Math. Z. 143, 155–164 (1975)

Allgemeine Lage und äquivariante Homotopie

Henning Hauschild

0. Übersicht

Es wird der Ansatz der φ-kontrollierten Transversalität aus [6] auf punktierte G-Abbildungen $f\colon S^{V\times n} \to S^V$ zwischen einpunktkompaktifizierten G-Darstellungen angewendet. Man erhält hierdurch eine bordismentheoretische Beschreibung der äquivarianten Homotopiemengen $[S^{V\times n}, S^V \wedge X^+]_0^G$ und ihrer stabilen Version $\pi_n^G(X^+) = \varinjlim_V [S^{V\times n}, S^V \wedge X^+]_0^G$. Diese Methode liefert in den Sätzen (III.1) und (III.3) eine Zerspaltung obiger Homotopiemengen. Insbesondere wird die additive Struktur des Burnside Ringes $A(G) = \pi_0^G$ (Punkt$^+$) analysiert, welche unabhängig hiervon auch von tom Dieck in [3] mit anderen Methoden berechnet wurde. Beachtenswert in diesem Ansatz erscheint mir, daß G-Abbildungen $f\colon S^{V\times n} \to S^V$ in eine allgemeine Lage gebracht werden können, welche nicht notwendig Transversalität zur Inklusion des Nullpunktes in S^V beinhaltet.

I. Vorbereitungen

Es sei im folgenden G immer eine kompakte Liegruppe. $M, N, \ldots$ seien C^r-differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten und alle auftretenden Abbildungen seien G-äquivariant und differenzierbar, sofern dies sinnvoll ist. Auf dem Tangentialbündel TM von M sei eine Riemannsche Metrik fest gewählt, ebenso ein Spray und die zugehörige Exponentialabbildung. M sei hierdurch metrisiert. Ist $L \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit, so bezeichne $\nu(L, N)$ das Normalenbündel von L in N und $T\colon \nu_\varepsilon(L, N) \to U_\varepsilon$ die Tubenabbildung gegeben durch die fest gewählte Exponentialabbildung, welche eine ε-Umgebung des Nullschnittes in $\nu(L, N)$ mit einer ε-Umgebung U_ε von L in N identifiziert. Alle vermöge der fest gewählten Exponentialabbildung gegebenen Tubenabbildungen werden mit T bezeichnet. Oft wird die Identifizierung von $\nu_\varepsilon(L, N)$ mit U_ε nicht extra bezeichnet. Es soll im folgenden ε immer eine konstante Abstandsfunktion sein, sofern L kompakt ist; ist L nicht kompakt, so sei ε eine jeweils passende Abstandsfunktion. Die ε-Umgebungen sind jeweils offen zu verstehen, ihr Abschluß wird in der üblichen Weise mit $\bar{\nu}_r(L, N)$ bzw. $\bar{U}_\varepsilon$ bezeichnet. Sind $V, W, \ldots$ orthogonale G-Darstellungen, so bezeichnen $S^V, S^W, \ldots$ die entsprechenden Einpunktkompaktifizierungen; die triviale G-Darstellung $\mathbb{R}^n$ wird einfach durch n abgekürzt. Ist X ein G-Raum und $x \in X$, so sei G_x die Standuntergruppe im Punkte x. Die Schreibweise $H < G$ bzw. $H \lhd G$ besagt, daß H abgeschlossene Untergruppe bzw. abgeschlossener Normalteiler von G ist. Ist $H < G$, so sei $NH < G$ der Normalisator von H in G und WH der Quotient NH/H. Ist X ein G-Raum und $H < G$, so sei $X_H = \{x \in X \mid G_H = H\}$;

$X_{(H)} = \{x \in X \mid G_x$ konjugiert zu $H\}$ und $X^H = \{x \in X \mid h \cdot x = x$ für alle $h \in H\}$. Für Funktionen $f\colon X \to Y$ verwende ich die entsprechende Schreibweise, so bezeichnet z.B. f_H die Einschränkung von f auf X_H.

Ist

$$\begin{array}{ccc} f\colon E & \longrightarrow & E' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \cup & & \cup \\ B & \dashrightarrow & B' \end{array}$$

eine nullschnitterhaltende Abbildung von (differenzierbaren) G-Vektorraumbündeln, so wird in [6] §II beschrieben, wie man f linearisiert, d.h. durch das Differential längs der Faser ersetzt; vgl. auch [2] Kapitel III, Beweis von Satz (3.1).

