genüge leistet und somit durch passende Bestimmung der willkürlichen Veränderlichen $x_1, \dots x_m$ ihr Zeichen zu wechseln vermag*).

*) Unabhängig von den Ausführungen zu Lemma 2. und besonders für den ersten Vortrag in der Theorie der Maxima und Minima geeignet ist der folgende Beweis. Man setze in $u \equiv \sum_k \sum_l a_{kl} x_k x_l$ $(k, l = 1, 2 \dots m)$ die Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_{m-1}$ resp.

Eine definite Form f kann daher stets in die Form (4.) gebracht werden, und die ihr zugehörigen Determinantenquotienten $(\Delta_i : \Delta_{i-1})$ müssen sämmtlich das gleiche Vorzeichen haben, da f bei gegentheiliger Annahme bald positiv bald negativ werden könnte.

Uebrigens hätte sich in ganz derselben Weise zeigen lassen:

Die quadratische Form f ist stets dann und nur dann wesentlich negativ (bez. positiv), wenn die Reihe (3.) *für irgend eine bestimmte Permutation $\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$ der Zahlen* 1, 2, ... n *lauter Zeichenwechsel (beziehungsweise Zeichenfolgen) darbietet. Werden also diese Bedingungen von den Gliedern in* (3.) *bei einer beliebigen Permutation der Zahlen* 1, 2, ... n *erfüllt, so haben dieselben auch für jede andere Permutation statt.*

Der Fall, in welchem die Determinante Δ_n gleich Null ist, kann nunmehr leicht erledigt werden. Um die Vorstellung zu fixiren, mögen sämmtliche Subdeterminanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ_n verschwindend angenommen werden, dagegen sei mindestens eine Subdeterminante m^{ten} Grades von Null verschieden, etwa:

$$c = \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \dots & a_{m\varepsilon} \end{vmatrix} = \Sigma \pm (a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{m\varepsilon}),$$

worin $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ irgend welche bestimmte m Zahlen aus der Reihe $1, 2, \dots n$ bedeuten*). Alsdann besteht,

$$f_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

---

gleich $A_{m1}, A_{m2}, \dots A_{m,m-1}$. Alsdann wird wegen $A_{mm} = 0$ für beliebige Werthe von x_m:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_l} \equiv a_{l1} x_1 + a_{l2} x_2 + \dots + a_{lm} x_m = a_{lm} x_m, \quad (l = 1, 2 \dots m-1)$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_m} \equiv a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mm} x_m = A + a_{mm} x_m,$$

und

$$u \equiv \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \dots + \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_m} x_m = x_m (2A + a_{mm} x_m).$$

Da ex hyp. die Determinante A nicht verschwindet, so kann offenbar durch geeignete Verfügung über x_m das Product $x_m \{2A + a_{mm} x_m\}$ sein Zeichen wechseln.

*) Das Raisonnement im folgenden Texte lässt sich ohne Mühe auch auf den Fall anwenden, wenn an die Stelle von 1, 2, ... m irgend welche m andere Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... n treten würden.

gesetzt, für alle Werthe der x_k:

$$(7.)\quad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} & f_1 \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \dots & a_{m\varepsilon} & f_m \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\varepsilon} & f_i \end{vmatrix} = 0,$$
$$(i = m+1,\ m+2,\ \dots\ n),$$

eine Gleichung, welche vermöge Entwickelung der Determinante nach den Elementen der letzten Verticalreihe die Gestalt annehmen möge:

$$(7^a.)\quad c f_i + c_i^{(1)} f_1 + c_i^{(2)} f_2 + \dots + c_i^{(m)} f_m = 0 \quad (i = m+1,\ m+2,\ \dots\ n).$$

