

Elliptische Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten *

In: Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Wiss. Abhdl.
Bd. 33, S. 583–608, Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag 1966

Ich möchte über den Indexsatz von Atiyah–Singer ([6], [10], [26]) berichten, zeigen, wie der Satz von Riemann–Roch [18] sich hier unterordnet, auf den neuen Fixpunktsatz von Atiyah–Bott zu sprechen kommen, der den Indexsatz verallgemeinert, und auf Anwendungsmöglichkeiten des Fixpunktsatzes auf diskontinuierliche Gruppen und automorphe Formen hinweisen. Diese Anwendungen betreffen die Langlandssche Formel [23]. Sie verallgemeinern die Überlegungen in [19]. Atiyah und Bott haben mir in Oxford im vergangenen Monat die neueste Version ihres Fixpunktsatzes erläutert. Ich danke ihnen herzlich dafür. Anschließend haben wir gemeinsam an der Anwendung auf die Langlandssche Formel gearbeitet.

§ 1. Es seien X eine n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und E, F differenzierbare komplexe Vektorraum-Bündel über X . Ein Vektorraum-Bündel E hat für jedes $x \in X$ eine Faser E_x , die ein komplexer Vektorraum ist. Wir setzen im Falle von E voraus, daß die komplexe Dimension dieser Vektorräume E_x gleich m_1 ist. Für F sei die Dimension der Fasern F_x gleich m_2 . Mit ΓE wird der $\mathbb{C}$ -Vektorraum der differenzierbaren Schnitte von E bezeichnet, entsprechend für F .

X läßt sich bekanntlich mit offenen Mengen U überdecken, die Karten für die differenzierbare Mannigfaltigkeit X sind und über denen die Vektorraum-Bündel E, F trivial sind. Sei $x_1, \dots, x_n$ ein Koordinatensystem von X in U . Dann ist bezüglich von Trivialisierungen von E und F jeder Schnitt s von E beschränkt auf U als m_1 -tupel komplexwertiger Funktionen von n reellen Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ anzusehen, ebenso ein Schnitt t von F beschränkt auf U als ein m_2 -tupel solcher Funktionen. Eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$D: \Gamma E \rightarrow \Gamma F$$

* Nach einem am 3. November 1965 vor der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen gehaltenen Vortrag.

heißt linearer Differentialoperator der Ordnung k , wenn folgendes gilt: Das m_2 -tupel $Ds|U$ von Funktionen soll aus dem m_1 -tupel $s|U$ erhalten werden, indem man darauf eine Matrix von m_1 Spalten und m_2 Zeilen anwendet, in der jedes Element ein Differentialoperator der Gestalt

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n \leq k} a_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

ist, wobei die Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_n}$ differenzierbare in U definierte komplexwertige Funktionen sind.

§ 2. *Das Symbol eines linearen Differentialoperators.* Der lineare Differentialoperator $D: \Gamma E \rightarrow \Gamma F$ der Ordnung k sei gegeben. $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ sei differenzierbar und $s \in \Gamma E$. Dann gilt für alle komplexen Zahlen λ

$$e^{-i\lambda f} D(e^{i\lambda f} s) = \lambda^k p_k(f, s) + \dots + \lambda p_1(f, s) + p_0(f, s),$$

wo die Schnitte $p_j(f, s) \in \Gamma F$ nur von D, f und s abhängen.

Übrigens ist $s \rightarrow p_j(f, s)$ für alle j ein linearer Differentialoperator der Ordnung $k - j$ und insbesondere $p_0(f, s) = Ds$. Ferner hängt $p_k(f, s)(x) \in F_x$ nur von dem Differential $(df)_x$ und von $s(x) \in E_x$ ab. Für $\eta \in T_x^*$ (= reeller kovarianter tangentieller Vektorraum der Mannigfaltigkeit X im Punkte x) wähle man f mit $(df)_x = \eta$ und für $v \in E_x$ wähle man einen Schnitt $s \in \Gamma E$ mit $s(x) = v$. Man setzt dann

$$\sigma_D^k(\eta)(v) = p_k(f, s)(x)$$

und erhält so eine lineare Abbildung

$$\sigma_D^k(\eta): E_x \rightarrow F_x.$$

In die Definition des Symbols σ_D^k gehen nur die Terme der Ordnung k von D (bzgl. lokaler Koordinaten usw.) ein. (Der Operator $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ wird sozusagen durch den Koeffizienten η_j von η ersetzt, um das Symbol zu bekommen.) Sehe ich D als Operator der Ordnung $k + 1$ an, dann verschwindet das Symbol σ_D^{k+1} . Deshalb muß die Ordnung k beim Symbol mitangegeben werden und soll nur weggelassen werden, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Ordnung D hat.

§ 3. *Elliptische Operatoren.* Nehmen wir an, daß die Faserdimensionen m_1, m_2 von E und F gleich sind. Ein linearer Differentialoperator

$$D: \Gamma E \rightarrow \Gamma F$$

der Ordnung k heißt dann elliptisch von der Ordnung k , wenn für jedes $x \in X$ und für jeden kovarianten Tangentialvektor η in x , der nicht 0 ist, die lineare Abbildung

$$\sigma_D^k(\eta): E_x \rightarrow F_x$$

bijektiv ist.

Für elliptische Operatoren D über kompakten Mannigfaltigkeiten X gilt der fundamentale Satz (vgl. z. B. [26], Chap. X, XI):

Der Kern und der Cokern von $D: \Gamma E \rightarrow \Gamma F$ sind endlich-dimensional.

Kern (D) und Cokern (D) sind dabei im Sinne der linearen Algebra definiert ($\Gamma E, \Gamma F$ sind im allgemeinen unendlich dimensionale Vektorräume über $\mathbb{C}$):

$$\text{Kern}(D) = \{s | s \in \Gamma E \text{ und } Ds = 0\},$$

$$\text{Cokern}(D) = \Gamma F / D(\Gamma E)$$

$\dim_{\mathbb{C}} \text{Kern}(D)$ ist die „Maximalzahl linear-unabhängiger Lösungen der homogenen Gleichung“ $Ds = 0$, und $\dim_{\mathbb{C}} \text{Cokern}(D)$ ist die „maximale Anzahl linear unabhängiger Bedingungen“, die an die inhomogene Gleichung $Ds = g$ ($g \in \Gamma F$ gegeben, s gesucht) zu stellen sind, damit sie lösbar ist.

Für einen elliptischen Operator definiert man den Index

$$\text{ind}(D) = \dim \text{Kern}(D) - \dim \text{Cokern}(D).$$

Sowjetische Mathematiker (Vekua, Gelfand u. a., siehe z. B. [1], [12], [15], [28], [29]) haben schon vor einigen Jahren darauf hingewiesen, daß man diesen Index wegen seiner Homotopieinvarianz mit topologischen Methoden berechnen sollte. Sie haben auch manche Teilresultate erhalten. Die vollständige Lösung gelang Atiyah und Singer im Jahre 1963, und wir verdanken H. Cartan und L. Schwartz [10] und R. S. Palais [26] die Ausarbeitung von Seminaren (Paris bzw. Princeton), in denen der Atiyah-Singersche Indexsatz und sein Beweis, für den Methoden aus vielen Gebieten der Mathematik erforderlich sind, dargestellt werden.

§ 4. *Ein Beispiel für den Indexsatz.* Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche (singularitätenfreie algebraische Kurve). Wir betrachten Differentialformen s auf X , die bezüglich Ortsuniformisierender z lokal so zu beschreiben sind

$$s = a(z) [dz]^r, \quad r \text{ eine fest gegebene ganze Zahl.}$$

Die Koeffizientenfunktion $a(z)$ soll differenzierbar und komplexwertig sein. Es gibt über X ein Vektorraum-Bündel E (der Faserdimension 1), so daß ΓE gerade der Vektorraum der angegebenen Differentialformen ist, die man auch Differentialformen in dz vom Gewicht r nennt. Es sei $\bar{\partial}$ (Ableitung nach $\bar{z}$) der lineare Differentialoperator der Ordnung 1, der den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen entspricht. Was ist $\bar{\partial}s$ für $s \in \Gamma E$? Wir haben bezüglich der Ortsuniformisierenden z

$$\bar{\partial}s = \frac{\partial a(z)}{\partial \bar{z}} \cdot d\bar{z} \cdot [dz]^r,$$

also eine Differentialform in $d\bar{z}$ und dz vom Gewicht r in dz . Derartige Differentialformen sind differenzierbare Schnitte eines anderen Vektorraum-Bündels F , und $\bar{\partial}$ ist, wie man leicht sieht, ein linearer elliptischer Differentialoperator der Ordnung 1.

$$\bar{\partial}: \Gamma E \rightarrow \Gamma F.$$

Der klassische Satz von Riemann-Roch (genauer ein Spezialfall dieses Satzes) besagt:

$$\text{ind}(\bar{\partial}) = (2r - 1)(p - 1),$$

wo p das Geschlecht von X , also $2 - 2p$ die klassische Euler-Poincarésche Charakteristik von X ist. Damit ist ein Beispiel des Atiyah-Singerschen Indexsatzes angegeben. Es sei.

$$H^0(X, r) = \text{Kern}(\bar{\partial}),$$

das ist der (endlich-dimensionale) komplexe Vektorraum der holomorphen Differentialformen vom Gewicht r . (Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\bar{\partial}s = 0$ ist äquivalent zur Holomorphie von s).

