Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.

(Zweite Mitteilung.)*)

Von

Alfred Haar in Göttingen.

Einleitung.

In der Theorie der Reihenentwicklungen nach einem orthogonalen Funktionensystem kann man zwei Arten von Fragestellungen unterscheiden.

Man denkt sich *erstens* eine Funktion $f(s)$ gegeben und bildet in bezug auf das gegebene Orthogonalsystem

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \varphi_3(s),\ \cdots \qquad \left\{\begin{array}{ll}\int_0^1 \varphi_p(s)\,\varphi_q(s)\,ds = 0 & (p \neq q),\\ \int_0^1 \varphi_p^2(s)\,ds = 1 & (p = 1, 2, \cdots)\end{array}\right\}$$

die Fourier-Reihe dieser Funktion

$$\varphi_1(s)\int_0^1 f(t)\,\varphi_1(t)\,dt + \varphi_2(s)\int_0^1 f(t)\,\varphi_2(t)\,dt + \cdots; \tag{1}$$

man sucht nun solche Eigenschaften der Funktion $f(s)$ zu bestimmen, vermöge deren man über die Konvergenz, Divergenz und Summierbarkeit der Reihe (1) entscheiden kann. Zu wesentlich tieferen und schwierigeren Sätzen gelangt man aber

durch die *zweite* Fragestellung. Man denkt sich dabei eine nach den Funktionen des gegebenen Orthogonalsystems fortschreitende überall konvergente Reihe

$$\varphi(s) = a_1\,\varphi_1(s) + a_2\,\varphi_2(s) + a_3\,\varphi_3(s) + \cdots \tag{2}$$

(mit konstanten Koeffizienten $a_1, a_2, \cdots$) gegeben, die eine Funktion $\varphi(s)$ darstellt, und fragt, welche Eigenschaften sich daraus für die dargestellte

*) Die vorliegende Arbeit ist bis auf unwesentliche Änderungen mit meiner im Dezember 1909 der Göttinger philosophischen Fakultät vorgelegten Habilitationsschrift identisch.

Funktion ableiten lassen. Insbesondere ob die Koeffizienten der Reihe (2) die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion sind, d. h. ob

$$a_p = \int_0^1 \varphi(t)\,\varphi_p(t)\,dt \qquad (p = 1, 2, \cdots)$$

ist, und — was ein spezieller Fall dieser Frage ist — ob alle Koeffizienten der Reihe (2) verschwinden müssen, wenn $\varphi(s)$ überall gleich Null ist.

Diese zweite Art von Problemstellung rührt von Riemann her, der zuerst die hier aufgeworfenen Fragen für den Fall der trigonometrischen Reihen in seiner berühmten Habilitationsschrift in Angriff nahm. Die daran anknüpfenden Arbeiten von Cantor und Du Bois-Reymond beantworten insbesondere die zuletzt gestellten Fragen.

Was nun die Theorie der allgemeinen orthogonalen Funktionensysteme, insbesondere die mit den trigonometrischen Funktionen nahe verwandten Sturm-Liouvilleschen Funktionen*) betrifft, so hat man sich bis jetzt ausschließlich mit der ersten Art von Fragestellung beschäftigt; ja man beschränkte sich sogar mit geringen Ausnahmen einfach darauf, Eigenschaften der Funktion $f(s)$ anzugeben, auf Grund deren man auf die Konvergenz der Reihe (1) schließen konnte. Ich habe in meiner Inauguraldissertation**) die Divergenztheorie und Summationstheorie der allgemeinen Orthogonalsysteme in Angriff genommen. Für die Sturm-Liouvilleschen Systeme ergab sich dabei***) das Resultat, daß *die Differenz der n^{ten} Teilsumme der Fourier-Reihe und der Sturm-Liouvilleschen Reihe einer im Lebesgueschen Sinne integrablen Funktion an jeder Stelle gegen Null konvergiert*, woraus ich schloß, daß *die auf die Fouriersche Manier gebildete Sturm-Liouvillesche Reihe einer Funktion an einer Stelle konvergent, diver-*

---

*) Man gelangt zu diesen Funktionensystemen aus dem sogenannten Eigenwertproblem der Differentialgleichungen. Dieses Problem besteht darin, diejenigen Werte des Parameters λ zu bestimmen, bei denen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\,u + \lambda u = 0 \qquad (p(x) > 0)$$

eine Lösung besitzt, die an zwei Stellen, etwa $x = \alpha$ und $x = \beta$ homogene Randbedingungen erfüllt, beispielsweise

$$\frac{du}{dx} - hu = 0 \quad \text{für} \quad x = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \quad \text{für} \quad x = \beta.$$

Man zeigt nun, daß es, wenn die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ bestimmte Stetigkeitsbedingungen befriedigen, stets abzählbar viele solche Parameterwerte gibt und daß die zugehörigen Lösungen ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden.

