

## Plongements différentiables dans le domaine stable.

by Haefliger, André  
in Commentarii mathematici Helvetici  
volume 37; pp. 155 - 176



Göttingen State and University Library

---

### Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online-systems to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of materials on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may they be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

#### Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Digitalisierungszentrum  
37070 Göttingen  
Germany  
E-Mail: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

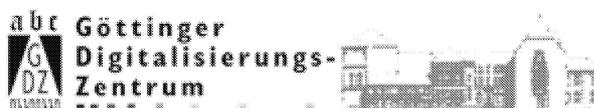
### Purchase a CD-ROM

The Göttingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Digitalisierungszentrum  
37070 Göttingen  
Germany  
E-Mail: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)



Göttingen State and University Library



# Plongements différentiables dans le domaine stable

par ANDRÉ HAEFLIGER, Genève  
*En hommage à ARNOLD SHAPIRO*

L'idée que les obstructions au plongement d'un polyèdre fini  $K$  dans l'espace euclidien se trouvent dans la cohomologie du carré symétrique réduit de  $K$ , remonte à VAN KAMPEN [5]. Cette idée a été reprise avec une grande extension par WU WEN TSUN [13] et ARNOLD SHAPIRO [6] indépendamment. Ces deux auteurs ont notamment comblé une lacune dans la démonstration de VAN KAMPEN [5] de la suffisance d'une condition nécessaire pour pouvoir plonger un complexe de dimension  $n$  dans  $R^{2n}$ . Tous deux s'appuient essentiellement sur le procédé fondamental imaginé par WHITNEY [11] pour éliminer les paires de points doubles isolés de signes opposés, dans le cas différentiable.

WU WEN TSUN a étudié dans [13] la cohomologie du produit symétrique réduit d'un complexe et d'une variété et il a défini des classes obstructions au plongement liées étroitement aux classes caractéristiques. Il a été d'autre part l'initiateur dans l'étude des isotopies [14], [15], [16]. De son côté ARNOLD SHAPIRO a suggéré dans [6] une méthode, pour l'étude des obstructions d'ordre supérieur, qu'il a développée dans des travaux non publiés, et il a donné une idée précise de ce qu'est le domaine stable.

Suivant le point de vue de VAN KAMPEN, SHAPIRO et WU, nous nous bornons à considérer ici exclusivement le cas différentiable. Cependant tous les théorèmes de cet article sont probablement aussi vrai pour les plongements de polyèdres finis dans une variété combinatoire. En revanche, les restrictions sur les dimensions (*domaine stable*) sont essentielles pour chacun des théorèmes énoncés ici, aussi bien dans le cas combinatoire que différentiable.

Au § 1, nous énonçons les théorèmes généraux, nous proposant d'en tirer les conséquences (même les plus immédiates) dans une publication ultérieure<sup>1</sup>). Leur démonstration comprend deux parties distinctes, et suit le même plan que l'article [11] de H. WHITNEY consacré au plongement d'une variété de dimension  $n$  dans  $R^{2n}$ . Le but de la première partie (§ 2) est la construction d'une immersion convenable; elle utilise la classification des immersions de SMALE-HIRSCH (§ 4) et se trouve essentiellement dans HAEFLIGER-HIRSCH (§ 3). La seconde partie (§ 3 et § 4) consiste à déformer cette immersion en un plongement par une homotopie régulière d'immersions. Notre méthode est fortement influencée par celle qu'utilise A. SHAPIRO dans le cas de la première obstruction (§ 6); nous avons d'ailleurs grandement profité d'une conversation en mars 1960 avec ARNOLD SHAPIRO qui nous avait indiqué les principales idées géométriques de sa généralisation aux obstructions d'ordre supérieur.

---

<sup>1</sup>) Voir mon exposé au séminaire Bourbaki, décembre 1962.

Les techniques du § 4 sont étendues pour couvrir le cas des isotopies (§ 5) et des variétés à bord (§ 6) où les restrictions de dimensions peuvent être affaiblies.

La lecture de cet article est indépendante de celle de [2]. C'est la théorie des immersions qui permet d'éviter ici la considération des singularités. La plupart des résultats de [2] peuvent s'obtenir comme conséquence des théorèmes de ce travail.

## 1. Enoncés des résultats

1.1. Etant donné un espace topologique  $X$ , on désigne par  $X^2$  le produit topologique  $X \times X$  et par  $\Delta_X$  la diagonale de  $X^2$ , c'est-à-dire l'ensemble des couples  $(x, x)$ , où  $x \in X$ .

Si  $Y$  est un autre espace topologique, une *application équivariante*

$$F: X^2 \rightarrow Y^2$$

est une application continue qui commute avec les symétries qui échangent les facteurs de  $X^2$  et  $Y^2$ : si  $F(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ , alors  $F(x_2, x_1) = (y_2, y_1)$ .

Une application  $F: X^2 \rightarrow Y^2$  est une *application isovariante* si elle est équivariante et si de plus  $F^{-1}(\Delta_Y) = \Delta_X$ .

Une *homotopie équivariante* (resp. *isovariante*)  $F_t: X^2 \rightarrow Y^2$  est une homotopie qui, pour chaque valeur du paramètre  $t$ , est une application équivariante (resp. isovariante).

Toute application continue  $f: X \rightarrow Y$  détermine une application équivariante, à savoir  $f^2: X^2 \rightarrow Y^2$ . Si de plus  $f$  est biunivoque, alors  $f^2$  est isovariante.

Si  $f_t: X \rightarrow Y$  est une homotopie, alors  $f_t^2$  est une homotopie équivariante. Si  $f_t$  est une isotopie, c'est-à-dire, si pour tout  $t$ ,  $f_t$  est biunivoque, alors  $f_t^2$  est une homotopie isovariante.

Si l'application  $f$  est homotope à une application biunivoque, alors il existe une homotopie équivariante de  $X^2$  dans  $Y^2$  reliant  $f^2$  à une application isovariante.

Les théorèmes suivants montrent que la réciproque est vraie dans le cas différentiable et avec d'importantes restrictions de dimensions (domaine stable).

1.2. Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés, applications et plongements sont indéfiniment différentiables. Rappelons qu'un *plongement différentiable* (dans notre terminologie un plongement) d'une variété  $V$  dans une variété  $V'$  est une application différentiable  $f$  biunivoque de  $V$  dans  $V'$  qui est, en tout point de  $V$ , de rang égal à la dimension de  $V$  en ce point.

Deux plongements  $f_0$  et  $f_1$  de  $V$  dans  $V'$  sont *isotopes* s'il existe une homotopie  $f_t$  différentiable (c'est-à-dire que l'application  $F$  de  $V \times [0, 1]$

dans  $V'$  définie par  $F(x, t) = f_t(x)$  est différentiable) reliant  $f_0$  à  $f_1$  et qui est un plongement pour tout  $t$ . Si les applications  $f_0$  et  $f_1$  sont propres (c'est-à-dire si l'image inverse par  $f_0$  et  $f_1$  de tout compact de  $V'$  est un compact de  $V$ ) et si  $f_t$  est indépendant de  $t$  en dehors d'un compact de  $V$ , cette définition équivaut à la suivante (cf. THOM [9]): il existe une isotopie  $h_t$  de  $V'$  sur  $V'$ , fixe en dehors d'un compact de  $V$ , telle que  $h_0$  soit l'application identique de  $V'$  et que  $f_1 = h_1 f_0$ .

Une homotopie  $h_\tau$ ,  $\tau \in [0, 1]$ , reliant deux applications  $f_0$  et  $f_1$  de  $V$  dans  $M$  est homotope à une homotopie  $h'_\tau$  reliant  $f_0$  à  $f_1$  s'il existe une application  $h_{\tau,t}: V \rightarrow M$ ,  $\tau, t \in [0, 1]$ , telle que  $h_{\tau,0} = h_\tau$ ,  $h_{\tau,1} = h'_\tau$ ,  $h_{0,t} = f_0$  et  $h_{1,t} = f_1$ .

**1.3. Théorème 1.** *Soient  $V$  une variété compacte (avec ou sans bord) de dimension  $n$  et  $V'$  une variété de dimension  $n'$ .*

a) *Supposons  $2n' \geq 3(n+1)$ . Une application continue  $f$  de  $V$  dans  $V'$  est homotope à un plongement  $f_1$  si et seulement s'il existe une homotopie équivariante continue  $H_t: V^2 \rightarrow V'^2$  reliant  $f^2$  à une application isovariante  $H_1$ . De plus on peut construire  $f_1$  de sorte que  $f_1^2$  et  $H_1$  soient reliés par une homotopie isovariante.*

b) *Supposons  $2n' > 3(n+1)$ . Une homotopie  $f_\tau$  reliant deux plongements  $f_0$  et  $f_1$  de  $V$  dans  $V'$  est homotope à une isotopie reliant  $f_0$  à  $f_1$  si et seulement s'il existe une homotopie équivariante continue  $H_{\tau,t}: V^2 \rightarrow V'^2$ ,  $\tau, t \in [0, 1]$ , telle que  $H_{\tau,0} = f_\tau^2$ ,  $H_{0,t} = f_0^2$ ,  $H_{1,t} = f_1^2$  et que  $H_{\tau,1}$  soit une homotopie isovariante.*

**1.4.** Rappelons qu'une immersion  $f$  d'une variété  $V$  dans une variété  $V'$  est une application différentiable dont le rang en tout point de  $V$  est égal à la dimension de  $V$  en ce point. Deux immersions  $f_0$  et  $f_1$  sont régulièrement homotopes s'il existe une homotopie différentiable  $f_\tau$  (appelée homotopie régulière) reliant  $f_0$  à  $f_1$  et qui est une immersion pour chaque valeur de  $\tau$ . Remarquons que si  $f: V \rightarrow V'$  est une immersion, l'application équivariante  $f^2: V^2 \rightarrow V'^2$  est telle que  $\Delta_V$  est ouvert dans  $(f^2)^{-1}(\Delta_{V'})$ .

