Äquivariante Transversalität und äquivariante Bordismentheorien

Von

Henning Hauschild

0. Einleitung. Ist G eine kompakte Liegruppe, sind M und N differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten und ist $i\colon L \to N$ die Inklusion einer Untermannigfaltigkeit, so gebe ich eine hinreichende Bedingung dafür an, wann sich jede G-Abbildung $f\colon M \to N$ transversal zu i homotop abändern läßt. Es wird hierbei ein Ansatz von A. Wasserman [10] systematisiert unter Benutzung von Methoden aus der äquivarianten Bordismentheorie. Einige Beispiele sollen die Anwendung in der äquivarianten Bordismentheorie erläutern.

I. Vorbereitungen. Es seien im folgenden $M, N, L \ldots$ immer kompakte C^∞-differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten. Weiter seien alle auftretenden Abbildungen differenzierbare G-Abbildungen, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt. Ist $m \in M$, so sei G_m die Standuntergruppe im Punkte m. Ist $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so sei M^H die H-Fixpunktmenge der G-Operation auf M. Auf M^H operiert der Normalisator $N(H)$ von H. Weiter setze ich

$$M_H = \{m \in M \,|\, G_m = H\} \quad \text{und} \quad M_{(H)} = \{m \in M \,|\, G_m \sim H\}.$$

Für das Orbitbündel gilt dann $M_{(H)} \cong G \times_{N(H)} M_H$. Analoge Bezeichnungen verwende ich für G-Abbildungen. Ist z.B. $f\colon M \to N$ gegeben, so ist $f^H\colon M^H \to N^H$ die Einschränkung auf die H-Fixpunktmenge.

Satz (I.1) (Thom). *Ist $G = 1$ und $f\colon M \to N$ eine G-Abbildung, welche auf der abgeschlossenen Menge $C \subset M$ schon transversal zu der Inklusion $i\colon L \to N$ ist, so läßt sich f relativ C homotop zu einer zu i transversalen Abbildung abändern.* ∎

Lemma (I.2). *Sei $U_\varepsilon \supset C$ eine ε-Umgebung der abgeschlossenen Menge $C \subset M$ und F eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M; ist weiter $f\colon M \to N$ eine differenzierbare G-Abbildung und $H\colon F \times I \to N$ eine Homotopie von $f\,|\,F$, für welche*

$$H_t \,|\, F \cap \bar{U}_{\varepsilon/2} = f \,|\, F \cap \bar{U}_{\varepsilon/2}$$

gilt, so läßt sich diese Homotopie zu einer differenzierbaren Homotopie von f auf ganz M erweitern, welche auf einer passenden Umgebung $U_{\varepsilon'}$ von C in M konstant ist.

Beweis. Vgl. [10] Lemma (3.2). ∎

Lemma (I.3). *Ist $f\colon M \to N$ eine Abbildung differenzierbarer G-Mannigfaltigkeiten, U eine offene Umgebung der abgeschlossenen Menge $C \subset M$ und $h\colon U \to N$ eine differenzierbare G-Abbildung mit $h \mid C = f \mid C$, dann existiert eine Homotopie $H\colon M \times I \to N$, und eine Umgebung V von C mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $H_0 = f$; (ii) $H_t \mid M \backslash U = f \mid M \backslash U$; (iii) $H_1 \mid V = h \mid V$;
(iv) $\bar{V} \subset U$.

Beweis. Vgl. [10] Lemma (3.4). ■

Bemerkung. Wegen der Existenz tubularer Umgebungen braucht man für alle Transversalitätsbetrachtungen nicht beliebige Inklusionen zu betrachten, sondern kann sich auf Nullschnitte in G-Vektorraumbündeln beschränken. ■

Satz (I.4). *Es sei M eine differenzierbare G-Mannigfaltigkeit, auf der nur ein Orbittyp (H) auftrete. $f\colon M \to E$ sei eine Abbildung in den Totalraum des G-Vektorraumbündels $p\colon E \to B$, welche auf der abgeschlossenen Menge $C \subset M$ transversal zum Nullschnitt von p sei. Gilt für alle $b \in B$, die von H fest gelassen werden, daß H auch die Faser $p^{-1}(b)$ punktweise fest läßt, so läßt sich f relativ C transversal zum Nullschnitt von p homotop abändern.*

Beweis. Betrachte zunächst die Situation für die H-Fixpunktmengen.

$$\begin{array}{ccl} f^H\colon M^H & \longrightarrow & E^H = E\mid_{B^H} \\ & & \downarrow p^H \\ & & B^H \end{array}$$

Die Abbildung f^H ist genau dann transversal zum Nullschnitt von p^H, wenn

$$f^H \times \mathrm{id} : M^H \to E\mid_{B^H} \times M^H$$

transversal zum Nullschnitt von $p^H \times \mathrm{id} : E\mid_{B^H} \times M^H \to B^H \times M^H$ ist. Man dividiert nun die freie K-Operation ($K = N(H)/H$) aus und erhält das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} M^H \arrow[r, "f^H \times \mathrm{id}"'] \arrow[d] & E\mid_{B^H} \times M^H \arrow[r, "p^H \times \mathrm{id}"'] \arrow[d] & B^H \times M^H \arrow[d] \\ M^H/K \arrow[r, "f^H \times_K \mathrm{id}"'] & E\mid_{B^H} \times_K M^H \arrow[r, "p^H \times_K \mathrm{id}"'] & B^H \times_K M^H \end{tikzcd}$$