**) „Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", Dissertation, Göttingen. Abgedruckt Math. Ann. 69 (1910), S. 331—371.

***) Vergl. S. 30 meiner Dissertation (S. 355 des genannten Annalenbandes).

gent bzw. summierbar ist, je nachdem die in ähnlicher Weise gebildete Kosinusreihe dieser Funktion an dieser Stelle konvergent, divergent bzw. summierbar ist).*

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist nun, die Theoreme jener für trigonometrische Reihen auf Riemann zurückgehenden Theorie für die allgemeinen Sturm-Liouvilleschen Reihen zu entwickeln. Es gelingt, alle Sätze dieser Theorie in sinngemäßer Weise auf diese Funktionensysteme zu übertragen; insbesondere beweisen wir

den *Cantorschen Eindeutigkeitssatz*, d. h. den Satz, daß alle Koeffizienten der Sturm-Liouvilleschen Reihe

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + a_3 u_3(x) + \cdots$$

verschwinden, wenn die Reihe überall Null darstellt.**)

Ferner wird das Analogon des *Du Bois-Reymondschen Satzes* abgeleitet, der aussagt, daß die Koeffizienten der überall konvergenten Reihe

$$u(x) = a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + a_3 u_3(x) + \cdots$$

auf die Fouriersche Manier aus $u(x)$ gebildet werden, wenn diese Funktion dem Betrage nach für jeden Wert von x unterhalb einer oberen Grenze bleibt.

Schließlich erhält man die den Riemannschen Bedingungen für die Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe analogen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Sturm-Liouvillesche Reihe.

Die Grundlage dieser ganzen Untersuchung ist aber ein Satz, der in dieser Theorie dieselbe Rolle spielt, wie das bekannte *Riemannsche Theorem* in der Lehre der trigonometrischen Reihen. Der betreffende Satz Riemanns, der das Hauptresultat seiner Abhandlung bildet, ist folgender: Die trigonometrische Reihe mit gegen Null konvergierenden Koeffizienten

$$f(x) = \sum_{n=0,1,2,\cdots} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergiere an der Stelle $x = a$. Riemann bildet daraus, indem er jede trigonometrische Funktion in dieser Reihe durch den zugehörigen negativen *Eigenwert*, d. h. durch $-n^2$, dividiert***), eine neue Reihe

---

*) Dieser in meiner Dissertation bewiesene Satz enthält als Spezialfälle die Theoreme, die seitdem von Herrn W. Stekloff in seiner Note „Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire...", Roma Acc. Linc. Rend. 1910, auf andere Weise abgeleitet wurden.

**) Dieser Satz wurde für die nach den Legendreschen Polynomen fortschreitenden Reihen von Dini bewiesen. Diese Reihen sind aber keine regulären Sturm-Liouvilleschen Reihen, da in der Differentialgleichung der Legendre-Polynome $p(x) = 1 - x^2$ für $x = \pm 1$ verschwindet.

***) Es ist nämlich

$$\frac{d^2 \cos nx}{dx^2} + n^2 \cos nx = 0, \qquad \frac{d^2 \sin nx}{dx^2} + n^2 \sin nx = 0.$$

$$F(x) = -\sum_{n=0,1,2,\cdots} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

die offenbar gleichmäßig konvergiert und eine stetige Funktion darstellt; er zeigt nun, daß

$$\underset{\delta=0}{\mathrm{L}} \frac{F(a+\delta) - 2F(a) + F(a-\delta)}{\delta^2} = f(a)$$

ist. — Betrachten wir nun ein beliebiges Sturm-Liouvillesches Funktionensystem

$$v_1(z),\ v_2(z),\ v_3(z),\ \cdots,$$

das etwa aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + Qv + \lambda v = 0$$

entspringt*), und sei λ_n der zu $v_n(z)$ gehörige Eigenwert. Wir werden dann im Anschluß an das obige Theorem folgenden Satz beweisen:

Ist $a_1, a_2, a_3, \cdots$ *eine gegen Null konvergierende Zahlenfolge und konvergiert die Reihe*

(3) $$f(z) = a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + a_3 v_3(z) + \cdots$$

an der Stelle $z = a$, *so konvergiert die neue Reihe, die wir dadurch erhalten, daß wir in* (3) *jede Funktion durch den zugehörigen negativen Eigenwert* $(-\lambda_n)$ *dividieren*

$$F(z) = -\frac{a_1}{\lambda_1} v_1(z) - \frac{a_2}{\lambda_2} v_2(z) - \frac{a_3}{\lambda_3} v_3(z) - \cdots$$

absolut und gleichmäßig für jedes z *und stellt daher eine stetige Funktion* $F(z)$ *dar. Wir beweisen ferner die Limesgleichung*

$$\underset{\delta=0}{\mathrm{L}} \left(\frac{F(a+\delta) - 2F(a) + F(a-\delta)}{\delta^2} + Q(a)\, F(a) \right) = f(a).$$

Man leitet aus diesem allgemeinen Theorem sodann mit Leichtigkeit die oben genannten Verallgemeinerungen des Cantorschen und Du Bois-Reymondschen Satzes ab.