**Théorème 2.** *Soit  $V$  une variété compacte (avec ou sans bord) de dimension  $n$  et soit  $V'$  une variété de dimension  $n'$ .*

a) *Supposons  $2n' \geq 3(n+1)$ . Une immersion  $f$  de  $V$  dans  $V'$  est régulièrement homotope à un plongement  $f_1$  si et seulement s'il existe une homotopie équivariante continue  $H_t: V^2 \rightarrow V'^2$  reliant  $f^2$  à une application isovariante  $H_1$  et telle que  $\Delta_V$  soit ouvert dans  $H_t^{-1}(\Delta_{V'})$  pour tout  $t$ . De plus on peut construire  $f_1$  de sorte que  $f_1^2$  et  $H_1$  soient reliés par une homotopie isovariante.*

b) *Supposons  $2n' > 3(n+1)$ . Une homotopie régulière  $f_\tau$  reliant deux plongements  $f_0$  et  $f_1$  de  $V$  dans  $V'$  est régulièrement homotope à une isotopie reliant  $f_0$  à  $f_1$  si et seulement s'il existe une homotopie équivariante continue*

$H_{\tau,t}: V^2 \rightarrow V^2$  telle que  $H_{\tau,0} = f_\tau^2$ ,  $H_{0,t} = f_0^2$ ,  $H_{1,t} = f_1^2$ , que  $H_{\tau,1}$  soit une homotopie isovariante et que  $\Delta_V$  soit ouvert dans  $H_{\tau,t}^{-1}(\Delta_V)$  pour tout  $\tau, t$ .

1.5. *Compléments aux énoncés des théorèmes 1 et 2.* Pour ne pas surcharger les énoncés des théorèmes précédents, nous ajoutons séparément ci-dessous quelques précisions.

Dans les théorèmes 1, a) et 2, a), on peut supposer que  $V$  n'est pas forcément compacte, mais alors que  $f$  est une application propre dont la restriction à un voisinage d'un fermé  $A$  de  $V$  est déjà un plongement, le complémentaire de  $A$  dans  $V$  étant relativement compact. *Si en plus des hypothèses du th. 1, a) ou du th. 2, b) on suppose que*

$\alpha$ )  $H_t$  est fixe sur  $A^2$ , alors l'homotopie  $f_t$  reliant  $f$  à  $f_1$  pourra être supposée fixe sur  $A$ .

$\beta$ ) Si de plus  $H_t((V - A) \times A) \cap \Delta_V = \emptyset$  pour tout  $t$ , on pourra alors supposer de plus que  $f_t(A) \cap f_t(V - A) = \emptyset$ .

Dans les théorèmes 1, b) et 2, b), on a des précisions analogues en supposant que l'homotopie  $f_\tau$  est une application propre dont la restriction à un voisinage de  $A$  est un plongement indépendant de  $\tau$ , et que les conditions  $\alpha$ ) et  $\beta$ ) sont vérifiées pour  $H_{\tau,t}$ . Nous laissons au lecteur le soin de les énoncer complètement.

1.6. *Cas où la variété  $V'$  est l'espace numérique  $R^m$ .*

Les théorèmes 1 et 2 sont alors équivalents aux théorèmes suivants (cf. [1]).

Une application  $F$  de  $V^2 - \Delta_V$  (produit  $V \times V$  privé de sa diagonale) dans  $S^{m-1}$  (sphère unité dans  $R^m$ ) sera dite équivariante si  $F(x_1, x_2) = -F(x_2, x_1)$ .

**Théorème 1'.** *Soit  $V$  une variété compacte de dimension  $n$ . La correspondance qui associe à tout plongement  $f$  de  $V$  dans  $R^m$  l'application équivariante*

$\bar{f}: V^2 - \Delta_V \rightarrow S^{m-1}$  définie par  $\bar{f}(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{|f(x_1) - f(x_2)|}$  induit une appli-

cation de l'ensemble des classes d'isotopie des plongements de  $V$  dans  $R^m$  dans l'ensemble des classes d'homotopie équivariante de  $V^2 - \Delta_V$  dans  $S^{m-1}$ .

Cette correspondance est surjective si  $2m \geq 3(n+1)$ ; elle est bijective si  $2m > 3(n+1)$ .

Pour toute immersion  $f$  de  $V$  dans  $R^m$ , il existe un voisinage  $U$  de  $\Delta_V$  dans  $V^2$  tel que si  $(x_1, x_2) \in U - \Delta_V$ , alors  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . L'application  $\bar{f}(x_1, x_2) = (f(x_1) - f(x_2)) / |f(x_1) - f(x_2)|$  est ainsi définie sur  $U - \Delta_V$ .

**Théorème 2'.** *Soit  $V$  une variété compacte de dimension  $n$ .*

a) Supposons  $2m \geq 3(n+1)$ . Une immersion  $f: V \rightarrow R^m$  est régulièrement homotope à un plongement  $f_1$  si et seulement si l'application équivariante

$\bar{f}: U - \Delta_V \rightarrow S^{m-1}$  (où  $U$  est un voisinage convenable de  $\Delta_V$ ) peut s'étendre suivant une application équivariante  $F: V^2 - \Delta_V \rightarrow S^{m-1}$ . Le plongement  $f_1$  peut être construit de sorte que  $\bar{f}_1$  soit relié à  $F$  par une homotopie équivariante.

b) Supposons  $2m > 3(n+1)$ . Une homotopie régulière  $f_t$  reliant les plongements  $f_0$  et  $f_1$  de  $V$  dans  $R^m$  est régulièrement homotope à une isotopie reliant  $f_0$  à  $f_1$  si l'homotopie équivariante  $\bar{f}_t: U - \Delta_V \rightarrow S^{m-1}$  (où  $U$  est un voisinage assez petit de  $\Delta_V$ ) peut s'étendre suivant une homotopie équivariante  $H_t$  de  $V^2 - \Delta_V$  dans  $S^{m-1}$  telle que  $H_0 = \bar{f}_0$  et  $H_1 = \bar{f}_1$ .

Nous laissons au lecteur le soin de formuler dans ce cas le complément 1.5.

1.7. *Remarques.* 1. L'espace quotient du produit  $(V^2 - \Delta_V) \times S^{m-1}$  obtenu en identifiant  $(x_1, x_2, s)$  et  $(x_2, x_1, -s)$ , où  $x_1, x_2 \in V$ ,  $s \in S^{m-1}$ , est un fibré  $E$  en sphères  $S^{m-1}$  dont la base  $V^*$  est le carré symétrique réduit de  $V$  (obtenu en identifiant dans  $V^2 - \Delta_V$  les couples  $(x_1, x_2)$  et  $(x_2, x_1)$ ).

Les applications équivariantes de  $V^2 - \Delta_V$  dans  $S^{m-1}$  correspondent canoniquement aux sections du fibré  $E$ , et les classes d'homotopie d'applications équivariantes aux classes d'homotopie des sections de  $E$ . Ainsi par le théorème 1', le problème de la classification des plongements de  $V$  dans  $R^m$  est ramené, dans le domaine stable, à un problème classique de topologie algébrique, à savoir celui de la classification des classes d'homotopie des sections du fibré  $E$ .

On peut remarquer que dans le problème de l'existence d'un plongement d'une variété compacte  $V$  dans  $R^m$ , les obstructions sont des éléments de  $H^{i+1}(V^*; \pi_i(S^{m-1}))$ ; pour l'existence d'une isotopie reliant deux plongements de  $V$  dans  $R^m$ , les obstructions se trouvent dans  $H^i(V^*; \pi_i(S^{m-1}))$ .

Remarquons enfin que les obstructions à construire un plongement régulièrement homotope à une immersion donnée sont des éléments du groupe de cohomologie à support compact  $H_K^{i+1}(V^*; \pi_i(S^{m-1}))$ .

2. Il serait facile d'obtenir le théorème d'approximation de [2] (et même pour le cas des variétés à bord) à partir des démonstrations du présent travail et du théorème d'approximation des immersions de M. HIRSCH (cf. [4], § 5).

## 2. Comment le théorème 1 se déduit du théorème 2.

2.1. Le pas essentiel de cette réduction utilise les résultats de HAÉFLIGER-HIRSCH [3]. Pour montrer que le théorème 2 a) entraîne le théorème 1 a), nous utiliserons le fait suivant (loc. cit. 4.3, a)):

Soient  $V$  et  $V'$  des variétés de dimension  $n$  et  $n'$  resp. telles que  $2n' \geq 3n + 1$ . Soit  $h: U(\Delta_V) \rightarrow V'^2$  une application isovariante d'un voisinage  $U(\Delta_V)$

de  $\Delta_V$  dans  $V'^2$ , c'est-à-dire que si  $h(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ , alors  $h(x_2, x_1) = (y_2, y_1)$  et que  $h(x_1, x_2) \in \Delta_V$  seulement si  $x_1 = x_2$ . Il existe alors une immersion  $f$  de  $V$  dans  $V'$  et une homotopie isovariante reliant les restrictions de  $f^2$  et  $h$  à un voisinage assez petit de  $\Delta_V$  et qui couvre une homotopie donnée reliant  $f^2|_{\Delta_V}$  à  $h|_{\Delta_V}$ .

2.2. D'après ce résultat, en se plaçant dans les hypothèses du théorème 1, a), on peut remplacer  $f$  par une immersion, encore notée  $f$ , telle que les restrictions de  $f^2$  et  $H_1$  à un voisinage de  $\Delta_V$  soient reliées par une homotopie isovariante.

Introduisons sur  $V$  et  $V'$  des métriques riemanniennes, et sur  $V^2$  et  $V'^2$  les métriques produits. Soit  $\delta$  une fonction strictement positive définie sur  $\Delta_V$ . Un  $\delta$ -voisinage tubulaire  $U_\delta$  de  $\Delta_V$  est l'ensemble des extrémités des géodésiques dans  $V^2$  issues des points  $x$  de  $\Delta_V$ , normales à  $\Delta_V$  et de longueur  $\leq \delta(x)$ . Si  $\delta$  est assez petit, deux telles géodésiques issues de deux points distincts de  $\Delta_V$  ne se rencontrent pas.