Lemma (I.1). *Sei $U_\varepsilon \supset C$ eine ε-Umgebung der abgeschlossenen Menge $C \subset M$ und F eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M; ist weiter $f\colon M \to N$ eine differenzierbare G-Abbildung und $H\colon F \times I \to N$ eine Homotopie von $f \mid F$, für welche $H_t \mid F \cap \bar{U}_{\varepsilon/2} = f \mid F \cap \bar{U}_{\varepsilon/2}$ gilt, so läßt sich diese Homotopie zu einer differenzierbaren Homotopie von f auf ganz M erweitern, welche auf einer passenden Umgebung $U_{\varepsilon'}$ von C in M konstant ist.*

Beweis. vgl. [10] Lemma (3.2). □

Lemma (I.2). *Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung differenzierbarer G-Mannigfaltigkeiten, U eine offene Umgebung der abgeschlossenen Menge $C \subset M$ und $h\colon U \to N$ eine differenzierbare G-Abbildung mit $h \mid C = f \mid C$, dann existiert eine Homotopie $H\colon M \times I \to N$, und eine Umgebung V von C mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $H_0 = f$; (ii) $H_t \mid M \setminus U = f \mid M \setminus U$; (iii) $H_1 \mid V = h \mid V$; (iv) $V \subset U$.

Beweis. vgl. [10] Lemma (3.4). □

II. Allgemeine Lage

Es sollen in diesem Abschnitt punktierte Abbildungen $f\colon S^{V \times n} \to S^V$ in eine allgemeine Lage gebracht werden, welche eine Klassifikation dieser Abbildungen bis auf G-Homotopie gestattet. Es ist hierbei G eine beliebige kompakte Liegruppe.

Definition (II.1). Es sei M offene Untermannigfaltigkeit von $\dot{V} \times n$. Die eigentliche Abbildung $f\colon M \to V$ soll in *allgemeiner Lage* befindlich heißen, wenn für alle abgeschlossenen Untergruppen $H < G$ gilt:

(i) $f_H\colon M_H \to V^H$ ist transversal zur Inklusion des Nullpunktes $i^H\colon * \to V^H$.

(ii) Setzt man $F_H = f_H^{-1}(*)$, $F_{(H)} = G \cdot F_H \cong G \times_{NH} F_H$ und bezeichnet $v(F_{(H)}, M)$ das Normalbündel von $F_{(H)}$ in M mit der Tubenabbildung $T\colon v_\varepsilon(F_{(H)}, M) \to U_\varepsilon \subset M$, so sei

$$\begin{array}{ccccc} f \circ T\colon v_\varepsilon(F_{(H)}, M) & \longrightarrow & U_\varepsilon & \dashrightarrow & V \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \cup & & & & \cup \\ F_{(H)} & & \longrightarrow & & * \end{array}$$

lokal linear, d.h. auf einer passenden Umgebung $v_\delta(F_{(H)}, M)$ des Nullschnittes gleich seinem Differential längs der Faser.

(iii) Die faserweise lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} f \circ T\colon v_\delta(F_{(H)}, M) & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{(H)} & \longrightarrow & * \end{array}$$

ist ${}_{(H)}\varphi$-kontrolliert, d.h. die auf $v_\delta(M_{(H)}, M)|F_{(H)}$ induzierte Abbildung ist gleich ${}_{(H)}\varphi$ mit ${}_{(H)}\varphi = \varphi \circ j\colon v(M_{(H)}, M)|F_{(H)} \to TM|F_{(H)} \to V \times F_{(H)}$, wobei

$$j\colon v(M_{(H)}, M)|F_{(H)} \to TM|F_{(H)}$$

die Inklusion des Normalbündels in das Tangentialbündel sei, welche durch Wahl einer Riemannschen Metrik bestimmt ist, und φ durch die Projektion $V \times n \to V$ induziert sei. □

Definition (II.2). Ist $C \subset M$ eine abgeschlossene Menge, so heißt f *in den Punkten von C in allgemeiner Lage*, wenn eine passende ε-Umgebung U_ε von C existiert, so daß $f|U_\varepsilon$ die Bedingungen aus Definition (II.1) erfüllt.

Satz (II.3). *Jede eigentliche Abbildung $f\colon M \to V$ einer offenen Untermannigfaltigkeit $M \subset V \times n$, welche sich in den Punkten der abgeschlossenen Menge $C \subset M$ in allgemeiner Lage befindet, läßt sich relativ C zu einer in allgemeiner Lage befindlichen Abbildung G-homotop abändern.*

Beweis. Es sei H eine *maximale* auf M auftretende Standuntergruppe.