Für $p \geq 2$ und $r \geq 2$ ist bekanntlich $\text{Cokern}(\bar{\partial}) = 0$ und damit

$$(1) \quad \dim H^0(X, r) = (2r - 1)(p - 1) =$$

Maximalzahl linear-unabhängiger holomorpher Differentialformen vom Gewicht r .

§ 5. *Der Indexsatz von Atiyah-Singer.* Es ist nicht möglich, den Satz hier in voller Allgemeinheit zu formulieren. Wir deuten ihn nur für den Fall an, daß die Vektorraum-Bündel E, F trivial sind. Damit wird schon Prinzipielles deutlich, obwohl das Beispiel in § 4 sich nicht unterordnet, da die Bündel E, F dort nicht trivial sind.

X sei eine kompakte n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $E = X \times \mathbf{C}^m$ und $F = X \times \mathbf{C}^m$. Dann sind ΓE und ΓF gleich dem Vektorraum der m -tupel differenzierbarer komplexwertiger auf X definierter Funktionen.

$$D: \Gamma E \rightarrow \Gamma F$$

sei ein linearer elliptischer Differentialoperator der Ordnung k . Für jeden kovarianten Tangentialvektor $\eta \neq 0$ ist das Symbol

$$\sigma_D^k(\eta): E_x \rightarrow F_x$$

wegen der Trivialität der Bündel ein Element von $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$, der Gruppe der Automorphismen des Vektorraumes $\mathbf{C}^m$. Damit ist das Symbol eine Abbildung

$$\sigma_D^k: T_0^* \rightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbf{C}),$$

wo T^* der Raum aller kovarianten (reellen) Tangentialvektoren von X und $T_0^* \subset T^*$ der Raum der nicht-verschwindenden kovarianten Tangentialvektoren ist.

T^* ist eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die vermöge der kanonischen 2-Form auf T^* eine fast-komplexe Struktur zuläßt (vgl. z. B. [11], [22] p. 86). Damit ist in der reellen Cohomologie $H^*(T^*, \mathbf{R})$ eine Element ausgezeichnet, die Toddsche Klasse von T^* , die wir hier $\mathcal{T}(X)$ nennen wollen ($\mathcal{T}(X) = td(T^*)$). Die Toddsche Klasse einer fast-komplexen Mannigfaltigkeit wurde in [18] eingeführt (siehe 3. Auflage, § 10.1). In $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$ kann eine Cohomologieklass $\mathbf{Ch} \in H^*(\mathbf{GL}(m, \mathbf{C}), \mathbf{R})$ definiert

werden, die ein für allemal festliegt und als „Weltkonstante“ angesehen werden kann. (Die $(2j-1)$ -dimensionale Komponente von $\mathbf{Ch}$ multipliziert mit $(-1)^{j-1}(j-1)!$ ist die sogenannte Suspension der universellen Chernschen Klasse c_j .)

Wir führen nun in X eine Riemannsche Metrik ein (welche ist gleichgültig) und bezeichnen mit SX die $(2n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit der kovarianten Tangentialvektoren von X der Länge 1 und mit BX die $(2n)$ -dimensionale *berandete* Mannigfaltigkeit der Vektoren der Länge ≤ 1 . Es ist SX der Rand von BX . Da BX als fast-komplexe Mannigfaltigkeit orientiert ist, ist auch $SX = Rd(BX)$ orientiert. Vermöge des Symbols

$$(2) \quad \sigma_D^k: SX \rightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$$

kann $\mathbf{Ch}$ nach SX angehoben werden und ergibt ein Element

$$(\sigma_D^k)^*(\mathbf{Ch}) \in H^*(SX, \mathbf{R}).$$

Die Toddsche Klasse $\mathcal{T}(X)$ werde auf SX beschränkt, die Beschränkung ebenfalls mit

$$\mathcal{T}(X) \in H^*(SX, \mathbf{R})$$

bezeichnet. Der Indexsatz lautet nun so:

$$(3) \quad \text{ind}(D) = (\sigma_D^k)^*(\mathbf{Ch}) \cdot \mathcal{T}(X) [SX].$$

In (3) wird rechts das Cupprodukt der beiden Cohomologieklassen $(\sigma_D^k)^*(\mathbf{Ch})$ und $\mathcal{T}(X)$ gebildet und dessen $(2n-1)$ -dimensionale Komponente auf die fundamentale Homologieklass von SX angewendet.

Wer an Cohomologieklassen nicht gewöhnt ist, möge sich vorstellen, daß in $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$ eine Differentialform als „Weltkonstante“ gegeben ist, die zu eine Differentialform auf SX vermöge der Abbildung σ_D^k angehoben wird, daß durch die fast-komplexe Struktur von T^* eine weitere Differentialform auf SX ausgezeichnet wird und daß in der Formel (3) der Index D durch ein Integral einer wohl-definierten Differentialform über SX ausgedrückt wird.

Der Indexsatz zeigt, daß $\text{ind}(D)$ nur von der Homotopieklass des Symbols (d. h. der Abbildung (2)) abhängt; dies ist die Invarianz, die in § 3 gemeint war.

Der hier besprochene Spezialfall des Indexsatzes läßt sich auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand (und elliptische Operatoren mit Randbedingungen) besonders einfach diskutieren [2]. Der Indexsatz mit Randbedingungen wurde von Atiyah, Bott und Singer für beliebige Vektorraum-Bündel E, F bewiesen ([2], [26], Appendix I).

§ 6. *Elliptische Komplexe.* Der Indexsatz wird am besten etwas allgemeiner ausgesprochen (siehe [6]), um mehr Anwendungsbeispiele zu haben: Es seien $E_0, E_1, \dots, E_l$ differenzierbare komplexe Vektorraum-Bündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X . Eine Folge von Differentialoperatoren D_j der Ordnungen k_j

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \Gamma E_0 \xrightarrow{D_0} \Gamma E_1 \xrightarrow{D_1} \Gamma E_2 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_{l-1}} \Gamma E_l \longrightarrow 0$$

heißt Komplex, wenn $D_j \circ D_{j-1}$ der Nulloperator ist, mit anderen Worten, wenn $\text{Bild } D_{j-1} \subset \text{Kern } D_j$ ist. Für jeden kovarianten Tangentialvektor $\eta \neq 0$ im Punkte $x \in X$ induziert (4) die Sequenz von Vektorräumen und linearen Abbildungen

$$(4') \quad 0 \longrightarrow E_{0,x} \xrightarrow{\sigma_D(\eta)} E_{1,x} \xrightarrow{\sigma_D(\eta)} E_{2,x} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_D(\eta)} E_{l,x} \longrightarrow 0$$

Dabei wurde der Kürze halber bei den Symbolen alle D_j mit D bezeichnet und die Ordnungen k_j weggelassen. Aus $D_j \circ D_{j-1} = 0$ folgt, daß $\sigma_D(\eta) \circ \sigma_D(\eta) = 0$ ist, mit anderen Worten, daß für jedes $E_{j,x}$ das Bild der ankommenden Abbildung $\sigma_D(\eta)$ im Kern der weggehenden enthalten ist.

Der Komplex (4) heißt elliptisch, wenn die Sequenz (4') für alle $\eta \neq 0$ exakt ist, d. h. wenn das Bild der ankommenden Abbildung $\sigma_D(\eta)$ gleich dem Kern der weggehenden ist. Die Elliptizitätsbedingung im § 3 entspricht dem Fall $E_0 = E, E_1 = F$ und $l = 1$.

Eine Verallgemeinerung des fundamentalen Satzes von § 3 auf elliptische Komplexe über kompakten Mannigfaltigkeiten besagt:

Die „Cohomologiegruppen“ $H^i(E) = \text{Kern}(D_j) / \text{Bild}(D_{j-1})$ des Kettenkomplexes (4) sind endlich-dimensionale komplexe Vektorräume.

Als Index (man könnte auch sagen „Euler-Poincarésche“ Charakteristik) des elliptischen Komplexes E wird definiert

$$\text{ind}(E) = \sum_{i=0}^l (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(E).$$

Der Indexsatz von § 5 kann für elliptische Komplexe formuliert und wiesen werden. Das ist keine tiefe, sondern mehr eine formale Verallgemeinerung.

