



Points Multiples D'Une Application et Produit Cyclique Reduit

Andre Haefliger

American Journal of Mathematics, Vol. 83, No. 1 (Jan., 1961), 57-70.

Stable URL:

<http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9327%28196101%2983%3A1%3C57%3APMDAEP%3E2.0.CO%3B2-K>

American Journal of Mathematics is currently published by The Johns Hopkins University Press.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://uk.jstor.org/about/terms.html>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://uk.jstor.org/journals/jhup.html>.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

JSTOR is an independent not-for-profit organization dedicated to creating and preserving a digital archive of scholarly journals. For more information regarding JSTOR, please contact support@jstor.org.

POINTS MULTIPLES D'UNE APPLICATION ET PRODUIT CYCLIQUE REDUIT.*

par ANDRÉ HAEFLIGER.

Le but essentiel de cette note est de déterminer la classe de cohomologie universelle modulo p duale au cycle des points p -uples d'une application f d'une variété V dans une variété M , p étant premier et les points p -uples étant considérés comme des points du produit cyclique de V . Cette classe peut aussi s'interpréter comme une obstruction à trouver dans la classe d'homotopie de f une application sans point p -uple. Elle est en relation étroite avec la classe de plongement Φ_p de Wu (cf. [13]).

La méthode utilisée donne une détermination explicite de la cohomologie modulo p du p -produit cyclique réduit V^*_p d'une variété V . C'est dans la cohomologie de cet espace que se trouvent des obstructions au plongement de V dans une variété M (cf. [13] et [7]). Nous retrouvons les conditions données par Wu pour l'annulation des classes Φ_p lorsque M est l'espace euclidien.

Je tiens à remercier vivement le Prof. N. E. Steenrod qui m'a communiqué ses résultats avant leur publication.

1. Définitions. Ce paragraphe rappelle essentiellement les notions introduites dans [5].

1.1. *Point p -uple de type π d'une application.* Soit f une application continue d'un espace V dans un espace M . Un point p -uple de f est une suite $x_1, \dots, x_p$ de p points distincts de V tels que $f(x_1) = \dots = f(x_p)$. Mais il est naturel d'identifier deux telles suites si l'une se déduit de l'autre par une permutation. Soit donc π un groupe de permutations de p objets; il agit sur le produit V^p par permutation des facteurs et, par restriction, sur le sous-espace V^p_0 formé des suites de p points distincts de V . Soit V^0_π le quotient de V^p_0 par l'action de π : deux points $(x_1, \dots, x_p)$ et $(x'_1, \dots, x'_p)$ de V^p_0 définissent le même point $\{x_1, \dots, x_p\}$ de V^0_π si l'une des suites est obtenue à partir de l'autre par une permutation appartenant à π . Par définition, un point p -uple de f de type π est un point $\{x_1, \dots, x_p\}$ de V^0_π tel que $f(x_1) = \dots = f(x_p)$.

* Received June 8, 1960.

1.2. *Classe universelle des points p -uples.* Supposons que M soit une variété de dimension m . Soit $E_\pi \rightarrow B_\pi$ un espace fibré universel de groupe structural π . Soit M^p_π le fibré $E_\pi \times_\pi M^p$ associé à E_π de fibre M^p sur laquelle π agit par permutation des facteurs. La réunion des diagonales des fibres forme un sous-fibré trivial $M_\pi = B_\pi \times M$: le sous-fibré diagonal.

On peut définir la classe Δ^M_π duale à M_π dans M^p_π de la manière suivante. Soit $E'_\pi \rightarrow B'_\pi$ un fibré universel de groupe π pour une grande dimension N et tel que E'_π et B'_π soient des variétés; alors le fibré M'^p_π associé à E'_π de fibre M^p est une variété ainsi que le sous-fibré diagonal M'_π . Soit Δ'^M_π la classe duale à la classe d'homologie de M'^p_π représentée par la sous-variété M'_π ; c'est un élément de $H^{(p-1)m}(M'^p_\pi)$, les coefficients étant les entiers modulo 2 si M est non orientable ou un faisceau d'entiers tordus si M est orientée. Il existe une représentation définie à l'homotopie près de M'^p_π dans M^p_π ; elle induit un isomorphisme de $H^{(p-1)m}(M^p_\pi)$ sur $H^{(p-1)m}(M'^p_\pi)$ si N est assez grand. Par définition Δ^M_π sera l'élément de $H^{(p-1)m}(M^p_\pi)$ correspondant à Δ'^M_π par cet isomorphisme.

La classe Δ^M_π (ou plus simplement Δ_π) sera la *classe universelle des points p -uples de type π* pour les applications continues dans M . Cette terminologie est justifiée dans les paragraphes qui suivent.

1.3. *La classe O^t_π .* L'espace V^p_0 (cf. 1.1) est un revêtement de V^0_π et peut être considéré comme un fibré principal de groupe structural π . Soit alors comme plus haut E le fibré associé à V^p_0 de fibre M^p et soit D le sous-fibré diagonal formé de la réunion des diagonales des fibres. Toute application continue f de V dans M définit une section f^0_π de E et le point $x = \{x_1, \dots, x_p\}$ de V^0_π est un point p -uple de f si et seulement si $f^0_\pi(x)$ appartient à D .

Si V est un espace assez raisonnable (par exemple un polyèdre), il existe une représentation h de E dans l'universel M^p_π unique à l'homotopie près.