Man mache $f^H \times_K \mathrm{id}$ relativ C^H/K transversal zum Nullschnitt von $E\mid_{B^H} \times_K M^H$. Es entstehe die Abbildung h'. Liftet man h' und die zugehörige Homotopie, so entsteht eine zum Nullschnitt von $E\mid_{B^H} \times M^H$ transversale $N(H)$-Abbildung

$$h\colon M^H \to E\mid_{B^H} \times M^H .$$

Bezeichnet pr: $E\mid_{B^H} \times M^H \to E\mid_{B^H}$ die Projektion, so erhält man wegen

$$M = G \times_{N(H)} M^H$$

aus h eine zu f homotope G-Abbildung $f'\colon M = G \times_{N(H)} M^H \to E$ definiert durch $f'(g, m) = g \cdot (\mathrm{pr} \circ h)(m)$. Man rechnet für f' die gewünschten Eigenschaften nach. ■

Ein Induktionsschluß nach der Anzahl der auf M auftretenden Orbittypen liefert sofort die folgende Verschärfung von Satz (I.4):

Satz (I.5). *Sei M eine kompakte G-Mannigfaltigkeit und $p: E \to B$ ein G-Vektorraumbündel, für welches gilt: Läßt die auf M auftretende Standuntergruppe $H \subset G$ den Punkt $b \in B$ fest, so lasse H auch die Faser $p^{-1}(b)$ fest. Dann läßt sich jede Abbildung $f: M \to E$, welche auf der abgeschlossenen Menge $C \subset M$ schon transversal zum Nullschnitt von p ist, relativ C transversal zum Nullschnitt von p homotop abändern.*

Beweis. Es sei U_ε eine ε-Umgebung von C, auf welcher f noch transversal zum Nullschnitt von p ist.

1. Existiert auf M genau ein Orbittyp, so folgt die Behauptung aus Satz (I.4).

2. Sei $H \subset G$ eine *maximale* auf M auftretende Standuntergruppe.

$$M_H = \{m \in M \mid G_m = H\}$$

und

$$M_{(H)} = \{m \in M \mid G_m \sim H\} = G \times_{N(H)} M_H$$

sind abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von M. Betrachte

$$\begin{array}{ll} f_{(H)}: M_{(H)} \longrightarrow & E \\ & \downarrow p \\ & B \end{array}$$

p erfüllt die Bedingungen aus Satz (I.4), daher kann man $f_{(H)}$ relativ $\bar{U}_{\varepsilon/2} \cap M_{(H)}$ transversal zum Nullschnitt von p machen. Man hat also eine Homotopie

$$F: M_{(H)} \times I \to E$$

gegeben. Nach Lemma (I.2) kann man nun diese Homotopie auf ganz $M \times I$ erweitern, ohne auf einer passenden Umgebung von C etwas zu ändern. Also ist f ohne Einschränkung auf $M_{(H)}$ transversal zum Nullschnitt von p und damit auch auf einer passenden tubularen Umgebung $\nu_\delta(M_{(H)}, M)$ von $M_{(H)}$ in M.

3. Man schneidet aus M nun $\nu_{\delta/2}(M_{(H)}, M)$ weg und betrachtet

$$f \mid (M \setminus \nu_{\delta/2}(\ldots)) = f \mid M'.$$

Auf M' treten weniger Orbittypen als auf M auf. Nach Induktionsvoraussetzung kann man nun $f \mid M'$ transversal zum Nullschnitt von p machen relativ zu

$$(C \cap M') \cup (\text{Rand der tubularen Umgebung}).$$

Zusammensetzen der neuen Abbildung und der Homotopie längs des Randes der tubularen Umgebung liefert die Behauptung. ∎

Bemerkung. Dieser Satz wurde zuerst von Stong [8] für endliche abelsche Gruppen G bewiesen. ∎

Um das Folgende zu erläutern, möchte ich kurz auf die Schwierigkeiten eingehen, die im Falle beliebiger G-Vektorraumbündel $p: E \to B$ auftreten. Sei etwa $G = Z_2$. Ohne Einschränkung kann man $f: M \to E$ auf M^{Z_2} als transversal zum Nullschnitt von $p^{Z_2}: E^{Z_2} \to B^{Z_2}$ voraussetzen. Um den Rest des Bündels E auffüllen zu können, muß man in M im Normalenbündel der Fixpunktmenge noch genug Platz haben. Im folgenden Beispiel ist dies nicht der Fall:

$$\begin{array}{ccl} M = \text{Punkt} \longrightarrow & E = \mathbb{R}^1 & \text{(mit nicht trivialer } Z_2\text{-Operation)} \\ & \downarrow \text{pr} & \\ & B = \text{Punkt} & \end{array}$$

Aber auch wenn die vorangehende Erscheinung nicht auftreten kann, erhält man noch keinen befriedigenden Transversalitätssatz, wie die folgende Überlegung lehrt:

Seien zwei homotope Z_2-Abbildungen $f, g\colon M \to B \times V$ gegeben und seien f und g transversal zum Nullschnitt $B \subset B \times V$ im Punkte $m \in M$. Weiter sei V eine Z_2-Darstellung ohne trivialen Summanden und es sei m ein Fixpunkt mit $\nu(M^{Z_2}, M)_m \cong V$. Induzieren f und g nicht homotope Z_2-Vektorraumisomorphismen $V \to V$, so läßt sich die Homotopie zwischen f und g nicht relativ zu den Endpunkten transversal machen, da m bei der Homotopie nicht aus dem Nullschnitt herauslaufen darf, da nur $B^{Z_2} \subset B \times V$ fest bleibt.