§ 7. *Ein einfaches Beispiel eines elliptischen Komplexes.* Eine p -Form ω im Sinne des alternierenden Kalküls von E. Cartan über der n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist bezüglich lokaler Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ wie folgt zu schreiben:

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p},$$

wo die Koeffizienten differenzierbare komplexwertige Funktionen sind

Die E. Cartansche Ableitung d ordnet jeder p -Form ω eine $(p+1)$ -Form $d\omega$ zu. Es gibt komplexe Vektorraum-Bündel E_p ($p = 0, 1, \dots, n$) über X (nämlich $E_p = L^p_a(T, \mathbb{C})$ = Vektorraum-Bündel, dessen Faser in $x \in X$ gleich dem Vektorraum der p -fachen alternierenden komplexwertigen Multilinearformen auf den Tangentialraum T_x ist), so daß ΓE_p $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller p -Formen ist.

$$0 \longrightarrow \Gamma E_0 \xrightarrow{d} \Gamma E_1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Gamma E_n \longrightarrow 0$$

ist der elliptische Komplex, der in den üblichen Vektoranalysis-Vorlesungen vorkommt (z. B. [14], [25]), und $dd = 0$ ist die Formel, die man auch mehrere Formeln wie $\text{rot grad} = 0$ und $\text{div rot} = 0$ umschreiben kann. Nach den Sätzen von de Rham ist in dem Fall, den wir hier besprechen

$$H^i(E) \cong H^i(X, \mathbb{C}).$$

Dabei ist $H^i(X, \mathbb{C})$ die übliche Cohomologiegruppe mit komplexen Koeffizienten. Sie ist ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum, wenn X kompakt ist, und $\text{ind}(E)$ ist dann die klassische Euler-Poincarésche Charakteristik von X .

§ 8. *Der Riemann-Rochsche Satz für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten.* Der elliptische Komplex von § 7 benötigt zu seiner Definition nur die differenzierbare Struktur von X , sind weitere Strukturen auf X gegeben, ermöglichen diese häufig die Einführung anderer elliptischer Operatoren.

([6], [10], [26]) und damit Anwendungen des Atiyah–Singerschen Indexsatzes. Wir müssen uns in diesem Vortrag auf die komplexe Struktur beschränken: Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n , dann ist X auch eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. Für $n = 1$ haben wir es mit den in § 4 erwähnten Riemannschen Flächen zu tun.

Auf X betrachten wir Differentialformen, die sich bezüglich lokaler komplexer Koordinaten $z_1, \dots, z_n$ so schreiben:

$$(5) \quad s = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} (d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p}) \cdot [dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n]^r,$$

wo r eine gegebene ganze Zahl ist. Die Koeffizienten sind komplexwertige differenzierbare Funktionen. Es handelt sich also um alternierende p -Formen in den $d\bar{z}_i$ (Wirtinger-Kalkül!), aber bei holomorphen Koordinatenwechseln $z_i = z_i(t_1, \dots, t_n)$ kommt noch die Multiplikation mit der r -ten Potenz der Determinante der Matrix $\left(\frac{\partial z_i}{\partial t_j}\right)$ hinzu.

Es gibt ein differenzierbares komplexes Vektorraum-Bündel $E_{p,r}$ über X , so daß $\Gamma E_{p,r}$ gerade der Vektorraum der auf X definierten Differentialformen der Gestalt (5) ist. Wie in § 4 führen wir den Differentialoperator

$$\bar{\partial}: \Gamma E_{p,r} \rightarrow \Gamma E_{p+1,r}$$

ein. Ist $s \in E_{p,r}$ bezüglich lokaler Koordinaten $z_1, \dots, z_n$ wie in (5) gegeben, dann ist

$$\bar{\partial}s = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \bar{\partial}a_{i_1 \dots i_p} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_p} \cdot [dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n]^r,$$

wobei

$$\bar{\partial}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i. \text{ Es ist } \bar{\partial}\bar{\partial} = 0.$$

Man erhält einen elliptischen Komplex (von linearen Differentialoperatoren der Ordnung 1)

$$(6) \quad 0 \longrightarrow \Gamma E_{0,r} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma E_{1,r} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma E_{n,r} \longrightarrow 0,$$

dessen Cohomologiegruppen wir mit $H^i(X, r)$ bezeichnen wollen. Wenn

X kompakt ist, dann sind die $H^i(X, r)$ endlich-dimensionale komplexe Vektorräume (§ 6). Die Elemente von

$$(7) \quad H^0(X, r) = \{s \mid s \in \Gamma E_{0,r} \text{ und } \bar{\partial}s = 0\}$$

sind die holomorphen Formen auf X vom Gewicht r . Sie lassen sich also so schreiben

$$a(z_1, \dots, z_n) [dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n]^r,$$

a eine holomorphe Funktion. $\bar{\partial}s = 0$ (siehe (7)) ist die Cauchy–Riemannsche Differentialgleichung, deren Gültigkeit mit der Holomorphie von a damit von s äquivalent ist.

Für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist der Index des elliptischen Komplexes (6) definiert, wir bezeichnen ihn mit $\chi(X, r)$.

$$\chi(X, r) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, r).$$

Der Indexsatz von Atiyah–Singer ermöglicht die Berechnung von $\chi(X, r)$ und das ergibt den Satz von Riemann–Roch für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten (hier nur für die r -te Potenz des kanonischen Geradenbündels formuliert). Man erhält die Formel für $\chi(X, r)$, die ich in [18] den Fall algebraischer Mannigfaltigkeiten bewiesen habe (für $n = 1$ siehe § 4). Es war lange ein offenes Problem, ob die Resultate von auch für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten gelten, vgl. [17].

In der komplexen Analysis interessiert man sich hauptsächlich für den Vektorraum $H^0(X, r)$ der holomorphen Formen vom Gewicht r . Seine Dimension ist gleich $\chi(X, r)$, wenn die Vektorräume $H^i(X, r)$ für $i > 0$ nulldimensional sind. Das Verschwinden der $H^i(X, r)$ kann oft mit dem Kriterium von Kodaira nachgewiesen werden ([21], siehe auch [19]). Ein solcher Fall wird uns nachher noch beschäftigen (§ 14).

Die in § 7 und § 8 besprochenen elliptischen Komplexe gehören zur Auflösung gewisser Garben, hierzu vgl. z. B. [18].

§ 9. *Der Fixpunktsatz von Atiyah–Bott.* Es sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $g: X \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung endlicher Ordnung d , das heißt die d -fache Iteration von g soll gleich der Identität von X sein, $g^d = Id$. Ein Punkt $x \in X$ heißt Fixpunkt von g , wenn $gx = x$. Wir betrachten die Menge $\text{Fix}(g)$ aller Fixpunkte.

endliche Ordnung hat, kann man bekanntlich in einer geeigneten Umgebung jedes Fixpunktes lokale Koordinaten von X so einführen, daß g linear operiert, und deshalb ist $\text{Fix}(g)$ eine kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit von X , die im allgemeinen nicht zusammenhängend ist und deren Zusammenhangskomponenten von verschiedener Dimension sein können. Wenn g die Identität ist, dann ist natürlich $\text{Fix}(g) = X$. Es kann auch sein, daß $\text{Fix}(g)$ nur aus endlich vielen Punkten besteht, also eine nulldimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Wegen der Holomorphie von g ist für eine Differentialform s vom Typ (5) g^*s wieder von der gleichen Art, d. h. g^* operiert auf $\Gamma E_{p,r}$ als $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma E_{0,r} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \Gamma E_{1,r} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma E_{n,r} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g^* & & \downarrow g^* & & \downarrow g^* \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma E_{0,r} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \Gamma E_{1,r} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma E_{n,r} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Folglich induziert g^* eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$g^*: H^i(X, r) \rightarrow H^i(X, r),$$

und man kann von der Spur von $g^*|H^i(X, r)$ sprechen, da $H^i(X, r)$ ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum ist.

Atiyah und Bott ordnen jeder Zusammenhangskomponente $\text{Fix}(g)_j$ von $\text{Fix}(g)$ eine komplexe Zahl $\nu(\text{Fix}(g)_j)$ zu und beweisen

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{Spur } g^*|H^i(X, r) = \sum_j \nu(\text{Fix}(g)_j).$$

Hier indiziert j also die endlich-vielen Zusammenhangskomponenten von $\text{Fix}(g)$. Die komplexe Zahl $\nu(\text{Fix}(g)_j)$ hängt natürlich auch von r ab.