Par définition la classe O^t_π est égale à $f^0_* \pi h^*(\Delta^M_\pi)$. Il est clair que O^t_π ne dépend que la classe d'homotopie de f .

PROPOSITION. Si f est homotope à une application de V dans M sans point p -uple, alors $O^t_\pi = 0$.

En effet, si f est une application sans point p -uple, alors hf^0_π applique V^0_π dans $M^p_\pi - M_\pi$; d'autre part l'image de Δ^M_π par l'homomorphisme induit par l'injection de $M^p_\pi - M_\pi$ dans M^p_π est nulle, car Δ^M_π est représentée par une cochaîne de support M_π .

La classe O^t_π représente dans un certain sens une première obstruction

à trouver dans la classe d'homotopie de f une application sans point p -uple (cf. [7], [13]).

1.4. *Interprétation de la classe Of_π dans le cas différentiable.* Soit f une application différentiable d'une variété V dans une variété M présentant sous forme régulière les points p -uples, c'est à dire que pour tout point p -uple $(x_1, \dots, x_p)$ de f les images par f des espaces tangents à V en $x_1, \dots, x_p$ sont en position générale dans l'espace tangent à M en $y = f(x_1) = \dots = f(x_p)$. Ceci équivaut à dire que $f^p: V^p \rightarrow M^p$ est transverse (cf. [11]) sur la diagonale de M^p en tout point de $V^p_0 \subset V^p$, ou encore que la section f^0_π du fibré E est transverse sur le sous-fibré diagonal D . Dans ces conditions, les points p -uples de type π de f forment une sous-variété dans V^0_π représentant une classe d'homologie duale à Of_π . Cela résulte immédiatement de la définition de Of_π car $h^*(\Delta^M_\pi)$ est la classe duale à D dans E .

On peut remarquer (cf. [5], I, 3) que l'on peut toujours approcher une application donnée par une application différentiable qui présente sous forme régulière les p -uples sur un ouvert de V^0_π qui en est un rétract par déformation.

1.5. *Produit cyclique réduit V^*_p et classes de plongement ϕ^f_p .* Soit p un nombre premier. Suivant la terminologie de Wu [13], appelons p -produit cyclique réduit de V le quotient V^*_p de $V^p - V$ (p -produit de V privé de sa diagonale V) par l'action du groupe π des permutations cycliques des facteurs. Comme p est premier, l'espace $V^p - V$ est un revêtement à p feuillets de V^*_p et peut être aussi considéré comme un espace fibré principal de groupe structural π . On peut donc construire comme plus haut (1.2 et 1.3) le fibré associé (de base V^*_p) de fibre M^p et l'on a une représentation h de E dans l'universel M^p_π ; toute application continue f de V dans M définit une section f_p de E .

Par définition la classe $\phi^f_p \in H^{(p-1)m}(V^*_p)$ est égale à $f^*_p h^*(\Delta^M_\pi)$.

On remarquera que Of_π est l'image de ϕ^f_p par l'homomorphisme induit par l'injection du sous-espace V^0_π dans V^*_p . Naturellement pour $p=2$, $Of_\pi = \phi^f_p$.

PROPOSITION. Si f est homotope à un plongement de V dans M , alors $\phi^f_p = 0$.

La démonstration est la même que celle de la proposition précédente.

Les classes ϕ^f_p généralisent au signe près les classes de plongement $\phi^{(p-1)m_p}$ définies par Wu lorsque M est l'espace euclidien R^m (cf. [13], II).

On pourrait aussi définir, suivant Wu (cf. [13], II), les classes d'im-

mersion ψ^f_p en prenant l'image de ϕ^f_p dans la limite inductive des cohomologies des voisinages de la diagonale dans le p -produit cyclique réduit de V . Si f est homotope à une immersion (c. à d. une application localement biunivoque), alors $\psi^f_p = 0$.

2. Résultats de Steenrod. Dans tout ce qui suit, p est un nombre premier et π est le groupe des permutations cycliques de p objets; T est un générateur de π . Tous les groupes de cohomologie considérés sont à coefficients les entiers modulo p .

2.1. *L'anneau de cohomologie du classifiant B_π pour le groupe π sera noté $H^*(\pi)$ (cf. [3], Chap. XII).*

Pour $p=2$, $H^*(\pi) = P(\mu)$, où $P(\mu)$ est l'anneau des polynomes sur Z_2 dans la variable $\mu \in H^1(\pi)$.

Pour $p > 2$, $H^*(\pi) = P(\mu) \otimes E(\nu)$, où $P(\mu)$ est l'anneau des polynomes sur Z_p dans la variable $\mu \in H^2(\pi)$ et $E(\nu)$ l'algèbre extérieure engendrée par un élément $\nu \in H^1(\pi)$.

La cohomologie de tout espace fibré $q: E \rightarrow B$ à groupe structural π est une $H^*(\pi)$ -algèbre: soit h l'application (définie à une homotopie près) de B dans B_π qui définit la classe de E ; si $x \in H^*(E)$ et $\alpha \in H^*(\pi)$, par définition $\alpha x = q^* h^*(\alpha) \cup x$.

2.2. *Calcul de $H^*(M^{p_\pi})$.* Soit M un complexe fini et soit M^{p_π} le fibré associé à E_π de fibre M^p sur laquelle π agit par permutations cycliques des facteurs (cf. 1.2).