Um die aufgezeigten Schwierigkeiten zu umgehen, führe ich sogenannte kontrollierte Bündelabbildungen im nächsten Abschnitt ein.

II. Kontrollierte äquivariante Transversalität. Es sei eine differenzierbare lineare G-Abbildung

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "\hat{f}"] & B' \end{tikzcd}$$

gegeben. Es sei weiter eine G-Darstellung V mit $E' \oplus \bar{E}' \cong B \times V$ und eine lineare G-Abbildung $\varphi\colon E \to V$ gegeben.

Definition (II.1). f heißt kontrolliert durch φ, falls für alle $b \in B$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} {}^{\perp}E_b^{G_b} \arrow[r, "\varphi|"'] \arrow[d, hook] & V = b' \times V \arrow[d, "\text{Proj.}"] \\ E_b \arrow[r, "f_b"'] & E'_{b'} \end{tikzcd}$$

Hierbei bezeichnet $\perp$ das orthogonale Komplement in E_b. ■

Bemerkung (II.2). Eine differenzierbare Abbildung $f\colon E \to E'$ von G-Vektorraumbündeln, welche den Nullschnitt erhält, läßt sich in das Differential von f längs der Faser deformieren ([2], S. 30); die Deformation ist konstant über den Punkten, über denen f die Fasern schon linear abbildet. ■

Es sei M eine kompakte G-Mannigfaltigkeit. Auf dem Tangentialbündel $T(M)$ sei eine Riemannsche Metrik fest gewählt und M dadurch metrisiert. Weiter sei für M ein Spray und die dazugehörige Exponentialfunktion fest vorgegeben. Ist F eine Untermannigfaltigkeit von M und $\nu(F, M)$ das Normalenbündel von F in M, so liefert die Exponentialabbildung einen Diffeomorphismus T zwischen einer ε-Umgebung $\nu_\varepsilon(F, M)$ des Nullschnittes in $\nu(F, M)$ und einer ε-Umgebung von F in M.

[Ist F kompakt, so ist ε als konstante Abstandsfunktion aufzufassen; ist F nicht kompakt, so ist ε im allgemeinen nicht konstant.]

Alle Tubenabbildungen werden im folgenden mit T bezeichnet, wo eine Bezeichnung überhaupt nötig ist. Meist werden $\nu_\varepsilon(F, M)$ und die ε-Umgebung von F in M identifiziert.

Definition (II.3). Ist eine Abbildung $f\colon M \to E$ der kompakten G-Mannigfaltigkeit M in den Totalraum des G-Vektorraumbündels $p\colon E \to B$ gegeben, $\bar{E}$ ein Inverses von E mit $E \oplus \bar{E} \cong V \times B$ und $\varphi\colon T(M) \to V$ eine lineare G-Abbildung, so heißt f φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von p, falls für alle Untergruppen $H \subset G$ gilt:

(i) $f^H\colon M^H \to E^H$ ist transversal zum Nullschnitt $B^H \subset E^H$.

(ii) Setzt man $F^H = (f\,|\,M^H)^{-1} B^H$ und ist $T\colon \nu_\delta(F^H, M) \to M$ eine Tubenabbildung mit passend kleinem δ, so ist $f \circ T\colon \nu_\delta(F^H, M) \to M \to E$ linear, d.h. gleich seinem Differential längs der Faser und als Bündelabbildung ${}_H\varphi$-kontrolliert mit

$$ {}_H\varphi = \varphi \circ i\colon \nu(F^H, M) \to T(M)\,|\,F^H \to V. $$

Hierbei bezeichnet i die Inklusion des Normalenbündels in das Tangentialbündel, gegeben durch die Riemannsche Metrik.

Ist $C \subset M$ abgeschlossen, so heißt f auf C φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von p, falls eine offene ε-Umgebung U_ε von C in M existiert, so daß $f\,|\,U_\varepsilon$ obige Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. ∎

Satz (II.4). *Sei G eine kompakte Liegruppe; für jede abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ sei $G/N(H)$ endlich; sei $p\colon E \to B$ ein differenzierbares G-Vektorraumbündel mit $E \oplus \bar{E} = V \times B$; M eine kompakte G-Mannigfaltigkeit mit einer surjektiven linearen G-Abbildung $\varphi\colon T(M) \to V$, so läßt sich jede differenzierbare G-Abbildung, welche auf einer abgeschlossenen Menge $C \subset M$ schon φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von p ist, relativ C in eine zum Nullschnitt von p φ-kontrolliert transversale Abbildung homotop abändern.*

Beweis. Es sei H eine *maximale* auf M auftretende Standuntergruppe. Da H maximal ist, gilt $M^H = M_H$.