Für die Experten werde ich später die Definition von $\nu(\text{Fix}(g)_j)$ angeben. Zunächst beschränke ich mich auf den Fall, daß $\text{Fix}(g)_j$ ein einziger Punkt a ist. In diesem Fall ist

$$(9) \quad \nu(a) = \frac{(\det g'(a))^r}{\det(1 - g'(a))},$$

$g'(a): T_a \rightarrow T_a$ ist die komplexe Ableitung ($\mathbb{C}$ -lineare Approximation) von

g in a , die ein Endomorphismus des komplexen tangentiellen Vektorraums T_a von X in a ist. 1 bezeichnet hier den identischen Endomorphismus T_a , und $\det(1 - g'(a))$ verschwindet nicht, da a isolierter Fixpunkt und deshalb $g'(a)$ nicht den Eigenwert 1 hat.

Für den Fall, daß g nur isolierte Fixpunkte hat, nimmt (8) die Form

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{Spur } g^*|H^i(X, r) = \sum_{a \in \text{Fix}(g)} \nu(a)$$

an, wo $\nu(a)$ die in (9) angegebene komplexe Zahl ist.

Wenn g die Identität, also $\text{Fix}(g) = X$ ist, dann geht der Atiyah-Bott Fixpunktsatz (8) in den in § 8 erwähnten Riemann-Rochschen Satz über. $\text{Spur } g^*|H^i(X, r)$ ist für $g = \text{Identität}$ gleich der Dimension des Vektorraumes $H^i(X, r)$.

Atiyah und Bott beweisen ihren Fixpunktsatz nicht nur für komplexe Mannigfaltigkeiten, sondern allgemein für eine differenzierbare Abbildung g endlicher Ordnung, die auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X operiert und einen auf X gegebenen elliptischen Komplex E „respektiert“. Man hat dann eine Formel vom Typus (8), die $g = \text{Identität}$ in dem Indexsatz (§ 6) übergeht. Wählt man z. B. den elliptischen Komplex von § 7, dann ergibt sich:

Es sei X eine kompakte n -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. $g: X \rightarrow X$ eine differenzierbare Abbildung endlicher Ordnung. g^* operiert auf den üblichen Cohomologie-Gruppen $H^i(X, \mathbb{C})$. Die Fixpunktmenge $\text{Fix}(g)$ ist (i. a. nicht-zusammenhängende und gemischt-dimensionale) Untermannigfaltigkeit von X . Es sei $e(\text{Fix}(g))$ die klassische Euler-Poincarésche Charakteristik von $\text{Fix}(g)$. Dann gilt

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{Spur } g^*|H^i(X, \mathbb{C}) = e(\text{Fix}(g)).$$

Wenn $\text{Fix}(g)$ aus endlich-vielen Punkten besteht, dann ist $e(\text{Fix}(g))$ gleich der Anzahl dieser Punkte und (11) ist ein Spezialfall des Lefschetz Fixpunktsatzes ([20], [24]). (Die Multiplizitäten der isolierten Fixpunkte im Sinne des Lefschetz Fixpunktsatzes sind bei einer differenzierbaren Abbildung endlicher Ordnung automatisch gleich $+1$.) Dold mir mitteilte, kann man aus seiner Arbeit [10a] leicht die Formel auch für höher-dimensionale Fixpunktmenge gewinnen.

Ich muß gestehen, daß ich einen Beweis für den Atiyah-Bottischen Fixpunktsatz (8) nicht kenne. Der Beweis kann ja auch nicht sehr einfach sein, da der Indexsatz als Spezialfall ($g = \text{Identität}$) enthalten ist. Er erfolgt mit Hilfe einer neuen von Atiyah und Singer entwickelten Methode, die im Gegensatz zu [10] und [26] ohne Verwendung von Cobordismen-Theorie verläuft, sondern Einbettungen in die Sphäre benutzt. An Literatur gibt es bis heute nur eine Seminararbeit [5], die topologische Vorbereitungen zum Fixpunktsatz und insbesondere die Definition der Zahlen $\nu(\text{Fix}(g)_i)$ enthält.

Für den Fall, daß nur isolierte Fixpunkte auftreten, habe ich ein (noch nicht veröffentlichtes) Manuskript von Atiyah-Bott [3] zur Verfügung, und es wird demnächst ein Research announcement [4] erscheinen. In diesem Fall braucht man nicht vorauszusetzen, daß g endliche Ordnung hat, es genügt anzunehmen, daß jeder Punkt $a \in \text{Fix}(g)$ transversal ist, d. h. der Endomorphismus im Tangentialraum von a keinen Eigenwert hat, der gleich 1 ist. (Es gilt also bereits dann Formel (10) mit der Definition (9) von $\nu(a)$; entsprechend für andere elliptische Komplexe.) Der Beweis des Fixpunktsatzes für den Fall isolierter Fixpunkte ([3], [4]) ist wesentlich einfacher und kann mit anderen Methoden erfolgen, als sie in den Beweisen des Indexsatzes vorkommen.

§ 10. *Ein Beispiel.* Der Atiyah-Bottische Fixpunktsatz ist für kompakte Riemannsche Flächen im Falle isolierter transversaler Fixpunkte in bekannten Sätzen über algebraische Funktionen enthalten ([13], p. 278).

Sei etwa X die Riemannsche Fläche der Funktion

$$(12) \quad w = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{2p+2})}.$$

Die komplexen Zahlen a_j sollen disjunkt und $p \geq 2$ sein. X ist hyperelliptisch vom Geschlecht p und hat $2p + 2$ Weierstraßpunkte [30], nämlich gerade die Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \dots, a_{2p+2} \in X$.

Es sei g die „Vertauschung der Blätter“ (Vorzeichenwechsel der Wurzel (12)). Dann ist $g: X \rightarrow X$ eine biholomorphe Involution ($g^2 = \text{Id}$) mit den Fixpunkten $a_1, \dots, a_{2p+2}$. Für $r \geq 2$ ist $H^1(X, r) = 0$. Es folgt (siehe Formeln (9), (10) in § 9)

$$\text{Spur } g^*|H^0(X, r) = (2p + 2) \cdot \frac{(-1)^r}{1 - (-1)}.$$

Nach § 4 (1) kennt man die Dimension von $H^0(X, r)$, also hat der Vektorraum der holomorphen Formen vom Gewicht r , die unter g^* invariant bleiben (Eigenraum von $g^*|H^0(X, r)$ zum Eigenwert 1), die Dimension

$$\frac{1}{2}((2r - 1)(p - 1) + (-1)^r(p + 1))$$

§ 11. *Die Berechnung der Atiyah-Bottischen Zahlen der Fixkomponenten.* Sei $g: X \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung endlicher Ordnung d der kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X . Es sei $Y = \text{Fix}(g)_i$ eine Zusammenhangskomponente der Fixpunktmenge $\text{Fix}(g)$. Also ist Y eine zusammenhängende kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit von X der Dimension k ($0 \leq k \leq n$). Für irgendeinen Punkt $y \in Y$ hat $g'(y): T_y \rightarrow T_y$ Eigenwerte $\mu \in \mathbb{C}$, die d -te Einheitswurzeln sind und alle mit einer bestimmten Vielfachheit n_μ auftreten, die nicht von y abhängt. Die Vielfachheit n_μ ist gleich der Dimension von Y . Für jede d -te Einheitswurzel μ ist Eigenraum $E_{\mu, y} \subset T_y$ definiert. Die Vektorräume $E_{\mu, y}$ ($y \in Y$) bilden ein Vektorraum-Bündel E_μ über Y . Natürlich ist E_1 das komplexe Tangentialbündel von Y , während die direkte Summe der Vektorraum-Bündel E_μ mit $\mu \neq 1$ das Normalbündel von Y in X ist. Wir betrachten die dualen Bündel E_μ^* und ihre äußeren Potenzen $\Lambda^i E_\mu^*$ und deren Chernschen Charakter ([18], 3. Aufl., § 10.1)

$$ch(\Lambda^i E_\mu^*) \in H^*(Y, \mathbb{C}).$$

Die 0-dimensionale Komponente von

$$(13) \quad ch(\Lambda_{-\mu}(E_\mu^*)) \stackrel{\text{Det}}{=} \sum_{i=1}^{n_\mu} (-\mu)^i ch(\Lambda^i E_\mu^*), \quad n_\mu = \text{Faserdimension von } E_\mu$$

ist gleich $(1 - \mu)^{n_\mu}$, also $\neq 0$ für $\mu \neq 1$. Deshalb ist $ch(\Lambda_{-\mu}(E_\mu^*))$ invertierbares Element von $H^*(Y, \mathbb{C})$.