Darin ist das System der Grössen c, $c_i^{(1)}$, $c_i^{(2)}$, $\dots$ $c_i^{(m)}$ von den x_i unabhängig, und die Determinante c ex hyp. von Null verschieden. Setzt man daher

$$(8.)\quad x_l = X_l + (c_{m+1}^{(l)} x_{m+1} + c_{m+2}^{(l)} x_{m+2} + \dots + c_n^{(l)} x_n) : c \quad (l = 1,\ 2,\ \dots\ m)$$

und fügt die evidenten Relationen hinzu:

$$x_i = c x_i : c \quad (i = m+1,\ m+2,\ \dots\ n),$$

so folgt durch Multiplication dieser Gleichungen mit a_{kl}, resp. a_{ki} und Summation über l resp. i, unter Rücksichtnahme auf (7^a.):

$$f_k = a_{k1} X_1 + a_{k2} X_2 + \dots + a_{km} X_m \quad (k = 1,\ 2,\ \dots\ m),$$

und

$$\begin{aligned} f &= f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n = X_1 \Sigma a_{k1} x_1 + \dots + X_m \Sigma a_{km} x_m \\ &= X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_m f_m \\ &= a_{11} X_1^2 + 2a_{12} X_1 X_2 + \dots + a_{mm} X_m^2. \end{aligned}$$

Da die x_i völlig willkürlich sind und somit nach (8.) auch den X_l beliebige Werthe zuertheilt werden können, so braucht man an Stelle der Form f lediglich die quadratische Function der m unabhängigen Veränderlichen X_l zu betrachten. Diese letztere besitzt eine nicht verschwindende Discriminante $\Sigma \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{mm})$. Setzt man nämlich in dem Systeme von m Gleichungen

$$(9.)\quad \begin{cases} f'(x_h) = f'(X_1) \dfrac{\partial X_1}{\partial x_h} + f'(X_2) \dfrac{\partial X_2}{\partial x_h} + \dots + f'(X_m) \dfrac{\partial X_m}{\partial x_h} \\ = (\sum\limits_l a_{1l} X_l) \dfrac{\partial X_1}{\partial x_h} + \dots + (\sum\limits_l a_{ml} X_l) \dfrac{\partial X_m}{\partial x_h}, \quad (h = \alpha,\ \beta,\ \dots\ \varepsilon) \end{cases}$$

die Veränderlichen x_{m+1}, x_{m+2}, $\dots$ x_n gleich Null, d. h. nach (8.) $X_l = x_l$, so ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von x_l in (9.)

$$a_{hl} = a_{1l}\frac{\partial X_1}{\partial x_h} + a_{2l}\frac{\partial X_2}{\partial x_h} + \cdots + a_{ml}\frac{\partial X_m}{\partial x_h} \quad (h = \alpha,\ \beta,\ \ldots\ \varepsilon;\ l = 1,\ 2,\ \ldots\ m),$$

also nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten

$$c = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}) \Sigma \pm \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial X_2}{\partial x_\beta} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial x_\varepsilon}\right).$$

Da c nicht verschwindet, so ist jeder der beiden Factoren auf der rechten Seite der letzten Gleichung ebenfalls von Null verschieden.*) Ein anderer Beweis für das Nichtverschwinden von $\Sigma \pm (a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{mm})$, der nur Sätze aus der Determinantentheorie benutzt, ist folgender. Nach Voraussetzung besteht das System von Relationen:

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \ldots & a_{1\varepsilon} & a_{1l} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \ldots & a_{2\varepsilon} & a_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \ldots & a_{m\varepsilon} & a_{ml} \\ a_{h\alpha} & a_{h\beta} & \ldots & a_{h\varepsilon} & a_{hl} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} (h = \alpha, \beta, \ldots \varepsilon) \\ (l = 1, 2, \ldots m), \end{matrix}$$

oder vermöge Entwickelung nach den Elementen der letzten Verticalreihe:

$$a_{1l} c_h^{(1)} + a_{2l} c_h^{(2)} + \cdots + a_{ml} c_h^{(m)} = -a_{hl}.c.$$

Gemäss dem Multiplicationstheorem der Determinanten ist daher

$$\begin{aligned} \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}) . \Sigma \pm (c_\alpha^{(1)} c_\beta^{(2)} \ldots c_\varepsilon^{(m)}) &= (-1)^m c^m \Sigma \pm (a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \ldots a_{\varepsilon m}) \\ &= (-1)^m c^{m+1}. \end{aligned}$$