THÉORÈME (Steenrod). *Il existe un isomorphisme naturel de $H^*(\pi)$ -algèbre $\phi: H^*(M^{p_\pi}) \rightarrow H^*(\pi, H^*(M)^p)$.*

La projection naturelle de $H^(\pi, H^*(M)^p) = \sum_{r \geq 0} H^r(\pi, H^*(M)^p)$ sur $H^0(\pi, H^*(M)^p)$ identifié au sous-groupe des éléments invariants de $H^*(M)^p = H^*(M^p)$ correspond à l'homomorphisme $r^*: H^*(M^{p_\pi}) \rightarrow H^*(M^p)$ induit par l'injection de la fibre M^{p_π} .*

Dans cet énoncé, $H^*(M)^p$ est considéré comme un π -module (c. à d. un module sur l'anneau $Z(\pi)$ de π), π agissant par permutation cyclique des facteurs du produit tensoriel $H^*(M)^p$ avec le changement de signe usuel (cf. [3]).

2.3. Avant d'esquisser la démonstration, explicitons la structure de $H^*(\pi, H^*(M)^p)$

Soit D le sous-groupe de $H^*(M)^p$ formé des combinaisons linéaires des éléments diagonaux $(x)^p = x \otimes x \otimes \cdots \otimes x$, où $x \in H^*(M)$; le groupe π laisse fixe les éléments de D . Comme π -module, $H^*(M)^p$ est somme directe de D et d'un sous-module libre. Soit en effet (a_i) une base de $H^*(M)$; les éléments $a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_p}$ forment une base de $H^*(M)^p$. Les éléments $a_i \otimes \cdots \otimes a_i$ forment une base de D et les autres éléments de la base engendrent un sous-module π -libre que l'on peut écrire sous la forme $Z_p(\pi) \otimes S$, où S est l'espace vectoriel sur Z_p engendré par une π -base.

Ainsi $H^*(M)^p = D + Z_p(\pi) \otimes S$ et donc

$$H^*(\pi, H^*(M)^p) = H^*(\pi) \otimes D + N,$$

où N désigne l'image de $H^*(M)^p$ par l'opérateur norme $N: 1 + T + \cdots + T^{p-1}$ (cf. [3], Chap. XII).

Le $H^*(\pi)$ -module $H^*(\pi, H^*(M)^p)$ est donc engendré par le sous-groupe $D + N$ des éléments de π -degré 0 (un élément de $H^r(\pi, H^*(M)^p)$ est de π -degré r); de plus $H^*(\pi)$ agit trivialement sur les normes N (cf. [3], Chap. XII).

La structure multiplicative est déterminée en remarquant que les éléments de π -degré 0 forment un sous-anneau isomorphe à celui des éléments invariants de $H^*(M)^p$ et que $H^*(\pi) \otimes D$ est une sous-algèbre produit extérieure des anneaux $H^*(\pi)$ et D . On remarquera enfin que l'application de $H^*(M)$ sur D faisant correspondre à un élément x sa p -ème puissance tensorielle $(x)^p$ est un homomorphisme d'anneaux modulo N .

2.4. La démonstration du théorème est en gros la suivante (pour plus de détails, voir [9]).

Soit W le complexe des chaînes de B (résolution acyclique libre du π -module Z) et soient $C_*(M)$ (resp. $C^*(M)$) le complexe des chaînes (resp. des cochaînes) à coefficients Z_p de M . Alors $H^*(M^{p_\pi})$ est la cohomologie du complexe double $\text{Hom}(W \otimes_\pi C^*(M)^p, Z_p)$ qui s'identifie canoniquement au complexe double $\text{Hom}_\pi(W, C^*(M)^p)$. Comme les coefficients sont dans un corps, il existe une équivalence naturelle (à l'homotopie près) entre le complexe de chaînes $C^*(M)$ et $H^*(M)$ considéré comme un complexe de chaînes avec opérateur bord zéro; il en résulte également que les π -complexes de chaînes $C^*(M)^p$ et $H^*(M)^p$ sont équivalents. Donc $\text{Hom}_\pi(W, C^*(M)^p)$ est équivalent (comme π -complexe) au complexe simple $\text{Hom}_\pi(W, H^*(M)^p)$ dont la cohomologie est par définition $H^*(\pi, H^*(M)^p)$. Il existe donc un isomorphisme naturel $\phi: H^*(M^{p_\pi}) \rightarrow H^*(\pi, H^*(M)^p)$ de $H^*(\pi)$ -modules.

La deuxième partie de l'énoncé résulte immédiatement de la définition

de ϕ . Ceci montre que la restriction de ϕ aux éléments de π -degré 0 est un homomorphisme multiplicatif; comme $H^*(M)^p$ est engendré comme $H^*(\pi)$ -module par ses éléments de π -degré 0 (cf. 2.3), il en résulte que ϕ est aussi un isomorphisme d'anneaux.

2.5. *L'homomorphisme $i^*: H^*(M^p_\pi) \rightarrow H^*(M_\pi)$.* Soit M_π le sous-fibré diagonal de M^p_π (cf. 1.2); il est isomorphe au produit $B_\pi \times M$.