(i) Es soll gezeigt werden, daß ohne Einschränkung $f_H\colon M_H \to V^H$ transversal zum Nullschnitt von $p^H\colon V^H \to *$ ist. Bezeichnet U_ε die zu $C \subset M$ gehörige offene Umgebung gemäß Definition (II.2), so ist nach Voraussetzung $f|M_H \cap U_{\varepsilon/2}$ transversal zum Nullschnitt von p^H. Wegen Satz (I.4) aus [6] existiert eine NH-äquivariante Homotopie $F\colon M_H \times I \to V^H$ mit: $F_0 = f_H$; F_1 transversal zum Nullschnitt von p^H und $F|(M_H \cap U_{\varepsilon/2}) \times I = f_H|M_H \cap U_{\varepsilon/2}$. Man erweitert nun F zu einer G-Homotopie $F'\colon M_{(H)} \times I \cong G \times_{NH} M_H \times I \to V$ durch $F'(g, m, t) = g \cdot F(m, t)$ und erweitert diese mit Lemma (I.1) zu einer Homotopie $F''\colon M \times I \to V$ von f, welche auf $U_{\varepsilon'}$ nichts ändert. Mit $U_{\varepsilon'}$ an Stelle von U_ε kann man also ohne Einschränkung voraussetzen, daß f_H transversal zum Nullschnitt von p^H ist.

(ii) Setzt man $F_{(H)} = (f|M_{(H)})^{-1}(*)$, so soll gezeigt werden, daß f auf einer Tubenumgebung $v_\gamma(F_{(H)}, M)$ linear und ${}_{(H)}\varphi$-kontrolliert gemacht werden kann. Es hat nach Voraussetzung $f|U_\varepsilon$ die Eigenschaften (ii) und (iii) aus Definition (II.1). Sei also $v_\alpha(F_{(H)} \cap U_\varepsilon, U_\varepsilon)$ eine Tubenumgebung von $F_{(H)} \cap U_\varepsilon$ in U_ε, auf welcher f linear und ${}_{(H)}\varphi$-kontrolliert ist. Es existiert nun eine Tubenumgebung $v_\beta(F_{(H)}, M)$ von $F_{(H)}$ in M, welche zwar nicht notwendig in $v_\alpha(F_{(H)} \cap U_\varepsilon, U_\varepsilon)$ liegt, wenn man mit U_ε schneidet, welche aber in $v_\alpha(F_{(H)} \cap U_\varepsilon, U_\varepsilon) \cap U_{\varepsilon/2}$ liegt, wenn man mit $U_{\varepsilon/2}$ schneidet. Das Normalbündel $v(F_{(H)}, M)$ zerfällt in $v(F_{(H)}, M_{(H)}) \oplus v(M_{(H)}, M)|F_{(H)}$. Damit gilt $v_\beta(F_{(H)}, M) = (v(F_{(H)}, M_{(H)}) \oplus v(M_{(H)}, M)|F_{(H)})_\beta$. Man ersetzt nun f auf $v(F_{(H)}, M_{(H)})$ durch das Differential längs der Faser, bildet $v(M_{(H)}, M)|F_{(H)}$ durch die kontrollierende Abbildung ${}_{(H)}\varphi$ nach V ab und setzt diese beiden Abbildungen auf die direkte Summe fort. Da f über den Punkten aus $F_{(H)} \cap U_{\varepsilon/2}$ schon linear und kontrolliert abgebildet wurde, ändert sich hier nichts. Wählt man noch $\beta < \varepsilon/4$, so ist gewährleistet, daß sich auf $U_{\varepsilon/4}$ nichts ändert. Die soeben konstruierte Abbildung sei h': $\nu_\beta(F_{(H)}, M) \to V$. Man setzt nun h vermöge f auf die Umgebung $U_{\varepsilon/4}$ fort und erhält eine auf einer Umgebung von $\bar{U}_{\varepsilon/8} \cup F_{(H)}$ definierte Abbildung h, welche auf $U_{\varepsilon/8} \cup F_{(H)}$ mit f übereinstimmt. Auf f und h wendet man nun Lemma (I.2) an und erhält eine zu f homotope Abbildung f', welche auf $U_{\varepsilon/8} \cup F_{(H)}$ mit f übereinstimmt und auf einer passenden Tubenumgebung $\nu_\gamma(F_{(H)}, M)$ gleich h, d.h. linear und ${}_{(H)}\varphi$-kontrolliert ist. Es ist außerdem f'_H: $M_H \to V^H$ transversal zur Inklusion des Nullpunktes. Dies ist sofort richtig für die Punkte aus F_H, da Linearisieren am Differential nichts ändert. Für alle anderen Punkte aus M_H gilt es aber auch, da man die Homotopie zwischen f und f' nach dem Beweis von Lemma (I.2) so wählen kann, daß bei f'_H nur F_H auf den Nullpunkt abgebildet wird. f erfüllt also ohne Einschränkung die Bedingungen aus Definition (II.1) für die Untergruppe H und die Konjugierten.

(iii) Da die lineare Abbildung ${}_{(H)}\varphi$ auf den Fasern von $\nu(M_{(H)}, M)|F_{(H)}$ injektiv ist, geht aus $\nu(F_{(H)}, M)$ nur der Nullschnitt in den Nullpunkt von V über; f erfüllt die Bedingungen aus Definition (II.1) in der Umgebung $\nu_\gamma(F_{(H)}, M)$ also auch für alle abgeschlossenen Untergruppen von G. Da aus $M_{(H)}$ außer $F_{(H)}$ nichts auf den Nullpunkt abgebildet wird, existiert eine offene Umgebung W_σ von $M_{(H)}$ in M, auf welcher f ohne Einschränkung die Eigenschaften aus Definition (II.1) hat.