Soit, pour  $\delta$  assez petit, une homotopie isovariante  $H_t^\delta: U_\delta \rightarrow V'^2$  telle que, au voisinage de  $t = 0$  et  $t = 1$ ,  $H_t^\delta$  soit la restriction de  $H_t$  à  $U_\delta$  et que  $H_t^\delta = H_t$  sur  $\Delta_V$ .

Soit  $\lambda(t)$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ , valant 1 pour  $t = 0$  et  $t = 1$ , et telle que  $0 < \lambda(t) < 1$  pour  $0 < t < 1$ .

Définissons une nouvelle homotopie équivariante  $H'_t$  en posant  $H'_t = H_t$  en dehors de  $U_\delta$ ,  $H'_t = H_t^\delta$  sur  $U_{\lambda\delta}$ . Pour un point  $z$  de  $U_\delta - U_{\lambda\delta}$  situé sur une géodésique normale à  $\Delta_V$  en  $x$  et coupant  $\partial U_{\lambda\delta}$  et  $\partial U_\delta$  en  $z_1$  et  $z_2$  resp.,  $H'_t(z)$  sera sur le segment géodésique dans  $V'^2$  joignant les points  $H_t^\delta(z_1)$  et  $H_t(z_2)$  (si  $\delta$  est assez petit, ce segment géodésique existe et dépend continuellement de ses extrémités) et partagera ce segment dans le même rapport que  $z$  partage le segment géodésique d'origine et d'extrémité  $z_1$  et  $z_2$ .

L'homotopie  $H'_t$  ainsi définie est équivariante; elle coïncide avec  $f^2$  pour  $t = 0$  et avec  $H_1$  pour  $t = 1$ . De plus  $\Delta_V$  est ouvert dans  $H_t'^{-1}(\Delta_V)$ . Ainsi toutes les hypothèses du théorème 2, a) sont vérifiées, de sorte qu'il entraîne le théorème 1, a).

On voit d'une manière analogue, en utilisant le théorème 4.3, b) de [3], que le théorème 1, b) est une conséquence du th. 1, a).

Les légères modifications à apporter à la démonstration précédente pour obtenir le complément 1.5 sont laissées au lecteur.

### 3. Construction d'un modèle de déformation éliminant des points doubles

Nous allons construire une immersion  $\Phi$  d'une variété  $L$  dans une variété  $L'$  et une déformation  $\Phi_t$  de cette immersion éliminant les points doubles de  $\Phi$ . Ceci nous servira de modèle dans la démonstration du théorème 2.

3.1. Le modèle  $\Phi : L \rightarrow L'$  sera construit à partir de 3 éléments :

1) Une variété compacte  $D$  (qui peut avoir un bord  $\partial D$ ) munie d'une involution  $J$  sans point fixe : pour tout point  $d \in D$ ,  $Jd \neq d$  et  $J^2d = d$ .

2) Une fonction  $\lambda$  définie sur  $D$ , invariante par  $J$  (c.-à-d.  $\lambda J = \lambda$ ), telle que  $-1 \leq \lambda(d) < 1$ ,  $\lambda^{-1}(-1) = \partial D$  et que  $\lambda$  n'ait pas de valeur critique sur  $[-1, 0]$

3) Un fibré vectoriel  $L$  de base  $D$ .

Les dimensions des composantes connexes de  $D$  et des fibres de  $L$  peuvent varier.

Soit  $I$  l'intervalle  $[-1, +1]$  et soit  $D'$  le quotient de  $D \times I$  par la relation d'équivalence qui identifie les points  $(d, t)$  et  $(Jd, -t)$ . C'est un espace fibré de fibre  $I$  et de base  $D/J$ , le quotient de  $D$  obtenu en identifiant les points  $d$  et  $Jd$ .

Nous allons construire un fibré vectoriel  $L'$  sur  $D'$  de la manière suivante. Considérons d'abord le fibré  $L \oplus_J L$  sur  $D$  image réciproque du fibré  $L \times L$  par l'application antidiagonale  $d \rightarrow (d, Jd)$  de  $D$  dans  $D \times D$ . Tout point de la fibre de  $L \oplus_J L$  au-dessus de  $d \in D$  est un couple  $(l_a, l_{Ja})$  formé d'un vecteur  $l_a \in L_a$  et d'un vecteur  $l_{Ja} \in L_{Ja}$  (on désigne par  $L_a$  la fibre de  $L$  au-dessus de  $d$ ). Le fibré  $L'$  est défini comme quotient du fibré  $(L \oplus_J L) \times I$  de base  $D \times I$  en identifiant  $(l_a, l_{Ja}, t)$  et  $(-l_{Ja}, -l_a, -t)$ .

Les classes des points  $(d, t)$  et  $(l_a, l_{Ja}, t)$  dans  $D'$  et  $L'$  seront désignées par  $[d, t]$  et  $[l_a, l_{Ja}, t]$  respectivement.

Définissons une immersion  $\varphi$  de  $D$  dans  $D'$  par  $\varphi(d) = [d, \lambda(d)]$ .  $D$  et  $D'$  étant identifiées aux sections nulles de  $L$  et  $L'$ ,  $\varphi$  peut se prolonger suivant une immersion  $\Phi$  de  $L$  dans  $L'$  définie par

$$\Phi(l_a) = [l_a, 0, \lambda(d)].$$

Les paires de points de  $L$  appliqués par  $\Phi$  sur un même point de  $L'$  sont les paires de points se correspondant par  $J$  de la sous-variété

$$D_0 = \lambda^{-1}(0) \subset D \subset L.$$

Les deux nappes de  $\Phi(L)$  qui se coupent le long de  $\Phi(D_0)$  sont en position générale comme on le vérifie immédiatement (en tenant compte du fait que  $\lambda$  n'a pas de points critiques sur  $D_0$ ).

3.2. Nous allons définir maintenant la déformation  $\Phi_t$ .

Soit  $\mu(d)$  une fonction sur  $D$  telle que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu(d) < \lambda(d) + 1 \\ \mu(d) + \mu(Jd) &> 2\lambda(d) \\ \text{et } \mu(d) = 0 &\text{ si } \lambda(d) \leq -1/2. \end{aligned}$$

Une telle fonction existe; on peut prendre par exemple la fonction  $\lambda(d) + 1/2$  et la multiplier par une fonction comprise entre 0 et 1, égale à 0 aux points  $d$  où  $\lambda(d) \leq -1/2$  et à 1 où  $\lambda(d) \geq 0$ .

L'application  $\varphi_t(d)$  de  $D$  dans  $D'$  définie par

$$\varphi_t(d) = [d, \lambda(d) - t\mu(d)]$$

pour  $t \in [0, 1]$  est une homotopie régulière déformant  $\varphi = \varphi_0$  en un plongement  $\varphi_1$ . Il s'agit maintenant de la prolonger à  $L$ .

Réduisons le groupe structural de  $L$  au groupe orthogonal de façon à définir une métrique euclidienne dans les fibres de  $L$ . La longueur du vecteur  $l_a \in L_a$  sera notée  $|l_a|$ . Soit  $\alpha(x)$  une fonction paire d'une variable  $x$ , comprise entre 0 et 1 et telle que  $\alpha(0) = 1$  et  $\alpha(x) = 0$  pour  $|x| \geq \epsilon > 0$ .

Définissons

$$\Phi_t(l_a) = [l_a, 0, \lambda(d) - \alpha(|l_a|)t\mu(d)].$$

$\Phi_t$  est une homotopie régulière, égale à  $\Phi$  pour  $t = 0$  et qui est un plongement pour  $t = 1$ . De plus  $\Phi_t$  est fixe en dehors d'un compact. (Comparer ces constructions avec celles de SHAPIRO [6], § 5 et 6.)

#### 4. Démonstration du théorème 2, a) lorsque $V$ n'a pas de bord

Les restrictions de dimensions exigées à chaque pas de la démonstration seront signalées par un astérisque dans la marge.

Nous utiliserons les notations suivantes. Le fibré des vecteurs tangents à une variété  $V$  sera noté  $T(V)$ . Si  $D$  est une sous-variété de  $V$ , alors  $T(V; D)$  sera la restriction à  $D$  de  $T(V)$ , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de  $V$  dont l'origine appartient à  $D$ . Le fibré tangent à  $D$  s'identifie à un sous-fibré de  $T(V; D)$ ; le fibré normal à  $D$  sera par définition le fibré quotient  $N(V; D) = T(V; D)/T(D)$ .

4.1. Soit  $f$  une immersion de  $V$  dans  $V'$ . Nous pouvons supposer que  $f$  est générique: en tout point  $v' = f(v_1) = f(v_2)$ ,  $v_1 \neq v_2$ , l'espace tangent à  $V'$  est engendré par les images par  $df$  des espaces tangents à  $V$  en  $v_1$  et  $v_2$  (autrement dit,  $f^2$  est transverse à la sous-variété  $\Delta_V$ , en tout point de  $V^2 - \Delta_V$ ). De plus  $f$  n'a pas de point triple, ce qui est possible génériquement \* si  $2n' > 3n$  (cf. [2]).

Soit  $H_t$  l'homotopie équivariante reliant  $f^2$  à une application isovariante  $H_1$  et telle que  $\Delta_V$  soit ouvert dans  $H_t^{-1}(\Delta_{V'})$ . Nous pouvons étendre la

définition de  $H_t$  à l'intervalle  $[-1, +1] = I$  et, par une légère modification, obtenir une homotopie équivariante, encore notée  $H_t$ , qui vérifie en plus des hypothèses du th. 2, a) les 3 propriétés:

1) L'application  $H: V^2 \times I \rightarrow V'^2$  définie par  $H(v_1, v_2, t) = H_t(v_1, v_2)$  est transversale à  $\Delta_V$ , en dehors de  $\Delta_V \times I$ . Alors

$$\Delta = H^{-1}(\Delta_V) - \Delta_V \times I$$

est une sous-variété fermée de  $V \times V \times I$ .