Es sei $td(Y) \in H^*(Y, \mathbb{C})$ die totale Todd'sche Klasse der komplexen Mannigfaltigkeit Y , siehe ([18], 3. Aufl., § 10.1), und $c_1 \in H^2(Y, \mathbb{C})$ die Einschränkung der ersten Chernschen Klasse von X auf Y . Dann berechnet sich die komplexe Zahl $\nu(Y) = \nu(\text{Fix}(g)_i)$ in § 9 (8) wie folgt (beachte die Abhängigkeit von r):

$$(14) \quad \begin{aligned} \nu(Y) &= \nu(\text{Fix}(g)_i) \\ &= (\det g'(y_0))^r \left(\exp(-rc_1) td(Y) \cdot \prod_{\mu \neq 1} \frac{1}{ch(\Lambda_{-\mu}(E_\mu^*))} \right) [\end{aligned}$$

($y_0 \in Y$ kann beliebig gewählt werden; die Zahl $\det g'(y_0)$ hängt nicht von y_0 ab.) Die Formel ist leicht zu behalten, wenn man bedenkt, daß die Todd'sche Klasse des universellen komplexen Vektorraum-Bündels der Faserdimension k so geschrieben werden kann:

$$td(\xi) = \frac{c_k(\xi)}{cb(\Lambda_{-1}(\xi^*))},$$

und daß das komplexe Tangentialbündel von Y gleich E_1 ist.

Wenn g die Identität und damit $\text{Fix}(g) = X$, dann ergibt § 9 (8)

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_c H^i(X, r) = (\exp(-rc_1) td(X)) [X],$$

das ist der auf komplexe Mannigfaltigkeiten verallgemeinerte Satz von Riemann-Roch (für die r -te Potenz des kanonischen Geradenbündels von X), vgl. § 8.

Wenn $Y = \{y_0\}$ ein isolierter Fixpunkt ist, dann geht (14) in § 9 (9) über.

§ 12. *Ein Beispiel.* Im $\mathbb{C}^n$ betrachten wir die lineare Selbstabbildung $z'_i = \mu_i z_i$ ($1 \leq i \leq n$), wobei die ersten k der μ_i gleich 1, die übrigen μ_i aber verschieden von 1 sind. (Es ist $0 \leq k \leq n$). Diese lineare Abbildung kann auf den komplexen projektiven Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, der $\mathbb{C}^n$ als affinen Teilraum enthält, erweitert werden, die Erweiterung heiße g .

Nehmen wir an, daß alle μ_i Einheitswurzeln sind, g also eine endliche Ordnung hat. Dann sind die Voraussetzungen von § 9 erfüllt.

Eine Komponente von $\text{Fix}(g)$ ist der projektive Unterraum $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ von $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, der den durch $z_{k+1} = \dots = z_n = 0$ definierten affinen Teilraum $\mathbb{C}^k$ hat. Für diese Komponente soll die in (14) definierte Zahl berechnet werden. In $H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ gibt es das übliche positive erzeugende Element x mit $x^n [\mathbb{P}_n(\mathbb{C})] = 1$.

Für distinkte μ_i ($i > k$) sind alle $E_{\mu_i}^*$ (siehe § 11) zum Hopfschen Geradenbündel isomorph. Wenn μ_i mit der Vielfachheit n_i auftritt, ist $E_{\mu_i}^*$ zur direkten Summe von n_i Hopfschen Geradenbündeln isomorph. Es ergibt sich:

$$(15) \quad \nu(\mathbb{P}_k(\mathbb{C})) = \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \right)^r \left(\exp(-r(n+1)x) \cdot \left(\frac{x}{1-e^{-x}} \right)^{k+1} \cdot \prod_{i=k+1}^n \frac{1}{1-\mu_i e^{-x}} \right) [\mathbb{P}_k(\mathbb{C})].$$

Da auch $x^k [\mathbb{P}_k(\mathbb{C})] = 1$, ist $\nu(\mathbb{P}_k(\mathbb{C}))$ gleich dem Koeffizienten von x^k in der formalen Potenzreihe in x die in (15) vor $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$ steht. Eine leichte Residuumberechnung wie in [18], § 1, mit Hilfe der Substitution $z = 1 - e^{-x}$, $dz = (1 - z) dx$ ergibt,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu(\mathbb{P}_k(\mathbb{C})) \text{ ist der Koeffizient von } z^k \text{ in der folgenden formalen} \\ \text{Potenzreihe in } z: \\ \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \right)^r \cdot (1 - z)^{r(n+1)-1} \cdot \prod_{i=k+1}^n \frac{1}{1 - \mu_i(1 - z)} \end{array} \right.$$

Man sieht, daß $\nu(\mathbb{P}_k(\mathbb{C})) : \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \right)^r$ ein Polynom in r vom Grade k

Für $r = 0$ ist $\dim H^i(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), r) = 0$ für $i > 0$, während $H^0(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), 0)$ Vektorraum der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ist. Diese Funktionen sind alle konstant. Auf $H^0(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), 0) \cong \mathbb{C}$ operiert g^* als Identität, und muß also die Summe der ν für die verschiedenen Fixkomponenten von g im Falle $r = 0$ gleich 1 sein, eine Tatsache, die der Zuhörer kontrollieren möge.

§ 13. *Beschränkte homogene symmetrische Gebiete und diskontinuierliche Gruppen.* Es sei B ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet des im Sinne von E. Cartan ([9], [7], [8], [16]). Man denke beispielsweise an

$$B = \{z \mid z \in \mathbb{C}^n \text{ und } |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}.$$

Es sei Γ eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von B . Jedes Element γ von Γ ist also eine biholomorphe Abbildung $\gamma: B \rightarrow B$. Der Quotientenbereich $\Gamma \backslash B$ wird erhalten, wenn man $z', z \in B$ identifiziert sobald es ein $\gamma \in \Gamma$ mit $z' = \gamma z$ gibt. Wir setzen voraus, daß $\Gamma \backslash B$ kompakt ist. Nun sei Γ_0 eine Untergruppe von Γ mit folgenden Eigenschaften

- I) Γ_0 ist Normalteiler von Γ
- II) Die Gruppe Γ/Γ_0 ist endlich.
- III) Γ_0 operiert frei auf B , d. h. kein Element in Γ_0 , abgesehen von der Identität, hat einen Fixpunkt.

Dann ist $\Gamma_0 \backslash B$ eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, auf der Γ/Γ_0 operiert. Jedes Element $\alpha \in \Gamma/\Gamma_0$ liefert eine holomorphe Abbildung

$\alpha: \Gamma_0 \backslash B \rightarrow \Gamma_0 \backslash B$ von endlicher Ordnung, auf der wir also den Atiyah-Bottischen Fixpunktsatz anwenden können. (Über die Existenz von Gruppen Γ und Γ_0 siehe § 14.)

Für jeden Automorphismus γ von B , der Fixpunkte hat, ist

$$\text{Fix}(\gamma) = \{x \mid x \in B \text{ und } \gamma x = x\}$$

zusammenhängend und selbst ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet: Ist $x \in \text{Fix}(\gamma)$, dann kann B als konvexe offene Menge so in den $\mathbb{C}^n$ eingebettet werden, daß $x = 0 \in \mathbb{C}^n$ und γ linear operiert und daß ferner die Multiplikation mit -1 des $\mathbb{C}^n$ die Symmetrie von B in x ist. Alle diese Symmetrien sind mit γ vertauschbar und erzeugen eine Gruppe von Automorphismen von $\text{Fix}(\gamma)$, die auf $\text{Fix}(\gamma)$ transitiv operiert ([9], p. 134). Der Zentralisator G_γ von γ in der Gruppe der Automorphismen von B operiert also transitiv auf $\text{Fix}(\gamma)$. Nun zurück zu den diskontinuierlichen Gruppen Γ und Γ_0 .

(17) Wenn die Elemente γ_1, γ_2 von Γ in derselben Nebenklasse mod Γ_0 liegen und wenn $\text{Fix}(\gamma_1) \cap \text{Fix}(\gamma_2) \neq \emptyset$, dann $\gamma_1 = \gamma_2$.