(i) Ohne Einschränkung ist $f\,|\,M^K$ transversal zum Nullschnitt von $p^K\colon E^K \to B^K$ für $K = g\,H\,g^{-1}$.

Um dies zu zeigen, betrachte man $f\,|\,M^H$. Nach Voraussetzung ist $f\,|\,M^H \cap \bar{U}_{\varepsilon/2}$ transversal zum Nullschnitt von p^H; hierbei ist U_ε die zu C gehörige Umgebung und $\bar{U}_\varepsilon$ ihr Abschluß. Wegen Satz (I.4) existiert eine $N(H)$-äquivariante Homotopie $F\colon M^H \times I \to E^H$ mit $F_0 = f$, F_1 transversal zum Nullschnitt von p^H und

$$ F\,|\,(M^H \cap \bar{U}_{\varepsilon/2}) \times I = f^H. $$

Erweitere nun F zu einer G-Homotopie $F'\colon M_{(H)} \times I \cong G \times_{N(H)} M^H \times I \to E$ durch $F'(g, m, t) = g \cdot F(m, t)$ für $g \in G$, $m \in M^H$ und $t \in I$ und setze diese Homotopie mit

Lemma (I.2) zu einer Homotopie F'': $M \times I \to E$ mit den folgenden Eigenschaften fort:

(1) $F_0'' = f$;

(2) $F_t'' \mid U_{\varepsilon'} = f \mid U_{\varepsilon'}$ mit passendem $U_{\varepsilon'} \supset C$;

(3) F_1'' ist auf M^K transversal zum Nullschnitt von p^K für $K = gHg^{-1}$.

(ii) Es soll nun f auf der Tubenumgebung $\nu_\delta(F^H, M)$ linear und ${}_H\varphi$-kontrolliert gemacht werden, ohne daß sich in einer Umgebung von C etwas ändert.

Die Tubenumgebungen $\nu(F^H, M)$ seien so klein gewählt, daß zu verschiedenen Untergruppen $K = gHg^{-1}$ disjunkte Tubenumgebungen $\nu(F^K, M) = g \cdot \nu(F^H, M)$ gehören.

Diese Wahl ist möglich, da die Menge $G/N(H)$ endlich ist. Nach Voraussetzung erfüllt $f \mid U_\varepsilon$ die Voraussetzung (ii) aus Definition (II.3) für die Untergruppe $H \subset G$. Sei also $\nu_\alpha(F^H \cap U_\varepsilon, U_\varepsilon)$ eine Tubenumgebung von $F^H \cap U_\varepsilon$ in U_ε, auf welcher f linear und ${}_H\varphi$-kontrolliert ist. Es existiert nun eine Tubenumgebung $\nu_\beta(F^H, M)$ von F^H in M, welche zwar nicht notwendig in $\nu_\alpha(F^H \cap U_\varepsilon, U_\varepsilon)$ enthalten ist, wenn man mit U_ε schneidet, welche aber in $\nu_\alpha(F^H \cap U_\varepsilon, U_\varepsilon) \cap \bar{U}_{\varepsilon/2}$ liegt, wenn man mit $\bar{U}_{\varepsilon/2}$ schneidet. Das Normalenbündel $\nu(F^H, M)$ zerfällt in

$$\nu(F^H, M^H) \oplus \nu(M^H, M) \mid F^H .$$

Damit gilt

$$\nu_\beta(F^H, M) = (\nu(F^H, M^H) \oplus \nu(M^H, M) \mid F^H)_\beta .$$

Man ersetzt nun f auf $\nu(F^H, M^H)$ durch das Differential längs der Faser, bildet $\nu(M^H, M) \mid F^H$ durch die kontrollierende Abbildung φ nach E ab und setzt dann die beiden Abbildungen auf die direkte Summe fort. Da f über den Punkten aus $\bar{U}_{\varepsilon/2} \cap F^H$ schon linear und kontrolliert abgebildet wurde, ändert sich hier nichts. Wählt man noch $\beta < \varepsilon/4$, so ist gewährleistet, daß auf $\bar{U}_{\varepsilon/4}$ nichts geändert wird. Die soeben konstruierte Abbildung sei h': $\nu_\beta(F^H, M) \to E$. Bezeichnet $F_{(H)}$ die Vereinigung über alle F^K mit $K = gHg^{-1}$, so erhält man aus h' eine G-Abbildung

$$h\colon G \times_{N(H)} \nu_\beta(F^H, M) = \nu_\beta(F_{(H)}, M) \to E ,$$

welche linear und φ-kontrolliert ist.