Avec l'identification du Théorème 2.2 et l'identification de $H^*(M_\pi)$ avec $H^*(\pi) \otimes H^*(M)$, l'homomorphisme i^* induit par l'injection de M_π dans M^p_π sera un homomorphisme de $H^*(\pi)$ -algèbre:

$$i^*: H^*(\pi, H^*(M)^p) \rightarrow H^*(\pi) \otimes H^*(M).$$

Il suffira de connaître i^* sur le sous-groupe $D + N = H^0(\pi, H^*(M)^p)$ qui engendre $H^*(\pi, H^*(M)^p)$. Comme $H^*(\pi)$ agit trivialement sur N et que $H^*(\pi) \otimes H^*(M)$ est un $H^*(\pi)$ -module libre, on a $i^*(N) = 0$. La valeur de i^* sur D est donnée par le

THÉORÈME (Steenrod). *Soit x un élément de $H^q(M)$ et $(x)^p = x \otimes \cdots \otimes x$. On a $p = 2$, $i^*(x)^p = \sum_0^q \mu^{q-i} Sq^i x$,*

$$p > 2, i^*(x)^p = \sigma \sum_{i=0}^{[q/2]} (-1)^i \mu^{h(q-2i)} \mathcal{P}^i x - \sigma \sum_{i>0}^{[q/2]} (-1)^i \mu^{h(q-2i)-1} \nu \beta \mathcal{P}^i x,$$

où les $\mathcal{P}^i$ (resp. les Sq^i) sont les p -èmes puissances cycliques r -duites (resp. les carrés) de Steenrod (cf. [8]); β est l'homomorphisme $H^k(M, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{k+1}(M, \mathbb{Z}_p)$ de Bockstein; $h = (p-1)/2$ et $\sigma = (-1)^{q/2}$ ou $(-1)^{(q-1)/2} h!$ suivant que q est pair ou impair.

Pour la démonstration, cf. [9]. On remarquera que i^* est injectif sur le sous-module $H^*(\pi) \otimes D$.

3. Détermination de la classe universelle des points p -uples.

3.1. Soit M une variété connexe de dimension n , compacte, avec un bord B . Nous supposons M orientée si $p > 2$. Pour tout nombre premier p et tout entier j positif, WU a défini (cf. [12]) les classes $U^j_{(p)}$ appartenant à $H^{2j(p-1)}(M, \mathbb{Z}_p)$ pour $p > 2$ ou à $H^j(M, \mathbb{Z}_2)$ pour $p = 2$ par les relations:

$$\begin{aligned} \langle Sq^j \alpha, M \rangle &= \langle U^j_{(2)} \cup \alpha, M \rangle, & p = 2, \\ \langle \mathcal{P}^j \alpha, M \rangle &= \langle U^j_{(p)} \cup \alpha, M \rangle, & p > 2, \end{aligned}$$

pour tout élément α appartenant à $H^*(M \bmod B, \mathbb{Z}_p)$; le symbole $\langle \gamma, M \rangle$

désigne la valeur (indice de Kronecker) de $\gamma \in H^r(M, \mathbb{Z}_p)$ sur le générateur de $H_m(M \bmod B, \mathbb{Z}_p)$ défini par l'orientation de M . Remarquons que $\langle \gamma, M \rangle = 0$ si $r \neq m$.

Pour rester dans le cadre de la théorie précédente, nous supposons que M est un complexe.

3.2. THÉOREME. *La classe Δ_π modulo p duale au sous-fibré diagonal M de M^p est*

$$\begin{aligned} \Delta_\pi &= \sum_{j=0}^{\leq m/2} \mu^{m-2j} (U^j_{(2)})^2 + \delta_2, & p=2, \\ \Delta_\pi &= \lambda \sum_{j=0}^{\leq m/2p} (-1)^j \mu^{h(m-2jp)} (U^j_{(p)})^p + \delta_p, & p>2, \end{aligned}$$

où δ_p est la classe duale dans M^p à la classe d'homologie représentée par la diagonale, $h = (p-1)/2$ et $\lambda = (-1)^{m/2}$ ou $(-1)^{(m-1)/2} h!$ suivant que m est pair ou impair.

Pour exprimer Δ_π , on a identifié $H^*(M^{p_\pi})$ à

$$H^*(\pi, H^*(M)^p) = \sum_{k \geq 0} H^k(\pi) \otimes D + (D + N)$$

(cf. 2.3).

3.3. DÉMONSTRATION. Prenons pour E_π le complexe standard qui a p cellules dans chaque dimension $i \geq 0$: $e_i, Te_i, \dots, T^{p-1}e_i$, l'opérateur bord étant défini par $\partial e_{2n} = (1 + T + \dots + T^{p-1})e_{2n-1}$ et $\partial e_{2n+1} = (1 - T)e_{2n}$.

Remplaçons le fibré $E_\pi \rightarrow B_\pi$ par le fibré $E'_\pi \rightarrow B'_\pi$ obtenu en enlevant de E_π toutes les cellules de dimension plus grandes que $(p-1)N-1$, où $N > m$. Nous obtenons ainsi une décomposition cellulaire de la sphère $S^{(p-1)N-1}$ et B'_π est un espace lenticulaire de la même dimension. Soit M'^{p_π} la restriction du fibré M^{p_π} à B'_π .