(iv) Beweis von Satz (II.3) durch Induktion nach der Anzahl der Orbittypen. Enthält M genau einen Orbittyp (H), so ist man nach (iii) fertig. Ist dies nicht der Fall, so sei H maximale auf M auftretende Standuntergruppe. Nach (iii) kann man ohne Einschränkung voraussetzen, daß f in allgemeiner Lage ist auf einer Umgebung W_σ von $M_{(H)}$ in M. Man schneidet nun $W_{\sigma/2}$ aus M weg. Es entsteht eine Mannigfaltigkeit M' (mit Rand). Auf M' treten zunächst weniger Orbittypen auf als auf M. Man bringe nun $f|M'$ in allgemeine Lage, ohne auf einer Tubenumgebung des Randes und auf einer Umgebung von $M' \cap C$ etwas zu ändern. Zusammenkleben der auf $W_{\sigma/2}$ gegebenen und auf M' erhaltenen Abbildungen längs des Randes liefert die Behauptung. □

Bemerkung (II.4). Allgemeine Lage bedeutet im allgemeinen nicht Transversalität. Ist H eine Untergruppe von G, für welche der homogene Raum G/NH nicht endlich ist, so ist zunächst f_H: $M_H \to V^H$ transversal zur Inklusion des Nullpunktes in V^H. Ist $F_H = f_H^{-1}(*)$ und erweitert man f_H zu einer G-Abbildung $f_{(H)}$, so wird das Normalbündelbündel $\nu(M_H, M_{(H)})|F_H$ auf den Nullpunkt abgebildet und der Rest des Normalenbündels $\nu(M_{(H)}, M)|F_H$ reicht nicht mehr aus, um das Komplement von V^H in V aufzufüllen. □

III. Berechnung äquivarianter Homotopiemengen

Ist V eine G-Darstellung, so bezeichne $O(V)$ die auf V auftretenden Standuntergruppentypen und $O(G)$ die Menge aller Konjugationsklassen abgeschlossener Untergruppen von G. Ist X eine G-Mannigfaltigkeit, so entstehe X^+ aus X durch Hinzunahme eines separaten Grundpunktes.

M sei eine kompakte G-Mannigfaltigkeit; $V' \subset V$ eine offene Untermannigfaltigkeit; $j\colon M \to V' \times n$ eine G-Einbettung; $\psi\colon v(j) \to V$ eine V-Trivialisierung des Normalenbündels von j, [wobei man sich $v(j)$ der Einfachheit halber in $V \times n$ gebildet denke,] und $g\colon M \to X$ eine G-Abbildung in den topologischen Raum X. Für diese Tripel $[j\colon M \to V' \times n;\ \psi\colon v(j) \to V;\ g\colon M \to X]$ erhält man, wie in [[2], Kapitel III, Def. (2.1)] ausgeführt ist, eine Bordismenrelation. Die entstehende Menge von Äquivalenzklassen bezeichne ich mit $L_n^G[V'|V](X)$. Zunächst soll eine natürliche Transformation

$$P\colon \bigoplus_{H \in O(V)} L_n^{WH}[V_H | V^H](X^H) \to [S^{V \times n}, S^V \wedge X^+]_0^G$$

definiert werden.

Ist $[j_H\colon F_H \to V_H \times n;\ \psi_H\colon v(j_H) \to V^H;\ k_H\colon F_H\colon F_H \to X^H]$ aus $L_n^{WH}[V_H | V^H](X^H)$ gegeben, so betrachte man die Zusammensetzung $j'_H \to V_H \times n \to V \times n$ und erweitere j'_H zu einer G-Einbettung $j'_{(H)}\colon G \times_{NH} F_H \cong F_{(H)} \to V \times n$ durch $j'_{(H)}(g, f) = g \cdot j'_H(f)$. Das Normalenbündel $v(F_{(H)}, V \times n)$ von $F_{(H)}$ in $V \times n$ enthält das Bündel $G \times_{NH} v(F_H, V^H \times n) \to G \times_{NH} F_H = F_{(H)}$. Dieses werde vermöge

$$\psi_{(H)}\colon G \times_{NH} v(F_H, V^H \times n) \to V$$

abgebildet mit

$$\psi_{(H)}(g, v) = g \cdot \psi_H(v).$$

Auf das orthogonale Komplement dieses Bündels in $v(F_{(H)}, V \times n)$ wird die Abbildung $\psi_{(H)}$ vermöge der kontrollierenden Abbildung $\varphi\colon V \times n \to V$ fortgesetzt. Man erhält also eine auf den Fasern injektive und lineare Abbildung