Es sei $\pi: B \rightarrow \Gamma_0 \backslash B$ die natürliche Projektion. Für $\alpha \in \Gamma/\Gamma_0$ müssen wir $\text{Fix}(\alpha) = \{y \mid y \in \Gamma_0 \backslash B \text{ und } \alpha y = y\}$ bestimmen. Es ist klar, daß

$$\text{Fix}(\alpha) = \bigcup_{\gamma \in \alpha} \pi \text{Fix}(\gamma).$$

Nun ist $\pi \text{Fix}(\gamma_1) \cap \pi \text{Fix}(\gamma_2)$ genau dann nicht leer, wenn es ein $\gamma_0 \in \Gamma_0$ gibt mit $\text{Fix}(\gamma_1) \cap \gamma_0 \text{Fix}(\gamma_2) \neq \emptyset$. Es gilt

$$(18) \quad \gamma_0 \text{Fix}(\gamma_2) = \text{Fix}(\gamma_0 \gamma_2 \gamma_0^{-1}).$$

Wegen (17) und (18) ist $\pi \text{Fix}(\gamma_1) \cap \pi \text{Fix}(\gamma_2)$ genau dann nicht leer, wenn $\text{Fix}(\gamma_1)$, $\text{Fix}(\gamma_2)$ nicht leer sind und γ_1, γ_2 konjugiert in Γ vermöge eines Elementes von Γ_0 sind. $\pi \text{Fix}(\gamma_1)$ und $\pi \text{Fix}(\gamma_2)$ sind dann gleich. $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ kommen genau dann in dieselbe Γ_0 -Konjugationsklasse, wenn es $\gamma_0 \in \Gamma_0$ mit $\gamma_1 = \gamma_0 \gamma_2 \gamma_0^{-1}$ gibt. Eine Γ_0 -Konjugationsklasse ist stets in einer Nebenklasse von Γ mod Γ_0 enthalten.

Die vorstehenden Überlegungen führen zu folgendem Resultat.

(19) Für $\alpha \in \Gamma/\Gamma_0$ ist die Untermannigfaltigkeit $\text{Fix}(\alpha)$ von $\Gamma_0 \backslash B$ disjunkt Vereinigung von zusammenhängenden Untermannigfaltigkeiten $\pi \text{Fix}(\gamma_i)$, $i = 1, \dots, r_\alpha$, wo γ_i ein Repräsentantensystem für die endlich vielen 1 Konjugationsklassen von Γ durchläuft, die in α enthalten sind und die Elemente in B Fixpunkte haben.

Wie erwähnt, ist $\text{Fix}(\gamma_i)$ selbst ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet. Wir wollen die kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\pi \text{Fix}(\gamma_i)$ als Quotientenbereich von $\text{Fix}(\gamma_i)$ darstellen.

Es sei Γ_γ der Zentralisator von γ in Γ und $\Gamma_{0\gamma} = \Gamma_0 \cap \Gamma_\gamma$. Dann operiert Γ_{γ_i} auf $\text{Fix}(\gamma_i)$. Die Gruppe $\Gamma_{0\gamma_i}$ operiert frei auf $\text{Fix}(\gamma_i)$, und es ist leicht zu sehen ((17), (18)), daß

$$\pi \text{Fix}(\gamma_i) \text{ und } \Gamma_{0\gamma_i} \backslash \text{Fix}(\gamma_i)$$

in natürlicher Weise zu identifizieren sind.

Nun noch ein rein gruppentheoretisches Lemma, das wir bei der Anwendung des Atiyah-Bottischen Fixpunktsatzes benutzen müssen.

β sei eine Konjugationsklasse von Γ . Dann liegen in β endlich-viele Γ_0 -Konjugationsklassen. Für diese seien die Elemente δ_i von Γ ($i = 1, \dots, s_\beta$) ein vollständiges Repräsentantensystem. Dann gilt folgende Identität

$$(20) \quad |\Gamma/\Gamma_0| = \sum_{i=1}^{s_\beta} |\Gamma_{\delta_i}/\Gamma_0 \cap \Gamma_{\delta_i}|,$$

wo die Absolutstriche Gruppenordnungen andeuten und Γ_{δ_i} wie bisher der Zentralisator von δ_i in Γ ist.

§ 14. Automorphe Formen. Es sei wieder B ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet und Γ eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von B derart, daß $\Gamma \backslash B$ kompakt ist. Eine holomorphe Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ heißt automorphe Form bzgl. Γ vom Gewicht r , wenn für $a \in B$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt:

$$j_\gamma(z)^r f(\gamma z) = f(z),$$

wo $j_\gamma(z)$ die Funktionaldeterminante der Abbildung $\gamma: B \rightarrow B$ an der Stelle z ist. Diese Funktionaldeterminante ist wohldefiniert, da B offene Teilmenge eines $\mathbb{C}^n$ ist. Die automorphen Formen vom Gewicht r bilden

einen Vektorraum über $\mathbb{C}$, den wir mit $H^0(B, \Gamma, r)$ bezeichnen. Es ist ein klassisches Problem, die Dimension von $H^0(B, \Gamma, r)$ zu berechnen. Langlands hat in [23] für diese Dimension mit Hilfe der Selbergschen Resultate (siehe etwa [27]) und gestützt auf Arbeiten von Harish-Chandra hierfür eine Formel angegeben, die für frei operierendes Γ mit den Formeln von Selberg und dem Vortragenden [19] übereinstimmt.

A. Borel hat in [8] bewiesen, daß es stets diskontinuierliche Gruppen Γ von Automorphismen von B mit kompaktem Quotientenbereich gibt und daß zu jeder solchen Gruppe Γ eine Untergruppe Γ_0 mit den Eigenschaften I), II), III) von § 13 existiert. Borel hat bei meinem Besuch in Princeton im April 1965, als es den Atiyah-Bottischen Fixpunktsatz für Abbildungen endlicher Ordnung und beliebig-dimensionalen Fixpunktmengen noch nicht gab, doch schon angeregt, daß man den zu erwartenden Fixpunktsatz und seinen Satz über die Existenz von Γ_0 verwenden sollte, um die Langlandssche Formel zu erhalten.

Man geht wie folgt vor:

$H^0(B, \Gamma_0, r)$, der Vektorraum der automorphen Formen vom Gewicht r bzgl. Γ_0 , ist kanonisch isomorph zu dem Vektorraum $H^0(\Gamma_0 \backslash B, r)$, den wir in § 8 für eine beliebige kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X eingeführt haben. Hier ist $X = \Gamma_0 \backslash B$. Der Vektorraum $H^0(\Gamma_0 \backslash B, r)$ ist endlich-dimensional. Die Gruppe Γ/Γ_0 operiert auf $\Gamma_0 \backslash B$, deshalb auf dem Vektorraum $H^0(\Gamma_0 \backslash B, r)$, und $H^0(B, \Gamma, r)$ ist der Teilraum der Elemente von $H^0(\Gamma_0 \backslash B, r)$, die bei allen Operationen von Γ/Γ_0 festbleiben. Nach einer einfachen Tatsache über Darstellungen endlicher Gruppen ist

$$(21) \quad \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Gamma, r) = \frac{1}{|\Gamma/\Gamma_0|} \sum_{\alpha \in \Gamma/\Gamma_0} \text{Spur } \alpha^* | H^0(\Gamma_0 \backslash B, r).$$

Für $r \geq 2$ ist nach Kodaira $\dim_{\mathbb{C}} H^i(\Gamma_0 \backslash B, r) = 0$ für $i > 0$ (siehe [21], [19]) und deshalb läßt sich $\text{Spur } \alpha^* | H^0(\Gamma_0 \backslash B, r)$ nach dem Fixpunktsatz von Atiyah-Bott berechnen (§ 9 (8)). Damit ergibt sich wegen (21) eine Formel für die gesuchte Zahl $\dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Gamma, r)$ (für $r \geq 2$). Natürlich wird das Endresultat von der Auswahl der Untergruppe Γ_0 unabhängig sein.

§ 15. *Die Formel von Langlands.* Viele der im folgenden vorkommenden kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten X sind Quotientenbereiche beschränkter homogener symmetrischer Gebiete. Deshalb haben sie ein bis

auf einen Faktor eindeutig bestimmtes natürliches „Volumenelement“. Das Volumen möge immer so normiert sein, daß es gleich der klassisch Euler-Poincaréschen Charakteristik $e(X)$ ist. Man verwendet also die Volumenform die Differentialform, die aus der homogenen Metrik des beschränkten Gebietes gewonnen wird und die höchstdimensionale Chernsche Klasse liefert (Gauß-Bonnet, Allendoerfer-Weil, Chern). Das „Volumen“ $e(X)$ kann negativ sein. Wenn $n = \dim X$, dann ist $(-1)^n e(X) > 0$ vgl. [19].

Zur Auswertung von (21) muß für jede Zusammenhangskomponente von $\text{Fix}(\alpha) \subset \Gamma_0 \backslash B$ für $\alpha \in \Gamma/\Gamma_0$ gemäß § 11 (14) eine Atiyah-Bottsche Zahl berechnet werden (r fest gewählt). (21) ist wegen (19) als Summe über die endlich-vielen ausgezeichneten Γ_0 -Konjugationsklassen von Γ anzusehen. (Eine Γ_0 -Konjugationsklasse von Γ soll ausgezeichnet heißen, wenn ihre Elemente Fixpunkte in B haben.)