II. *Sind die Veränderlichen der Form f nicht willkürlich*, sondern durch ν lineare Relationen:

$$(10.) \quad \begin{cases} v \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n = 0, \\ w \equiv w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ t \equiv t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n = 0 \end{cases}$$

mit einander verknüpft, so lässt sich auch jetzt noch für f eine der *Lagrange*schen analoge Transformation in $n-\nu$ Quadrate angeben, und zwar vermittelst zweier anderen Lehnsätze, zu deren conciser Fassung wir folgende Bezeichnungen einführen:

*) Wenn also sämmtliche Subdeterminanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ_n verschwinden, nicht aber alle Subdeterminanten m^{ten} Grades, so hat immer mindestens eine Hauptunterdeterminante m^{ten} Grades einen von Null verschiedenen Werth. Cfr. *Hesse*, Raumgeometrie, 3. Ausgabe, S.S. 453—454.

$$(11.)\quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & v_1 & w_1 & \dots & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & v_2 & w_2 & \dots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & v_m & w_m & \dots & t_m \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(11^a.)\quad A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}},\quad V_i = \frac{\partial A}{\partial v_i},\quad W_i = \frac{\partial A}{\partial w_i},\quad \dots$$

Lemma 3. *Das simultane System der quadratischen Form*

$$(12.)\quad u = \sum_i \sum_k a_{ik} y_i y_k \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots\ m)$$

und der linearen Formen

$$(12^a.)\quad \begin{cases} v \equiv v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_m y_m, \\ w \equiv w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_m y_m, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t \equiv t_1 y_1 + t_2 y_2 + \dots + t_m y_m \end{cases}$$

wird durch die Substitutionen

$$(12^b.)\quad y_p = \eta_p + (A_{m1} : A_{mm}) y_m, \quad (A_{mm} \lessgtr 0), \quad (p = 1,\ 2,\ \dots\ m-1)$$

übergeführt in

$$(12^c.)\quad \begin{cases} u = a_{11}\eta_1^2 + 2a_{12}\eta_1\eta_2 + \dots + a_{m-1,m-1}\eta_{m-1}^2 + (A : A_{mm}) y_m^2 \\ \qquad -2y_m(V_m v + W_m w + \dots + T_m t) : A_{mm}, \end{cases}$$

$$(12^d.)\quad \begin{cases} v = v_1\eta_1 + v_2\eta_2 + \dots + v_{m-1}\eta_{m-1}, \\ w = w_1\eta_1 + w_2\eta_2 + \dots + w_{m-1}\eta_{m-1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t = t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \dots + t_{m-1}\eta_{m-1}. \end{cases}$$

Beweis. Wie beim Lemma 1. wird zunächst nach $(12^b.)$ und auf Grund elementarer Determinantensätze:

$$(12^e.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_p} = a_{p1}\eta_1 + a_{p2}\eta_2 + \dots + a_{p,m-1}\eta_{m-1} - y_m(V_m v_p + W_m w_p + \dots) : A_{mm} \\ \qquad\qquad (p = 1,\ 2,\ \dots\ m-1) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_m} = a_{m1}\eta_1 + a_{m2}\eta_2 + \dots + a_{m,m-1}\eta_{m-1} + y_m(A : A_{mm}) \\ \qquad -y_m(V_m v_m + W_m w_m + \dots + T_m t_m) : A_{mm}, \end{cases}$$

somit

$$u = \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_1}y_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y_{m-1}}y_{m-1} + \frac{\partial u}{\partial y_m}y_m$$
$$= \eta_1\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_1} + \eta_2\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_2} + \cdots + \eta_{m-1}\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_{m-1}} + y_m^2(A:A_{mm})$$
$$-y_m(V_m v + W_m w + \cdots + T_m t):A_{mm},$$

welche Gleichung das fragliche Lemma erweist, wenn man das unmittelbar ersichtliche System (12^d.) benutzt und die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial y_p}$ ($p = 1, 2, \ldots m-1$) durch ihre Werthe aus (12^c.) ersetzt.