2) La projection  $p_1$  de  $V \times V \times I$  sur le premier facteur  $V$ , restreinte à  $\Delta$ , est un plongement  $\mathfrak{P}_1$  de  $\Delta$  dans  $V$ . Il en sera alors de même pour la projection  $p_2$  sur le deuxième facteur.

3) La restriction à  $\Delta$  de la projection  $t$  de  $V \times V \times I$  sur  $I$  est une fonction qui n'a pas de valeur critique sur  $[-1, 0]$ .

Pour que 1) et 3) soient vérifiés, aucune restriction de dimension n'est nécessaire. Pour 1), on utilise le théorème de transversalité de THOM (cf. [8]).

\* Si l'on suppose que  $2 \dim \Delta < \dim V$  (ce qui est certainement le cas si  $2n' \geq 3(n+1)$ ), une adaptation simple des techniques de WHITNEY permet de réaliser la condition 2) (cf. [12], Chap. IV).

4.2. Comme au paragraphe 3, nous construisons un modèle  $\Phi: L \rightarrow L'$  à partir des 3 éléments suivants:

1) La variété  $D = p_1 \Delta = p_2 \Delta$  munie de l'involution  $J = p_2 \mathfrak{P}_1^{-1}$ .

2) La fonction  $\lambda$ , composé de  $\mathfrak{P}_1^{-1}$  avec la projection  $t$ .

3) Le fibré  $L = N(V; D)$ , le fibré normal à  $D$  dans  $V$ .

Remarquons que  $D_0 = \lambda^{-1}(0)$  est la sous-variété de  $V$  formée des paires de points distincts de  $V$  qui ont même image par  $f$ .

4.3. On se propose de construire des difféomorphismes

$$\Psi: L_\varepsilon \rightarrow V \quad \text{et} \quad \Psi': L'_\varepsilon \rightarrow V',$$

où  $L_\varepsilon$  (resp.  $L'_\varepsilon$ ) est un  $\varepsilon$ -voisinage tubulaire de  $D$  dans  $L$  (resp. de  $D'$  dans  $L'$ ), tels que

a)  $f\Psi = \Psi'\Phi$  sur  $L_\varepsilon$ ,

b)  $\Psi(L'_\varepsilon)$  contient tous les points doubles de  $f$ ,

c)  $f(V - \Psi L_\varepsilon) \cap \Psi' L'_\varepsilon = \emptyset$ .

Ceci fait l'homotopie  $f_t$  définie par

$$f_t = \begin{cases} \Psi'\Phi_t\Psi^{-1} & \text{sur } \Psi(L_\varepsilon) \\ f & \text{en dehors de } \Psi(L_\varepsilon) \end{cases}$$

sera une homotopie régulière reliant  $f$  à un plongement  $f_1$ .

## 4.4. Nous allons d'abord construire des plongements

$$\psi : D \rightarrow V \text{ et } \psi' : D' \rightarrow V'$$

tels que:

- 1)  $f\psi = \psi'\varphi$ ,
- 2)  $f(V - \psi D) \cap \psi' D' = \emptyset$ ,
- 3)  $\psi'(D')$  est transverse à  $f(V)$  le long de  $f(D)$ .

Cette dernière condition signifie que pour tout point  $d \in D$ , les images par  $f$  et par  $\psi'$  des plans tangents à  $V$  en  $\psi(d)$  et à  $D'$  en  $\varphi(d)$  resp. se coupent suivant l'image par  $f\psi$  du plan tangent à  $D$  en  $d$ .

$p_1$  et  $p_2$  désignent toujours les projections de  $V \times V \times I$  sur le premier et le second facteur resp.; de même soient  $p'_1$  et  $p'_2$  les projections de  $V' \times V'$  sur le premier et le second facteur resp.

Le plongement  $\psi$  sera simplement l'inclusion de  $D$  dans  $V$ . Quant à  $\psi'$ , sa restriction  $\psi'_0$  à  $\varphi D$  est définie par la relation 1). Soit  $A$  l'ensemble des points de  $D'$  de la forme  $[d, t]$ , avec  $t$  compris entre 0 et  $\lambda(d)$ . En posant, pour tout point  $[d, t]$  de  $A$

$$\bar{\psi}'[d, t] = p'_1 H(d, Jd, \lambda(d) - t),$$

on définit une extension continue de  $\psi'_0$  à  $A$ . Comme  $D'$  peut se rétracter sur  $A$ , on obtient finalement une application continue  $\bar{\psi}'$  de  $D'$  dans  $V'$  qui prolonge  $\psi'_0$ .

D'autre part, il est possible de construire une extension  $\psi'_1$  de  $\psi'_0$  à un petit voisinage  $U$  de  $\varphi D$  dans  $D'$  de sorte que  $\psi'_1$  soit un plongement et que  $\psi'_1(U)$  coupe transversalement  $f(V)$  le long de  $f(D)$  (cf. SHAPIRO [6], \* lemma 5.2; on utilise le fait que  $\dim D < n' - n$ ). En appliquant finalement \* le théorème de plongement de WHITNEY (cf. [10]), comme  $2 \dim D' < \dim V'$ , on peut obtenir un plongement  $\psi'$  de  $D'$  dans  $V'$  homotope à  $\bar{\psi}'$ , qui coïncide avec  $\psi'_1$  au voisinage de  $D$  (la condition 3 est ainsi satisfaite) et qui ne rencontre pas  $fV$  en dehors de  $\varphi D$ . Cette dernière condition est possible \* car  $\dim D' + \dim V < \dim V'$ . La condition 2) est donc aussi vérifiée.

4.5. Désignons par  $\underline{D}'$  l'image de  $D'$  par  $\psi'$ . La différentielle de  $f$  qui applique  $T(V)$  dans  $T(V')$  est notée, comme toujours,  $df$ .

Le pas suivant est la construction de représentations (cf. 7.2) d'espaces fibrés

$$\dot{\psi} : L \rightarrow T(V) \quad \dot{\psi}' : L' \rightarrow T(V')$$

qui prolongent  $\psi$  et  $\psi'$ , telles que

$$df \cdot \dot{\psi} = \dot{\psi}' \cdot \Phi,$$

$\dot{\psi}(L)$  et  $\dot{\psi}'(L')$  étant complémentaires à  $T(D)$  et  $T(\underline{D}')$  resp.

La représentation  $\dot{\psi}$  sera un relèvement de  $L = N(V; D)$  dans  $T(V; D)$ ; un tel relèvement est complètement déterminé par un champ de sous-espaces linéaires, le long de  $D$ , complémentaires à  $T(D)$ . Nous identifierons dorénavant  $N(V; D)$  à son image par  $\dot{\psi}$ , donc à un sous-fibré de  $T(V; D)$ .

De même nous identifierons  $N(V'; \underline{D}')$  à un sous-fibré de  $T(V')$  par un relèvement de la projection naturelle de  $T(V'; \underline{D}')$  sur  $N(V'; \underline{D}')$ , ce sous-fibré contenant l'image par  $df$  de  $N(V; D)$ . Ceci revient à construire le long de  $\underline{D}'$  (cf. appendice, 7.3) un champ de sous-espaces linéaires complémentaires à  $T(\underline{D}')$  contenant  $df(N(V; D))$ ; ce champ est complètement déterminé par ces conditions sur  $f(D_0)$ ; on l'étend ensuite le long de  $f(D)$ , en tenant compte de la condition 3) de 4.4, et enfin sur  $\underline{D}'$ .

*Construction de  $\dot{\psi}'$ .* Soit  $\xi$  l'application  $d \rightarrow \psi'[d, 0]$  de  $D$  dans  $V'$ . Remarquons que  $\xi = \xi J$ .

4.6. *Lemme: Il existe une représentation  $\dot{\xi}$  du fibré  $N(V; D) \oplus_J N(V; D)$  dans  $T(V')$  qui se projette sur  $\xi$ , telle que  $\dot{\xi}(l_a, l_{Ja}) = -\dot{\xi}(l_{Ja}, l_a)$ , et telle que pour  $d \in D_0$ , on ait  $\dot{\xi}(l_a, l_{Ja}) = df(l_a) - df(l_{Ja})$ .*

*Démonstration:* Soient  $\mathfrak{P}_1$  et  $\mathfrak{P}_2$  les restrictions de  $p_1$  et  $p_2$  à  $\Delta$ . Comme  $\mathfrak{P}_2$  est un plongement de  $\Delta$  dans  $V$ , le fibré  $N(V^2 \times I, \Delta)$  est canoniquement isomorphe à la somme directe du fibré tangent à  $V$  restreint à  $p_1 \Delta = D$ , du fibré normal à  $p_2 \Delta = D$  dans  $V$  et d'un fibré linéaire trivial  $T$ . Ainsi

$$N(V^2 \times I, \Delta) = \mathfrak{P}_1^{-1} N(V; D) \oplus \mathfrak{P}_2^{-1} N(V; D) \oplus \mathfrak{P}_1^{-1} T(D) \oplus T;$$

il existe donc un isomorphisme

$$N(V^2 \times I, \Delta) \rightarrow N(V; D) \oplus_J N(V; D) \oplus T(D) \oplus T$$

se projetant sur  $\mathfrak{P}_1$ .

D'autre part  $H$  est transversal à  $\Delta_V$  sur  $\Delta$ ; donc  $N(V^2 \times I, \Delta)$  est canoniquement isomorphe à l'image inverse par  $H$  restreint à  $\Delta$  du fibré  $N(V^2; \Delta_V) = p_1'^{-1} T(V')$  restreint à  $\Delta_V$ . Vu l'isomorphisme ci-dessus, il existe une représentation

$$\mathcal{E} : N(V; D) \oplus_J N(V; D) \oplus T(D) \oplus T \rightarrow T(V')$$

se projetant sur  $p_1 H \mathfrak{P}_1$ .

Soit  $\sigma$  l'involution du fibré  $N(V; D) \oplus_J N(V; D) \oplus T(D) \oplus T$  définie par  $\sigma(l_a, l_{Ja}, t_a, e) = (l_{Ja}, l_a, t_{Ja}, e)$ , où  $l_a$  et  $l_{Ja}$  sont des vecteurs normaux à  $D$  en  $d$  et  $Jd$ ,  $t_a$  un vecteur tangent à  $D$  en  $d$  et  $t_{Ja}$  son image par la différentielle de  $J$ .