Für die Berechnung der Atiyah-Bottschen Zahl einer ausgezeichneten Γ_0 -Konjugationsklasse (repräsentiert durch $\gamma \in \Gamma$) betrachten wir $\text{Fix}(\gamma) \subset B$. Da Γ_0 frei auf B operiert, hat γ endliche Ordnung in Γ , was wegen der Diskontinuität ohnehin klar ist. Das Tangentialbündel von B ist beschränkt auf $\text{Fix}(\gamma)$ spaltet auf; in jedem Punkt $x \in \text{Fix}(\gamma)$ entspricht dies der Aufspaltung des Tangentialraumes von B in x in die Eigenräume der Linearisierung von γ , wobei der Tangentialraum von $\text{Fix}(\gamma)$ der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist. Wenn nun γ, γ' ausgezeichnete Γ_0 -Konjugationsklassen repräsentieren, aber γ, γ' konjugiert in Γ sind, dann ist das Operieren von γ in der Umgebung von $\text{Fix}(\gamma)$ isomorph zu dem Operieren von γ' in der Umgebung von $\text{Fix}(\gamma')$. Wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, folgt aus Homogenitätsgründen (transitives Operieren von γ bzw. $G_{\gamma'}$ auf $\text{Fix}(\gamma)$ bzw. $\text{Fix}(\gamma')$, siehe § 13), daß die Atiyah-Bottschen Zahlen für $\pi \text{Fix}(\gamma)$ und $\pi \text{Fix}(\gamma')$ sich wie die Volumina von $\pi \text{Fix}(\gamma)$ und $\pi \text{Fix}(\gamma')$ verhalten.

Wir definieren nun für eine ausgezeichnete Γ_0 -Konjugationsklasse, repräsentiert durch γ , die Zahl $a_r(\gamma)$ als die Atiyah-Bottsche Zahl für die Fixkomponente $\pi \text{Fix}(\gamma) \subset \Gamma_0 \backslash B$ der durch die Nebenklasse von γ mod gegebenen Abbildung $\Gamma_0 \backslash B \rightarrow \Gamma_0 \backslash B$ dividiert durch die Euler-Poincarésche Charakteristik von $\pi \text{Fix}(\gamma)$. Wir haben schon bemerkt, daß $a_r(\gamma)$ nur von der Konjugationsklasse von γ in Γ abhängt. $a_r(\gamma)$ hängt auch nicht von der Auswahl von Γ_0 ab.

Eine Konjugationsklasse $\{\gamma\}$ von Γ heißt ausgezeichnet, wenn ihre Elemente Fixpunkte in B haben. Es gibt nur endlich-viele ausgezeichnete

Konjugationsklassen, da es sogar nur endlich-viele ausgezeichnete Γ_0 -Konjugationsklassen gibt. Γ_γ (siehe § 13) operiert auf $\text{Fix}(\gamma)$, aber nicht effektiv. Die Anzahl der Elemente von Γ_γ , die trivial auf $\text{Fix}(\gamma)$ operieren, ist endlich und werde mit $m(\gamma)$ bezeichnet. $\Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma)$ ist ein kompakter komplexer Raum, auch er hat ein Volumen (kompatibel mit der am Anfang des § besprochenen Normierung). Dieses Volumen wollen wir virtuelle Euler-Poincarésche Charakteristik $e(\Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma))$ nennen. Die Fixkomponente $\pi \text{Fix}(\gamma) \subset \Gamma_0 \backslash B$ ist gleich $\Gamma_0 \cap \Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma)$. Sie ist eine verzweigte Überlagerung von $\Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma)$ vom Grade

$$|\Gamma_\gamma / \Gamma_0 \cap \Gamma_\gamma| : m(\gamma),$$

und es ist

$$(22) \quad e(\Gamma_0 \cap \Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma)) = \frac{|\Gamma_\gamma / \Gamma_0 \cap \Gamma_\gamma|}{m(\gamma)} \cdot e(\Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma)).$$

Die Formel (21) ergibt für $r \geq 2$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Gamma, r) = \frac{1}{|\Gamma / \Gamma_0|} \sum_{\gamma} e(\Gamma_0 \cap \Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma)) \cdot a_r(\gamma),$$

wobei über alle ausgezeichneten Γ_0 -Konjugationsklassen zu summieren ist, γ also ein vollständiges Repräsentantensystem für diese durchläuft.

In (21) waren die ausgezeichneten Γ_0 -Konjugationsklassen nach Nebenklassen mod Γ_0 zusammengefaßt, jetzt fassen wir sie nach Konjugationsklassen in Γ zusammen und erhalten wegen (22)

$$(23) \quad \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Gamma, r) = \frac{1}{|\Gamma / \Gamma_0|} \sum_{\varrho} \sum_{\gamma} e(\Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma)) \cdot \frac{|\Gamma_\gamma / \Gamma_0 \cap \Gamma_\gamma|}{m(\gamma)} \cdot a_r(\varrho),$$

wo ϱ die ausgezeichnete Konjugationsklassen von Γ und γ ein vollständiges Repräsentantensystem für die in ϱ enthaltenen Γ_0 -Konjugationsklassen durchläuft. Offensichtlich hängen $e(\Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma))$ und $m(\gamma)$ nur von der Konjugationsklasse von γ ab. Aus § 13 (20) folgt ($r \geq 2$)

$$(24) \quad \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Gamma, r) = \sum_{\gamma} \frac{e(\Gamma_\gamma \backslash \text{Fix}(\gamma))}{m(\gamma)} \cdot a_r(\gamma),$$

wo γ jetzt ein vollständiges Repräsentantensystem für die ausgezeichneten Konjugationsklassen von Γ durchläuft.

§ 16. *Der Proportionalitätssatz [19] und die Langlandssche Formel.* Jedem beschränkten homogenen symmetrischen Gebiet B des $\mathbb{C}^n$ ist bekanntlich eine n -dimensionale homogene algebraische Mannigfaltigkeit B' in natürlicher Weise zugeordnet ([7], [16], [19]). B ist offene Teilmenge von B' und jeder Automorphismus von B kann zu einem Automorphismus von B' erweitert werden.

Wenn B die Hyperkugel

$$\{z \mid z \in \mathbb{C}^n \text{ und } |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$$

ist, dann ist B' der komplexe projektive Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ mit $B \subset \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Nun sei Γ eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von B mit kompaktem Quotientenbereich $\Gamma \backslash B$. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei γ' die Erweiterung auf B' . Ist $\text{Fix}(\gamma) \neq \emptyset$, dann haben γ, γ' endliche Ordnung. Es gilt

$$B' \supset \text{Fix}(\gamma')_0 \supset \text{Fix}(\gamma) = \text{Fix}(\gamma')_0 \cap B.$$

Hier ist $\text{Fix}(\gamma')_0$ diejenige Zusammenhangskomponente von $\text{Fix}(\gamma')$, welche B schneidet. $\text{Fix}(\gamma)$ ist ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet und $\text{Fix}(\gamma')$ die zugehörige homogene algebraische Mannigfaltigkeit (vgl. § 13).

Die Atiyah-Bottsche Zahl für $\text{Fix}(\gamma')_0$ ist wohldefiniert (§ 11 (14)). Wir wollen sie $v_r(\gamma')$ nennen. Das „Proportionalitätsprinzip“ von [19] in geeigneter verallgemeinerter Form (vgl. § 17) liefert

$$1 \quad a_r(\gamma) = \frac{v_r(\gamma')}{e(\text{Fix}(\gamma')_0)}.$$

Wir beachten, daß nach § 11 (14)

$$(25) \quad v_r(\gamma') = j_\gamma(x)^r P_\gamma(r) \quad (\text{für } j_\gamma \text{ siehe § 14}),$$

wo $x \in \text{Fix}(\gamma)$ und $j_\gamma(x)$ nicht von x abhängt und $P_\gamma(r)$ ein von γ abhängendes Polynom in r vom Grade $k = \dim \text{Fix}(\gamma)$ ist.