Lemma 4. *Ist für $A \lesseqgtr 0$ die Subdeterminante A_{mm} gleich Null, dagegen $A_{m,m-1}$ von Null verschieden*); setzt man ferner der Kürze wegen*

$$(13.)\quad \begin{cases} \Delta_{qm} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial a_{m-1,m-1}\partial a_{qm}}, & (q = 1, 2, \ldots m-2, m) \\ V_m^{(m-1)} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial a_{m-1,m-1}\partial v_m}, & W_m^{(m-1)} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial a_{m-1,m-1}\partial w_m}, \quad \ldots \end{cases}$$

so bestehen vermöge der Substitutionen:

$$(13^a.)\qquad y_\nu = \eta_\nu + \frac{A_{\nu m}}{A_{m-1,m}}y_{m-1} + \frac{\Delta_{\nu m}}{\Delta_{mm}}y_m \quad (\nu = 1, 2, \ldots m-2)$$

die Identitäten:

$$(13^b.)\quad \begin{cases} u = \sum_r\sum_s a_{rs}\eta_r\eta_s + \{y_{m-1}^2 - (y_{m-1}-y_m)^2\}A:A_{m,m-1} \\ \quad -2(v V_m + w W_m + \cdots + t T_m)y_{m-1}:A_{m,m-1} \\ \quad -2(v V_m^{(m-1)} + w W_m^{(m-1)} + \cdots + t T_m^{(m-1)})y_m:\Delta_{m,m} \\ \qquad (r, s = 1, 2, \ldots m-2); \end{cases}$$

$$(13^c.)\quad \begin{cases} v = v_1\eta_1 + v_2\eta_2 + \cdots + v_{m-2}\eta_{m-2}, \\ w = w_1\eta_1 + w_2\eta_2 + \cdots + w_{m-2}\eta_{m-2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t = t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \cdots + t_{m-2}\eta_{m-2}. \end{cases}$$

Beweis. Definirt man Y_r durch:

$$(14.)\qquad y_r = Y_r + (A_{mr}:A_{m,m-1})y_{m-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots m-2),$$

so wird nach Hinzufügung der Identität

$$y_{m-1} = (A_{m,m-1}:A_{m,m-1})y_{m-1}$$

---

*) A ist offenbar eine homogene Function $(n-\nu)^{\text{ten}}$ Grades der Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ und befriedigt daher die Gleichung $(n-\nu)A = \Sigma_\varkappa\Sigma_\lambda A_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$. Dieselbe zeigt, dass stets mindestens eine Subdeterminante (etwa $A_{m,m-1}$) von Null verschieden ist.

und mit Rücksicht auf $A_{mm} = 0$:

$$(14^a.) \quad \begin{cases} v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_{m-1} y_{m-1} = v_1 Y_1 + v_2 Y_2 + \cdots + v_{m-2} Y_{m-2} \\ w_1 y_1 + w_2 y_2 + \cdots + w_{m-1} y_{m-1} = w_1 Y_1 + w_2 Y_2 + \cdots + w_{m-2} Y_{m-2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Ferner ist:

$$(14^b.) \quad \begin{cases} a_{p1} y_1 + a_{p2} y_2 + \cdots + a_{p,m-1} y_{m-1} = a_{p1} Y_1 + a_{p2} Y_2 + \cdots + a_{p,m-2} Y_{m-2} \\ \quad -(v_p V_m + w_p W_m + \cdots) \dfrac{y_{m-1}}{A_{m,m-1}} \quad (p = 1, 2, \ldots m-1), \end{cases}$$

somit:

$$\sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q = Y_1 \sum_p a_{1p} y_p + \cdots + Y_{m-2} \sum a_{m-2,p} y_p$$

$$-\{\sum_p v_p y_p . V_m + \sum_p w_p y_p . W_m + \cdots\} \frac{y_{m-1}}{A_{m,m-1}} \quad (p, q = 1, 2, \ldots m-1),$$

oder mit Benutzung von ($14^b.$):

$$\sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q = \sum_r \sum_s a_{rs} Y_r Y_s - 2\{V_m . \sum_p v_p y_p + W_m . \sum_p w_p y_p + \cdots\} : A_{m,m-1}$$
$$(r, s = 1, 2, \ldots m-2).$$