§ 1.

Die Verallgemeinerung des Riemannschen Theorems.

Um das Orthogonalsystem $u_1(x), u_2(x), \cdots$ zu studieren, das aus der Differentialgleichung (mit analytischen Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$)

(4) $$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u + \lambda u = 0 \qquad (p(x) > 0)$$

---

*) Es ist keine wesentliche Einschränkung, daß wir die Differentialgleichung in dieser speziellen Form angenommen haben, da sich die allgemeine Gleichung durch eine einfache Transformation auf diese Form bringen läßt, vgl. S. 62 der vorliegenden Arbeit.

bei der Randbedingung

$$\frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ für } x = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{du}{dx} + Hu = 0 \text{ für } x = \beta \tag{5}$$

entspringt, wenden wir auf die vorgelegte Differentialgleichung eine in dieser Theorie übliche Transformation an, die von Liouville herrührt. Wir setzen

$$z = \int_\alpha^x (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx, \qquad v(z) = (p(x))^{\frac{1}{4}} u(x).$$

Unsere Differentialgleichung geht dann in die neue Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dz^2} + Qv + \lambda v = 0 \tag{4'}$$

über, wobei $Q(z)$ eine durch die Funktionen $p(x)$, $q(x)$ leicht ausdrückbare analytische Funktion bedeutet. Die Randbedingungen werden

$$\frac{dv}{dz} - h'v = 0 \text{ für } z = 0, \quad \frac{dv}{dz} + H'v = 0 \text{ für } z = \pi, \tag{5'}$$

wobei wir der Einfachheit halber

$$\int_\alpha^\beta (p(x))^{-\frac{1}{2}} dx = \pi$$

angenommen haben, was man ja durch eine Multiplikation der unabhängigen Variablen stets erreichen kann. Wir bezeichnen die Sturm-Liouvilleschen Funktionen, die aus der Differentialgleichung (4') entspringen, mit

$$v_1(z), \; v_2(z), \; v_3(z), \; \cdots,$$

die zugehörigen Eigenwerte mit λ_n und beweisen unsere auf S. 40 und 41 ausgesprochenen Theoreme vorab für dieses Funktionensystem.

Wir nehmen zu diesem Zwecke an, daß die unendliche Reihe

$$f(z) = a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + a_3 v_3(z) + \cdots,$$

deren Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \cdots$ gegen Null konvergieren, an der Stelle $z = a$ konvergiert und bilden — zunächst ganz formal — die unendliche Reihe

$$F(z) = -\frac{a_1 v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2 v_2(z)}{\lambda_2} - \frac{a_3 v_3(z)}{\lambda_3} - \cdots, \tag{6}$$

von der wir behaupten, daß sie *absolut und für jeden in Betracht kommenden Wert von z gleichmäßig konvergiert.* Um dies zu zeigen, benutzen wir eine von Liouville herrührende und von Hobson*) verschärfte asymptotische

*) London Math. Soc. Proc. (2) 6 (1908), S. 349.

Darstellung des n^{ten} Gliedes unseres Orthogonalsystems und des n^{ten} Eigenwertes:

$$
(7)\qquad \begin{aligned} v_n(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz + \frac{\beta(z)\sin nz}{n} + \frac{\alpha_n(z)}{n^2}, \\ \lambda_n &= \left(n + \frac{\gamma_n}{n}\right)^2, \end{aligned}
$$

wobei die analytischen Funktionen $\beta(z)$, $\alpha_n(z)$ und die Größen γ_n unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze A bleiben.

Aus diesen Formeln entnehmen wir unmittelbar, daß die Funktionen $v_n(z)$ unterhalb einer von n und z unabhängigen oberen Grenze bleiben und daß die Summe der reziproken Eigenwerte

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots$$

absolut konvergiert; daraus schließen wir, daß die Reihe (6) absolut und gleichmäßig konvergiert und eine stetige Funktion $F(z)$ darstellt.

Um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, bemerken wir schon hier, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_n}\right)$$

absolut konvergiert, da ihr n^{tes} Glied für hinreichend große Werte von n dem Betrage nach kleiner als

$$\frac{A(2n^2 + A)}{n^2\left(n - \frac{A}{n}\right)^2}$$

ist.