$$\psi'_{(H)}\colon v(F_{(H)}, V \times n) \to V.$$

Es soll nun kurz für den Spezialfall $X =$ Punkt erläutert werden, wie die Pontrjagin-Thom-Konstruktion dem Element $[j_H;\ \psi_H;\ g_H]$ aus $L_n^{WH}[V_H | V^H](X^H)$ ein Element $P[j_H;\ \psi_H;\ g_H]\colon S^{V \times n} \to S^V$ zuordnet. Es seien $j'_{(H)}$ und $\psi'_{(H)}$ wie im vorangehenden konstruiert. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle man $\tau_\varepsilon\colon [0, \varepsilon) \to R$ mit $\tau_\varepsilon | [0, \varepsilon/2] = 1$ und τ_ε monoton und unbeschränkt. τ_ε liefert sofort eine Streckung $S_\varepsilon\colon v_\varepsilon(F_{(H)}, V \times n) \to v(F_{(H)}, V \times n)$ definiert durch $S_\varepsilon(p, v) = (p, \tau_\varepsilon(|v|) \cdot v)$ für $p \in F_{(H)}$ und v aus der Faser über p. Sei $T\colon v_\varepsilon(F_{(H)}, V \times n) \to U_\varepsilon \subset S^{V \times n}$ eine Tubenabbildung. Man definiere $P[j_H;\ \psi_H;\ g_H]$ durch die folgende Zusammensetzung:

$$\begin{tikzcd}
S^{V \times n} \arrow[r] \arrow[d, "{P[j_H;\, \psi_H;\, g_H]}"] & S^{V \times n}/S^{V \times n} - U_\varepsilon \arrow[r, "T^{-1}"] & \bar{v}_\varepsilon(F_{(H)}, V \times n)/(\bar{v}_\varepsilon(\cdots,\cdots) - v_\varepsilon(\cdots,\cdots)) \arrow[d, "S_\varepsilon"] \\
S^V & & \text{Thomraum von } v(F_{(H)}, V \times n). \arrow[ll, "\psi'_{(H)}"']
\end{tikzcd}$$

Nun setzt man die Konstruktion auf die direkte Summe fort, indem man die eben für jeden Summanden erläuterte Konstruktion für alle $H \in O(V)$ gleichzeitig macht, wozu man bemerke, daß die Einbettungen $j'_{(H)}\colon F_{(H)} \to V \times n$ disjunkte kompakte Untermannigfaltigkeiten liefern. Man überzeugt sich, daß P wohldefiniert ist und erhält so eine natürliche Transformation

$$P\colon \bigoplus_{H \in O(V)} L_n^{WH}[V_H | V^H](X^H) \to [S^{V \times n}, S^V \wedge X^+]_0^G.$$

Satz (III.1). *Die Transformation*

$$P\colon \bigoplus_{H\in O(V)} L_n^{WH}[V_H\,|\,V^H](X^H)\to[S^{V\times n}, S^V\wedge X^+]_0^G$$

ist ein Isomorphismus (zunächst von Mengen).

Im Falle $n=0$ wurde von Rubinzstein in [8] ein ähnliches, etwas allgemeineres Resultat bewiesen. Es werden dort die Homotopiemengen $(SV, SV]^G$ berechnet, wobei SV die Sphäre vom Radius 1 in V ist.

Beweis. Es soll eine zu P inverse Abbildung

$$R\colon [S^{V\times n}, S^V\wedge X^+]_0^G\to\bigoplus_{H\in O(V)} L_n^{WH}[V_H\,|\,V^H](X^H)$$

definiert werden.

Ist $f\colon S^{V\times n}\to S^V\wedge X^+$ gegeben, so betrachte man zunächst $f'\colon pr\circ f\colon S^{V\times n}\to S^V\wedge S^0=S^V$ und $f'\colon M=f'^{-1}(V)\to V$; man kann wegen Satz (II.3) ohne Einschränkung annehmen, daß sich f' in allgemeiner Lage befindet Verwendet man weiter die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz (II.3), so ist $f'^{-1}(*)$ die disjunkte Vereinigung der kompakten G-Mannigfaltigkeiten

$$f'^{-1}(*)=\bigcup_{H\in O(V)} F_{(H)}=\bigcup_{H\in O(V)} G\times_{NH}F_H.$$

Es ist weiter f' auf passender Tubenumgebung $\nu_\varepsilon(F_{(H)}, V\times n)$ linear und ${}_{(H)}\varphi$-kontrolliert. Man kann weiter annehmen daß alle diese Tubenumgebungen disjunkt sind. Die Einschränkung von f auf F_H liefert eine Abbildung $g_H\colon F_H\to X^H$. Für das Normalenbündel $\nu(F_H, V^H\times n)$ von F_H in $V^H\times n$ erhält man eine Trivialisierung $\psi_H\colon \nu(F_H, V^H\times n)\to V^H$, da f' sich nach Voraussetzung in allgemeiner Lage befindet und damit $f_H'\colon M_H\to V^H$ transversal zur Inklusion des Nullpunktes in V^H ist. Man setzt daher

$$R(f)=\bigoplus_{H\in O(V)}[j_H\colon F_H\to V_H\times n;\ \psi_H\colon \nu(F_H, V^H\times n)\to V^H;\ g_H\colon F_H\to X^H]$$

und überzeugt sich, daß $R(f)$ nur von der G-Homotopieklasse von f abhängt.