Damit ist bewiesen:

Satz Es sei B ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet und Γ eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von B mit kompaktem Quotientenbereich $\Gamma \backslash B$. Dann wird für $r \geq 2$ die Dimension des Vektor

raumes der automorphen Formen vom Gewicht r durch folgende Formel gegeben.

$$(26) \quad \dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Gamma, r) = \sum_{\gamma} \frac{e(\Gamma_{\gamma} \backslash \text{Fix}(\gamma))}{m(\gamma)} \cdot \frac{j_{\gamma}(x)^r P_{\gamma}(r)}{e(\text{Fix}(\gamma)_0)}$$

Hierbei durchläuft γ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von Γ , deren Elemente Fixpunkte in B haben. $j_{\gamma}(x)$ ist die Funktionaldeterminante von γ in irgendeinem $x \in \text{Fix}(\gamma)$, sie ist unabhängig von x . Das Polynom $P_{\gamma}(r)$ in r hat den Grad $k = \dim \text{Fix}(\gamma)$. Es wird vermöge (25) durch die Atiyah-Bottische Zahl $\nu_r(\gamma')$ für diejenige Fixkomponente $\text{Fix}(\gamma')_0$ von γ' (Erweiterung von γ auf die homogene algebraische Mannigfaltigkeit B') bestimmt, welche B schneidet. $e(\text{Fix}(\gamma')_0)$ ist die klassische Euler-Poincarésche Charakteristik. $e(\Gamma_{\gamma} \backslash \text{Fix}(\gamma))$ ist die virtuelle Euler-Poincarésche Charakteristik (= normiertes „Volumen“ gemäß § 15), wo Γ_{γ} = Zentralisator von γ in Γ . Schließlich ist $m(\gamma)$ die Anzahl der Elemente von Γ_{γ} , die auf $\text{Fix}(\gamma)$ trivial operieren.

Die Berechnung der $\nu_r(\gamma')$ kann wirklich durchgeführt werden und liefert genau die Langlandssche Formel ([23], p. 101, Formel (2)), die mit Hilfe der Theorie der Lieschen Algebren (Wurzeln usw.) ausgedrückt wird. Das können wir hier nicht durchführen. Jedoch liefert unser Beispiel von § 12 sofort den

Satz Es sei B die Hyperkugel

$$\{z \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$$

und Γ eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von B mit $\Gamma \backslash B$ kompakt. Dann ist für $r \geq 2$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Gamma, r) = \sum_{\gamma} \frac{e(\Gamma_{\gamma} \backslash \text{Fix}(\gamma))}{m(\gamma)} \cdot \frac{j_{\gamma}(x)^r P_{\gamma}(r)}{k+1},$$

wo $k = \dim \text{Fix}(\gamma)$ und $x \in \text{Fix}(\gamma)$. Hierbei durchläuft γ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Konjugationsklassen von Γ , deren Elemente Fixpunkte in B haben. Sind μ_i ($k+1 \leq i \leq n$) die Eigenwerte von γ (normal zu $\text{Fix}(\gamma)$), dann ist $P_{\gamma}(r)$ der Koeffizient von z^k in der formalen Potenzreihe

$$(1 - z)^{r(n+1)-1} \prod_{i=k+1}^n \frac{1}{1 - \mu_i + \mu_i z}.$$

Operiert Γ frei, dann ist für $r \geq 2$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(B, \Gamma, r) = \frac{e(\Gamma \backslash B)}{n+1} \cdot (-1)^n \cdot \binom{r(n+1)-1}{n}$$

§ 17. *Schlußbemerkungen.* Das vorliegende Manuskript ist direkt aus den Vortrag hervorgegangen und mußte nach dem Vortrag sehr schnell fertig gestellt werden. Das erklärt gewisse Unvollständigkeiten und die Tatsache daß die volle Identifizierung von § 16 (26) mit der Langlandsschen Formel ([23], p. 101, Formel (2)), sowie der von Langlands betrachtete allgemeiner Fall der automorphen Formen vom Typ σ und weitere mögliche Verallgemeinerungen (reelle symmetrische Räume) hier noch nicht dargestellt werden konnten. Die §§ 11–16 wurden ohnehin in dem Vortrag nur sehr andeutungsweise gebracht.

Auch die benötigte Version des „Proportionalitätssatzes“ und die genau Ausführung seiner Anwendung in § 16 müssen einer späteren gemeinsamen Arbeit mit Atiyah und Bott vorbehalten bleiben. Es möge nur folgende Satz formuliert werden:

Es sei B ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet, B' die zugehörige algebraische Mannigfaltigkeit und Γ_0 eine frei operierende diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von B mit kompaktem Quotientenbereich $\Gamma_0 \backslash B$. Für die beiden gleichdimensionalen kompakten Mannigfaltigkeiten $\Gamma_0 \backslash B$ und B' gibt einen natürlichen Ring-Homomorphismus ($\mathbb{R}$ -linear)

$$h: H^*(B', \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\Gamma_0 \backslash B, \mathbb{R}),$$

welcher injektiv ist.

LITERATUR

- [1] *Agranovic, M. S.*, Über den Index elliptischer Operatoren (russisch). Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. **142**, 983–985 (1962). Sov. Math. Dokl. **3**, 194–197 (1962).
- [2] *Atiyah, M. F.*, und *R. Bott*, The index problem for manifolds with boundary. Bombay Colloquium on Differential Analysis, 175–186 (1964).
- [3] *Atiyah, M. F.*, und *R. Bott*, Notes on the Lefschetz fixed point theorem for elliptic complexes, Harvard University 1964/65, nicht veröffentlicht.
- [4] *Atiyah, M. F.*, und *R. Bott*, A Lefschetz fixed point formula for elliptic differential operators, erscheint demnächst in Bull. Amer. Math. Soc.
- [5] *Atiyah, M. F.*, und *G. B. Segal*, Equivariant K -theory, Notes by R. L. E. Schwarzenberger, University of Warwick, Coventry, 1965.
- [6] *Atiyah, M. F.*, und *I. M. Singer*, The index of elliptic operators on compact manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 422–433 (1963).
- [7] *Borel, A.*, Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes. Bull. soc. math. France **80**, 167–182 (1952).
- [8] *Borel, A.*, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. Topology **2**, 111–122 (1963).
- [9] *Cartan, E.*, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, Abh. Math. Seminar Hamburg **11**, 116–162 (1935).
- [10] *Cartan, H.*, und *L. Schwarz*, Le théorème d'Atiyah-Singer. Séminaire E.N.S., 1963/64. Paris 1964.
- [10a] *Dold, A.*, Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts, Topology **4**, 1–8 (1965).
- [11] *Dombrowski, P.*, On the geometry of the tangent bundle. J. reine angew. Math. **210**, 73–88 (1962).
- [12] *Dynin, A. S.*, Singuläre Operatoren beliebiger Ordnung auf einer Mannigfaltigkeit (russisch), Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. **141**, 21–23 (1961). Sov. Math. Dokl. **2**, 1375–1377 (1961).
- [13] *Eichler, M.*, Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1963.
- [14] *Erwe, F.*, Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band. Bibliographisches Institut, Mannheim 1962.
- [15] *Gelfand, I. M.*, Über elliptische Gleichungen (russisch). Uspehi Math. Nauk. **15**, 3, 121–132 (1960). Russian Math. Surveys **15**, 3, 113–123 (1960).
- [16] *Helgason, S.*, Differential geometry and symmetric spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. XII. New York, Academic Press 1962.
- [17] *Hirzebruch, F.*, Some problems of differentiable and complex manifolds. Ann. of Math. **60**, 213–236 (1954).
- [18] *Hirzebruch, F.*, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956; Topological Methods in Algebraic Geometry, 3. Aufl., Springer Verlag 1966.
- [19] *Hirzebruch, F.*, Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch. Symp. Intern. Top. Alg. 1956, p. 129–144. Universidad de Mexico 1958.
- [20] *Hopf, H.*, Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. 1928; siehe Selecta Heinz Hopf, Springer Verlag, 1964.
- [21] *Kodaira, K.*, On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39**, 1268–1273 (1953).
- [22] *Lang, S.*, Introduction to differentiable manifolds. New York, Interscience 1962.

- [23] *Langlands, R. P.*, The dimension of spaces of holomorphic forms. Am. J. Math. **85**, 99–125 (1963).
- [24] *Lefschetz, S.*, Intersections and transformations of complexes and manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **28**, 1–49 (1926).
- [25] *Maak, W.*, Differential- und Integralrechnung, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1960.
- [26] *Palais, R. S.*, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, with contributions by *A. Borel*, *F. E. Browder*, and *R. Solovay*. Annals of Mathematics Studies 57, Princeton University Press 1965.
- [27] *Selberg, A.*, Automorphic functions and integral operators, Seminars on analytic functions, Vol. 2, p. 152–161. Institute for Advanced Study, Princeton, 1957.
- [28] *Volpert, A. I.*, Der Index von Systemen von zweidimensionalen Integralgleichungen (russisch). Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. **142**, 776–777 (1962). Sov. Math. Dokl. **3**, 154–155 (1962).
- [29] *Volpert, A. I.*, Elliptische Systeme auf der Sphäre und zweidimensionale singuläre Integralgleichungen (russisch). Math. Sbornik **59**, 195–214 (1962).
- [30] *Weierstraß, K.*, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten (Berlin, z. B. Wintersemester 1873/74). Siehe Mathematische Werke, 4. Band, Berlin, Mayer und Müller, 1902; Neuntes Kapitel.