Führen wir zur Abkürzung für den zweiten mittleren Differenzenquotienten einer beliebigen Funktion $\Phi(z)$ an der Stelle $z = a$ die Bezeichnung

$$\frac{D''_\delta\,\Phi(a)}{\delta^2} = \frac{\Phi(a+\delta) - 2\,\Phi(a) + \Phi(a-\delta)}{\delta^2}$$

ein, so lautet der die *Verallgemeinerung des Riemannschen Theorems darstellende Satz*, den wir nun beweisen wollen, folgendermaßen:

$$
(8)\qquad \mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\left\{\frac{D''_\delta F(a)}{\delta^2} + Q(a)\,F(a)\right\} = f(a).
$$

Der Grundgedanke des Beweises ist der, daß man von der Reihe

$$
(6')\qquad F(a) = -\sum_{n=1,2,3,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}v_n(a) = -\sum_{n=1,2,3,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na + \frac{\beta(a)\sin na}{n} + \frac{\alpha_n(a)}{n^2}\right)
$$

sukzessiv bestimmte Teile abspaltet, bei denen man leicht den Limes des zweiten mittleren Differenzenquotienten berechnen kann, bis man zu einem Rest gelangt, auf den unmittelbar das Riemannsche Theorem anwendbar ist.

Unser Beweis zerfällt danach in drei Teile.

Wir berechnen *zuerst* den in (8) angedeuteten Limes für die unendliche Reihe

$$F_1(z) = -\sum_{n=1,2,\cdots} \frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\alpha_n(z)}{n^2},$$

die das letzte Glied von $F(z)$ darstellt und deren absolute und gleichmäßige Konvergenz aus der für alle n und z gültigen Ungleichung $|\alpha_n(z)| < A$ folgt. Bilden wir nun den (8) analogen Limes für das n^{te} Glied dieser Reihe, so finden wir — mit Rücksicht darauf, daß $v_n(z)$ die Differentialgleichung (4') befriedigt — nach einer kleinen Rechnung:

$$\begin{aligned}(9)\quad w_n(z) = -\frac{1}{n^2\lambda_n}\left[\frac{d^2\alpha_n(z)}{dz^2} + Q(z)\alpha_n(z)\right] &= \left(1-\frac{n^2}{\lambda_n}\right)\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz + \frac{\beta(z)}{n}\sin nz\right]\\ &+\frac{1}{\lambda_n}\Bigg[\lambda_n\frac{\alpha_n(z)}{n^2} + \frac{\beta''(z)}{n}\sin nz + 2\beta'(z)\cos nz\\ &\qquad + Q(z)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nz + \frac{\beta(z)}{n}\sin nz\right)\Bigg],\end{aligned}$$

wobei $\beta'(z)$ und $\beta''(z)$ die Ableitungen von $\beta(z)$ nach z bedeuten. Aus der bewiesenen absoluten Konvergenz der Reihen

$$\sum\left(1-\frac{n^2}{\lambda_n}\right), \quad \sum\frac{1}{\lambda_n}$$

und aus dem Umstande, daß die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze bleiben, schließen wir unmittelbar, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots} a_n w_n(z)$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Aus denselben Gründen ist auch die Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots} a_n\frac{Q(z)\,\alpha_n(z)}{n^2\lambda_n}$$

gleichmäßig konvergent, woraus unmittelbar die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$-\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{n^2\lambda_n}\frac{d^2\alpha_n(z)}{dz^2} = \sum_{n=1,2,\cdots} a_n w_n(z) + \sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{n^2\lambda_n}Q(z)\,\alpha_n(z)$$

folgt, die also den Limes des zweiten Differenzenquotienten von $F_1(z)$ an der Stelle $z = a$ darstellt, und wir erhalten folglich:

$$(10)\qquad -\underset{\delta=0}{\mathrm{L}}\left\{\frac{D''_\delta}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\alpha_n(a)}{n^2} + Q(a)\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\alpha_n(a)}{n^2}\right\} = \sum_{n=1,2,\cdots} a_n w_n(a).$$

Um in ähnlicher Weise den entsprechenden Limes für die Funktion

$$F_2(z) = -\sum_{n=1,2,\cdots} \frac{a_n}{\lambda_n}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz + \frac{\beta(z)}{n} \sin nz\right]$$

zu berechnen, beachten wir, daß für zwei beliebige Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ die Identität

$$D''_\delta(f(z)\cdot\varphi(z)) = f(z+\delta)D''_\delta\varphi(z) + [\varphi(z)-\varphi(z-\delta)][f(z+\delta)-f(z-\delta)] + \varphi(z)D''_\delta f(z)$$

gilt. Wenden wir diese Identität auf die Funktion $F_2(z)$ für die Stelle $z = a$ an, so erhalten wir, wenn wir noch zur Abkürzung

$$K_n(a,\delta) = \sin n(a+\delta)D''_\delta\beta(a) + [\beta(a)-\beta(a-\delta)][\sin n(a+\delta)-\sin n(a-\delta)]$$

setzen, die Relation

$$(11)\qquad -\frac{D''_\delta F_2(a)}{\delta^2} = \frac{D''_\delta}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na + \beta(a)\frac{D''_\delta}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin na}{n} + \frac{1}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n n}K_n(a,\delta).$$