Da $P[j_H;\psi_H;g_H]\colon S^{V\times n}\to S^V\wedge X^+$ sich nach Konstruktion in allgemeiner Lage befindet, folgt sofort $R\circ P=\mathrm{id}$. Die Beziehung $P\circ R=\mathrm{id}$ folgt, da für $f\colon S^{V\times n}\to S^V$ die Abbildungen f und $P\circ R(f)$ in einer tubularen Umgebung des Urbildes $f^{-1}(*)$ übereinstimmen.

Bemerkung. $L_n^{WH}[V_H\,|\,V^H](X)$ hat zunächst nicht die Struktur einer abelschen Gruppe. Die suggestive Summenschreibweise ist daher zunächst als mengentheoretisches Produkt anzusehen. Enthält V einen zweidimensionalen trivialen Summanden, so auch V^H und die disjunkte Vereinigung macht $L_n^{WH}[V_H\,|\,V^H](-)$ in der üblichen Weise zu einer abelschen Gruppe. Die Summendarstellung bekommt also einen Sinn. Die Homotopiemenge $[S^{V\times n}, S^V\wedge X^+]_0^G$ trägt in diesem Fall auch eine abelsche Gruppenstruktur. Da die Pontrjagin-Thom-Konstruktion additiv ist, liefert P also einen Isomorphismus abelscher Gruppen. □

Ist W eine G-Darstellung, so hat man in der äquivarianten Homotopie einen Einhängungshomomorphismus

$$\Sigma(W)\colon [S^{V\times n}, S^V\wedge X^+]_0^G\to[S^{W\times V\times n}, S^{W\times V}\wedge X^+]_0^G$$

und ebenso für die Bordismengruppen

$$st(W^H)\colon L_n^{WH}[V_H \mid V^H](X^H) \to L_n^{WH}[(V\times W)_H \mid V^H \times W^H](X^H),$$

indem man eine Einbettung $M \to V_H \times n$ zu einer Einbettung $M \to V_H \times n \to (V\times W)_H \times n$ erweitert und den trivialen Summanden W^H des entstehenden Normalenbündels mit der Identität abbildet. Man erhält hiermit das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{H\in O(V)} L_n^{WH}[V_H \mid V^H](X^H) \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\bigoplus\limits_{H\in O(V)} st(W^H)"] & {[S^{V\times n}, S^V \wedge X^+]_0^G} \arrow[d, "\Sigma(W)"] \\
\bigoplus\limits_{H\in O(V\times W)} L_n^{WH}[(V\times W)_H \mid V^H\times W^H](X^H) \arrow[r, "P"] & {[S^{W\times V\times n}, S^{W\times V} \wedge X^+]_0^G.}
\end{tikzcd}$$

Bildet man nun den Limes über die Abbildungen $st(W^H)$ bzw. $\Sigma(W)$, wobei W die Isomorphieklasse von G-Darstellungen durchläuft, so erhält man eine natürliche Transformation

$$Q\colon \varinjlim_{W} \bigoplus_{H\in O(W)} L_n^{WH}[W_H \mid W^H](X^H) \to \varinjlim_{W} [S^{W\times n}, S^W \wedge X^+]_0^G.$$

Durchläuft W alle G-Darstellungen, so durchläuft $H\in O(W)$ alle abgeschlossenen Untergruppen von G. Es ist also

$$\varinjlim_{W} \bigoplus_{H\in O(W)} L_n^{WH}[W_H \mid W^H](X^H) = \bigoplus_{H\in O(G)} \varinjlim_{W} L_n^{WH}[W_H \mid W^H](X^H).$$

Ist $\omega_n^G(X)$ die Bordismentheorie der stabil R^n-gerahmten G-Mannigfaltigkeiten aus [5], so erhält man eine natürliche Transformation $T\colon \omega_n^{WH}(EWH \times X^H) \to \varinjlim_{W} L_n^{WH}[W_H \mid W^H](X^H)$, indem man von der tangentialen zur normalen Rahmenstruktur übergeht. Hierbei ist EWH der universelle freie WH-Raum. Weiter beachte man, daß man jede freie WH-Mannigfaltig M in einen Raum W_H einbetten kann, da $G\times_{NH} M$ in eine G-Darstellung $W\times n$ einbettbar ist.