Da überdies

$$(14^c.) \quad \begin{cases} a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \cdots + a_{m,m-1} y_{m-1} = a_{m1} Y_1 + a_{m2} Y_2 + \cdots + a_{m,m-2} Y_{m-2} \\ \quad + \dfrac{A}{A_{m,m-1}} y_{m-1} - (v_m V_m + w_m W_m + \cdots) \dfrac{y_{m-1}}{A_{m,m-1}}, \end{cases}$$

so geht die quadratische Form u, d. h.

$$\sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q + 2 y_m \sum_p a_{mp} y_p + a_{mm} y_m^2$$

vermöge ($13^a.$) nach Ersetzung von y_m durch den Buchstaben Y_m über in:

$$(14^d.) \quad \begin{cases} u = \sum_\varrho \sum_\sigma a_{\varrho\sigma} Y_\varrho Y_\sigma + 2(A : A_{m,m-1}) y_{m-1} Y_m - 2(V_m v + W_m w + \cdots) y_{m-1} : A_{m,m-1}, \\ \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, 3, \ldots m-2, m). \end{cases}$$

Aber nach Lemma 3. erhält man durch die Substitutionen:

$$(15.) \quad Y_r = \eta_r + (\varDelta_{rm} : \varDelta_{mm}) Y_m \quad (r = 1, 2, \ldots m-2),$$

$$(15^a.) \quad \begin{cases} \sum_\varrho \sum_\sigma a_{\varrho\sigma} Y_\varrho Y_\sigma = \sum_r \sum_s a_{rs} \eta_r \eta_s + (A_{m-1,m-1} : \varDelta_{mm}) Y_m^2 - 2 V_m^{(m-1)} Y_m : \varDelta_{mm} - \cdots \\ \sum v_\varrho Y_\varrho = \sum v_r \eta_r, \quad \sum w_\varrho Y_\varrho = \sum w_r \eta_r, \quad \ldots \\ (\varrho = 1, 2, \ldots m-2, m; \; r, s = 1, 2, \ldots m-2), \end{cases}$$

Relationen, welche im Vereine mit (14.) — ($14^d.$) das Lemma 4. erhärten, wenn man nachträglich wieder y_m an Stelle von Y_m setzt und noch berücksichtigt, dass wegen $A_{mm} = 0$

$$A : A_{m,m-1} = -(A_{m-1,m-1} : \varDelta_{mm})^{*)}.$$

Auf Grund der beiden Lehnsätze 3. und 4. ist es nunmehr leicht, eine quadratische Form $\Sigma\Sigma a_{ks} x_k x_s$, deren Veränderliche den ν Gleichungen (10.) Genüge leisten, durch eine Reihe successiver Transformationen in eine Summe von $n-\nu$ unabhängigen Quadraten zu verwandeln, wenigstens so lange die Determinante A_n**), die aus (11.) für $m=n$ hervorgeht, nicht verschwindet.

Wenn nämlich eine beliebige Hauptunterdeterminante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, etwa A_{n-1}, von Null verschieden ist, so kann man nach Lehnsatz 3. eine lineare Substitution angeben, welche bei völliger Willkürlichkeit von x_n die Form f in die Gestalt überführt:

$$f = a_{11} x'_1 x'_1 + 2 a_{12} x'_1 x'_2 + \cdots + a_{n-1,n-1} x'_{n-1} x'_{n-1} + (A_n : A_{n-1}) x_n^2,$$

und bei welcher die $x'_1 \dots x'_{n-1}$ durch die Relationen verknüpft sind:

$$\begin{aligned}
v_1 x'_1 + v_2 x'_2 + \cdots + v_{n-1} x'_{n-1} &= 0,\\
w_1 x'_1 + w_2 x'_2 + \cdots + w_{n-1} x'_{n-1} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
t_1 x'_1 + t_2 x'_2 + \cdots + t_{n-1} x'_{n-1} &= 0.
\end{aligned}$$