Der *zweite* Teil unseres Beweises besteht nun darin, daß wir zeigen, daß

$$(12)\qquad \mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\frac{1}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n n}K_n(a,\delta) = \beta''(a)\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin na}{n} + 2\beta'(a)\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\cos na$$

ist. In der Tat, die beiden rechtsstehenden unendlichen Reihen

$$\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin nz}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\cos nz$$

konvergieren für jeden Wert von z gleichmäßig, und es stellt daher die erste den Limes der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin n(z+\delta)}{n}$$

für $\delta = 0$, die zweite aber den Limes der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n n}\frac{[\sin n(z+\delta)-\sin n(z-\delta)]}{2\delta}$$

für $\delta = 0$ dar. Daraus folgt aber mit Rücksicht auf die zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion $\beta(z)$ unmittelbar die Limesgleichung (12).

Wir führen den Beweis unseres Satzes zu Ende, indem wir *drittens* zeigen, daß auch der Limes der ersten beiden Glieder in (11) existiert, d. h. indem wir die Limesgleichung

$$(13)\qquad \mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\left\{\frac{D_\delta''}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na+\beta(a)\frac{D_\delta''}{\delta^2}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n}{\lambda_n}\frac{\sin na}{n}\right\}$$
$$=-\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n n^2}{\lambda_n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na-\beta(a)\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{a_n n}{\lambda_n}\sin na$$

beweisen. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß der links unter dem Limeszeichen stehende Ausdruck sich auf die Form

$$-\sum_{n=1,2,\cdots}\left[\frac{a_n}{\lambda_n}n^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos na+\beta(a)\frac{a_n n}{\lambda_n}\sin na\right]\left(\frac{\sin n\frac{\delta}{2}}{n\frac{\delta}{2}}\right)^2$$

bringen läßt. Schreiben wir für den Augenblick A_n für den Ausdruck in den eckigen Klammern, so läuft unsere Behauptung auf den Beweis der Limesgleichung

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\sum_{n=1,2,\cdots}A_n\left(\frac{\sin n\frac{\delta}{2}}{n\frac{\delta}{2}}\right)^2=\sum_{n=1,2,\cdots}A_n$$

hinaus. Das ist aber genau der Satz, den Riemann in seiner Habilitationsschrift beweist (vgl. Werke, S. 245).

Durch Addition der Limesgleichungen (10), (12) und (13) ergibt sich aber

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\left\{\frac{D_\delta''F(a)}{\delta^2}+Q(a)F(a)\right\}=\sum_{n=1,2,\cdots}a_n v_n(a)=f(a);$$

damit ist unser Satz in allen Teilen bewiesen.

Wir können aus diesem Satze eine Anwendung auf die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Sturm-Liouvillesche Reihe machen:

Wir sagen im Anschluß an die analogen Definitionen von Riemann, daß die Funktion $f(z)$ durch die Sturm-Liouvillesche Reihe

$$\sum_{n=1,2,\cdots}b_n v_n(z)$$

„darstellbar" ist, wenn die unendliche Reihe

$$F(z)=-\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{b_n}{\lambda_n}v_n(z)$$

eine stetige Funktion $F(z)$ definiert, die so beschaffen ist, daß

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\left\{\frac{D_\delta''F(z)}{\delta^2}+Q(z)F(z)\right\}=f(z)$$

ist. Es ergibt sich dann aus unserem allgemeinen Theorem der folgende

Satz, der eine Verallgemeinerung eines in der Riemannschen Habilitationsschrift für trigonometrische Reihen bewiesenen Satzes ist:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Funktion $f(z)$ durch eine Sturm-Liouvillesche Reihe mit gegen Null konvergierenden Koeffizienten darstellbar sei, sind, daß eine stetige Funktion $F(x)$ existiere von der Beschaffenheit, daß

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\left\{\frac{D_\delta'' F(z)}{\delta^2} + Q(z)F(z)\right\} = f(z)$$

ist und daß die Zahlenfolge

$$\lambda_n \int_0^\pi F(z)\, v_n(z)\, dz$$

mit wachsendem n gegen Null konvergiere.

Es bietet auch keine prinzipielle Schwierigkeit, die zweite dieser Bedingungen in der Weise umzuformen, wie es bei Riemann in der genannten Abhandlung geschieht.