Comme  $H_i$  est équivariante, on a  $\mathcal{E} \sigma = -\mathcal{E}$ .

Enfin  $\mathcal{E}$  sur  $N(V; D) \oplus_J N(V; D) \oplus 0$ , restreint à  $D_0$ , se réduit à  $df \oplus_J (-df) \oplus 0$ .

D'après la construction de  $\psi'$  (cf. 4.3), il existe une homotopie reliant  $\rho'_1 H \mathfrak{P}_1^{-1}$  à l'application  $\xi$  de  $D$  dans  $V'$ , invariante par  $J$  et fixe sur  $D_0$ . Il en résulte que  $\mathcal{E}$  est homotope à une représentation  $\mathcal{E}'$  se projetant sur  $\xi$  telle que  $\mathcal{E}' \sigma = -\mathcal{E}'$ , et égale à  $\mathcal{E}$  sur  $D_0$ .

Pour obtenir l'application  $\dot{\xi}$  cherchée, il suffit d'appliquer le lemme 7.4 en prenant pour  $E_1$  le quotient de  $T(D) \oplus T$  par la symétrie

$$(t_a, e) \rightarrow (-t_{Ja}, -e),$$

pour  $E_2$  le quotient de  $N(V; D) \oplus_J N(V; D)$  par la symétrie

$$(l_a, l_{Ja}) \rightarrow (-l_{Ja}, -l_a);$$

ce sont des fibrés de base  $D/J$  (cf. 3.1). Quant à  $E'_1$  et  $E'_2$ , ce seront les images réciproques par  $\xi/J : D/J \rightarrow \underline{D}'$  des fibrés  $T(\underline{D}')$  et  $N(V'; \underline{D}')$ .

\* Le lemme peut s'appliquer car  $\dim D < 2(n - \dim D)$ .

4.7. Pour construire  $\dot{\psi}'$ , on remarque que  $L'$  est le quotient du fibré  $(L \oplus_J L) \times [0, 1]$  de base  $D \times [0, 1]$  par la relation d'équivalence qui identifie  $(l_a, l_{Ja}, 0)$  et  $(-l_{Ja}, -l_a, 0)$ . Il suffira donc de construire une représentation

$$\chi : (L \oplus_J L) \times [0, 1] \rightarrow N(V'; \underline{D}')$$

telle que

1.  $\chi$  se projette sur l'application  $(d, t) \rightarrow \psi'[d, t]$
2.  $\chi = \dot{\xi}$  sur  $(L \oplus_J L) \times 0$
3. a)  $\chi(l_a, 0, \lambda(d)) = df(l_a)$  pour  $\lambda(d) \geq 0$   
 b)  $\chi(0, -l_a, -\lambda(d)) = df(l_a)$  pour  $\lambda(d) \leq 0$ .

On construira d'abord la restriction  $\chi_1$  de  $\chi$  au premier facteur

$$(L \oplus_J 0) \times [0, 1].$$

Les conditions 2 et 3, a) définissent déjà  $\chi_1$  sur  $D \times \{0\}$  et sur les points  $(d, \lambda(d))$ , où  $\lambda(d) \geq 0$ . Les obstructions pour prolonger  $\chi_1$  à  $D \times [0, 1]$  sont à valeur dans  $\pi_i(V_{n'-\dim D', n-\dim D})$  pour  $i \leq \dim D$  (cf. appendice, 7.2). Ces groupes sont tous nuls si

$$* \quad \dim D < n' - \dim D' - n + \dim D$$

c'est-à-dire  $3n + 2 < 2n'$ .

Enfin on prolongera  $\chi_1$  en  $\chi$  en tenant compte des conditions 2 et 3, b). Ceci ne présente aucune difficulté car  $D \times [0, 1]$  peut se rétracter par déformation sur l'union de  $D \times [0]$  et des points  $(d, \lambda(d))$ , où  $\lambda(d) \leq 0$ .

On définira donc  $\dot{\psi}' [l_a, l_{Ja}, t] = \begin{cases} \chi(l_a, l_{Ja}, t) & t \geq 0 \\ \chi(-l_{Ja}, -l_a, -t) & t \leq 0 \end{cases}$

4.8. *Construction de  $\Psi$  et  $\Psi'$ .* On construit d'abord  $\Psi$  sur  $L_\varepsilon$ , pour  $\varepsilon$  assez petit, de sorte que  $\Psi$  soit tangent à  $\dot{\psi}$  le long de  $D$  (en utilisant une métrique riemannienne par exemple). Pour chaque point  $d' \in D'$ , il existe une application  $\Psi'_d$  dans  $V'$  d'un voisinage de  $d'$  dans  $L'$  de sorte que  $\Psi'_d$  soit tangent à  $\dot{\psi}'$  le long de  $D$  et que  $f\Psi = \Psi'_d\Phi$  aux points où les deux membres sont définis. Ceci résulte de ce que l'application  $f$  peut s'exprimer comme une application linéaire (ou un couple d'applications linéaires) dans des systèmes de coordonnées convenables en vertu du théorème des fonctions implicites. Utilisant la proposition 1.3, p. 59 de [2], il est enfin possible de construire une application différentiable  $\Psi'$ , d'un voisinage de  $D'$  dans  $L'$ , telle que  $\Psi'$  soit tangent à  $\dot{\psi}'$  le long de  $D'$  et que  $f\Psi = \Psi'\Phi$ . Si  $\varepsilon$  est assez petit,  $\Psi$  sera défini sur  $L'_\varepsilon$  et sera un difféomorphisme.

4.9. Il reste à vérifier que le plongement  $f_1$  obtenu est tel que  $H_1$  et  $f_1^2$  sont reliés par une homotopie isovariante. Plus précisément:

*Proposition.* Il est possible de construire l'homotopie  $f_t$  de sorte qu'il existe une homotopie équivariante  $P_{t,\tau}: V^2 \rightarrow V'^2$  dépendant des paramètres  $t, \tau \in [0, 1]$  telle que a)  $P_{t,0} = H_t$  b)  $P_{t,1} = f_t^2$  c)  $P_{0,\tau} = f^2$  d)  $P_{1,\tau}$  est une homotopie isovariante.

*Démonstration.* Les conditions a), b) et c) définissent déjà  $P_{t,\tau}$  pour  $\tau = 0$  et 1 et pour  $t = 1$ .

Posons  $P(x_1, x_2, t, \tau) = P_\tau(x_1, x_2, t) = P_{t,\tau}(x_1, x_2)$ , où  $(x_1, x_2) \in V^2$ . Désignons par  $\sigma$  l'involution de  $V^2, V^2 \times I$  ou  $V^2 \times I^2$ , suivant les cas, échangeant les deux premiers facteurs et soit  $\sigma'$  celle qui échange les facteurs de  $V'^2$ . Une application de  $V^2, V^2 \times I$  ou  $V^2 \times I^2$  dans  $V'^2$  sera dite équivariante si elle commute avec  $\sigma$  et  $\sigma'$ . On désigne par  $I$  le segment  $[0, 1]$ .

Soit  $\nu(d)$  la fonction définie aux points de  $D$  où  $\lambda(d) \geq 0$ , égale à la valeur de  $t$  pour laquelle  $\varphi_t(d) = \varphi_t(Jd)$ . On a  $\nu(d) = \nu(Jd)$ . Soit  $\Delta_\tau$  la sous-variété de  $V^2 \times I$  formée des triples  $(d, Jd, (1 - \tau)\lambda(d) - \tau\nu(d))$ , avec  $\lambda(d) \geq 0$ . Remarquons que

$$\Delta_0 = P_0^{-1}(\Delta_{V'}) - \Delta_V \times I \text{ et } \Delta_1 = P_1^{-1}(\Delta_{V'}) - \Delta_V \times I.$$

D'après la construction même de  $\dot{\xi}$  (cf. 4.6), il existe une homotopie, dépendant du paramètre  $\tau$ , de représentations de

$$N(V^2 \times I, \Delta_t) \text{ dans } N(V'^2, \Delta_{V'}),$$

se réduisant pour  $\tau = 0$  et 1 aux représentations induites par  $P_{t,0}$  et  $P_{t,1}$  et commutant avec les involutions induites par  $\sigma$  et  $\sigma'$ .

Soit  $\Delta_*$  la sous-variété de  $V^2 \times I^2$  réunion des sous-espaces  $\Delta_\tau \times \{\tau\}$ . Il résulte de ce qui précède que l'application  $P$  déjà définie sur une partie de  $V^2 \times I^2$  par les conditions a), b) et c) peut s'étendre au voisinage de  $\Delta_*$  suivant une application équivariante, transverse à  $\Delta_{V'}$  sur  $\Delta_*$ .

D'autre part soit  $\hat{\Delta}$  l'ensemble des points de  $V^2 \times I^2$  de la forme

$$(d, Jd, t, \tau),$$

où  $d \in D$  est tel que  $\lambda(d) \geq 0$  et où  $t$  est compris entre 0 et  $(1 - \tau)\lambda(d) - \tau\nu(d)$ . D'après la construction de  $\psi'$  (cf. 4.4), l'application  $P$ , déjà construite sur la frontière de  $\hat{\Delta}$ , peut s'étendre à  $\hat{\Delta}$  d'une manière équivariante. De plus, comme  $P$  est transverse à  $\Delta_{V'}$  sur  $\Delta_*$  et que

$$\dim \hat{\Delta} < \text{codim } \Delta_{V'}^{\mathbb{N}} = n',$$

on peut s'arranger pour que  $P(\hat{\Delta} - \Delta_*)$  ne rencontre pas  $\Delta_{V'}$ .