Weiter kann man h auf $U_{\varepsilon/4}$ fortsetzen, indem man hier $h = f$ fordert. Auf die beiden Abbildungen f: $M \to E$ und h: $U_{\varepsilon/4} \cup \nu_\beta(F_{(H)}, M) \to E$ wende man nun Lemma (I.3) an mit dem dortigen $C = \bar{U}_{\varepsilon/8} \cup F_{(H)}$. Es ergibt sich dann eine zu f homotope Abbildung f', welche auf $\bar{U}_{\varepsilon/8} \cup F_{(H)}$ mit f übereinstimmt und welche auf einer passenden Tubenumgebung $\nu_\gamma(F_{(H)}, M)$ gleich h, d.h. linear und φ-kontrolliert ist. Es ist weiter $(f')^K$: $M^K \to E^K$ transversal zum Nullschnitt von p^K für $K = gHg^{-1}$. Dies ist sofort richtig für Punkte aus F^K, da Linearisierung am Differential nichts ändert. Für alle anderen Punkte aus M^K folgt die Transversalität, da man die obige Homotopie zwischen f und f' noch so einrichten kann, daß aus M^K nur F^K bei f' nach B^K abgebildet wird. Man darf also jetzt annehmen, daß f die Bedingungen (i) und (ii) aus Definition (II.3) für die Untergruppen $K = gHg^{-1}$ erfüllt.

(iii) Die Abbildung f ist wegen (i) und (ii) in den Punkten aus $F_{(H)}$ transversal zum Nullschnitt von p, da die kontrollierende Abbildung surjektiv ist. Hiermit ist f auch transversal in den Punkten einer geeigneten Tubenumgebung $\nu_\delta(F_{(H)}, M)$.

(iv) Die Abbildung f eingeschränkt auf $\nu_\delta(F_{(H)}, M)$ ist φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von p; denn ist $L \subset H$ gegeben, so ergibt sich aus der Transversalität sofort, daß auch

$$f^L \colon (\nu_\delta(F_{(H)}, M))^L \to E^L$$

transversal zum Nullschnitt von p^L ist. Es ist dann $\nu_\delta(L) = (f^L)^{-1} B^L$ ein Unterbündel von $\nu_\delta(F_{(H)}, M)$.

Ist $\pi(L)\colon \nu_\delta(L) \to F_{(H)}$ die Projektion, so erhält man als Normalenbündel von $\nu_\delta(L)$ in $\nu_\delta(F_{(H)}, M)$ das Bündel $\pi(L)^*({}^\perp\nu(L))$, wobei ${}^\perp\nu(L)$ das orthogonale Komplement von $\nu(L)$ in $\nu(F_{(H)}, M)$ bezeichnet. Da f auf $\nu_\delta(L)$ über π faktorisiert, ist auch die auf dem Normalenbündel $\nu(\nu_\delta(L), \nu_\delta(F_{(H)}, M))$ induzierte Abbildung φ-kontrolliert.

Hiermit ist f eingeschränkt auf $\nu_\delta(F_{(H)}, M)$ φ-kontrolliert transversal. Auf $M_{(H)} \setminus (M_{(H)} \cap \nu_\delta(F_{(H)}, M))$ trifft die Abbildung f den Nullschnitt B nicht, daher trifft f auch auf einer passenden Umgebung von $M_{(H)} \setminus (M_{(H)} \cap \nu_\delta(F_{(H)}, M))$ den Nullschnitt B nicht. Die Abbildung f ist daher nicht nur auf $\nu_\delta(F_{(H)}, M)$, sondern sogar auf einer passenden Umgebung W_σ von $M_{(H)}$ in M φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von p.

(v) Beweis von Satz (II.4) durch Induktion nach Anzahl der Orbittypen.

Tritt auf M genau ein Orbittyp auf, so ist man wegen (iii) fertig. Da M kompakt ist, treten auf M nur endlich viele Orbittypen auf. Sei (H) ein maximaler auftretender Standuntergruppentyp. Ohne Einschränkung ist nun f φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von p auf einer offenen Tubenumgebung W_σ von $M_{(H)}$ in M wegen (iv). Man schneide nun etwa $W_{\sigma/2}$ aus M weg und betrachte die entstehende Mannigfaltigkeit mit Rand M'. Auf M' treten zunächst weniger Orbittypen auf als auf M. Weiter ist $f' = f \mid M'$ φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von p auf $U_\varepsilon \cap M'$ und auf einer tubularen Umgebung des Randes von M'. Nach Induktionsvoraussetzung kann man nun f' relativ zum Rand und relativ zu $M' \cap C$ φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von p machen. Zusammenkleben der auf dem weggeschnittenen Teil gegebenen Abbildung und der auf M' konstruierten Abbildung längs des Randes liefert nun die Behauptung. ∎

Bemerkung (II.5). Der Satz (II.4) gilt auch für Mannigfaltigkeiten M mit Rand. Hierzu beachte man nur, daß die lineare G-Abbildung $\varphi\colon T(M) \to V$ aus der Voraussetzung von Satz (II.4) nicht als surjektiv vorausgesetzt zu werden braucht; der Beweis von Satz (II.4) zeigt, daß man nur eine surjektive G-Bündelabbildung $\varphi\colon R^n \times M \oplus T(M) \to V$ benötigt.

Es sind viele weitere Varianten des vorangehenden Ansatzes möglich. Zum Beispiel kann man eine fest gegebene Abbildung $f\colon M \to E$ transversal zum Nullschnitt von $p\colon E \to B$ machen, sofern man eine Bündelabbildung $\varphi\colon TM \to f^* p^* E$ hat, welche auf den orthogonalen Komplementen der H-Fixpunktmengen surjektiv ist.