§ 2.

Der Eindeutigkeitssatz.

Bevor wir zu dem Beweise dieses Satzes kommen, wollen wir zwei Bemerkungen vorausschicken.

1. Ist

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} a_n v_n(z) = 0$$

für jeden Wert von z im Intervall $(0, \pi)$, so ist

$$\mathop{\mathrm{L}}_{n=\infty} a_n = 0.$$

Es folgt nämlich aus der asymptotischen Darstellung des n^{ten} Gliedes unseres Funktionensystems durch die Liouville-Hobsonsche Formel, daß man, wenn ein beliebig kleines Intervall $[\alpha, \beta]$ gegeben ist, einen Index m derart bestimmen kann, daß jede der Funktionen

$$v_{m+1}(z),\ v_{m+2}(z),\ v_{m+3}(z),\ \cdots$$

an mindestens einer Stelle dieses Intervalls dem Betrage nach größer als $\frac{1}{2}$ ist. Herr Osgood hat nun bewiesen, daß unsere Behauptung, die für trigonometrische Funktionen zuerst von Cantor bewiesen wurde, für jedes Funktionensystem richtig ist, das die genannte Eigenschaft besitzt.*)

*) Vgl. G. Cantor, J. f. Math. 72; Math. Ann. 4; und Osgood, Amer. Trans. Math. Soc. 10.

2. Ist $F(z)$ eine stetige Funktion von der Beschaffenheit, daß

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\left(\frac{D_\delta'' F(z)}{\delta^2} + Q(z) F(z)\right) = 0$$

ist für jeden Wert von z in einem Intervall, wobei $Q(z)$ eine stetige Funktion bedeutet, so ist $F(z)$ sicherlich eine in diesem Intervall zweimal stetig differenzierbare Funktion und eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + Q(z) F(z) = 0. \tag{14}$$

In der Tat, es folgt aus dem bekannten Schwarzschen Theorem unmittelbar, daß

$$F(z) = -\int_0^z\int_0^\vartheta Q(t) F(t)\, dt\, d\vartheta + c_1 z + c_2$$

ist, woraus man vermöge der Stetigkeit von $Q(z)$ schließt, daß $F(z)$ zweimal stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung (12) befriedigt.

Nehmen wir nun an, es gebe eine Reihe

$$a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + a_3 v_3(z) + \cdots, \tag{15}$$

die im ganzen Intervall gegen Null konvergiert. Vermöge unserer ersten Bemerkung schließen wir aus der Konvergenz dieser Reihe, daß die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \cdots$ gegen Null konvergiert; daher ist die unendliche Reihe

$$V(z) = -\frac{a_1}{\lambda_1} v_1(z) - \frac{a_2}{\lambda_2} v_2(z) - \frac{a_3}{\lambda_3} v_3(z) - \cdots \tag{16}$$

gleichmäßig konvergent und stellt eine stetige Funktion $V(z)$ dar. Unser in § 1 bewiesenes Theorem lehrt nun, daß für jedes z

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0}\left\{\frac{D_\delta'' V(z)}{\delta^2} + Q(z) V(z)\right\} = 0$$

ist, woraus wir mit Hilfe der zweiten Bemerkung folgern, daß $V(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + Q(z) V(z) = 0$$

ist. Da die Reihe (16) gleichmäßig konvergiert, so ist eine gliedweise Integration dieser Reihe gestattet und wir schließen daraus, daß die Koeffizienten dieser Reihe die Fourier-Koeffizienten von $V(z)$ in bezug auf das betrachtete Orthogonalsystem sind; d. h. es ist

$$-\frac{a_n}{\lambda_n} = \int_0^\pi V(z) v_n(z)\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da aber $v_n(z)$ ein Integral der Differentialgleichung*)

$$-\lambda_n v_n(z) = v_n''(z) + Q(z) v_n(z)$$

*) Die Akzente bedeuten Differentiationen nach z.

ist, so folgt aus der letzten Formel

$$a_n = \int_0^\pi V(z)\,[v_n''(z) + Q(z)\,v_n(z)]\,dz\,.$$

Da aber andererseits $V(z)$ die Differentialgleichung

$$V(z)\,Q(z) = -\,V''(z)$$

befriedigt, so erhalten wir:

$$a_n = \int_0^\pi [\,V(z)\,v_n''(z) - v_n(z)\,V''(z)]\,dz,$$

oder

$$a_n = [\,V(z)\,v_n'(z) - V'(z)\,v_n(z)]_0^\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Diese Formel läßt sich mit Hilfe der Randbedingungen

$$v'(z) - h'v(z) = 0 \text{ für } z = 0, \quad v'(z) + H'v(z) = 0 \text{ für } z = \pi,$$

die alle Funktionen $v_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ erfüllen, auf die Form

$$a_n = -\,C\,v_n(\pi) + D\,v_n(0) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

bringen, wobei zur Abkürzung

$$C = V'(\pi) + H'V(\pi), \quad D = V'(0) - h'V(0)$$

gesetzt ist. Mit Rücksicht auf die Formel (7) S. 43 können wir dies noch schreiben:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[D - (-1)^n C] + \frac{1}{n^2}\,[D\,\alpha_n(0) - C\,\alpha_n(\pi)] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da die Funktionen $\alpha_n(z)$ unterhalb einer von n und z unabhängigen Grenze bleiben, so muß