Finalement, on pourra définir l'application équivariante  $P$  sur un voisinage  $U$  du compact  $K$ , union de  $V^2 \times I \times \{0\}$ , de  $V^2 \times I \times \{1\}$ , de  $V^2 \times \{0\} \times I$  et de  $\hat{\Delta}$  de sorte que  $P^{-1}(\Delta_{V'})$  soit l'union de  $\Delta_*$  et de  $(\Delta_{V'} \times I \times I) \cap U$ . Or  $V^2 \times I^2$  peut se rétracter par déformation sur un voisinage de  $K$  contenu dans  $U$ , chaque point se déplaçant sur un segment de la forme  $(x_1, x_2, t, I)$ . Cette rétraction, composée avec l'application  $P$  déjà définie de  $U$  dans  $V'^2$ , donne une application équivariante, encore notée  $P$ , de  $V^2 \times I^2$  dans  $V'^2$  telle que  $P^{-1}(\Delta_{V'})$  soit l'union de  $\Delta_*$  et de  $\Delta_{V'} \times I^2$ . Alors  $P$  restreint à  $V^2 \times \{1\} \times I$  est l'homotopie isovariante cherchée qui relie  $H_1$  à  $f_1^2$ .

4.10. *Démonstration du complément* (cf. 1.5). Supposons que  $f$  soit une immersion propre de  $V$  dans  $V'$  dont la restriction au fermé  $A$  est un plongement, et que  $H_t$  soit fixe sur  $A^2$ . Alors  $D \cap A$  ne rencontre pas  $J(D \cap A)$ . On peut construire la déformation  $\Phi_t: L \rightarrow L'$  dans le modèle (cf. 3.2) de sorte qu'elle soit fixe sur un voisinage de  $D \cap A$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, la déformation  $f_t$  (cf. 4.3) sera aussi fixe au voisinage de  $A$ .

Si de plus  $H_t((V - A) \times A) \cap \Delta_{V'} = \emptyset$ , alors  $D \cap A = \emptyset$ . Donc pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\Psi(L_\varepsilon) \cap A = \emptyset$ . Ainsi  $f_t(A) \cap f_t(V - A) = \emptyset$ . Dans ce dernier cas, la démonstration est inchangée si  $V$  a un bord contenu dans  $A$ .

4.11. *Un cas particulier*. La variété  $V$  n'est pas nécessairement connexe, et la démonstration précédente n'exclut pas le cas où les composantes connexes de  $V$  sont de dimensions différentes; il faut alors préciser que  $n$  est le maximum des dimensions des composantes connexes de  $V$ . Comme la dimension de la variété des points doubles de  $f$  peut être inférieure à  $2n - n'$ , il est parfois possible d'affaiblir les inégalités sur les dimensions, comme dans le cas suivant.

**Théorème.** Soient  $V_i, i = 1, 2$  des variétés compactes de dimension  $n_i$  et soit  $A_i$  un fermé de  $V_i$  contenant  $\partial V_i$ . Soient  $f_i$  des plongements de  $V_i$  dans  $V'$  tels que  $f_1(V_1) \cap f_2(A_2) = f_1(A_1) \cap f_2(V_2) = \emptyset$ . Supposons qu'il existe une homotopie  $H_t: V_1 \times V_2 \rightarrow V'^2$  telle que  $H_1(V_1 \times V_2) \cap \Delta_{V'} = \emptyset$  et que

$$H_t((V_1 \times A_2) \cup (A_1 \times V_2)) \cap \Delta_{V'} = \emptyset .$$

Alors si  $n_1 + n_2 + \max(n_1, n_2) + 3 \leq 2n'$ , il existe une isotopie  $g_t$  de  $f_1 = g_0$ , fixe sur  $A_1$ , et telle que  $g_1(V_1) \cap f_2(V_2) = \emptyset$  et que  $g_t(V_1) \cap f_2(A_2) = \emptyset$ .

Il suffit dans la démonstration précédente de remplacer  $V$  par l'union disjointe de  $V_1$  et  $V_2$ ,  $f$  par la réunion de  $f_1$  et  $f_2$  et de remarquer que  $\dim D = n_1 + n_2 - n' + 1$ .

**5. Comment la démonstration du th. 2, b) (isotopie) se déduit de celle du th. 2, a).**

Nous reprenons la démonstration du paragraphe précédent en indiquant à chaque pas les modifications nécessaires. Les numérotations des paragraphes se correspondent.

Soit  $I_0$  le segment  $[0, 1]$ . Pour obtenir le th. 2, b), on applique en gros la démonstration du paragraphe 4 au cas où  $V$  est remplacé par  $V \times I_0$  et  $V'$  par  $V' \times I_0$  et  $f$  par l'application  $f: V \times I_0 \rightarrow V' \times I_0$  définie par  $f(x, \tau) = (f_\tau(x), \tau)$ , où  $\tau \in I_0$ . Les restrictions de dimensions du th. 1, a) deviennent alors  $2(n' + 1) \geq 3(n + 2)$ , c'est-à-dire  $2n' > 3(n + 1)$ .

5.1. On suppose aussi que  $f$  est une immersion générique. Soit

$$H: V^2 \times I_0 \times I \rightarrow V'^2$$

l'application définie par  $H(x_1, x_2, \tau, t) = H_{\tau,t}(x_1, x_2)$ . Comme dans 4.1,  $I$  désigne le segment  $[-1, +1]$  et l'on suppose  $H$  convenablement modifié de sorte que les conditions 1) et 3) de 4.1 soient vérifiées, 2) étant remplacé par la condition 2'): la projection  $p_1: V^2 \times I_0 \times I \rightarrow V \times I_0$  définie par  $p_1(x_1, x_2, \tau, t) = (x_1, \tau)$  restreinte à  $\Delta = H^{-1}(\Delta_{V'}) - \Delta_{V'} \times I_0 \times I$  est un plongement; de plus le champ de vecteurs  $\partial/\partial \tau$  défini sur  $V^2 \times I_0 \times I$  n'est jamais tangent à  $\Delta$ . Ceci revient à dire que la sous-variété  $p_1(\Delta) = D$  de  $V \times I_0$  est transverse au champ de vecteurs  $\partial/\partial \tau$  de  $V \times I_0$ . Cette dernière condition peut être réalisée car

$$\dim D < \text{codim } D .$$

5.2 et 5.3. On construit comme en 4.2 un modèle et il s'agit de définir des difféomorphismes

$$\Psi: L_\varepsilon \rightarrow V \qquad \Psi: L'_\varepsilon \rightarrow V'$$

vérifiant les conditions a), b) c) de 4.3 et de plus

$$d) \tau \cdot \Psi'[l_a, 0, t] = \tau \cdot \Psi(l_a)$$

où  $\tau$  désigne les projections naturelles de  $V \times I_0$  et  $V' \times I_0$  sur  $I_0$ .

5.4. On construit d'abord les plongements

$$\psi: D \rightarrow V \times I_0 \quad \text{et} \quad \psi': D' \rightarrow V' \times I_0$$

vérifiant 1), 2), 3) de 4.4 et de plus

$$4) \tau \cdot \psi'[d, t] = \tau \cdot \psi(d).$$

$\psi$  est l'injection de  $D$  dans  $V \times I_0$ . Une application continue  $\bar{\psi}'$  de  $A$  (cf. 4.4) dans  $V' \times I_0$  vérifiant  $f\psi = \bar{\psi}'\varphi$  et 4) est définie par  $\bar{\psi}'[d, t] = (p_1' H[\alpha(d), \alpha(Jd), \tau(d), \lambda(d) - t], \tau(d))$  où  $\alpha$  est la projection naturelle de  $V \times I_0$  sur  $V$ .

Ensuite  $\bar{\psi}'$  est étendu à  $D'$  et est approché par un plongement  $\psi'$  de sorte que les conditions 1) à 4) soient vérifiées. Les modifications à apporter à 4.4 pour tenir compte de 4) ne présentent pas de difficultés particulières.

5.5. On doit construire ensuite, comme en 4.5, des représentations

$$\dot{\psi}: L \rightarrow T(V \times I_0) \quad \text{et} \quad \dot{\psi}': L' \rightarrow T(V' \times I_0)$$

vérifiant, en plus des conditions énoncées en 4.5,

$$d \tau \cdot \dot{\psi}'[l_a, 0, t] = d \tau \cdot \dot{\psi}(l_a).$$

$\dot{\psi}$  sera un relèvement de  $L = N(V \times I_0; D)$  dans  $T(V \times I_0; D)$  tel que l'image de  $\dot{\psi}$  contienne la restriction à  $D$  du champ de vecteurs  $\partial/\partial \tau$  (on utilise la condition 2) de 5.1). On identifie  $N(V \times I_0; D)$  à son image par  $\dot{\psi}$ . Ceci donne une décomposition en somme directe :  $N(V \times I_0; D) = N_0 \oplus T_0$ , où  $N_0$  est l'ensemble des vecteurs où  $d\tau$  s'annule et où  $T_0$  est le fibré linéaire trivial engendré par le champ  $\partial/\partial \tau$  restreint à  $D$ .

$N(V' \times I_0; D')$  est aussi identifié à un sous-fibré de  $T(V' \times I_0; D')$  par un relèvement contenant le champ  $\partial/\partial \tau$  restreint à  $D'$  et l'image par  $d\dot{\psi}'$  de  $N(V \times I_0; D)$ . Cette identification donne, comme plus haut, une décomposition :

$$N(V' \times I_0; D') = N'_0 \oplus T'_0$$

où  $N'_0$  est l'ensemble des vecteurs sur lesquels  $d\tau$  s'annule et où  $T'_0$  est engendré par  $\partial/\partial \tau$  restreint à  $D'$ .

5.6. Le lemme 4.6 est remplacé par le suivant :

*Lemme.* Il existe une représentation  $\dot{\xi}$  de  $N_0 \oplus_J N_0 \oplus T_0$  dans  $N'_0$  qui se projette sur  $\xi$ , telle que  $\dot{\xi}(l_a, l_{J_a}, \partial/\partial \tau(d)) = -\dot{\xi}(l_{J_a}, l_a, \partial/\partial \tau(Jd))$  et telle que pour  $d \in D_0$ , on ait

$$\dot{\xi}(l_a, l_{J_a}, \partial/\partial \tau(d)) = d\dot{f}(l_a + \partial/\partial \tau(d)) - d\dot{f}(l_{J_a} + \partial/\partial \tau(Jd)).$$

Dans cet énoncé,  $\partial/\partial\tau(d)$  désigne le vecteur du champ  $\partial/\partial\tau$  au point  $d$ . La démonstration est si proche de celle du lemme 4.6 que nous la laissons au lecteur.