Le même raisonnement que dans 2.4 montre qu'il existe un isomorphisme naturel de $H^*(\pi)$ -module ϕ' tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^*(M'^{p_\pi}) & \xrightarrow{\phi'} & H^*(B'_\pi, H^*(M)^p) \\ \uparrow j^* & & \uparrow j^* \\ H^*(M^{p_\pi}) & \xrightarrow{\phi} & H^*(B_\pi, H^*(M)^p) \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux j^* sont induits par l'inclusion de M'^{p_π} dans M^{p_π} et B'_π dans B_π resp.; j^* est bijectif pour $r < (p-1)N-1$, injectif pour $r = (p-1)N-1$ et zéro pour $r > (p-1)N-1$, r désignant le π -degré

(cf. 2.3). De plus ϕ' est aussi multiplicatif (tout au moins sur l'image de j^* puisque ϕ et j^* sont des homomorphismes d'anneaux).

Choisissons un générateur S de $H_{(p-1)N-1}(B'\pi, Z_p)$ tel que $\langle \mu^{N-1}, S \rangle = 1$ si $p=2$ et $\langle \mu^{hN-1}, S \rangle = 1$ si $p > 2$; soit $M \in H_m(M \bmod B, Z_p)$ le générateur défini par l'orientation de M . Alors les éléments $S \otimes M$ et $S \otimes M^p$ sont des classes d'homologie qui définissent des orientations modulo p de $M'\pi$ et $M'^p\pi$ respectivement.

Soit Δ_π la classe duale à $M'\pi$ relativement à ces orientations. Pour tout $x \in H_{(p-1)N-1+m}(M'^p\pi)$, on a

$$3.4. \quad \langle i^*(x), S \otimes M \rangle = \langle x \cup \Delta_\pi, S \otimes M^p \rangle$$

car par définition $\Delta_\pi \cap (S \otimes M^p) = i_*(S \otimes M)$ et $\langle x \cup \Delta_\pi, S \otimes M^p \rangle = \langle x, \Delta_\pi \cap (S \otimes M^p) \rangle = \langle x, i_*(S \otimes M) \rangle = \langle i^*(x), S \otimes M \rangle$ (cf. [10]).

La formule 3.4 permet de calculer Δ_π modulo les normes N en appliquant mécaniquement 2.3 et 2.5. Montrons-le dans le cas $p=2$. Posons $\Delta_\pi = \sum \mu^{m-2j} (V^j)^2$ modulo N , où $V^j \in H^j(M)$. Soit $\alpha \in H^{m-i}(M \bmod B)$ et soit $x = \mu^{N-m+2i-1}(\alpha)^2$. D'après 2.5, on a $i^*(x) = \sum \mu^{N+i-j-1} Sq^j \alpha = \mu^{N-1} Sq^i \alpha$ pour raison de dimensions. De même, d'après 2.3,

$$x \cup \Delta_\pi = \sum \mu^{N+2i-2j-1} (V^j \alpha)^2 = \mu^{N-1} (V^i \alpha)^2.$$

Donc

$$\langle i^*(x), S \otimes M \rangle = \langle Sq^i \alpha, M \rangle \text{ et } \langle x \cup \Delta_\pi, S \otimes M^2 \rangle = \langle V^i \alpha, M \rangle$$

d'où $V^i = U^i_{(2)}$.

Un calcul analogue donne dans le cas $p > 2$

$$\Delta_\pi = \lambda \sum_{0 \leq j \leq m/2p} (-1)^j \mu^{h(m-2jp)} (U^j_{(p)})^p \text{ modulo } N.$$

Pour déterminer Δ_π , il suffit de connaître sa composante de π -degré 0 (cf. 2.3). Remarquons pour cela que l'injection r de la fibre M^p dans $M'^p\pi$ est transverse sur la sous-variété $M'\pi$ et que $r^{-1}(M'\pi)$ est la diagonale de M^p . Donc $r^*(\Delta_\pi)$ est la classe duale δ_p à la diagonale dans M^p (cf. [11]); comme r^* est injectif sur les éléments de π -degré 0 et les identifie aux éléments invariants de $H^*(M^p)$ (cf. 2.2 et 2.3), le théorème est démontré.

3.5. *Classes caractéristiques de WU.* Posons

$$W^i = \sum_j Sq^{i-j} U^j_{(2)}$$

et

$$Q^i_{(p)} = \sum_j \mathcal{P}^{i-j} U^j_{(p)}, \quad p > 2.$$

Les classes W^i sont les classes de Stiefel-Whitney de M et les classes $Q^i_{(p)} \in H^{2(p-1)i}(M, Z_p)$ (notées aussi Q^i) sont les classes caractéristiques de Wu. Si M est une variété différentiable, ces classes sont des polynômes dans les classes de Pontryagin de M réduites modulo p (cf. [6]).

Considérons la classe $i^*(\Delta_\pi)$ restriction de Δ_π à M_π ; elle peut s'interpréter comme la classe duale à la self-intersection de la "sous-variété" M_π de M^p_π ; dans le cas différentiable, $i^*(\Delta_\pi)$ est la classe d'Euler du fibré normal à M_π dans M^p_π (c'est à dire la réunion des fibrés normaux aux diagonales des fibres ou encore la limite du fibré normal à M'_π dans M'^p_π lorsque N tend vers l'infini).