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\;\frac{1}{n^2}\,[D\,\alpha_n(0) - C\,\alpha_n(\pi)] = 0$$

sein; aus dem Umstande, daß die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \cdots$ gegen Null konvergiert, können wir also schließen, daß auch

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}}\,(D - (-1)^n C) = 0$$

ist; d. h. es ist

$$C = 0 \quad \text{und} \quad D = 0$$

und folglich auch

$$a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen, daß alle Koeffizienten der Reihe (15) *verschwinden müssen, wenn diese Reihe im ganzen Intervall Null darstellt.*

Wir haben uns bei dem Beweise dieses Satzes der Einfachheit halber auf den Fall beschränkt, daß die gegebene Reihe ausnahmslos gegen Null konvergiert; wir könnten aber ohne jede Schwierigkeit eine solche Menge von Ausnahmepunkten zulassen, wie es in der Theorie der trigonometrischen Reihen üblich ist.

§ 3.

Das Analogon des Du Bois-Reymondschen Satzes.

Wenn die unendliche Reihe

$$a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + a_3 v_3(z) + \cdots \tag{17}$$

im ganzen Intervall gegen eine Funktion $f(z)$ konvergiert, die für jeden Wert von z im Intervall $[0, \pi]$ dem Betrage nach unterhalb einer oberen Grenze bleibt, so ist

$$a_n = \int_0^\pi f(z)\, v_n(z)\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Wir beweisen den Satz wie folgt*):

Wir schließen zuerst genau so wie oben aus der Konvergenz der Reihe (17), daß die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \cdots$ gegen Null konvergiert, und bilden die stetige Funktion

$$F(z) = -\frac{a_1}{\lambda_1} v_1(z) - \frac{a_2}{\lambda_2} v_2(z) - \frac{a_3}{\lambda_3} v_3(z) - \cdots.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe folgert man, daß

$$-\frac{a_n}{\lambda_n} = \int_0^\pi F(z)\, v_n(z)\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist oder

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^\pi F(z) \left[\frac{d^2 v_n}{dz^2} + Q(z)\, v_n(z)\right] dz \\ &= \int_0^\pi F(z)\, Q(z)\, v_n(z)\, dz + \int_0^\pi F(z)\, \frac{d^2 v_n}{dz^2}\, dz. \end{aligned} \tag{18}$$

Da aber zufolge unseres allgemeinen Theorems (§ 1)

$$\mathop{\mathrm{L}}_{\delta=0} \frac{D_\delta'' F(z)}{\delta^2} = f(z) - Q(z)\, F(z)$$

*) Der Gedankengang unseres Beweises ist dem von Herrn Lebesgue bei dem Beweise des entsprechenden Satzes im Falle der trigonometrischen Reihen ähnlich. Vergl. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, S. 122.

ist, so schließen wir mit Hilfe des bekannten Schwarzschen Satzes und aus dem Umstande, daß $f(z)$ beschränkt bleibt*):

$$F(z) = \int_0^z \int_0^\vartheta \{f(t) - Q(t)\, F(t)\}\, dt\, d\vartheta + az + b,$$

und wir erhalten daher:

$$\int_0^\pi F(z) \frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}\, dz = \int_0^\pi \int_0^z \int_0^\vartheta \{f(t) - Q(t)\, F(t)\} \frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}\, dt\, d\vartheta\, dz$$
$$+ \int_0^\pi (az + b) \frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da alle hier auftretenden Funktionen beschränkt bleiben, so kann man in dem dreifachen Integral in der letzten Formel die Integrationsfolge vertauschen**), und man erhält, indem man zuerst nach z, dann nach ϑ partiell integriert:

$$\int_0^\pi F(z) \frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}\, dz = \int_0^\pi v_n(z)\, [f(z) - Q(z)\, F(z)]\, dz + c_1 v_n'(\pi) - c_2 v_n(\pi)$$
$$- c_3 v_n'(0) + c_4 v_n(0),$$

wobei zur Abkürzung

$$c_1 = \int_0^\pi \int_0^\vartheta [f(t) - Q(t)\, F(t)]\, dt\, d\vartheta + a\pi + b, \qquad c_3 = b,$$
$$c_2 = \int_0^\pi [f(t) - Q(t)\, F(t)]\, dt - a, \qquad c_4 = a$$

gesetzt ist. Setzen wir dies in die Formel (18) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Randbedingungen (5'), S. 42:

$$a_n = \int_0^\pi f(z)\, v_n(z)\, dz + A v_n(\pi) + B v_n(0) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots);$$