Ist dagegen $A_{nn} = 0$ und $A_{n,n-1} \lesseqgtr 0$, so lässt sich auf Grund des Lemma 4. f verwandeln in:

$$f = a_{11} x_1'^2 + 2 a_{12} x'_1 x'_2 + \cdots + a_{n-2,n-2} x_{n-2}'^2 + \frac{A_{n-1,n-1}}{\varDelta_{mm}} \left((x_{n-1} - x_n)^2 - x_{n-1}^2\right),$$

während gleichzeitig die x'_r $(r = 1, 2, \dots n-2)$ durch die Gleichungen beschränkt sind:

$$\begin{aligned}
v_1 x'_1 + v_2 x'_2 + \cdots + v_{n-2} x'_{n-2} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
t_1 x'_1 + t_2 x'_2 + \cdots + t_{n-2} x'_{n-2} &= 0.
\end{aligned}$$

Man kann so, indem man die successiven Transformationen genügend weit fortsetzt, $n-m$ unabhängige Quadrate von f abtrennen, während die Variabeln der übrig bleibenden quadratischen Form, sie heisse etwa:

---

*) Es ist bekanntlich identisch

$$A \varDelta_{mm} = A_{mm} A_{m-1,m-1} - A_{m,m-1}^2.$$

Für $A_{mm} = 0$ ist daher $\varDelta_{mm}$ stets entgegengesetzten Vorzeichens wie A.

**) *Allgemein möge A_i die aus A für $m = i$ sich ergebende Determinante sein.*

$$u = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + \cdots + a_{mm}y_m^2 \;*)$$

den Bedingungen zu genügen haben:

$$\begin{aligned} v_1y_1 + v_2y_2 + \cdots + v_my_m &= 0,\\ w_1y_1 + w_2y_2 + \cdots + w_my_m &= 0,\\ \cdots\cdots&\cdots\\ t_1y_1 + t_2y_2 + \cdots + t_my_m &= 0. \end{aligned}$$

Die fortlaufenden Substitutionen sind jedenfalls so lange möglich, bis entweder m gleich $\nu+1$ oder gleich $\nu+2$ geworden ist. Die erstere Annahme ist erlaubt, wenn $A_{\nu+1} \lesseqgtr 0$, die zweite dagegen, wenn $A_{\nu+2} \lesseqgtr 0$ und $A_{\nu+1} = 0$. Für $A_{\nu+1} \lesseqgtr 0$ ist jedenfalls auch mindestens eine der Grössen $\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\alpha}}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots \nu+1)$ von Null verschieden, da in der Identität

$$A_{\nu+1}\frac{\partial^2 A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\alpha}\,\partial a_{\beta\beta}} = \frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\alpha}}\,\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\beta\beta}} - \left(\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\beta}}\right)^2$$

einestheils die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\alpha}\,\partial a_{\beta\beta}}$ sämmtlich verschwinden**), anderntheils nicht alle Subdeterminanten $\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\beta}}$ wegen

$$(n-\nu-1)A_{\nu+1} = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\beta}}\, a_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots \nu+1)$$

Null sein dürfen. Man kann daher das Lemma 3. nochmals anwenden, und die schliesslich übrig bleibende quadratische Form wird alsdann, wenn etwa $\alpha = \nu+1$ angenommen wird, von der Gestalt:

$$(16.)\qquad a_{11}\eta_1^2 + 2a_{12}\eta_1\eta_2 + \cdots + a_{\nu\nu}\eta_\nu^2,$$

mit den zugehörigen ν Bedingungen:

$$(16^a.)\qquad \begin{cases} v_1\eta_1 + v_2\eta_2 + \cdots + v_\nu\eta_\nu = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \cdots + t_\nu\eta_\nu = 0. \end{cases}$$

Da nach der gemachten Voraussetzung $\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\nu+1,\nu+1}}$, somit auch, gemäss der Gleichung:

---

*) Das im Texte anzuwendende Raisonnement gilt natürlich auch dann, wenn nöthigenfalls die Combination $1, 2, \ldots m$ durch irgend eine andere Combination m^{ter} Classe aus den Zahlen $1, 2, \ldots n$ ersetzt werden müsste.