3.6. COROLLAIRE.

$$i^*(\Delta_\pi) = \sum_i \mu^{m-i} W^i, \quad p = 2$$

$$i^*(\Delta_\pi) = \lambda \sum_k (-1)^k \mu^{h(m-2k)} Q^k_{(p)} - \lambda \sum_k (-1)^k \mu^{h(m-2k)-1} \nu \beta Q^k_{(p)}, \quad p > 2.$$

Ces expressions se calculent immédiatement en appliquant 2.5 et 3.2. Lorsque M est une variété différentiable, alors $\beta Q^k_{(p)} = 0$ car les Q^k sont la réduction modulo p de classes entières (polynômes dans les classes de Pontryagin) (cf. [11], p. 63).

Les classes $i^*(\Delta_\pi)$ s'interprètent aussi comme classes universelles d'immersion dans M (cf. 1.5, 5.4).

3.7. *Expression de ϕ^f_p .* Remarquons tout d'abord que $V^p_\pi - V_\pi$ a le même type d'homotopie que le p -produit cyclique réduit V^*_p de V . En effet $V^p_\pi - V_\pi = E_\pi \times_\pi (V^p - V)$ est fibré sur V^*_p avec une fibre contractile E_π . La projection q de cette fibration induit un isomorphisme naturel de $H^*(V^*_p)$ sur $H^*(V^p_\pi - V_\pi)$; avec cette identification, $j^*: H^*(V^p_\pi) \rightarrow H^*(V^*_p)$ désignera l'homomorphisme induit par l'injection j de $V^p_\pi - V_\pi$ dans V^p_π .

Toute application continue f de V dans M induit une application continue $\phi^p_\pi = 1 \times_\pi f^p$ de $V^p_\pi = E_\pi \times_\pi V^p$ dans $M^p = E_\pi \times_\pi V^p$. Avec les identifications de 2.2, ϕ^{p*}_π n'est autre que l'homomorphisme de $H^*(\pi, H^*(M)^p)$ dans $H^*(\pi, H^*(V)^p)$ induit par l'homomorphisme $f^{p*}: H^*(M)^p \rightarrow H^*(V)^p$.

On vérifie aisément (notations de 1.5) que $hf_\pi q$ est homotope à $\phi^p_\pi j$. Donc $\phi^f_p = j^*[\phi^{p*}_\pi \Delta_\pi]$.

Pour $p = 2$, on aura par exemple

$$\phi^f_2 = j^*[\sum \mu^{m-i} (f^* U^i)^2 + f^{2*}(\delta_2)].$$

L'homomorphisme j^* sera explicité au paragraphe suivant dans le cas où V est une variété.

pour tout $\alpha \in H^*(V)$, il existe un voisinage ouvert U de V et un élément $\beta \in H^*(U)$ tel que $i_U^*(\beta) = \alpha$, où i_U est l'injection de V dans U ; si ϕ_U désigne l'homomorphisme de Gysin déterminé par i_U , on a $\phi_U(\alpha) = i_U^* \phi_U(\alpha) = i_U^* \phi_U(i_U^* \beta) = i_U^*(\beta \cup V^*) = \alpha \cup i^*(V^*)$.

Remarquons que si V est une sous-variété différentiable de M , alors $H^*(M \setminus V)$ s'identifie à la cohomologie du bord (espace fibré en sphères) d'un voisinage tubulaire de V et la deuxième suite exacte n'est autre que la suite exacte de Gysin.

On peut compléter le diagramme ci-dessus par des suites exactes verticales en faisant intervenir le groupe $H^*(M \bmod V)$.

4.3. *Application à la “sous-variété” M_π de M^{p_π} .* Comme dans 3.3, réalisons E_π (resp. B_π) par une sphère (resp. un espace lenticulaire) de grande dimension $(p-1)N-1$. Écrivons les suites exactes de 4.2 associées à la sous-variété M'_π de M^{p_π} et passons à la limite en faisant tendre N vers l’infini. Nous obtenons les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & j^* & & & \\
 & & H^r(M^{p_\pi}) & \longrightarrow & H^r(M^{p_\pi - M_\pi}) & & \\
 \nearrow & \searrow \phi & \downarrow i^* & & \downarrow & \searrow & \\
 & H^{r-(p-1)m}(M_\pi) & & \xrightarrow{j^*_0} & H^r(M^{p_\pi} \setminus M_\pi) & \nearrow & \\
 \nwarrow & \swarrow \phi_0 & & & & \nwarrow & \\
 & H^r(M_\pi) & & & & &
 \end{array}$$

Nous avons vu dans 3.7 que $M^{p^*}_\pi - M_\pi$ a même type d'homotopie que le p -produit cyclique réduit M^{*p}_* de M . Le même raisonnement montre que $H^*(M^{p^*}_\pi \setminus M_\pi)$ est canoniquement isomorphe à $H^*((M^p/\pi) \setminus M)$, où M^p/π est le p -produit cyclique de M (quotient de M^p par l'action de π) et où M est identifié à la diagonale de M^p/π .

D'autre part ϕ_0 est donné par le cup produit par la classe $i^*(\Delta\pi)$. Or le terme de π -degré maximum dans $i^*(\Delta\pi)$ est μ^{mh} (cf. 3.6); il en résulte que si $a \in H^*(M_\pi)$ est $\neq 0$, alors $a \cup i^*(\Delta\pi)$ est $\neq 0$, donc que ϕ_0 est injectif. En vertu de la commutativité du diagramme, ϕ est aussi injectif.