A und B sind zwei von n unabhängige Konstante, die man mit Hilfe der c_1, c_2, c_3, c_4 und der in den Randbedingungen auftretenden Konstanten h' und H' leicht ausdrücken kann. Vermöge der Hobsonschen Formeln (7) kann man diese letzte Gleichung auch auf die Form

*) Wir denken uns die Integrale im Lebesgueschen Sinne genommen; die Integrabilität der Funktion $f(z)$ ist dann eine Folge des Umstandes, daß sie meßbar und beschränkt ist. Vergl. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, S. 11.

**) Lebesgue, Intégrale, Aire, Longueur (Ann. di mat. 1902).

$$(19)\quad a_n = \int_0^\pi f(z)\, v_n(z)\, dz + A\left[(-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right] + B\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{\alpha_n(0)}{n^2}\right]$$
$$(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

bringen. Da aber die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \cdots$ gegen Null konvergiert, so muß auch*)

$$\underset{n=0}{\mathrm{L}}\{(-1)^n A + B\} = 0$$

sein, d. h. sowohl $A - B$ wie auch $A + B$ ist gleich Null. Aus (19) können wir daher schließen, daß

$$a_n = \int_0^\pi f(z)\, v_n(z)\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist, womit unser Satz bewiesen ist. —

Die oben abgeleiteten Sätze, insbesondere der Eindeutigkeitssatz und das Analogon des Du Bois-Reymondschen Theorems, die wir nur für ein Sturm-Liouvillesches Funktionensystem, das aus der spezielleren Differentialgleichung (4') S. 42 entspringt, bewiesen haben, lassen sich mit Leichtigkeit auf das allgemeinste reguläre Sturm-Liouvillesche Funktionensystem

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \cdots,$$

übertragen, das aus der allgemeinsten sich selbst adjungierten Differentialgleichung

$$(4)\qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)\, u + \lambda u = 0 \qquad (p(x) > 0)$$

entspringt. In der Tat, konvergiert die unendliche Reihe

$$(20)\qquad a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + a_3 u_3(x) + \cdots$$

im ganzen zugrunde gelegten Intervall $[\alpha, \beta]$ gegen Null, so können wir daraus, indem wir die unabhängige Variable x — wie bei der Liouvilleschen Transformation — durch $z = \int^x [p(x)]^{-\frac{1}{2}} dx$ ersetzen und dann die Reihe mit $[p(x)]^{\frac{1}{4}}$ multiplizieren, eine Reihe

---

*) Da nämlich $\int_0^\pi f(z)\, dz$ im Lebesgueschen Sinne existiert und $f(z)$ eine beschränkte Funktion ist, so folgt nach einem Satze von Herrn Lebesgue (l. c. S. 12) auch die Existenz von $\int_0^\pi [f(z)]^2 dz$, woraus man unmittelbar auf die Limesgleichung

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} \int_0^\pi f(z)\, v_n(z)\, dz = 0$$

schließt.

$$(20') \qquad a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + a_3 v_3(z) + \cdots$$

ableiten, die nach den Eigenfunktionen einer Differentialgleichung von der Form (4′) fortschreitet. Da aber diese Reihe (20′) nur um den Faktor $[p(x)]^{\frac{1}{4}}$ von der Reihe (20) verschieden ist, so muß sie ebenfalls überall gegen Null konvergieren; daraus schließen wir aber, daß

$$a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist. — Um schließlich auch das Analogon des Du Bois-Reymondschen Satzes für das Funktionensystem $u_n(x)$ abzuleiten, bemerken wir, daß wenn die Reihe (20) die beschränkte Funktion $f(x)$ darstellt, die Reihe (20′) gegen die Funktion $f(x)[p(x)]^{\frac{1}{4}}$ konvergiert, die ebenfalls unterhalb einer endlichen Schranke liegt. Wir können daher schließen, daß

$$a_n = \int_0^\pi f(x)\,[p(x)]^{\frac{1}{4}}\, v_n(z)\, dz \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist; führen wir x als unabhängige Variable ein*), so erhalten wir:

$$a_n = \int_\alpha^\beta f(x)\, u_n(x)\, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

---

*) Vgl. den ähnlichen Schluß S. 344 meiner Dissertation (Math. Ann. 69).