Bemerkung (II.6). In Anlehnung an die Obstruktionstheorie kann die Methode aus Satz (II.4) auch benutzt werden, um zu untersuchen, wann sich $f: M \to E$ transversal zum Nullschnitt von $p: E \to B$ machen läßt. Ohne Einschränkung kann man nach Satz (II.4) Beweisschritt (i) voraussetzen, daß $f^G: M^G \to E^G$ transversal zu B^G ist. Ist $F^G = (f^G)^{-1}(B^G)$, so hat man zu testen, ob sich ${}^{\perp}\nu(F^G, M)^G$ als G-Bündel über f^G surjektiv nach ${}^{\perp}E^G$ abbilden läßt. Ist dies der Fall, so kann man mit obiger Methode f auf einer Umgebung U_ε von M^G transversal zu B machen. Man schneidet nun $U_{\varepsilon/2}$ aus M weg. Auf der entstehenden Mannigfaltigkeit $\bar{M}$ sei H maximale auftretende Standuntergruppe. Relativ zum Rand von $\bar{M}$ löst man nun dasselbe Problem (oder auch nicht) für die Untergruppe H usw. bis man M ausgeschöpft hat. Problematisch hierbei ist, daß die Lösung der Normalenbündelbedingung z.B. über F^G von der Auswahl abhängt, wie man f^G transversal zu B^G gemacht hat. Die Existenz der surjektiven Bündelabbildung $\varphi: T(M) \to V$ garantiert die Lösbarkeit aller auftretenden Normalenbündelbedingungen. ∎

III. Anwendungen. Arbeitet man in der unorientierten äquivarianten Bordismentheorie $\mathfrak{N}_*^G(-)$, so hat man keinen Transversalitätssatz zur Verfügung. Durch passende Einhängung mit einer G-Darstellung kann man nach Satz (II.4) immer in den Bereich kommen, in dem ein Transversalitätssatz gilt. Die üblichen Transversalitätsschlüsse aus der Theorie $\mathfrak{N}_*^1(-)$ übertragen sich daher auf die stabilisierte äquivariante Bordismentheorie ${}^{st}\mathfrak{N}_*^G(-)$ aus [1]. Es soll dies im folgenden an einigen Beispielen erläutert werden. Hierzu sei G zunächst endlich. Es bezeichne $BO(k\,|\,G\,|\,W)$ die äquivariante Grassmannmannigfaltigkeit der k-dimensionalen Unterräume der G-Darstellung W. $E(k\,|\,G\,|\,W)$ sei das zugehörige G-Vektorraumbündel mit dem Thomraum $MO(k\,|\,G\,|\,W)$. Es sei V eine G-Darstellung, die alle irreduziblen G-Darstellungen mindestens einmal enthält. Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion liefert nach [10] eine natürliche Transformation

$$(*)\qquad i_G: \mathfrak{N}_r^G(X) \to [S^{V^{r+h}}, MO((r+h)\cdot|V| - r\,|\,G\,|\,V^{r+h}) \wedge X^+]_0^G$$

mit $h > r + 3$.

Satz (III.1) (Wasserman [10]). *Die obige Transformation i_G ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Für den Beweis verweise ich auf [10] und bemerke, daß der Transversalitätsbegriff aus [10] „consistent transvers regularity" ein Spezialfall der kontrollierten Transversalität ist. Nach Projektion hat man in (*) die Homotopiemenge $[S^{V^{r+h}}, MO(\ldots|\,G\,|\,V^{r+h})]_0^G$ zu betrachten. Es muß also eine Abbildung

$$f: DV^{r+h} \to DE(\ldots|\,G\,|\,V^{r+h})$$

transversal zum Nullschnitt gemacht werden. Hierbei bezeichnet DV bzw. DE jeweils das Ballbündel vom Radius 1 in V bzw. E. $E(\ldots|\,G\,|\,V^{r+h})$ hat ein ausgezeichnetes inverses Bündel $\bar{E}(\ldots|\,G\,|\,V^{r+h})$ mit

$$E \oplus \bar{E} = V^{r+h} \times BO(\ldots|\,G\,|\,V^{r+h}).$$

Weiter hat man eine kontrollierende Abbildung $\varphi: T(DV^{r+h}) \to V^{r+h}$. In dieser Situation liefert nun Satz (II.4) den Satz (3.10) aus [10], welcher der wesentliche Beweisschritt für Satz (III.1) ist. ∎

Ist

$$^{\mathrm{st}}\mathfrak{N}_*^G(X) = \varinjlim_{V} \mathfrak{N}_{*+|V|}^G(X \times DV, X \times SV)$$

wieder die stabilisierte unorientierte Bordismentheorie, so liefert die Pontrjagin-Thom-Konstruktion nach [1] eine natürliche Transformation

$$^{\mathrm{st}}i\colon {}^{\mathrm{st}}\mathfrak{N}_*^G(X) \to N_*^G(X^+),$$

wobei $N_*^G(-)$ durch das äquivariante Thomspektrum $MO\,(n|G|\,\infty)$ gegeben sei. (Für die Definition vergleiche [3].)