Lemma (III.2). *T: $\omega_n^{WH}(EWH\times X) \to \varinjlim_{W} L_n^{WH}[W_H \mid W^H](X^H)$ ist ein Isomorphismus von Gruppen, wobei die Addition jeweils durch die disjunkte Vereinigung gegeben ist.*

Beweis. Siehe [2] Kapitel III Satz (5.5) für den analogen Fall der nichtorientierten Bordimentheorie. □

Korollar (III.3). *Die durch*

$$Q' = Q\circ \Big(\bigoplus_{H\in O(G)} T\Big)\colon \bigoplus_{H\in O(G)} \omega_n^{WH}(EWH\times X^H) \to \varinjlim_{W} [S^{W\times n}, S^W \wedge X^+]_0^G = \pi_n^G(X^+)$$

gegebene natürliche Transformation ist ein Isomorphismus.

Beweis. Verwende Lemma (III.2) und die Tatsache, daß Q als direkter Limes von Bijektionen wegen Satz (III.1) bijektiv ist. □

Im Falle $n=0$ kann man noch etwas mehr aussagen. Es bezeichne hierzu $O'(V)$ bzw. $O'(G)$ diejenigen Untergruppen H aus $O(V)$ bzw. $O(G)$, für die WH endlich ist.

Korollar (III.4). *Man hat natürliche Isomorphismen*

$$P\colon \bigoplus_{H\in O'(V)} L_0^{WH}[V_H|V^H](X^H)\to[S^V,S^V\wedge X^+]_0^G$$

und

$$Q'\colon \bigoplus_{H\in O'(G)} \omega_0^{WH}(EWH\times X^H)\to\pi_0^G(X^+).$$

Beweis. Man verwende Satz (III.1) bzw. Korollar (III.3) und beachte hierbei, daß alle Summanden wegfallen für die WH nicht endlich ist, da es in diesem Fall keine nulldimensionalen freien WH-Mannigfaltigkeiten gibt. □

In [5] wurde mit Hilfe der Pontrjagin-Thom-Konstruktion eine natürliche Transformation $i\colon \omega_V^G(-)\to\pi_V^G(-)$ konstruiert, gezeigt, wann i isomorph ist, und ein Beispiel einer Liegruppe angegeben, für die i nicht isomorph ist. Als Ergänzung ergibt sich nun:

Korollar (III.5). *Die obige Transformation* $i\colon \omega_n^G(X)\to\pi_n^G(X^+)$ *ist injektiv auf einen direkten Summanden.*

Beweis. Mit der Methode aus [9], Proposition 2 erhält man einen Isomorphismus

$$Z\colon \omega_n^G(X)\to\bigoplus_{H\in O''(G)}\omega_n^{WH}(EWH\times X^H),$$

wobei $O''(G)$ diejenigen Untergruppen aus $O(G)$ bezeichnet, für die die Menge G/WH endlich ist.

Indem man die Definition durchgeht, überzeugt man sich davon, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
\omega_n^G(X) & \xrightarrow[i]{} & \pi_n^G(X^+)\\
{\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle Z} & & {\scriptstyle Q'}\downarrow{\scriptstyle\cong}\\
\bigoplus_{H\in O''(G)}\omega_n^{WH}(EWH\times X^H) & \hookrightarrow & \bigoplus_{H\in O(G)}\omega_n^{WH}(EWH\times X^H)
\end{array}$$

Korollar (III.3) liefert nun die Behauptung. □

Bemerkung (III.6). Die Gruppen $L_n^{WH}[V_H|V^H](X^H)$ und $\omega_n^{WH}(EWH\times X^H)$ lassen sich wieder durch Homotopiegruppen darstellen, da es sich um freie WH-Mannigfaltigkeiten handelt und für diese nach [6] Satz (I.4) ein Transversalitätssatz gilt. □

IV. Äquivariante Eulerklassen

Es sollen in diesem Abschnitt die Homotopiemengen $[S^U,S^{U\times V}\wedge X^+]_0^G$ und die stabilen Analoga $\pi_{-V}^G(X^+)$ berechnet werden. Für eine G-Darstellung V bezeichne $O(G|V)$ diejenige Untergruppen $H\in O(G)$, für die sich der homogene Raum G/H nicht nach $V-O$ abbilden läßt. Analog setzt man

$$O(W|V)=O(W)\cap O(G|V),\qquad O'(G|V)=O'(G)\cap O(G|V)$$

und

$$O'(W|V)=O(W|V)\cap O'(G).$$

Definition (IV.1). Das durch die Inklusion $e(V)\colon S^0 \to S^V$ in der Homotopiemenge $[S^U, S^U \wedge S^V]_0^G$ beziehungsweise in $\pi_{-V}^G(S^0)$ induzierte Element heißt die *Eulerklasse* von V. □

Ist $f\colon S^U \to S^U$ gegeben, so ist $e(V)\cdot f$ definiert durch die Abbildung

$$S^0 \wedge S^U \xrightarrow[e(V)\wedge \mathrm{id}]{} S^V \wedge S^U \xrightarrow[\mathrm{id}\wedge f]{} S^V \wedge S^U.$$

Es bezeichne DV den Ball vom Radius 1 in V und SV die zugehörige Sphäre. Es ist zunächst $[S^U, S^{U\times V} \wedge X^+]_0^G \cong [S^U, S^U \wedge (S^V \wedge X^+)]_0^G$.