Désignons par r^* (resp. r^*_0) les homomorphismes induits sur la cohomologie par l'injection de la fibre $M^\flat$ (resp. M) dans $M^{p,\pi}$ (resp. M_π) par ψ l'homomorphisme de Gysin déterminé par l'injection de la diagonale M dans M^p .

4.4. Compte tenu de ce qui précède, on a le diagramme commutatif et exact horizontalement :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \psi & & & & \\
 & & \nearrow & & & & \\
 0 \rightarrow H^{r-(p-1)m}(M) & & & & H^r(M^p) & & \\
 & \uparrow r^*_0 & & \uparrow r^* & & & \\
 0 \rightarrow H^{r-(p-1)m}(B_\pi \times M) & \xrightarrow{\phi} & H^r(M^{p_\pi}) & \xrightarrow{j^*} & H^r(M^{*_p}) & \searrow & 0 \\
 & \searrow \phi_0 & \downarrow i^* & & \downarrow & & \\
 & & H^r(B_\pi \times M) & \xrightarrow{j^*_0} & H^r((M^p/\pi) \setminus M) & \nearrow & 0
 \end{array}$$

4.5. THÉORÈME. *L'homomorphisme $j^*: H^r(M^{p_\pi}) \rightarrow H^r(M^{*_p})$ est surjectif. L'image par j^* d'un élément $\alpha \in H^*(M^{p_\pi})$ est nulle si et seulement si*

- a) *il existe un élément $\beta \in H^*(B_\pi \times M)$ tel que $i^*(\alpha) = \beta \cup i^*(\Delta_\pi)$ (β est alors unique) et*
- b) *$\psi r^*_0(\beta) = r^*(\alpha)$.*

Les conditions a) et b) sont évidemment nécessaires d'après la commutativité de 4.4 et le fait que ϕ_0 est donné par le cup produit par $i^*(\Delta_\pi)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe β tel que $i^*(\alpha) = \beta \cup i^*(\Delta_\pi)$; en vertu de 4.4, $\phi(\beta) - \alpha$ appartient au noyau de i^* ; or ce noyau est contenu dans le sous-groupe des éléments de π -degré 0 de $H^*(M^{p_\pi}) = H^*(\pi, H^*(M)^p)$ (cf. 2.5); comme r^* est injectif sur ce sous-groupe (cf. 2.2), la condition $r^*(\phi(\beta) - \alpha) = 0$, équivalente à b), entraîne $\alpha = \phi(\beta)$, donc $j^*(\alpha) = 0$.

Ce théorème permet le calcul explicite de $H^*(M^{*_p})$ compte tenu des identifications $H^*(M^{p_\pi}) = H^*(\pi, H^*(M)^p)$, $H^*(B_\pi \times M) = H^*(\pi) \otimes H^*(M)$, des expressions explicites de i^* (cf. 2.5), de r^* (2.2) et de $i^*(\Delta_\pi)$ (cf. 3.6).

Quant à ψ , il est déterminé par la formule $\psi(\gamma) = (\gamma \otimes 1 \cdots \otimes 1) \cup \delta_p$, où δ_p est la classe duale à la diagonale M dans M^p (on a identifié $H^*(M^p)$ à $H^*(M)^p$); en effet, si i_0 est l'injection de la diagonale M dans M^p , $\gamma = i_0^*(\psi \otimes 1 \cdots \otimes 1)$ et la formule résulte de la propriété multiplicative de ψ .

5. Conditions pour l'annulation des classes de plongement φ_p^f .

5.1. *Classes caractéristiques normales d'une application.* Soit f une application continue d'une variété V de dimension n dans une variété M de dimension m . Soient $W = \sum W^i$ (resp. $W' = \sum W'^i$) la classe totale de Stiefel-Whitney de V (resp. M) et $Q = \sum Q^i$ (resp. $Q' = \sum Q'^i$) la classe caractéristique (totale) modulo p de Wu de V (resp. M) (cf. 3.5).

La classe totale de Stiefel-Whitney normale de f est la classe $\bar{W}_f = \sum \bar{W}_f^i$, $\bar{W}_f = \bar{W} \cup f^*(W')$, où $\bar{W}$ est défini par $\bar{W} \cup W = 1$.

La classe caractéristique modulo p de W_u normale de f est la classe $\bar{Q}_f = \sum \bar{Q}^i_f = \bar{Q} \cup f^*(Q')$, où $\bar{Q}$ est défini par $\bar{Q} \cup Q = 1$.

Désignons par δ_p (resp. δ'_p) la classe duale à la diagonale de V^p (resp. M^p).

5.2. THÉORÈME. La condition $\phi^f_p = 0$ est équivalente aux conditions

$$a) \quad \bar{W}^k_f = 0, \quad k > m - n \text{ pour } p = 2,$$

$$\bar{Q}^k_f = 0, \quad k > (m - n)/2 \text{ pour } p > 2$$

et

$$b) \quad (\bar{W}^{m-n}_f \otimes 1) \cup \delta_2 = f^{2*}(\delta'_2) \text{ pour } p = 2,$$

$$\sigma(\bar{Q}^{(m-n)/2}_f \otimes 1 \cdots \otimes 1) \cup \delta_p = f^{p*}(\delta'_p) \text{ pour } p > 2$$

où $\sigma = 1$ ou $(-1)^{(p+1)/2}$ suivant que m et n sont tous deux pairs ou impair.