Satz (III.2) (Bröcker-Hook [1]). $^{\mathrm{st}}i\colon {}^{\mathrm{st}}\mathfrak{N}_*^G(X) \to N_*^G(X^+)$ *ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Es soll Satz (III.2) als Satz über stabile Transversalität interpretiert werden. Man konstruiert mit Satz (II.4) eine zu $^{\mathrm{st}}i$ inverse Abbildung

$$E\colon N_*^G(X^+) \to {}^{\mathrm{st}}\,\mathfrak{N}_*^G(X).$$

Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß X ein Punkt ist, da der auftretende Raum für alle auftretenden Konstruktionen unwesentlich ist.

Ist $f\colon S^V \to MO(|V| - r|G|\,\infty) \in N_r^G(S^0)$ gegeben, so bemerke man zunächst, daß f über einen Thomraum $MO(|V| - r|G|\,W)$ faktorisiert mit passend großem W, wobei noch ohne Einschränkung $V \subset W$ vorausgesetzt werden kann. $\bar V$ bezeichne das orthogonale Komplement von V in W. Nach Einhängung mit $S^{\bar V}$ ist f durch

$$f'\colon S^W \to MO(|V| - r|G|\,W) \wedge S^{\bar V}$$

repräsentiert. Rechts steht der Thomraum des Bündels $E(|V| - r|G|\,W) \wedge S^{\bar V}$. In dieser Situation ist die Voraussetzung von Satz (II.4) erfüllt. Wie im nicht äquivarianten Fall konstruiert man nun die inverse Abbildung E. ∎

Es sollen nun Paare (j, f) betrachtet werden, wobei $j\colon M \to V \times U$ eine Einbettung einer kompakten G-Mannigfaltigkeit M und $f\colon \nu(j) \to U \times B$ eine U-Trivialisierung des Normalenbündels dieser Einbettung sei. Auf der Menge der Paare (j, f) erhält man analog zu ([2], Def. (III.2.1)) eine Bordismenrelation. Die Menge der Bordismenklassen von Paaren (j, f) bezeichne ich in Abhängigkeit von G, U, V und B mit $L_V^G[U](B)$. Die Pontrjagin-Thom Konstruktion liefert z.B. nach ([2] Kapitel III § 1) eine bezüglich der Variablen B natürliche Transformation

$$P\colon L_V^G[U](B) \to [S^{V\times U}, S^U \wedge B^+]_0^G.$$

Betrachtet man nur solche Paare (j, f), für welche die entstehende Abbildung

$$P(j, f)\colon S^{V\times U} \to S^U \wedge B^+$$

φ-kontrolliert transversal zum Nullschnitt von $U \times B$ ist für geeigneten Repräsentanten (j, f), wobei $\varphi\colon V \times U \to U$ als die Projektion auf U zu wählen ist, so bezeichne $^{\varphi}L_V^G[U](B)$ die Menge dieser Äquivalenzklassen. Man erhält eine natürliche Transformation $A\colon {}^{\varphi}L_V^G[U](B) \to L_V^G[U](B)$, indem man die Einschränkung der φ-Kontrolliertheit vergißt.

Satz (III.3). *Sei G eine kompakte Liegruppe; für alle abgeschlossenen Untergruppen $H \subset G$ sei die Menge $G/N(H)$ endlich. Dann ist*

$$P \circ A\colon {}^{\varphi}L_V^G[U](B) \to [S^{V\times U}, S^U \wedge B^+]_0^G$$

eine Bijektion.

Beweis. Man verwende den Transversalitätssatz (II.4) und schließe dann wie im Beweis von Satz (3.1) aus [2] Kapitel III. ■

Ist W eine weitere G-Darstellung, so hat man eine Abbildung

$$\mathrm{st}(W)\colon L_V^G[U](B) \to L_V^G[U \times W](B)$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathrm{st}(W)[j\colon M \to V \times U;\ f\colon \nu(j) \to U \times B] = \\ [j'\colon M \to V \times U \xrightarrow{c} V \times U \times W;\ f' = f \times \mathrm{id}\colon \nu(j') = \\ = \nu(j) \times W \to U \times B \times W].\end{aligned}$$

Ist $P[j, f]$ φ-kontrolliert transversal, so auch $P \circ \mathrm{st}(W)([j, f])$. Man erhält also auch eine Abbildung

$${}^{\varphi}\mathrm{st}(W)\colon {}^{\varphi}L_V^G[U](B) \to {}^{\varphi}L_V^G[U \times W](B).$$

Ist

$$\Sigma(W)\colon [S^{V\times U}, S^U \wedge B^+]_0^G \to [S^{V\times U\times W}, S^{U\times W} \wedge B^+]_0^G$$

der zur Darstellung W gehörige Einhängungshomomorphismus in der äquivarianten Homotopie, so erhält man ein kommutatives Diagramm:

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccc} {}^{\varphi}L_V^G[U](B) & \xrightarrow{A} & L_V^G[U](B) & \xrightarrow{P} & [S^{V\times U}, S^U \wedge B^+]_0^G \\ \downarrow {\scriptstyle {}^{\varphi}\mathrm{st}(W)} & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{st}(W)} & & \downarrow {\scriptstyle \Sigma(W)} \\ {}^{\varphi}L_V^G[U \times W](B) & \xrightarrow{A} & L_V^G[U \times W](B) & \xrightarrow{P} & [S^{V\times U\times W}, S^{U\times W} \wedge B^+]_0^G \end{array}$$

Durchläuft nun W alle Isomorphieklassen von G-Darstellungen und bildet man den direkten Limes über die Abbildungen ${}^{\varphi}\mathrm{st}(W)$ bzw. $\Sigma(W)$, so erhält man eine natürliche Transformation

$$Q\colon \varinjlim_W {}^{\varphi}L_V^G[W](B) \to \varinjlim_W [S^{V\times W}, S^W \wedge B^+] = \pi_V^G(B^+).$$

Korollar (III.4). *Unter den Voraussetzungen von Satz* (III.3) *ist*

$$Q\colon \varinjlim_W {}^{\varphi}L_V^G[W](B) \to \pi_V^G(B)$$

isomorph.