**) Cfr. *Baltzer*, Determinanten, (4. Ausgabe), §. 4, 2.

$$\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\nu+1,\nu+1}} = (-1)^\nu \Sigma \pm (v_1 w_2 \dots t_\nu) \Sigma \pm (v_1 w_2 \dots t_\nu) \text{ *}),$$

die Determinante $\Sigma \pm (v_1 w_2 \dots t_\nu)$ selbst nicht Null ist, so muss nach (16^a.) $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_\nu = 0$ werden, d. h. die quadratische Form in (16.) verschwindet.

Wäre dagegen $A_{\nu+2} \gtrless 0$ und $A_{\nu+1} = 0$, so sind die Bedingungen des Lemma 4. erfüllt, und lassen sich zwei weitere Quadrate absondern, während die schliesslich übrig bleibende quadratische Form wieder Null wird.

Zusammenfassend kann man im Hinblicke auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen und auf den Umstand, dass die Determinanten A und Δ_{mm} in Lemma 4. entgegengesetzten Vorzeichens sind, das Theorem aussprechen:

Für $A_n \lesseqgtr 0$ lassen sich aus der Reihe 1, 2, ... *n stets $n-\nu-1$ Zahlen $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ derart finden, dass von den Grössen*

$$(17.) \qquad A_n, \quad \frac{\partial A_n}{\partial a_{\alpha\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 A_n}{\partial a_{\alpha\alpha}\partial a_{\beta\beta}}, \quad \dots \quad \frac{\partial^{n-\nu-1} A_n}{\partial a_{\alpha\alpha}\partial a_{\beta\beta}\dots\partial a_{\varepsilon\varepsilon}}, \quad (-1)^\nu$$

keine zwei unmittelbar auf einander folgende verschwinden. Die Anzahl Zeichenwechsel, welche die Reihe (17.) *nach Weglassung der etwa vereinzelt auftretenden Nullen besitzt, ist genau gleich der Anzahl negativer Quadrate, welche eine den Bedingungen* (10.) *unterworfene quadratische Form f bei der Verwandlung in eine Summe von* $(n-\nu)$ *Quadraten darbietet.*

Aehnlich lässt sich auch das andere Theorem des Abschnitts I übertragen:

Soll f beim Bestehen der Gleichungen (10.) (*die $x_\varkappa$, $a_{\varkappa\lambda}$, $v_\varkappa$, $w_\varkappa \dots t_\varkappa$ als reell vorausgesetzt*) *keine Zahlenwerthe mit entgegengesetztem Vorzeichen annehmen können, so muss die Reihe* (17.) *für mindestens eine Combination* $(n-\nu-1)^{ter}$ *Classe $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ aus der Zahlenreihe* 1, 2, ... *n entweder lauter Zeichenwechsel oder lauter Zeichenfolgen darbieten.*

Um auf den Fall $A_n = 0$ näher einzugehen, wollen wir annehmen, dass sämmtliche Subdeterminanten verschwinden, welche aus A_n vermöge gleichzeitiger Unterdrückung von beliebigen $(m-1)$ Horizontalreihen und $(m-1)$ Verticalreihen der $a_{\varkappa\lambda}$ hervorgehen, dass dagegen mindestens *eine* Subdeterminante von Null verschieden sei, welche die $a_{\varkappa\lambda}$ nur in m Horizontalreihen und in m Verticalreihen enthält. Sei etwa, unter $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$

*) *Baltzer*, l. c.

irgend welche bestimmte m Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... n verstanden:

$$c \equiv \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} & v_1 & \dots & t_1 \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} & v_2 & \dots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \dots & a_{m\varepsilon} & v_m & \dots & t_m \\ v_\alpha & v_\beta & \dots & v_\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ t_\alpha & t_\beta & \dots & t_\varepsilon & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \lessgtr 0.$$