5.7. Construisons le long de  $\underline{D}'$  un champ de vecteur qui associe à tout point  $(d, t) \in D \times [0, 1]$  un vecteur  $\nu(d, t)$  d'origine  $\psi'[d, t]$ , contenu dans  $N(V' \times I_0, \underline{D}')$ , tel que

$$\begin{aligned} \langle d\tau, \nu(d, t) \rangle &= 2 \\ \nu(d, 0) &= \nu(Jd, 0) \end{aligned}$$

et pour  $d \in D_0$ ,  $\nu(d, 0) = \partial f/\partial\tau(d) + \partial f/\partial\tau(Jd)$   
(où  $\partial f/\partial\tau(d)$  est l'image par  $df$  du vecteur  $\partial/\partial\tau(d)$ ).

On construit ensuite une représentation

$$\chi : (N_0 \oplus_J N_0 \oplus T_0) \times [0, 1] \rightarrow N'_0$$

telle que

1.  $\chi$  se projette sur l'application  $(d, t) \rightarrow \psi'[d, t]$  de  $D \times [0, 1]$  sur  $\underline{D}'$

2.  $\chi = \dot{\xi}$  sur  $(N_0 \oplus_J N_0 \oplus T_0) \times \{0\}$ .

3.  $\chi(l_d, 0, a \partial/\partial\tau(d), \lambda(d)) = df(l_d + 2a \partial/\partial\tau(d)) - a \nu(d, \lambda(d))$   
pour  $\lambda(d) \geq 0$

et  $\chi(0, -l_d, -a \partial/\partial\tau(d), -\lambda(d)) = df(l_d + 2a \partial/\partial\tau(d)) - a \nu(d, -\lambda(d))$   
pour  $\lambda(d) \leq 0$ .

Comme dans 4.7, on construit d'abord la restriction  $\chi_1$  de  $\chi$  à

$$(N_0 \oplus_J 0 \oplus T_0) \times [0, 1].$$

On définit enfin  $\dot{\psi}'$  par la formule

$$\begin{aligned} \dot{\psi}' [l_d + a \partial/\partial\tau(d), l_{Jd} + b \partial/\partial\tau(Jd), t] &= \chi(l_d, l_{Jd}, \frac{a+b}{2} \partial/\partial\tau(d), t) + \\ &+ \frac{a-b}{2} \nu(d, t). \end{aligned}$$

5.8. Les difféomorphismes  $\Psi$  et  $\Psi'$  sont construits comme dans 4.8. Pour que la condition d) de 4.3 soit vérifiée, on remplace  $\Psi$  par l'application faisant correspondre à  $[l_d, l_{Jd}, t]$ , où  $l_d, l_{Jd} \in N(V \times I_0, D)$ , le point

$$(x', \tau') \in V' \times I_0,$$

où  $x'$  est la projection sur  $V'$  de  $\Psi'[l_d, l_{Jd}, t]$  et  $\tau' = \tau(d) + \tau\Psi(l_d) - \tau\Psi(l_{Jd})$ . Cette application est encore un difféomorphisme pour  $\varepsilon$  assez petit, car elle est tangente à  $\Psi'$  le long de  $\underline{D}'$  et elle jouit de toutes les propriétés requises.

**6. Démonstration du théorème 2, a) dans le cas d'une variété à bord**

6.1. La démonstration du paragraphe 4 s'applique sans changement dans le cas où  $f$  est déjà un plongement au voisinage du bord  $\partial V$  de  $V$ , où  $H_t$  est fixe sur  $(\partial V)^2$  et où  $H_t((V - \partial V) \times \partial V) \cap \Delta_V = \emptyset$ . En effet ces hypothèses entraînent que la variété  $D$  ne rencontre pas  $\partial V$  et donc que toutes les déformations peuvent être fixes sur un voisinage de  $\partial V$  (cf. 4.10).

6.2. Considérons ensuite le cas où  $f$  est un plongement au voisinage de  $\partial V$  et où  $H_t$  est fixe sur  $(\partial V)^2$ . Nous allons effectuer successivement deux déformations. La première  $f_t$ , fixe sur un voisinage de  $\partial V$ , déformera  $f = f_0$  en une application  $f_1$  telle que  $f_1(V - \partial V) \cap f(\partial V) = \emptyset$ . La seconde  $g_u$ , fixe sur un voisinage de  $\partial V$ , sera telle que  $g_u(V - \partial V) \cap f(\partial V) = \emptyset$  et que  $g_1$  soit un plongement.

Première déformation. Dans la démonstration du paragraphe 4, remplaçons  $V^2$  par  $(V - \partial V) \times \partial V$  et  $H_t$  par la restriction  $H_t^0$  de  $H_t$  à

$$(V - \partial V) \times \partial V.$$

On peut supposer au départ que l'immersion  $f$  est générique, de sorte qu'en particulier l'ensemble  $F$  des paires de points distincts de  $V - \partial V$  qui ont même image par  $f$  est une sous-variété fermée dont la dimension est  $2n - n'$ . Ainsi dans les conditions imposées à  $\Delta$  dans 4.1, on pourra exiger encore que l'image de  $\Delta = (H_t^0)^{-1} \Delta_V$  par la projection

$$p_1 : (V - \partial V) \times \partial V \rightarrow V - \partial V$$

ne rencontre pas  $F$ . Les constructions de 4 donnent alors une déformation régulière  $f_t^0$  de  $f$  restreint à  $V - \partial V$ , fixe sur un voisinage de  $\partial V$  et telle que  $f_1(V - \partial V) \cap f(\partial V) = \emptyset$ . Alors  $f_t(x) = f_t^0(x)$  pour  $x \notin \partial V$  et  $= f(x)$  pour  $x \in \partial V$  est une homotopie régulière.

Pour construire la deuxième déformation  $g_u$ , il nous faut une homotopie équivariante convenable reliant  $(f_1)^2$  à  $H_1$ . Pour cela, définissons une application  $P$  d'une partie de  $V^2 \times I^2$  dans  $V'^2$  en posant

$$P(x_1, x_2, t, u) = \begin{cases} H_t(x_1, x_2) & \text{sur } V^2 \times I \times 0 \\ (f_t x_1, f_t x_2) & \text{sur } V^2 \times I \times 1 \\ (f x_1, f x_2) & \text{sur } V^2 \times 0 \times I \text{ et sur } (\partial V^2) \times I^2. \end{cases}$$

D'après 4.9, il est possible de construire  $f_t$  de sorte que l'application  $P$  soit aussi définie sur  $[(V - \partial V \times \partial V) \cap (V \times V - \partial V)] \times I^2$ , équivariante et telle que  $P(x_1, x_2, 0, u) \notin \Delta_V$ , pour  $(x_1, x_2) \in (V - \partial V) \times \partial V$  et tout  $u$ . L'application  $P$  ainsi définie sur une partie  $K$  de  $V^2 \times I^2$  peut se prolonger suivant une application équivariante dans  $V'^2$  d'un voisinage  $U$  de  $K$ . Or

il existe une rétraction  $R$  de  $V^2 \times I^2$  sur un voisinage arbitrairement petit de  $K$  et telle que  $R(x_1, x_2, t, u) = (x_1, x_2, t', u)$ . Alors  $P \cdot R$  restreint à  $V^2 \times 1 \times I$  donne une homotopie équivariante  $H_u$  reliant  $(f_1)^2$  à  $H_1$ , fixe sur  $(\partial V)^2$ , telle que  $H_u((V - \partial V) \times \partial V) \cap \Delta_V = \emptyset$  et que  $\Delta_V$  soit ouvert dans  $H_u^{-1}(\Delta_V)$ .

Nous sommes ainsi ramenés au premier cas.

6.3. *Cas général.* On considère la restriction de  $H_t$  à  $(\partial V)^2$ . Ceci permet de construire une homotopie régulière convenable  $f_t^0$  déformant  $f|_{\partial V}$  en un plongement  $f_1^0$ . L'homotopie  $f_t^0$  peut s'étendre suivant une homotopie régulière  $f_t$  de  $f$  (cf. THOM [9]). On se ramène au cas précédent 6.2 en construisant comme ci-dessus une homotopie équivariante  $H_u : V^2 \rightarrow V'^2$ , fixe sur  $(\partial V)^2$  (ou dont la restriction à  $(\partial V)^2$  est isovariante) et telle que

$$H_u(V - \partial V \times \partial V) \cap \Delta_V = \emptyset .$$

6.4. *Affaiblissement des restrictions de dimensions pour les variétés à bord.*

**Théorème.** *Lorsque  $V$  est une variété à bord qui peut être construite par adjonction d'anses d'indices  $\leq p$  (cf. SMALE [7]), alors*

<i>dans le th. 2, a), on peut supposer</i>	$2n' \geq 3(p + 1)$
2, b),	$2n' > 3(p + 1)$
1, a),	$2n' \geq 2n + p + 1$
1, b),	$2n' > 2n + p + 1$

*lorsque  $p < n$ .*

Le passage du th. 2 au th. 1 se fait comme dans 2 en tenant compte de la remarque p. 240 de [3].

La raison de cette amélioration pour le th. 2 est que l'on est ramené essentiellement à séparer ou à plonger des disques de dimension au plus  $p$ .

6.5. L'idée de la démonstration est en gros la suivante.

Soit  $D^k$  le disque de rayon unité dans  $R^k$ . Une anse d'indice  $k$  est le produit  $h_k = D^k \times D^{n-k}$ . Supposons que  $V = h_0 \cup h_{p_1} \cup \dots \cup h_{p_r}$  soit obtenu par adjonctions successives d'anses d'indices  $p_k \leq p$ . Posons  $V_k = V_{k-1} \cup h_{p_k}$ ; on entend par là que la variété  $V_k$  est obtenue en collant l'anse  $h_{p_k}$  à la variété  $V_{k-1}$  par un difféomorphisme de  $D^{p_k} \times D^{n-p_k}$  dans  $\partial V_{k-1}$ .