Beweis. Ein direkter Limes über Bijektionen ist bijektiv. ■

Ist $\omega_V^G(B)$ die Bordismentheorie der singulären G-Mannigfaltigkeiten $g\colon M \to B$ mit einer V-Rahmenstruktur

$$\begin{array}{ccc} \psi\colon R^n \times T(M) & \to & R^n \times V \times M \\ & \searrow \; M \; \swarrow & \end{array}$$

auf dem stabilen Tangentialbündel (für die genauen Definitionen vgl. [5]), so erhält man eine natürliche Transformation $T\colon \omega_V^G(B) \to \varinjlim_W {}^{\varphi}L_V^G[W](B)$, indem man von der stabilen tangentialen Struktur zur stabilen normalen Struktur übergeht.

Bemerkung (III.5). Korollar (III.4) bietet eine Beweismöglichkeit für Satz (IV.2) aus [5], indem man zeigt, daß T bijektiv ist. ∎

Beispiel (III.6). Sei $G = Z_2$ und $\bar{\mathbb{R}}^1$ die nicht triviale Z_2-Darstellung. M sei die Z_2-Mannigfaltigkeit bestehend nur aus einem Punkt, $i\colon M \to \mathbb{R}^1 \times \bar{\mathbb{R}}^1$ sei die Inklusion, die M etwa auf $(1, 0)$ abbildet, und

$$\psi = \mathrm{id} \times -\mathrm{id}\colon \nu(i) = \mathbb{R}^1 \times \bar{\mathbb{R}}^1 \to \mathbb{R}^1 \times \bar{\mathbb{R}}^1$$

sei eine Trivialisierung des Normalenbündels von i.

$$[i\colon M \to \mathbb{R}^1 \times \bar{\mathbb{R}}^1,\ \psi\colon \nu(i) \to \mathbb{R}^1 \times \bar{\mathbb{R}}^1]$$

liefert ein Element in $L_0^{Z_2}[\mathbb{R}^1 \times \bar{\mathbb{R}}^1]$(Punkt), welches nicht φ-kontrolliert ist, wie man sich leicht überlegt. Dies Beispiel rechtfertigt die Einführung der Bordismentheorie ${}^{\varphi}L_V^G[U](-)$. ∎

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß Proposition 1 aus [7] falsch ist. Man darf die stabile tangentiale Rahmenstruktur nur auf Bündeln $\mathbb{R}^n \times T(M)$ definieren und nicht wie in [7] auf Bündeln $U \times T(M)$ für beliebige G-Darstellungen U. Mit der Definition einer stabilen Rahmenstruktur aus [7] erhält man nämlich auf der Z_2-Mannigfaltigkeit, die nur aus einem Punkt besteht, analog zu Beispiel (III.6) mehr als 2 stabile $\mathbb{R}^0$-Rahmenstrukturen, was Proposition 1 aus [7] widerspricht, denn die Homotopie wird beschrieben durch φ-kontrollierte Bordismenklassen. ∎

Literaturverzeichnis

[1] TH. BRÖCKER and E. HOOK, Stable equivariant bordism. Math. Z. **129**, 269–277 (1972).

[2] TH. BRÖCKER und T. TOM DIECK, Kobordismentheorie. Lect. Notes Math. **178**. Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[3] T. TOM DIECK, Kobordismentheorie und Transformationsgruppen. Aarhus Universitet preprint series No. 30 (1969).

[4] T. TOM DIECK, Characteristic numbers of G-manifolds I. Invent. Math. **13**, 213–224 (1971).

[5] H. HAUSCHILD, Bordismentheorie stabil gerahmter G-Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **139**, 165–171 (1974).

[6] S. LANG, Differentiable manifolds. Reading 1972.

[7] G. SEGAL, Equivariant stable homotopy theory. In: Actes Congrès intern. Math. 1970, Tome 2, pp. 59–63.

[8] R. STONG, Complex and oriented bordism. In: Topology of manifolds (edited by J. C. Cantrell and C. H. Edwards). Chicago 1970.

[9] R. STONG, Unoriented bordism and actions of finite groups. Mem. Amer. Math. Soc. **103** (1970).

[10] A. WASSERMAN, Equivariant differentiable Topology. Topology 8, 128–144 (1969).

[11] P. PETRIE, Obstruction to transversality for compact Lie groups. Vortrag Oberwolfach, Topologietagung 1973.

Eingegangen am 25. 10. 1974

Anschrift des Autors:

Henning Hauschild
Fachbereich Mathematik der Universität
D-34 Göttingen
Bunsenstraße 3–5