Alsdann ist e. h. für alle Werthe der $x_\varkappa$

$$(18.)\quad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} & v_1 & \dots & t_1 & f_1 \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} & v_2 & \dots & t_2 & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \dots & a_{m\varepsilon} & v_m & \dots & t_m & f_m \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\varepsilon} & v_i & \dots & t_i & f_i \\ v_\alpha & v_\beta & \dots & v_\varepsilon & 0 & \dots & 0 & v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_\alpha & t_\beta & \dots & t_\varepsilon & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix} \equiv 0,$$
$$(i = m+1,\quad m+2 \quad \dots \quad n)$$

welche Gleichung durch Entwickelung nach den Elementen der letzten Verticalreihe übergehen möge in:

$$(18^a.)\quad f_i c + f_1 c_i^{(1)} + f_2 c_i^{(2)} + \dots + f_m c_i^{(m)} + v\mathfrak{B}_i + \dots + t\mathfrak{T}_i \equiv 0.$$

Für alle $x_\varkappa$, welche das System (10.) befriedigen, wird diese Gleichung (18^a.) in der Form vollkommen identisch mit (7^a.), so dass durch Substitutionen der Gestalt (8.) die den Bedingungen (10.) unterworfene Form f übergeht in:

$$(19.)\quad f = a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + \dots + a_{mm}X_m^2,$$

und die Gleichungen $v = 0$, $w = 0$, ... $t = 0$ in:

$$(19^a.)\quad \begin{cases} v_1X_1 + v_2X_2 + \dots + v_mX_m = 0, \\ w_1X_1 + w_2X_2 + \dots + w_mX_m = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_1X_1 + t_2X_2 + \dots + t_mX_m = 0\,^{*}). \end{cases}$$

---

*) Man erwäge, dass nach Definition der $c_i^{(l)}$ in (18^a.):
$v_i c + v_1 c_i^{(1)} + v_2 c_i^{(2)} + \dots + v_m c_i^{(m)} = 0$ etc. $(i = m+1,\ m+2, \dots)$.

Man hat also lediglich die Form $\sum_i \sum_k a_{ik} X_i X_k (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots m)$ zu behandeln, in der die Grössen X_i dem Systeme (19^a.) Genüge leisten. Die zu diesem neuen Systeme gehörige Determinante A (cfr. 11.) besitzt einen von Null verschiedenen Werth, wie man leicht aus dem Umstande schliessen kann, dass die Gleichung (18^a.) für alle Werthe von i zwischen 1 und n (incl. der Grenzen) giltig ist, dass also speciell auch (cfr. Schluss des Abschnitts I):

$$-c a_{hl} = a_{1l} c_h^{(1)} + a_{2l} c_h^{(2)} + \dots + a_{ml} c_h^{(m)} + v_l \mathfrak{V}_l + \dots + t_l \mathfrak{T}_l,$$
$$(h = \alpha,\ \beta,\ \dots\ \varepsilon;\ l = 1,\ 2,\ \dots\ m).$$

Stellt man nämlich die Determinante $\Sigma \pm c_\alpha^{(1)} c_\beta^{(2)} \dots c_\varepsilon^{(m)}$ in der Form dar:

$$\begin{vmatrix} c_\alpha^{(1)} & c_\alpha^{(2)} & \dots & c_\alpha^{(m)} & \mathfrak{V}_\alpha & \mathfrak{W}_\alpha & \dots & \mathfrak{T}_\alpha \\ c_\beta^{(1)} & c_\beta^{(2)} & \dots & c_\beta^{(m)} & \mathfrak{V}_\beta & \mathfrak{W}_\beta & \dots & \mathfrak{T}_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\varepsilon^{(1)} & c_\varepsilon^{(2)} & \dots & c_\varepsilon^{(m)} & \mathfrak{V}_\varepsilon & \mathfrak{W}_\varepsilon & \dots & \mathfrak{T}_\varepsilon \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten:

$$A . \Sigma \pm (c_\alpha^{(1)} c_\beta^{(2)} \dots c_\varepsilon^{(m)}) = (-1)^m c^{m+1}.$$

Darmstadt, im September 1880.