On suppose par récurrence qu'il existe une immersion  $f_{k-1}$  de  $V$  dans  $V'$  dont la restriction à  $V_{k-1}$  est un plongement et une homotopie équivariante  $H_t^{k-1} : V^2 \rightarrow V'^2$ , fixe sur  $(V_{k-1})^2$ , reliant  $f_{k-1}^2$  à une application isovariante  $H_1^{k-1}$ ,  $\Delta_V$  étant ouvert dans  $(H_t^{k-1})^{-1} \Delta_V$ .

Posons  $A^i = D^{p_i} \times \{0\}$ , l'âme de l'anse  $h_{p_i}$ , et soit  $g$  la restriction de  $f_{k-1}$  à  $A^k$ . En utilisant la restriction de  $H_t^{k-1}$  à  $V_{k-1} \times A_k$ , on construit

comme dans 6.2 une homotopie régulière  $g_i$  de  $g$ , fixe sur un voisinage de  $\partial A^k$  de sorte que  $g_i(A^k)$  évite successivement

$$f_{k-1}(A^0), f_{k-1}(V_0), f_{k-1}(A^1), f_{k-1}(V_1), \dots, f_{k-1}(A^{k-1})$$

et enfin  $f_{k-1}(V_{k-1})$  par dilatation (pour séparer  $g(A^k)$  de  $f_{k-1}(A^i)$ , on doit supposer  $p_k + p_i + \max(p_k, p_i) \leq 2n'$ , cf. 4.11). Ensuite on déforme l'immersion obtenue en un plongement  $g_1$  de  $A^k$  dans  $V'$  tel que

$$g(A^k - \partial A^k) \cap f_{k-1}(V_{k-1}) = \emptyset$$

(il faudra supposer ici  $3(p_k + 1) \leq 2n'$ ). On étend enfin l'homotopie régulière faisant passer de  $g$  à  $g_1$  en une homotopie régulière de  $f_{k-1}$ , fixe sur  $V_{k-1}$ . On obtient ainsi une immersion  $f_k$  dont la restriction à  $V_k$  est un plongement et l'on construit une homotopie équivariante vérifiant les mêmes propriétés que  $H^k_t^{-1}$ ,  $k - 1$  étant remplacé par  $k$ .

## 7. APPENDICE. Rappel sur les fibrés vectoriels.

7.1. Un fibré vectoriel  $E \rightarrow B$  est un fibré localement trivial de base  $B$ , de fibre un espace vectoriel et de groupe structural le groupe linéaire des automorphismes de cet espace vectoriel; la dimension de la fibre peut varier d'une composante connexe de  $B$  à l'autre. Le rang de  $E$  est le maximum des dimensions des fibres de  $E$  et le rang de  $E$  en un point  $b \in B$ , noté  $\text{rang}_b E$ , est la dimension de la fibre  $E_b$  de  $E$  au-dessus de  $b$ .

7.2. Une représentation  $f$  d'un fibré vectoriel  $E \rightarrow B$  dans un fibré vectoriel  $E' \rightarrow B'$ , se projetant sur une application  $f_0$  de  $B$  dans  $B'$ , est une application fibrée  $f$  de  $E$  dans  $E'$  dont la restriction à chaque fibre  $E_b$  est une application linéaire *injective* dans  $E'_{f_0(b)}$ .

Il y a correspondance biunivoque entre les représentations de  $E$  dans  $E'$  se projetant sur  $f_0$  et les représentations de  $E$  dans  $f_0^{-1} E'$  (image réciproque de  $E'$  par  $f_0$ ) se projetant sur l'identité de  $B$ . On peut donc se borner au cas où  $E'$  est un fibré de base  $B$  et où les représentations considérées se projettent sur l'identité de  $B$ .

Les applications linéaires injectives des fibres  $E_b$  de  $E$  dans les fibres  $E'_b$  de  $E'$  forment un espace fibré  $L(E, E')$  de base  $B$ . Sa fibre au-dessus de  $b$  est la variété de STIEFEL  $V_{\text{rang}_b E', \text{rang}_b E}$ , où  $V_{m,n}$  est l'espace des  $n$ -repères dans  $R^m$ . Les représentations de  $E$  dans  $E'$  correspondent biunivoquement aux sections de  $L(E, E')$ . Les classes d'homotopie de représentations de  $E$  dans  $E'$  correspondent biunivoquement aux classes d'homotopie de sections de  $L(E, E')$ .

7.3. Soit  $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \rightarrow 0$  une suite exacte de fibrés vectoriels. Un relèvement de la projection  $j$  est une représentation  $r$  de  $E''$  dans  $E$  telle que  $j \cdot r$  soit l'identité. Un tel relèvement revient à se donner une section du fibré dont la fibre au-dessus de  $b$  est l'espace affine formé des sous-espaces linéaires de  $E_b$  complémentaires à  $E'_b$ . Ainsi, si  $B$  est un complexe et  $A$  un sous-complexe de  $B$ , tout relèvement de  $j$  déjà défini au-dessus de  $A$  peut s'étendre sur  $B$ .

7.4. *Lemme de factorisation.* Soit  $B$  un complexe et  $A$  un sous-complexe de  $B$ . Soient  $E = E_1 \oplus E_2$  et  $E' = E'_1 \oplus E'_2$  deux fibrés sommes directes de fibrés vectoriels, de base  $B$ . Soit  $\sigma$  un isomorphisme de  $E$  sur  $E'$  dont la restriction à  $A$  est somme directe  $\sigma_1^0 \oplus \sigma_2^0$  de deux isomorphismes

$$\sigma_1^0 : E_1 | A \rightarrow E'_1 | A \quad \text{et} \quad \sigma_2^0 : E_2 | A \rightarrow E'_2 | A .$$

Supposons que  $\sigma_1^0$  puisse s'étendre suivant un isomorphisme  $\sigma_1$  de  $E_1$  sur  $E'_1$  et que  $\dim_b B < \text{rang}_b E_2$  pour tout  $b \in B$ . Alors il existe une représentation  $\sigma_2$  de  $E_1$  sur  $E'_1$  prolongeant  $\sigma_2^0$  et une homotopie de représentations, fixe sur  $A$ , reliant  $\sigma$  à  $\sigma_1 \oplus \sigma_2$ .

*Démonstration.* Soient  $L(E, E'), L(E_1, E')$  et  $L(E_1, E'_1)$  les fibrés sur  $B$  définis comme en 7.2;  $L(E_1, E'_1)$  est considéré comme un sous-fibré de  $L(E_1, E')$ ; par restriction à  $E_1$ , on a une application fibrée  $\varphi : L(E, E') \rightarrow L(E_1, E')$ .

La représentation  $\sigma$  définit une section  $\sigma$  de  $L(E, E')$ ; sa projection  $\varphi(\sigma)$  dans  $L(E_1, E')$ , restreinte à  $A$ , peut s'étendre suivant une section  $\sigma_1$  de  $L(E_1, E'_1)$ . Comme la fibre de  $L(E_1, E')$  au-dessus de  $b$  est une variété de STIEFEL acyclique en dimensions inférieures à  $\text{rang}_b E_2$  (cf. 7.2), il existe une homotopie, fixe sur  $A$ , qui déforme  $\varphi(\sigma)$  en  $\sigma_1$ . Cette homotopie peut se relever dans  $L(E, E')$  et déforme  $\sigma$  en une section  $\sigma_0$  égale à  $\sigma$  sur  $A$ , et qui se projette sur  $\sigma_1$ . Cette section  $\sigma_0$  correspond à une représentation de  $E$  dans  $E'$  dont la restriction à  $E_2$ , composée avec la projection de  $E'$  sur  $E'_2$  est l'isomorphisme  $\sigma_2$  cherché.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. HAEFLIGER, *Differentiable imbeddings*, Bull. Amer. Math. Soc., 67 (1961), 109–112.
- [2] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables de variétés dans variétés*, Comment. Math. Helv., 36 (1961), 47–82.
- [3] A. HAEFLIGER et M. HIRSCH, *Immersions in the stable range*, Annals of Math. 75 (1962), 231–241.
- [4] M. HIRSCH, *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), 242–276.
- [5] E. R. VAN KAMPEN, *Komplexe in euklidischen Räumen*, Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1932), 72–78, et 152–153 (Berichtigung).
- [6] A. SHAPIRO, *Obstructions to the imbedding of a complex in a euclidean space. I. The first obstruction*, Annals of Math., 66 (1957), 256–269.
- [7] S. SMALE, *Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four*, Annals of Math., 74 (1961), 391–406.
- [8] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv., 28 (1954), 17–86.
- [9] R. THOM, *La classification des immersions d'après SMALE*, Séminaire Bourbaki, décembre 1957, Paris.
- [10] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*, Annals of Math., 37 (1936), 645–680.
- [11] H. WHITNEY, *The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space*, Annals of Math., 45 (1944), 220–246.
- [12] H. WHITNEY, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, 1957.
- [13] W. T. WU, *On the realization of complexes in euclidean spaces*, Acta Math. Sinica, 5 (1955), 505–552, 7 (1957), 79–101, et 8 (1959), 133–150.  
En anglais, Scientia Sinica, 7 (1958), 251–297 et 365–387, 8 (1959), 133–150.
- [14] W. T. WU, *On the isotopy of  $C^r$ -manifolds of dimension  $n$  in euclidean  $(2n + 1)$ -space*, Science Record, N. S. 2 (1958), 271–275.
- [15] W. T. WU, *On the isotopy of a finite complex in a euclidean space. I, II*, Science Record, N. S. 3 (1959), 342–351.
- [16] W. T. WU, *On the isotopy of complexes in a euclidean space, I*, Scientia Sinica, 9 (1960), 21–46.

(Reçu le 26 avril 1962)