Wegen Korollar (III.4) hat man einen Isomorphismus

$$P\colon \bigoplus_{H\in O'(U)} L_0^{WH}[U_H | U^H](X^H \times (DV^H, SV^H)) \to [S^U, S^U \wedge (S^V \wedge X^+)]_0^G.$$

Ist

$$[j_H\colon M_H \to U_H;\, \psi_H\colon \nu(M_H, U^H) \to U^H;\, f_H\colon M_H \to X^H \times (DV^H, SV^H)]$$

aus

$$L_0^{WH}[U_H | U^H](X^H \times (DV^H, SV^H))$$

gegeben und ist $H \notin O'(U|V)$, so läßt sich f_H aus dem Nullpunkt von DV^H herausgeformieren, da M_H die disjunkte Vereinigung von endlich vielen homogenen Räumen WH ist, also ist obige Bordismenklasse nullbordant.

Satz (IV.2). (i) *Man hat natürliche Isomorphismen*

$$P\colon \bigoplus_{H\in O'(U|V)} L_0^{WH}[U_H | U^H](X^H \times (DV^H, SV^H)) \to [S^U, S^{U\times V} \wedge X^+]_0^G$$

und

$$Q'\colon \bigoplus_{H\in O'(G|V)} \omega_0^{WH}(EWH \times X^H \times (DV^H, SV^H)) \to \pi_{-V}^G(X^+).$$

(ii) *In* $[S^U, S^{U\times V} \wedge X^+]_0^G$ *bzw. in* $\pi_{-V}^G(X^+)$ *ist jedes Element g darstellbar als* $g = e(V)\cdot h$ *mit* $h \in [S^U, S^U \wedge X^+]_0^G$ *bzw.* $h \in \pi_0^G(X^+)$.

Beweis. (i) ist sofort klar wegen Korollar (III.4) und der vorangehenden Bemerkung. Ebenso folgt aus derselben Bemerkung, daß die zu $P^{-1}(g)$ bzw. $Q'^{-1}(g)$ gehörigen Abbildungen $f_H\colon M_H \to X^H \times (DV^H, SV^H)$ über die Inklusion des Nullpunktes $* \to V^H$ faktorisieren. Dies liefert wegen der Natürlichkeit von P bzw. Q' sofort die Behauptung aus (ii). □

Korollar (IV.3). *Enthält die G-Darstellung V einen trivialen Summanden, so gilt* $[S^U, S^{U\times V} \wedge X^+]_0^G = \pi_{-V}^G(X^+) = 0$.

Beweis. Enthält V einen trivialen Summanden, so gilt $e(V) = 0$ und die Behauptung folgt mit Satz (IV.2). □

Literatur

1. Bröcker, Th., Hook, E.: Stable equivariant bordism. Math. Z. **129**, 269–277 (1972)
2. Bröcker, Th., tom Dieck, T.: Kobordismentheorie. Lecture Notes in Mathematics 178. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
3. tom Dieck, T.: The Burnside Ring of a compact Liegroup I. Math. Ann. **215**, 235–250 (1975)
4. tom Dieck, T.: Orbittypen und äquivaiante Homologie II. Arch. der Math. (Erscheint demnächst)

5. Hauschild, H.: Bordismentheorie stabil gerahmter G-Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **139**, 165–171 (1974)
6. Hauschild, H.: Äquivariante Transversalität äquivariante Bordismentheorien. Preprint, Arch. der Math. (Erscheint demnächst)
7. Hauschild, H.: Bordismentheorie stabil gerahmter G-Mannigfaltigkeiten, stabile äquivariante Homotopie und stabile Homologietheorien. Dissertation Saarbrücken 1973
8. Rubinsztein, R. L.: On the equivariant homotopy of spheres. Ph. D. Thesis. Institute of Mathematics, Polish Academy of sciences (1973)
9. Segal, G.: Equivariant stable homotopy. In: Actes du Congrès international des Mathématiciens (Nice, 1970) Tome 2, pp. 59–63. Paris: Gauthier-Villars 1971
10. Wasserman, A.: Equivariant differentiable topology. Topology **8**, 128–144 (1969)
11. Chevalley, C.: Theory of Lie Groups I. Princeton: Princeton University Press 1946

Dr. H. Hauschild
Fachbereich Mathematik
der Universität des Saarlandes
D-66 Saarbrücken 11
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 2. Juli 1974)