5.3. Démonstration. Reprenons les notations de 3.7, 4.4 et 4.5. La restriction de ϕ^p_π à V_π est une application ϕ_π de V_π dans M_π . On a vu (3.7) que $\phi^f_p = j^* \phi^{p*}_\pi \Delta^{M_\pi}$. D'après 4.5, $\phi^f_p = 0$ si et seulement si a)' il existe $\beta \in H^*(B_\pi \times V)$ tel que $i^*(\phi^{p*}_\pi \Delta^{M_\pi}) = \beta \cup i^*(\Delta^{V_\pi})$ et si b)' $\psi^{r*}_0(\beta) = r^*(\phi^{p*}_\pi \Delta^{M_\pi})$. Ces conditions a)' et b)' sont équivalentes respectivement aux conditions a) et b) de 5.2. Montrons le pour $p = 2$.

En effet, $i^* \phi^{p*}_\pi (\Delta^{M_\pi}) = \phi^*_{\pi} i^* (\Delta^{M_\pi}) = \sum \mu^{m-j} f^*(W'^j)$. La condition a)' s'exprime sous la forme

$$a)' \quad \sum \mu^{m-j} f^*(W'^j) = \beta \cup \sum \mu^{n-i} W^i.$$

Multiplions les deux membres par $\sum \mu^{n-j} \bar{W}^j$. On obtient la condition $\sum \mu^{m+n-k} \bar{W}^k_f = \mu^{2n} \beta$ qui équivaut à $\bar{W}^k_f = 0$ pour $k > m - n$.

On voit aussi que $r^*_0(\beta) =$ composante de π -degré 0 de $\beta = \bar{W}^{m-n}_f$. Dans le cas $p > 2$, on a $r^*_0(\beta) = \sigma \bar{Q}^{(m-n)/2}_f$. La condition b)' est bien équivalente à b) d'après la fin de 4.5.

5.4. Les classes d'immersion ψ^f_p . Il suit de cette démonstration que $\psi^f_p = 0$ est équivalent aux conditions a) de 5.2. En effet $\psi^f_p = j^*_0 \phi^*_{\pi} i^*(\Delta^{M_\pi})$.

5.5. COROLLAIRE (Wu). Si f est une application de V dans l'espace euclidien R^m , la condition $\phi^f_p = 0$ est équivalente à

$$\bar{W}^k = 0 \text{ pour } k \geq m - n \quad \text{dans le cas } p = 2$$

$$\bar{Q}^k = 0 \text{ pour } k \geq (m - n)/2 \quad \text{dans le cas } p > 2.$$

5.6. Le cas différentiable. On sait alors (cf. [6]) que la classe normale

$\bar{Q}_f^k$ de f modulo p est un polynome dans les classes de Pontryagin normales $\bar{p}_f^i \in H^{4i}(V)$ de f réduites modulo p . Plus précisément, si $\bar{p}_f^i$ est formellement la i -ème fonction symétrique élémentaire $\sigma_i(x_1^2, \dots, x_n^2)$, alors $\bar{Q}_f^k$ est la k -ème fonction symétrique élémentaire $\sigma_k(x_1^{p-1}, \dots, x_n^{p-1})$. Un calcul immédiat montre que la condition $\bar{Q}_f^k = 0$ pour $k > (m-n)/2$ est équivalente à $(\bar{p}_f^k)^h = 0$ modulo p pour $k > (m-n)/2$ et qu'alors $\bar{Q}_f^{(m-n)/2} = (\bar{p}_f^{(m-n)/2})^h$ modulo p , où $h = (p-1)/2$.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. Borel, "The Poincaré duality in generalized manifolds," *Michigan Mathematical Journal*, vol. 4 (1957), pp. 227-239.
- [2] ——— et J. Moore, "Homology and duality in generalized manifolds," Exp. II du *Seminar on transformations groups*, Annals of Mathematics Studies No. 46, Princeton, 1960.
- [3] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton, 1956.
- [4] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris, 1958.
- [5] A. Haefliger, "Sur les self-intersections des applications différentiables," *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol. 87 (1959), pp. 351-359.
- [6] F. Hirzebruch, "On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus," *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA.*, vol. 39 (1953), pp. 951-956.
- [7] A. Shapiro, "Obstructions to the imbedding of a complex in a euclidean space. I. The first obstruction," *Annals of Mathematics*, vol. 66 (1957), pp. 256-269.
- [8] N. Steenrod, "Homology groups of symmetric group and reduced power operations," *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, vol. 39 (1953), pp. 213-223.
- [9] ———, "Existence and uniqueness of the cyclic reduced powers," to appear.
- [10] R. Thom, "Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, vol. 69 (1952), pp. 109-181.
- [11] ———, "Quelques propriétés globales des variétés différentiables," *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 28 (1954), pp. 17-86.
- [12] W. T. Wu, "Classes caractéristiques et i -carrés d'une variété," *Comptes Rendus (Paris)*, vol. 230 (1950), pp. 508-511.
- [13] ———, "On the realization of complexes in euclidean spaces, I, II, III," *Scientia Sinica*, vol. VII, No. 3 (1958), pp. 251-297, No. 4 (1958), pp. 365-387, vol. VIII, No. 2 (1959), pp. 133-150.